1. kapitola

Teória množín I – množina, operácie nad množinami, množinová algebra, mohutnosť a enumerácia, karteziánsky súčin

1.1 Definícia množiny

Koncepcia množiny patrí medzi základné formálne prostriedky matematiky. Umožňuje formulovať prehľadným a jednotným spôsobom všetky oblasti matematiky prostredníctvom elementárnej štruktúry množiny a operáciami nad ňou. Teória množín vznikla koncom 19. storočia hlavne zásluhou nemeckého matematika Georga Cantora (1845 – 1918). Zásluhu na jej rozšírení má anglický logik a filozof Bertrand Russell (1872 – 1970), ktorý objavil vnútorné nekonzistentnosti jej intuitívnej formulácie, ktoré boli neskôr prekonané jej dôslednou axiomatickou výstavbou. V tejto kapitole budeme prezentovať pôvodnú intuitívnu (neaxiomatickú) výstavbu teórie množín.

Elementárnym pojmom teórie množín je ***element***, pod ktorým budeme rozumieť nejaký reálny alebo abstraktný objekt, pričom postulujeme, že objekty medzi sebou sú dobre odlíšiteľné.

Definícia 1.1. ***Množina je neusporiadaný súbor elementov***.

Ak sa nejaké dva elementy nachádzajú v tej istej množine, potom musia byť od seba odlíšiteľné; v množine sa neopakuje výskyt dvoch rovnakých (neodlíšiteľných) elementov. V definícii množiny bol použitý elementárny pojem „súbor“, ktorý nebudeme bližšie špecifikovať. Pozorný čitateľ môže namietať, že pojem „súbor“ je vlastne len iný názov pre množinu. Táto skutočnosť naznačuje „osud“ všetkých definícií, pomocou ktorých špecifikujeme nové pojmy prostredníctvom iných elementárnych a intuitívne zrozumiteľných pojmov. Ak by sme pristúpili aj k špecifikácii elementárnych pojmov vyskytujúcich sa v definícii, potom by sme dospeli k nekonečnej rekurzii (opakovaniu) v definíciách, ktoré by takto stratili praktický význam a stali by sa bezcennými formálnymi prostriedkami.

Označme množinu písmenom *A*, potom skutočnosť, že element *a* ***patrí*** do tejto množiny označíme výrazom $a \in A$. Tento výraz chápeme ako výrok, ktorý je pravdivý (nepravdivý), ak element *a* patrí (nepatrí, čo vyjadríme $a \notin A$) do množiny *A*.

Množinu môžeme špecifikovať dvoma rôznymi spôsobmi: ***Prvý*** spôsob určenia množiny je založený na ***vymenovaní*** všetkých elementov, ktoré do nej patria

$$A = \{a, b, ..., u\} \tag{1.1a}$$

Tento spôsob je vhodný len na špecifikácie množín, ktoré obsahujú konečný počet elementov. Ak by sme takýmto spôsobom chceli napríklad definovať množinu párnych prirodzených čísel, potom tento spôsob je nepoužiteľný, pretože párnych prirodzených čísel je nekonečne mnoho. ***Druhý*** spôsob špecifikácie množiny je založený na použití ***predikátu*** $P(x)$, ktorý určuje, či element $x \in U$ patrí do množiny *A* (predikát $P(x)$ je pravdivý) alebo nepatrí do množiny A (predikát $P(x)$ je nepravdivý)

$$A=\{x\in U;P(x)\} \tag{1.1b}$$

Tak napríklad, množina obsahujúca párne kladné celé čísla je definovaná takto

$$A=\{n\in U;P(n)\}$$

kde n sú celé kladné čísla z univerza $U=\{0,1,2,...\}$ a predikát $P(n)$ je špecifikovaný rovnosťou $P(n)=_{def}\exists k(n=2k)$, kde k je kladné celé číslo, alebo

$$P(n)=\begin{cases} pravda,1 & (n\ je\ párne\ číslo) \\ nepravda,0 & (n\ je\ nepárne\ číslo) \end{cases}$$

Uvedený druhý spôsob špecifikácie množiny môže byť jednoducho pretransformovaný na koncepciu ***charakteristických funkcií***. V tomto prístupe predikát $P(x)$ z (1.1b) je určený takto

$$P(x)=_{def}\left(\mu_A(x)=1\right) \tag{1.2}$$

alebo

$$\mu_A(x)=\begin{cases} 1 & (x\in A) \\ 0 & (x\notin A) \end{cases} \tag{1.3}$$

Pristúpme teraz k podrobnejšej diskusii špecifikácie množiny pomocou charakteristickej funkcie. Uvažujme ***univerzum*** *U*, nad ktorým sú definované všetky ostatné množiny.

Definícia 1.1. Každá množina A je pomocou charakteristickej funkcie vyjadrená takto

$$A=\{x\in U;\mu_A(x)=1\} \tag{1.4}$$

kde charakteristická funkcia $\mu_A(x)$ je zobrazenie

$$\mu_A:U\rightarrow\{0,1\} \tag{1.5}$$

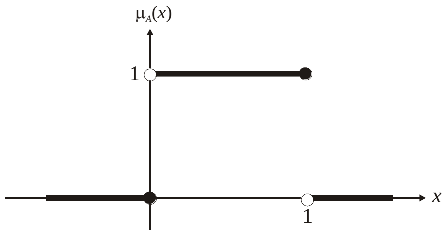
ktoré binárne ohodnocuje každý element x univerza U binárnym číslom $\mu_A(x)\in\{0,1\}$, ktoré vyhovuje vlastnosti (1.3).

Pomocou charakteristickej funkcie môžeme definovať aj dve špeciálne množiny: ***prázdnu množinu*** $\varnothing$, ktorá nemá žiadny element, $\varnothing=\{x;\mu_A(x)=0\}$, a ***univerzálnu množinu*** *U*, $U=\{x;\mu_A(x)=1\}$, ktorá je totožná s univerzom.

Príklad 1.1. Vyjadrite množinu – polootvorený interval $A=(0,1]$ pomocou charakteristickej funkcie. V tomto prípade univerzum U je totožné s množinou reálnych čísel R. Charakteristická funkcia $\mu_A(x)$ je definovaná takto

$$\mu_A(x)=\begin{cases} 1 & (\text{pre } 0<x\le 1) \\ 0 & (\text{ináč}) \end{cases}$$

Grafické znázornenie tejto charakteristickej funkcie ja na obr. 1.1.



Obrázok 1.1. Charakteristická funkcia množiny *A*, ktorá je určená ako polootvorený interval $A=(0,1]$.

