

2. prednáška

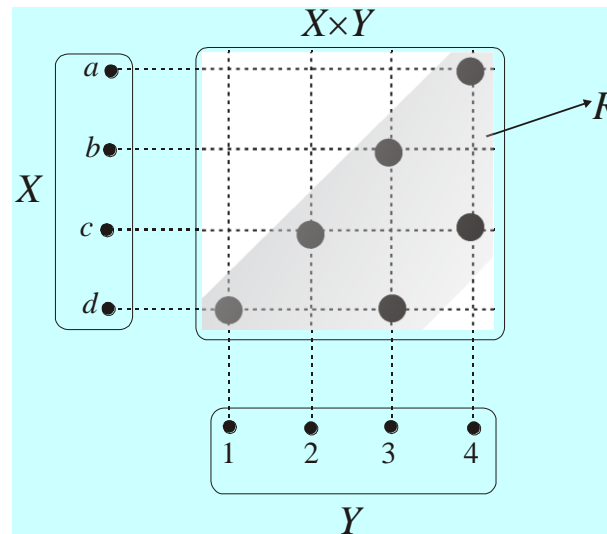
Teória množín II

- **relácie**
 - operácie nad reláciami
 - rovnosť
 - usporiadanosť
- **funkcie**
 - zložená funkcia
 - inverzná funkcia.

Relácie

Definícia. Nech X a Y sú dve množiny, *relácia* R je definovaná podmnožina karteziánskeho súčinu týchto množín

$$R \subseteq X \times Y$$



Znázornenie relácie R ako podmnožiny karteziánskeho súčinu (vytieňovaná oblasť) dvoch množín X a Y , $R = \{(d,1), (c,2), (b,3), (d,3), (a,4), (c,4)\}$.

Relácia R môže byť alternatívne zadaná pomocou charakteristickej funkcie

$$R = \{(x, y); \mu_R(x, y) = 1\}$$

$$\mu_R(x, y) = \begin{cases} 1 & (ak (x, y) \in R) \\ 0 & (ak (x, y) \notin R) \end{cases}$$

Hovoríme o *binárnej relácii*, každý element $(x, y) \in R$ je ohodnotený binárnym číslom $\mu_R(x, y) \in \{0, 1\}$.

Definícia 3.2. *Inverzná relácia* R^{-1} (k relácii $R \subseteq X \times Y$) je určená pomocou usporiadaných dvojíc $(y, x) \in X \times Y$, ktorých inverzia patrí do relácie $(x, y) \in R$

$$R^{-1} = \{(y, x); (x, y) \in R\}$$

Nech $P, Q \subseteq X \times Y$, ktoré sú špecifikované pomocou charakteristických funkcií

$$P = \{(x, y); \mu_P(x, y) = 1\} \quad \text{a} \quad Q = \{(x, y); \mu_Q(x, y) = 1\}$$

Definícia. Relácia $R = P \cup Q$ sa nazýva *zjednotenie relácií* P a Q vtedy a len vtedy, ak platí

$$P \cup Q = \{(x, y); \mu_{P \cup Q}(x, y) = 1\}$$

$$\mu_{P \cup Q}(x, y) = \max\{\mu_P(x, y), \mu_Q(x, y)\}$$

Relácia $R = P \cap Q$ sa nazýva *prienik relácií* P a Q vtedy a len vtedy, ak platí

$$P \cap Q = \{(x, y); \mu_{P \cap Q}(x, y) = 1\}$$

$$\mu_{P \cap Q}(x, y) = \min\{\mu_P(x, y), \mu_Q(x, y)\}$$

Relácia $R = \bar{P}$ sa nazýva *doplnok relácie* P vtedy a len vtedy, ak

$$\bar{P} = \{(x, y); \mu_{\bar{P}}(x, y) = 1\}$$

$$\mu_{\bar{P}}(x, y) = 1 - \mu_P(x, y)$$

Príklad

Nech $X = \{1, 2, 3\}$ a $Y = \{p, q\}$, relácie P a Q majú tvar

$$P = \{(1, q), (2, p), (3, q)\} \text{ a } Q = \{(1, q), (2, p), (3, p)\}$$

Zjednotenie a prienik týchto relácií sú

$$P \cup Q = \{(1, q), (2, p), (3, p), (3, q)\} \text{ a } P \cap Q = \{(1, q), (2, p)\}$$