Pomocou charakteristických funkcií môžeme definovať operácie nad množinami:

Definícia 1.3. Hovoríme, že množina $A=\{x\,;\mu_A(x)=1\}$ sa ***rovná*** množine $B=\{x\,;\mu_B(x)=1\}$, *A* = *B*, vtedy a len vtedy, ak tieto množiny sú definované nad rovnakým univerzom *U* a charakteristické funkcie oboch množín sú rovnaké

$$(A=B)=_{def}\ \forall(x\in U)\big(\mu_A(x)=\mu_B(x)\big) \tag{1.6a}$$

Alternatívna definícia vzťahu rovnosti medzi množinami *A* a *B* je

$$\begin{aligned}(A=B)&=_{def}\ \forall(x\in U)\big((x\in A)\equiv(x\in B)\big)\\&=_{def}\ \forall(x\in U)\big((x\in A\Rightarrow x\in B)\wedge(x\in B\Rightarrow x\in A)\big)\end{aligned} \tag{1.6b}$$

Definícia 1.4. Hovoríme, že množina $A=\{x\,;\mu_A(x)=1\}$ je podmnožinou množiny $B=\{x\,;\mu_B(x)=1\}$, *A* ⊆ *B*, vtedy a len vtedy, ak každý element z množiny *A* patrí aj do množiny *B*

$$A\subseteq B=_{def}\ \forall(x\in U)\big((\mu_A(x)=1)\Rightarrow(\mu_B(x)=1)\big) \tag{1.7a}$$

Alternatívna definícia podmnožiny je

$$A\subseteq B=_{def}\ \forall(x\in U)\big((x\in A)\Rightarrow(x\in B)\big)$$

V prípade, že *A* ≠ *B*, potom formula *A* ⊆ *B* sa prepíše do tvaru *A* ⊂ *B*. Hovoríme, že *A* je ***vlastnou podmnožinou*** *B* , ak *A* ⊂ *B* a A ≠ ∅. Rovnosť medzi množinami *A* = *B* platí vtedy a len vtedy, ak $(A\subseteq B)\wedge(B\subseteq A)$.

Definícia 1.5. Hovoríme, že množina $A\cup B$ je ***zjednotenie množín*** *A* a *B,* vtedy a len vtedy, ak

$$A\cup B=_{def}\ \{x;(x\in A)\vee(x\in B)\}=\{x;\mu_{A\cup B}(x)=1\} \tag{1.8a}$$

$$\mu_{A\cup B}(x)=max\{\mu_A(x),\mu_B(x)\} \tag{1.8b}$$

Definícia 1.6. Hovoríme, že množina $A\cap B$ je ***prienik množín*** *A* a *B,* vtedy a len vtedy, ak

$$A\cap B=_{def}\ \{x;(x\in A)\wedge(x\in B)\}=\{x;\mu_{A\cap B}(x)=1\} \tag{1.9a}$$

$$\mu_{A\cap B}(x)=min\{\mu_A(x),\mu_B(x)\} \tag{1.9b}$$

Definícia 1.7. Hovoríme, že množina $\overline{A}$ je ***doplnok*** množiny *A* (vzhľadom k univerzu *U*), vtedy a len vtedy, ak

$$\overline{A}=_{def}\ \{x;x\notin A\}=\{x;\mu_{\overline{A}}(x)=1\} \tag{1.10a}$$

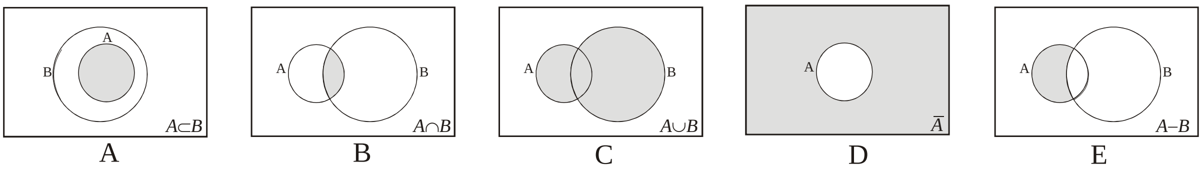
$$\mu_{\bar{A}}(x) = 1 - \mu_A(x) \tag{1.10b}$$

Definícia 1.8. Hovoríme, že množina $A - B$ (alebo $A \setminus B$) je ***rozdiel množín*** (***relatívny doplnok množín***) A a B, vtedy a len vtedy, ak

$$A - B =_{def} \{x; (x \in A) \wedge (x \notin B)\} = \{x; \mu_{A-B}(x) = 1\} \tag{1.11a}$$

$$\mu_{A-B}(x) = min\{\mu_A(x), 1 - \mu_B(x)\} \tag{1.11b}$$

Takto definované operácie nad množinou U sú znázornené pomocou Vennových[1] diagramov (pozri obr. 1.2), ktoré reprezentujú rozšírený spôsob vizualizácie množinových operácií a ich formúl.



Obrázok 1.1. Znázornenie základných operácií nad množinami pomocou Vennových diagramov. Na týchto diagramoch obdĺžniková oblasť znázorňuje univerzum U, kde množiny A a B sú podmnožiny univerza. Diagram A znázorňuje reláciu „podmnožina" $A \subset B$, keď množina – oblasť A celá leží v množine – oblasti B. Diagram B znázorňuje operáciu „prienik" $A \cap B$, kde vyšrafovaná oblasť reprezentuje prienik množín A a B. Porovnaním diagramov A a B zistíme, že ak $A \subset B$, potom $A \cap B = A$. Diagram C znázorňuje operáciu zjednotenia množín A a B, vyšrafovaná je oblasť, ktorá sa nachádza v množine A alebo v množine B. Diagram D znázorňuje operáciu doplnok množiny A vzhľadom k univerzu U. Diagram E znázorňuje rozdiel množín $A - B$, vyšrafovaná je oblasť, ktorá sa nachádza v A a súčasne sa nenachádza v B.

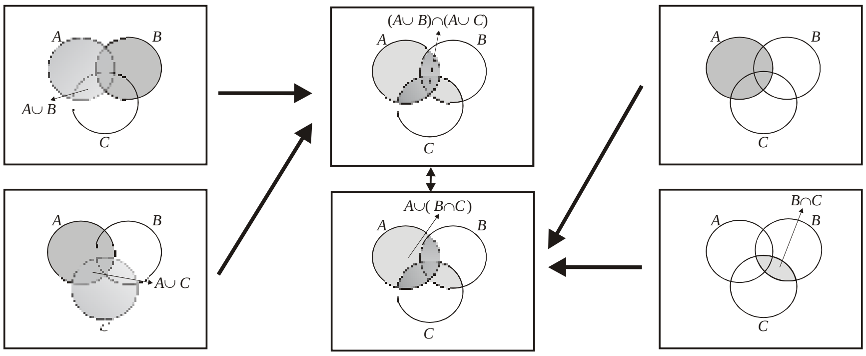
Tabuľka 1.1 obsahuje základné formule pre množinové operácie, ktoré tvoria tzv. ***algebru teórie množín***. Každá formula z tejto tabuľky má pomerne jednoduchú vizualizáciu pomocou Vennových diagramov, ktoré v mnohých textoch o teórii množín slúžia aj ako podklad pre dôkaz ich korektnosti, pozri obr. 1.3.

Tabuľka 1.1. Formule teórie množín

vlastnosť	formula teórie množín
komutatívnosť	$A \cap B = B \cap A$ $A \cup B = B \cup A$
asociatívnosť	$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
distributívnosť	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
De Morganove vzťahy	$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$ $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$
idempotentnosť	$A \cap A = A,\ A \cup A = A$
identita	$A \cap U = A,\ A \cup \varnothing = A$
absorpcia	$A \cap \varnothing = \varnothing,\ A \cup U = U$
involúcia	$\bar{\bar{A}} = A,$
zákon vylúčenia tretieho	$A \cup \bar{A} = U$

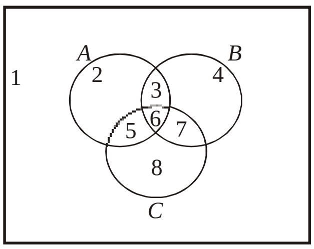
[1] John Venn (1834-1923) je anglicky matematik, ktorý sa zaslúžil o ďalší rozvoj Boolových algebraických snáh formalizovať výrokovú logiku.

zákon sporu	$A\cap\bar{A}=\emptyset$
rozdiel množín	$A-B=A\cap\bar{B}$
distributívne zákony pre rozdiel	$A\cap(B-C)=(A\cap B)-(\bar{A}\cup C)$ $A\cup(B-C)=(A\cup B)-(\bar{A}\cap C)$



Obrázok 1.3. Verifikácia korektnosti formuly $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$. Prostredný Vennov diagram je zostrojený dvoma rôznymi nezávislými spôsobmi, v oboch prípadoch dostávame ten istý výsledok.

Na obr. 1.3 je znázornená verifikácie formuly $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$ pomocou Vennových diagramov. Ľavá a pravá strana tejto formuly reprezentujú rôzne prístupy ku konštrukcii Vennovho diagramu, v oboch prípadoch dostávame ten istý výsledok, čiže verifikovaná formula je korektná. Tento postup môžeme „algebraizovať“ podobným štýlom, ako sa počítajú pravdivostné hodnoty formúl výrokovej logiky. Na obr. 1.4 je označených 8 oblasti v univerzu *U*, ktoré buď ležia alebo neležia v množinách *A, B* a *C*. Tak napr. oblasť 5 je taká, že existuje element, ktorý sa súčasne nachádza v množinách *A* a *C*, a nenachádza sa v množine *B*. Formula je korektná vtedy a len vtedy, ak pre každú oblasť obe strany formuly dávajú rovnaký výsledok, pozri tab. 1.2. V tejto tabuľke, každý riadok je priradený jednej z ôsmych oblastí na obr. 1.4. Binárne hodnoty v jednotlivých riadkoch reprezentujú skutočnosť, či pre danú oblasť existuje taký element, ktorý v oblasti špecifikujúcej daný stĺpec. Tak napríklad, ôsmy stĺpec v tabuľke 1.2 obsahuje binárne elementy, ktoré špecifikujú, či $A\cup B$ resp. $A\cup C$ obsahujú spoločný element. Pri vytváraní tabuľky platí princíp kompozicionality, t. j. ohodnotenie zložitejších výrazov je vytvárané pomocou ich jednoduchších zložiek.



Obrázok 1.4. Vyznačenie jednotlivých oblastí v množine univerza *U*. Oblasť 1 obsahuje elementy, ktoré nie sú obsiahnuté v množinách *A, B* a *C*. Oblasť 2 obsahuje elementy, ktoré sú obsiahnuté v množine A, ale nie sú obsiahnuté v množinách *B* a *C*. Podobným spôsobom môžu byť charakterizované ostatné oblasti 3, 4, …, 8.

Tabuľka 1.2. Tabuľková metóda pre verifikáciu formúl teórie množín

oblasť	A	B	C	$A\cup B$	$A\cup C$	$B\cap C$	$(A\cup B)\cap(A\cup C)$	$A\cup(B\cap C)$

1	0	0	0	0	0	0	0	0
2	1	0	0	1	1	0	1	1
3	1	1	0	1	1	0	1	1
4	0	1	0	1	0	0	0	0
5	1	0	1	1	1	0	1	1
6	1	1	1	1	1	1	1	1
7	0	1	1	1	1	1	1	1
8	0	0	1	0	1	0	0	0

Príklad 1.2. Pomocou tabuľkovej metódy verifikujte korektnosť De Morganových formúl $\overline{(A\cup B)}=\bar{A}\cap\bar{B}$ a $\overline{(A\cap B)}=\bar{A}\cup\bar{B}$.

A	B	$A\cup B$	$\bar{A}$	$\bar{B}$	$A\cap B$	$\overline{A\cup B}$	$\bar{A}\cap\bar{B}$	$\overline{A\cap B}$	$\bar{A}\cup\bar{B}$
0	0	0	1	1	0	1	1	1	1
0	1	1	1	0	0	0	0	1	1
1	0	1	0	1	0	0	0	1	1
1	1	1	0	0	1	0	0	0	0

Charakteristické funkcie môžu byť použité k dôkazu formúl teórie množín.

Príklad 1.3. Ako ilustračný príklad dokážeme De Morganovu formulu $\overline{(A\cup B)}=\bar{A}\cap\bar{B}$

$$\mu_{\overline{A\cup B}}(x)=1-\mu_{A\cup B}(x)=1-max\{\mu_A(x),\mu_B(x)\} \tag{1.12a}$$

$$\mu_{\bar{A}\cap\bar{B}}(x)=min\{1-\mu_A(x),1-\mu_B(x)\} \tag{1.12b}$$

Použitím algebraickej identity[2]

$$1-max\{a,b\}=min\{1-a,1-b\}$$

dokážeme, že formule (1.11a-b) sú totožné pre ľubovolné charakteristické funkcie, čiže platí

$$\forall(x\in U)\left(\mu_{\overline{A\cup B}}(x)=\mu_{\bar{A}\cap\bar{B}}(x)\right) \tag{1.13}$$

Použitím podmienky (1.6a) dostaneme, že množiny $\overline{(A\cup B)}$ a $\bar{A}\cap\bar{B}$ sa navzájom rovnajú.

Príklad 1.4. Dokážte formulu $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$.

$$\mu_{A\cup(B\cap C)}(x)=max\{\mu_A(x),\mu_{B\cap C}(x)\}=max\{\mu_A(x),min\{\mu_B(x),\mu_C(x)\}\}$$

$$\mu_{(A\cup B)\cap(A\cup C)}=min\{\mu_{A\cup B}(x),\mu_{A\cup C}(x)\}=min\left\{max\{\mu_A(x),\mu_B(x)\},max\{\mu_A(x),\mu_C(x)\}\right\}$$

Použitím algebraickej identity

$$max\{a,min\{b,c\}\}=min\left\{max\{a,b\},max\{a,c\}\right\}$$

dostaneme, že vyššie uvedené charakteristické funkcie sa rovnajú

$$\forall(x\in U)\left(\mu_{A\cup(B\cap C)}(x)=\mu_{(A\cup B)\cap(A\cup C)}\right)$$

čiže sa rovnajú aj množiny, ktoré určujú, $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$.

Príklad 1.5. Dokážte distributívne zákony pre rozdiel množín.

K dôkazu použijeme formulu z Tabuľky 1.1 pre rozdiel množín, $A-B=A\cap\bar{B}$. Pristúpime k dôkazu prvej formuly $A\cap(B-C)=(A\cap B)-(\bar{A}\cup C)$, upravíme jej ľavú a pravú stranu

[2] Ktorá sa jednoducho dokáže použitím metódy vymenovaním prípadov z kapitoly 1.4.

$$A \cap (B - C) = A \cap \left(B \cap \bar{C}\right) = A \cap B \cap \bar{C}$$

$$(A \cap B) - \left(\bar{A} \cup C\right) = (A \cap B) \cap \left(\overline{\bar{A} \cup C}\right) = (A \cap B) \cap \left(A \cap \bar{C}\right) = A \cap B \cap \bar{C}$$

Týmto sme dokázali, že ľavá a aj pravá strana sú si rovné, čiže platí prvý distribučný zákon pre rozdiel množín. Úplne analogickým spôsobom dokážeme aj platnosť druhej formuly $A \cup (B - C) = (A \cup B) - \left(\bar{A} \cap C\right)$, pomocou vzťahu $A - B = A \cap \bar{B}$ upravíme ľavú a pravú stranu

$$A \cup (B - C) = A \cup \left(B \cap \bar{C}\right) = (A \cup B) \cap \left(A \cup \bar{C}\right)$$

$$(A \cup B) - \left(\bar{A} \cap C\right) = (A \cup B) \cap \left(\overline{\bar{A} \cap C}\right) = (A \cup B) \cap \left(A \cup \bar{C}\right)$$

Podobne ako aj v predchádzajúcom dôkaze, ľavá a práva strana sú si rovné, čiže platí aj druhý distributívny zákon pre rozdiel množín.

Ak množina A je konečná (obsahuje konečný počet elementov), potom jej ***mohutnosť*** (***kardinalita***), označená $|A|$, je počet elementov, ktoré obsahuje. Ak množina obsahuje nekonečný počet elementov, potom jej mohutnosť je nekonečná, $|A| = \infty$.

Príklad 1.6. Aká je mohutnosť množín?

(a) $A = \{x; x \text{ } \textit{je celé číslo ohraničené } 1/8 < x < 17/2\}$, $|A| = 8$,

(b) $A = \left\{x; \sqrt{x} \text{ } \textit{je celé číslo}\right\} = \{0, 1, 4, 9, 16, ...\}$, $|A| = \infty$,

(c) $A = \left\{x; x^2 = 1 \textit{ alebo } 2x^2 = 1\right\} = \left\{1, -1, 1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}\right\}$, $|A| = 4$,

(d) $A = \{a, \{a, b\}, \{a, b, c\}\}$, $|A| = 3$,

(e) $A = \{a, \{a\}, \{\{a\}\}\}$, $|A| = 3$.

(f) $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $B = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, $|A - B| = 4$.

1.2 Enumerácia elementov v množinách

V rôznych aplikáciách teórie množín vystupuje do popredia problém enumerácie elementov danej množiny, čiže aká je mohutnosť danej množiny. Nech A a B sú disjunktné množiny (ich prienik je prázdna množina, $A \cap B = \emptyset$), potom mohutnosť ich zjednotenia je určená súčtom mohutností jednotlivých množín

$$|A \cup B| = |A| + |B| \tag{1.14a}$$

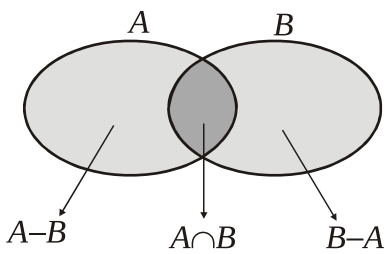
Tento výsledok môže byť jednoducho zovšeobecnený pomocou matematickej indukcie na mohutnosť zjednotenia n vzájomne disjunktných množín

$$|A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n| = |A_1| + |A_2| + ... + |A_n| \tag{1.14b}$$

Zovšeobecnenie formuly (1.14a) pre množiny, ktoré majú neprázdny prienik (nedisjunktné množiny) je špecifikované vetou

Veta 1.1. Mohutnosť množiny $A \cup B$ je určená formulou

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| \tag{1.15}$$



Obrázok 1.5. Rozklad množín *A* a *B* na tri disjunktné podmnožiny: *A–B*, *B–A* a *A*∩*B* .

Formulu (1.15) ľahko dokážeme pomocou rozkladu množín A a B na disjunktné podmnožiny, pozri obr. 1.5, potom použitím (1.14) dostaneme

$$|A\cup B|=|A-B|+|B-A|+|A\cap B|$$

Mohutnosť samotných množín A a B je určená takto

$$|A|=|A-B|+|A\cap B|$$

$$|B|=|B-A|+|A\cap B|$$

Kombináciou týchto troch formúl dostaneme vzťah (1.15).

Podobne, ako pre (1.14a) , formula (1.15) môže byť zovšeobecnená pre mohutnosť prieniku 3 množín

$$|A\cup B\cup C|=|A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|A\cap C|-|B\cap C|+|A\cap B\cap C| \tag{1.16}$$

Formulu (1.15) ľahko zovšeobecníme indukciou na

$$\begin{gathered}|A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_n|=\sum_{i=1}^{n}|A_i|-\sum_{\substack{i,j=1\\(i<j)}}^{n}|A_i\cap A_j|+\sum_{\substack{i,j,k=1\\(i<j<k)}}^{n}|A_i\cap A_j\cap A_k|+\ldots\\(-1)^{n+1}|A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_n|\end{gathered} \tag{1.17}$$

Príklad 1.7. Každý zo 100 študentov Fakulty informatiky UGBM študuje aspoň jeden z týchto odborov: matematika, informatika a ekonómia. Nech U je množina všetkých študentov FI UGBM, M je množina študentov matematiky, I je množina študentov informatiky a E je množina študentov ekonómie. Počty študentov sú určené tabuľkou:

študenti	symbol	počet
všetci	$\|U\|$	100
matematika	$\|M\|$	65
informatika	$\|I\|$	45
ekonómia	$\|E\|$	42
matematika a informatika	$\|M\cap I\|$	20
matematika a ekonómia	$\|M\cap E\|$	25
informatika a ekonómia	$\|I\cap E\|$	15

(i) Prvou úlohou je zistiť, koľko študentov súčasne študuje tri odbory, $|M\cap I\cap E|=?$ Použitím formuly (1.16) dostaneme

$$|U|=|M\cup I\cup E|=|M|+|I|+|E|-|M\cap I|-|M\cap E|-|I\cap E|+|M\cap I\cap E|$$

Táto formulu nám špecifikuje počet študentov, ktorí súčasne študujú matematiku, informatiku a ekonómiu

$$100 = 65 + 45 + 42 - 20 - 25 - 15 + |M \cap I \cap E|$$

potom $|M \cap I \cap E| = 8$.

(ii) Druhou úlohou je zistiť, koľko študentov matematiku a informatiku, ale nie ekonómiu, $|M \cap I \cap \bar{E}| = ?$ Mohutnosť množiny $M \cap I$ môžeme vyjadriť takto

$$|M \cap I| = |M \cap I \cap E| + |M \cap I \cap \bar{E}| \Rightarrow |M \cap I \cap \bar{E}| = -|M \cap I \cap E| + |M \cap I|$$

Použitím predchádzajúcich výsledkov dostaneme

$$|M \cap I \cap \bar{E}| = -|M \cap I \cap E| + |M \cap I| = 20 - 8 = 12$$

(iii) Poslednou treťou úlohou je zistiť, koľko študentov študuje len informatiku, ale nie matematiku a ekonómia, $|\bar{M} \cap I \cap \bar{E}| = ?$ Množinu I rozložíme na štyri disjunktné podmnožiny

$$|I| = |I \cap (M \cup \bar{M}) \cap (E \cup \bar{E})| =$$

$$|I \cap M \cap E| + |I \cap M \cap \bar{E}| + |I \cap \bar{M} \cap E| + |I \cap \bar{M} \cap \bar{E}|$$

Platia tieto identity

$$|I \cap \bar{M} \cap E| = |I \cap E| - |I \cap M \cap E|$$

$$|I \cap M \cap \bar{E}| = |I \cap M| - |I \cap M \cap E|$$

Dosadením týchto výsledkov do predošlého vzťahu dostaneme

$$|I| = -|I \cap M \cap E| + |I \cap E| + |I \cap M| + |I \cap \bar{M} \cap \bar{E}|$$

alebo

$$|I \cap \bar{M} \cap \bar{E}| = |I| + |I \cap M \cap E| - |I \cap E| - |I \cap M| = 45 + 8 - 15 - 20 = 18$$

Pojem množina môže byť zovšeobecnený tak, že elementy množiny môžu byť taktiež množiny (pozri príklad 1.6, zadanie d, e). Ak pristúpime na túto terminológiu, potom je korektný výrok „*množina všetkých možných množín, ktoré neobsahujú samé seba ako prvky*“. Označme túto množinu *M*, potom obsahuje také množiny *A* pre ktoré platí $A \notin A$, formálne $M = \{A; A \notin A\}$. Russell bol prvý, ktorý počiatkom 20. storočia poukázal na skutočnosť, že takto formulované výroky sú vnútorne rozporné. Položme si otázku, či táto množina obsahuje samu seba, $M \in M$?. Nech platí $M \in M$, potom podľa definície musí platiť $M \notin M$. Nech platí $M \notin M$, potom však z definície vyplýva taktiež $M \in M$. Tieto dva závery (implikácie) môžeme spojiť do jednej ekvivalencie, $(M \in M) \equiv (M \notin M)$, čo je evidentná kontradikcia. Russell navrhol prekonať túto vnútornú kontradikčnosť intuitívnej teórie množín tak, že pojem množina sa môže používať len na „prvej“ úrovni, t. j. keď elementami tejto množiny sú elementy, ktoré nemajú svoju štruktúru. Na druhej úrovni používal termín „rodina množín“, jej elementy sú množiny z prvej úrovni. Na ďalšej tretej úrovni môžeme hovoriť o triede množín, jej elementy sú rodiny množín z predchádzajúcej druhej úrovne. Týmto spôsobom výrok „množina, ktorá obsahuje všetky možné množiny“ je nekorektný, jeho správna forma je „rodina všetkých možných množín“, potom už máme (hlavne zásluhou vhodnej terminológie) odstránený zmienený paradox, ktorý svojho času zohral fundamentálnu úlohu v teórii množín. Iný spôsob prekonania paradoxov Russellovho typu je dôsledná axiomatizácia teórie množín.

Nech $I = \{1, 2, ..., n\}$ je množina indexov, ktorá obsahuje prvých *n* kladných celých čísel. Predpokladajme, že pre každý index $i \in I$ má definovanú množinu A_i, potom rodina množín je definovaná takto

$$\mathcal{A} = \{A_i; i \in I\} = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\} \tag{1.18}$$

Pre rodinu množín $\mathcal{A}$ môžeme definovať operáciu prieniku a zjednotenia jej množín

$$\bigcap_{i \in I} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n = \{x;\, x \in A_i,\, pre\ každé\ i \in I\} \tag{1.19a}$$

$$\bigcup_{i \in I} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \{x;\, x \in A_i,\, pre\ nejaké\ i \in U\} \tag{1.19b}$$

Príklad 1.8. Nech $I = R$, t. j. množina indexov je totožná s množinou reálnych čísel a nech

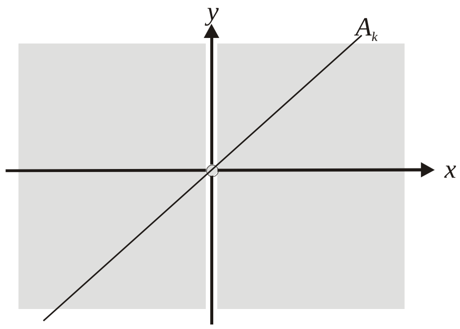
$$A_k = \{(x, kx);\, x \in R\}$$

kde $k \in R$. Geometrická interpretácia množiny A_k je priamka so smernicou k , ktorá prechádza stredom súradnicového systému, pozri obr. 1.6. To znamená, že prienik množín A_k je jednoprvková množina, ktorá obsahuje stred súradnicového systému

$$\bigcap_{k \in R} A_k = \{(0,0)\}$$

Zjednotenie týchto množín nám dáva celú rovinu bez osi o_y doplnenú o stred súradnicového systému (pozri obr. 1.6)

$$\bigcup_{k \in R} A_k = \{(x,y);\, x,y \in R \text{ a } x \neq 0\} \cup \{(0,0)\}$$



Obrázok 1.6. Vytieňovaná oblasť znázorňuje zjednotenie všetkých množín A_k , ktorá reprezentuje celú rovinu, z ktorej je odstránená os o_y, plus počiatok súradnicového systému (0,0). Množina A_k je reprezentovaná priamkou $y=k\,x$.

Definícia 1.9. Množina $\mathcal{P}(A)$ sa nazýva potenčná množina vzhľadom k množine A vtedy a len vtedy, ak obsahuje všetky možné podmnožiny množiny A

$$\mathcal{P}(A) = \{B;\, B \subseteq A\} \tag{1.20}$$

Potenčná množina obsahuje prázdnu množinu $\varnothing$ a taktiež aj množinu A, pretože obe tieto množiny sú podmnožinou množiny A. Vlastnosti potenčnej množiny sú určené vetou

Veta 1.2. Potenčná množina $\mathcal{P}(A)$ spĺňa tieto vlastnosti

$$(A \subseteq B) \equiv (\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)) \tag{1.21a}$$

$$\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B) \tag{1.21b}$$

$$\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cap B) \tag{1.21c}$$

Dokážeme ekvivalenciu (1.21a), musíme dokázať dve nezávisle implikácie $(A \subseteq B) \Rightarrow (\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B))$ a $(\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)) \Rightarrow (A \subseteq B)$.

(1) Predpokladajme, že $A \subseteq B$, nech $X \in \mathcal{P}(A)$, potom $X \subseteq A$. Pretože predpokladáme platnosť $A \subseteq B$, potom musí platiť aj $X \subseteq B$, teda aj $X \in \mathcal{P}(B)$. Týmto sme dokázali, že z predpokladu $A \subseteq B$ je odvoditeľná implikácia $(X \in \mathcal{P}(A)) \Rightarrow (X \in \mathcal{P}(B))$, z čoho priamo plynie $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$.

(2) Predpokladajme, že $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$, pretože $A \in \mathcal{P}(A)$, potom z predpokladu vyplýva, že musí platiť aj $A \in \mathcal{P}(B)$, čo je možné len vtedy, ak $A \subseteq B$.

Dôkaz vzťahu (1.21b) bude spočívať v dôkaze implikácie $X \in (\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)) \Rightarrow X \in \mathcal{P}(A \cup B)$. Predpokladajme $X \in \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$, potom

$$(X \in \mathcal{P}(A)) \vee (X \in \mathcal{P}(B)) \Rightarrow (X \subseteq A) \vee (X \subseteq B) \Rightarrow$$
$$X \subseteq (A \cup B) \Rightarrow X \in \mathcal{P}(A \cup B)$$

Týmto sme dokázali $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B)$.

Dôkaz formuly (1.21c) je podobný poslednému dôkazu.

Príklad 1.9. Niekoľko ilustračných príkladov potenčných množín

(a) $A = \emptyset$, $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset\}$,

(b) $A = \{a\}$, $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{a\}\}$,

(c) $A = \{a,b\}$, $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}$,

(d) $A = \{a,b,c\}$, $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{b,c\}, \{a,c\}, \{a,b,c\}\}$.

Príklad 1.10. Pri práci s potenčnými množinami musíme veľmi starostlivo rozlišovať medzi symbolmi $\in$ a $\subseteq$. Ak $a \in A$, potom $\{a\} \subseteq A$ alebo $\{a\} \in \mathcal{P}(A)$. Študujme množinu $A = \{1, 2, \{1\}\}$, potom $1 \in A$ a $\{1\} \subseteq A$, preto $\{1\} \in \mathcal{P}(A)$ a taktiež aj $\{\{1\}\} \in \mathcal{P}(A)$. Potenčná množina $\mathcal{P}(A)$ je

$$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{\{1\}\}, \{1,2\}, \{1,\{1\}\}, \{2,\{1\}\}, \{1,2,\{1\}\}\}$$

Pripomíname, že elementy 1, {1} {{1}} sú rôzne. Prvý element z tejto trojice je číslo, druhý element je množina s jedným elementom – číslom, a tretí element je množina s jedným elementom – množinou, ktorá obsahuje číslo 1.

Zostrojme postupnosť

$$1, \{1\}, \{\{1\}\}, \{\{\{1\}\}\}, \ldots$$

každý element (s výnimkou prvého elementu) tejto postupnosti je množina, ktorá obsahuje predchádzajúci element. Táto vlastnosť rekurentnosti môže byť použitá na definíciu n-tého člena postupnosti

$$X_1 = 1 \quad a \quad X_{n+1} = \{X_n\},\ pre\ n = 1,2,3,\ldots$$

Veta 1.3. Mohutnosť potenčnej množiny $\mathcal{P}(A)$ je určená jednoduchým vzťahom

$$|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|} \tag{1.22}$$

Tento výsledok pre mohutnosť potenčnej množiny sa ľahko dokáže pomocou nasledujúcej úvahy: Nech množina A obsahuje n elementov, $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, každá podmnožina $A' \subseteq A$

môže byť určená pomocou binárneho vektora dĺžky *n*, ak v *i*-tej polohe tohto vektora je 1 (0), potom $a_i \in A'$ ($a_i \notin A'$). To znamená, že každá podmnožina z potenčnej množiny $\mathcal{P}(A)$ je jednoznačne špecifikovaná binárnym vektorom dĺžky *n*. Pretože v každej polohe binárneho vektora sú prípustné len dve hodnoty (1 a 0), potom celkový počet rôznych binárnych vektorov dĺžky *n* je 2^n, toto číslo špecifikuje aj mohutnosť potenčnej množiny, $|\mathcal{P}(A)| = 2^n$, kde $|A| = n$. Tento jednoduchý výsledok viedol niektorých autorov k tomu, že potenčnú množinu označili symbolom 2^A, jej mohutnosť sa rovná $2^{|A|}$.

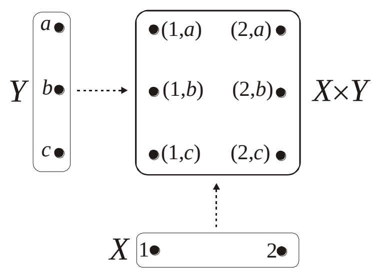
1.3 Karteziánsky súčin množín

V mnohých matematických disciplínach alebo v ich aplikáciách vystupujú usporiadané dvojice elementov. Tak napríklad, komplexné číslo môže byť charakterizované ako usporiadaná dvojica reálnych čísel, $z = (x,y)$, kde x (y) je reálna (komplexná) časť. Základná relácia pre usporiadané dvojice je rovnosť: $(x,y) = (x',y')$, ktorá platí vtedy a len vtedy, ak sú si rovné ich prvé a druhé časti, $x = x'$ a $y = y'$. Táto podmienka rovnosti platí aj pre komplexné čísla, ktoré sú si rovné vtedy a len vtedy, ak sa rovnajú ich reálne a imaginárne časti. Ďalším ilustračným príkladom použitia usporiadanej dvojice v matematike je špecifikácia bodu ležiaceho v rovine, ktorý je taktiež plne určený usporiadanou dvojicou (x,y) svojich súradníc. Dva body (dve usporiadané dvojice) $A=(x,y)$ a $B=(x',y')$ sú rovné vtedy a len vtedy, ak sú rovné ich súradnice, $x = x'$ a $y = y'$.

Definícia 1.10. Množina $X \times Y$ sa nazýva ***karteziánsky súčin***[3] dvoch množín X a Y vtedy a len vtedy, ak

$$X \times Y = \{(x,y);\, x \in X \text{ a } y \in Y\} \tag{1.23}$$

V prípade, že $X = Y$, potom $X \times X = X^2$. Poznamenajme, ak aspoň jedna z množín X alebo Y je prázdna množina, potom aj karteziánsky súčin $X \times Y$ je prázdny. Ak množiny X a Y sú obe neprázdne, potom $X \times Y = Y \times X$ vtedy a len vtedy, ak $X = Y$ (táto vlastnosť je priamym dôsledkom podmienky rovnosti, $(x,y) = (x',y')$, medzi dvoma usporiadanými dvojicami).



Obrázok 1.7. Znázornenie karteziánskeho súčinu pomocou Vennových diagramov.

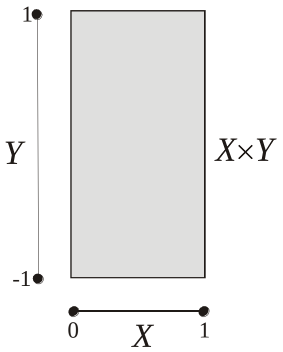
Príklad 1.11. Nech $X = \{1,2\}$ a $Y = \{a,b,c\}$, potom

---

[3] Pomenovanie je po francúzskom matematikovi a filozofovi René Descartesovi (1596 – 1650), ktorý sa pokladá za zakladateľa analytickej geometrie. Je tvorcom koncepcie ortogonálneho súradnicového systému, v ktorom je bod charakterizovaný usporiadanou dvojicou súradníc – reálnych čísel. Táto „matematizácia“ geometrie sa pokladá za jeden z najväčších úspechov matematiky 17. storočia, ktorý umožnil, okrem iného, aj Leibnizovi zaviesť pojem derivácie funkcie ako smernicu dotyčnice ku grafu funkcie.

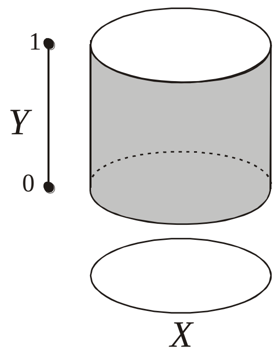
$$X \times Y = \{(1,a),(1,b),(1,c),(2,a),(2,b),(2,c)\}$$
reprezentácia tohto súčinu pomocou Vennovho diagramu je znázornená na obr. 1.7.

Príklad 1.12. Nech $X = [0,1]$ a $Y = [-1,1]$ sú uzavreté intervaly reálnych čísel, karteziánsky súčin týchto dvoch intervalov poskytuje obdĺžnikovú oblasť reálnych čísel, pozri obr. 1.8.



Obrázok 1.8. Znázornenie karteziánskeho súčinu dvoch úsečiek *X* a *Y*, výsledná oblasť je obdĺžnik.

Príklad 1.13. Nech $X = \{(x,y);\, x^2 + y^2 = 1\}$ je kružnica o polomere 1 so stredom v centre súradnicového systému a $Y = [0,1]$ je jednotková úsečka, karteziánsky súčin týchto dvoch oblastí produkuje povrch valca dĺžky 1 a s polomerom 1, pozri obr. 1.9.



Obrázok 1.9. Znázornenie karteziánskeho súčinu kružnice *X* a úsečky *Y*, výsledná oblasť je valcová plocha.

Koncepcia usporiadanej dvojice môže byť zovšeobecnená na usporiadanú *n*-ticu, pomocou karteziánskeho súčinu *n* množín. Hovoríme, že dve *n*-tice $(x_1, x_2, ..., x_n)$ a $(x'_1, x'_2, ..., x'_n)$ sa rovnajú vtedy a len vtedy, ak sú rovné ich zložky, $x_1 = x'_1$, $x_2 = x'_2$, ..., $x_n = x'_n$.

Definícia 1.11. Množina $X_1 \times X_2 \times ... \times X_n$ sa nazýva karteziánsky súčin *n* množín X_1, X_2, ..., X_n vtedy a len vtedy, ak
$$X_1 \times X_2 \times ... \times X_n = \{(x_1, x_2, ..., x_n);\, x_1 \in X_1, x_2 \in X_2, ..., x_n \in X_n\} \tag{1.24a}$$

Ak všetky množiny z karteziánskeho súčinu sa rovnajú množine X, potom výraz $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$ je zjednodušený na X^n. Karteziánsky súčin môžeme taktiež vyjadriť symbolicky takto

$$X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n = \bigtimes_{i=1}^{n} X_i \tag{1.24b}$$

Príklad 1.14. Nech $A = \{1,2\}$, $B = \{a,b\}$ a $C = \{\alpha,\beta\}$, potom karteziánsky súčin týchto množín má tvar

$$A \times B \times C = \{(1,a,\alpha),(1,a,\beta),(1,b,\alpha),(1,b,\beta),(2,a,\alpha),(2,a,\beta),(2,b,\alpha),(2,b,\beta)\}$$

Príklad 1.15. Nech $X_1 = X_2 = \ldots = X_n = R$, kde R je množina reálnych čísel. Potom R^n je množina obsahujúca n-tice reálnych čísel

$$R^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n);\ x_1, x_2, \ldots, x_n \in R\}$$

a môže byť interpretovaná ako ***n-rozmerný lineárny priestor***.

Veta 1.4. Mohutnosť karteziánskeho súčinu $X \times Y$ dvoch množín X a Y s konečnou mohutnosťou, $|X| = m$ a $|Y| = n$, sa rovná súčinu mohutností jej zložiek

$$|X \times Y| = |X| \cdot |Y| = m \cdot n \tag{1.25a}$$

Tento výsledok môže byť jednoducho zovšeobecnený indukciou na n-násobný karteziánsky súčin

$$|X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n| = |X_1| \cdot |X_2| \cdot \ldots \cdot |X_n| = m_1 \cdot m_2 \cdot \ldots \cdot m_n \tag{1.25b}$$

kde m_i je mohutnosť množiny X_i.

Veta 1.5. Karteziánsky súčin množiny A s prienikom alebo zjednotením dvoch množín X a Y vyhovuje podmienkam distributívnosti

$$A \times (X \cap Y) = (A \times X) \cap (A \times Y) \tag{1.26a}$$

$$(X \cap Y) \times A = (X \times A) \cap (Y \times A) \tag{1.26b}$$

$$A \times (X \cup Y) = (A \times X) \cup (A \times Y) \tag{1.26c}$$

$$(X \cup Y) \times A = (X \times A) \cup (Y \times A) \tag{1.26d}$$

Dokážeme prvú rovnosť (1.25a), ostatné sa môžu dokázať analogickým spôsobom. Nech $(a,x) \in A \times (X \cap Y)$, potom $a \in A$ a $x \in (X \cap Y)$. Z posledného výrazu vyplýva, že x sa súčasne vyskytuje v X a taktiež aj v Y. Potom $(a,x) \in A \times X$ a taktiež aj $(a,x) \in A \times Y$, čiže $(a,x) \in (A \times X) \cap (A \times Y)$, čo bolo potrebné dokázať.

Príklad 1.16. Nech $A = \{a,b,c\}$, $X = \{x,y,z\}$ a $Y = \{y,z,t\}$.

$$A\times(X\cap Y)=\{a,b,c\}\times(\{x,y,z\}\cap\{y,z,t\})=\{a,b,c\}\times\{y,z\}$$
$$=\{(a,y),(b,y),(c,y),(a,z),(b,z),(c,z)\}$$
$$(A\times X)\cap(A\times Y)=(\{a,b,c\}\times\{x,y,z\})\cap(\{a,b,c\}\times\{y,z,t\})$$
$$=\{(a,x),(a,y),(a,z),(b,x),(b,y),(b,z),(c,x),(c,y),(c,z)\}\cap$$
$$\{(a,y),(a,z),(a,t),(b,y),(b,z),(b,t),(c,y),(c,z),(c,t)\}$$
$$=\{(a,y),(b,y),(c,y),(a,z),(b,z),(c,z)\}$$

Ak porovnáme pravé strany obidvoch výrazov, dostaneme, že ľavé strany sú si rovné, t. j. platí (1.26a). Podobným spôsobom môžeme verifikovať formule (1.26b) a (1.27a-b).

Veta 1.6. Pre ľubovolné tri množiny *A*, *B* a *X* platí implikácia

$$(A\subseteq B)\Rightarrow((A\times X)\subseteq(B\times X)) \qquad (1.27a)$$

Ak *X* je neprázdna množina, potom

$$((A\times X)\subseteq(B\times X))\Rightarrow(A\subseteq B) \qquad (1.27b)$$

Cvičenia

Cvičenie 1.1. Ktoré elementy patria do množiny:

(a) $\{x;(x\in\mathbb{R})\wedge(x^2=1)\}$, (kde $\mathbb{R}$ je množina reálnych čísel)

(b) $\{x;(x\in\mathbb{R})\wedge(x^2-3x+2=01)\}$,

(c) $\{x;(x\in\mathbb{N})\wedge(x<12)\}$, (kde $\mathbb{N}$ je množina nezáporných celých čísel)

(d) $\{x;(x\in\mathbb{N})\wedge(x^2<100)\}$,

(e) $\{x;(x\in\mathbb{N})\wedge(x^2=2)\}$.

Cvičenie 1.2. Vyjadrite tieto množiny pomocou predikátu (pozri (1.1b)):

(a) $A=\{0,3,6,9,12\}$,

(b) $A=\{-3,-2,-1,0,1,2,3\}$,

(c) $A=\{m,n,o,p\}$.

Cvičenie 1.3. Zistite, či množiny z každej dvojice sú navzájom rovné:

(a) $A=\{1,2,2,3,3,3,4,4,4,4\}$, $B=\{1,2,3,4\}$,

(b) $A=\{\{1\}\}$, $B=\{1,\{1\}\}$,

(c) $A=\emptyset$, $B=\{\emptyset\}$,

Cvičenie 1.4. Nech $A=\{2,4,6\}$, $B=\{2,6\}$, $C=\{4,6\}$, $D=\{4,6,8\}$. Zistite, ktoré množiny sú podmnožiny ktorých množín.

Cvičenie 1.5. Pre každú množinu *A* určite, či platí $2\in A$:

(a) $A=\{x\in\mathbb{R}; x<2\}$;

(b) $A=\{x\in\mathbb{R}; \exists(n\in\mathbb{N})(x=n^2)\}$

(c) $A=\{2,\{2\}\}$;

(d) $A=\{\{2\},\{\{2\}\}\}$,

(e) $A=\{\{2\},\{2,\{2\}\}\}$.

Cvičenie 1.6. Pre každý príklad z cvičenia 1.5 rozhodnite, čí element {2} je elementom množiny *A*.

Cvičenie 1.7. Rozhodnite, či výroky sú pravdivé alebo nepravdivé:
(a) $0\in\varnothing$,
(b) $\varnothing\in\{0\}$,
(c) $\{0\}\subset\varnothing$,
(d) $\varnothing\subset\{0\}$,
(e) $\{0\}\in\{0\}$,
(f) $\{0\}\subset\{0\}$,
(g) $\{0\}\subseteq\{0\}$.

Cvičenie 1.8. Rozhodnite, či výroky sú pravdivé alebo nepravdivé:
(a) $\varnothing\in\{\varnothing\}$,
(b) $\varnothing\in\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$,
(c) $\{\varnothing\}\in\{\varnothing\}$,
(d) $\{\varnothing\}\in\{\{\varnothing\}\}$,
(e) $\{\varnothing\}\subset\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$,
(f) $\{\{\varnothing\}\}\subset\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$.

Cvičenie 1.9. Nech $A\subseteq B$ a $B\subseteq C$, dokážte $A\subseteq C$.

Cvičenie 1.10. Nájdite také dve množiny *A* a *B*, aby platilo $A\in B$ a $A\subseteq B$.

Cvičenie 1.11. Aká je mohutnosť týchto množín:
(a) $\{a\}$,
(b) $\{\{a\}\}$,
(c) $\{a,\{a\}\}$,
(d) $\{a,\{a\},\{a,\{a\}\}\}$.

Cvičenie 1.11. Aká je mohutnosť týchto množín:
(a) $\varnothing$,
(b) $\{\varnothing\}$,

(c) $\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$,

(d) $\{\varnothing,\{\varnothing\},\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\}$.

Cvičenie 1.13. Zostrojte potenčnú množinu $\mathcal{P}(A)$ pre

(a) $A=\{a\}$,

(b) $A=\{a,b\}$,

(c) $A=\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$.

Cvičenie 1.14. Dokážte alebo vyvráťte implikáciu $(\mathcal{P}(A)=\mathcal{P}(B))\Rightarrow(A=B)$.

Cvičenie 1.15. Určite, ktorá z množín je potenčná množina
(a) $\varnothing$,
(b) $\{\varnothing,\{a\}\}$,
(c) $\{\varnothing,\{a\},\{\varnothing,a\}\}$,
(d) $\{\varnothing,\{a\},\{b\},\{a,b\}\}$.

Cvičenie 1.16. Nech $A=\{a,b,c,d\}$, $B=\{x,y\}$, zostrojte
(a) $A\times B$,
(b) $B\times A$.

Cvičenie 1.17. Aký význam má karteziánsky súčin $A\times B$, kde *A* je množina prednášok, ktoré poskytuje Ústav aplikovanej informatiky a *B* je množina pedagógov Fakulty informatiky?

Cvičenie 1.18. Aký je význam karteziánskeho súčinu $A\times B\times C$, kde *A* je množina všetkých leteckých spoločností, *B* a *C* sú množiny letísk na svete.

Cvičenie 1.19. Nech A je množina študentov FIIT, ktorí sú z Bratislavy a *B* je množina študentov FIIT, ktorí jazdia na fakultu autom. Popíšte študentov, ktorí patria do množiny
(a) $A\cap B$,
(b) $A\cup B$,
(c) $A-B$,
(d) $B-A$.

Cvičenie 1.20. Nech *A* je množina prvákov na našej fakulte a *B* je množina študentov navštevujúcich diskrétnu matematiku. Vyjadrite pomocou množín *A* a *B* tvrdenia:
(a) Množina prvákov, ktorí navštevujú prednášku z diskrétnej matematiky.
(b) Množina prvákov, ktorí nenavštevujú prednášku z diskrétnej matematiky.
(c) Množina študentov, ktorý sú buď prváci alebo navštevujú prednášku z diskrétnej matematiky.
(d) Množina študentov, ktorí nie sú prváci alebo nenavštevujú prednášku z diskrétnej matematiky.

Cvičenie 1.21. Nech *A* a *B* sú množiny, dokážte

(a) $(A\cap B)\subseteq A$,

(b) $(A \cap B) \subseteq B$,

(c) $A \subseteq (A \cup B)$,

(d) $B \subseteq (A \cup B)$,

(e) $A - B \subseteq A$,

(f) $A \cap (B - A) = \varnothing$.

Cvičenie 1.22. Nech *A*, *B* a *C* sú množiny, dokážte $(A - B) - C = (A - C) - (B - C)$.

Cvičenie 1.23. Čo môžeme povedať o množinách *A* a *B*, ak platí
(a) $A \cup B = A$,
(b) $A \cap B = A$,
(c) $A - B = A$,
(d) $A \cap B = B \cap A$,
(e) $A - B = B - A$.

Cvičenie 1.24. Nech *A*, *B* a *C* sú množiny, zistite, či sú pravdivé implikácie:
(a) $(A \cup C = B \cup C) \Rightarrow (A = B)$,

(b) $(A \cap C = B \cap C) \Rightarrow (A = B)$.

Cvičenie 1.25. Nech *A* a *B* sú množiny, dokážte vlastnosť $(A \subseteq B) \Rightarrow (\overline{B} \subseteq \overline{A})$.

Cvičenie 1.26. Nech $A_i = \{1,2,...,i\}$, pre *i*=1, 2, ..., *n*. Nájdite

(a) $A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n$,

(b) $A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n$.

Cvičenie 1.27. Nech A_i je množina bitových reťazcov, ktorých dĺžka nie je väčšia ako *i*, pre *i*=1, 2, ..., *n*. Nájdite
(a) $A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n$,
(b) $A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n$.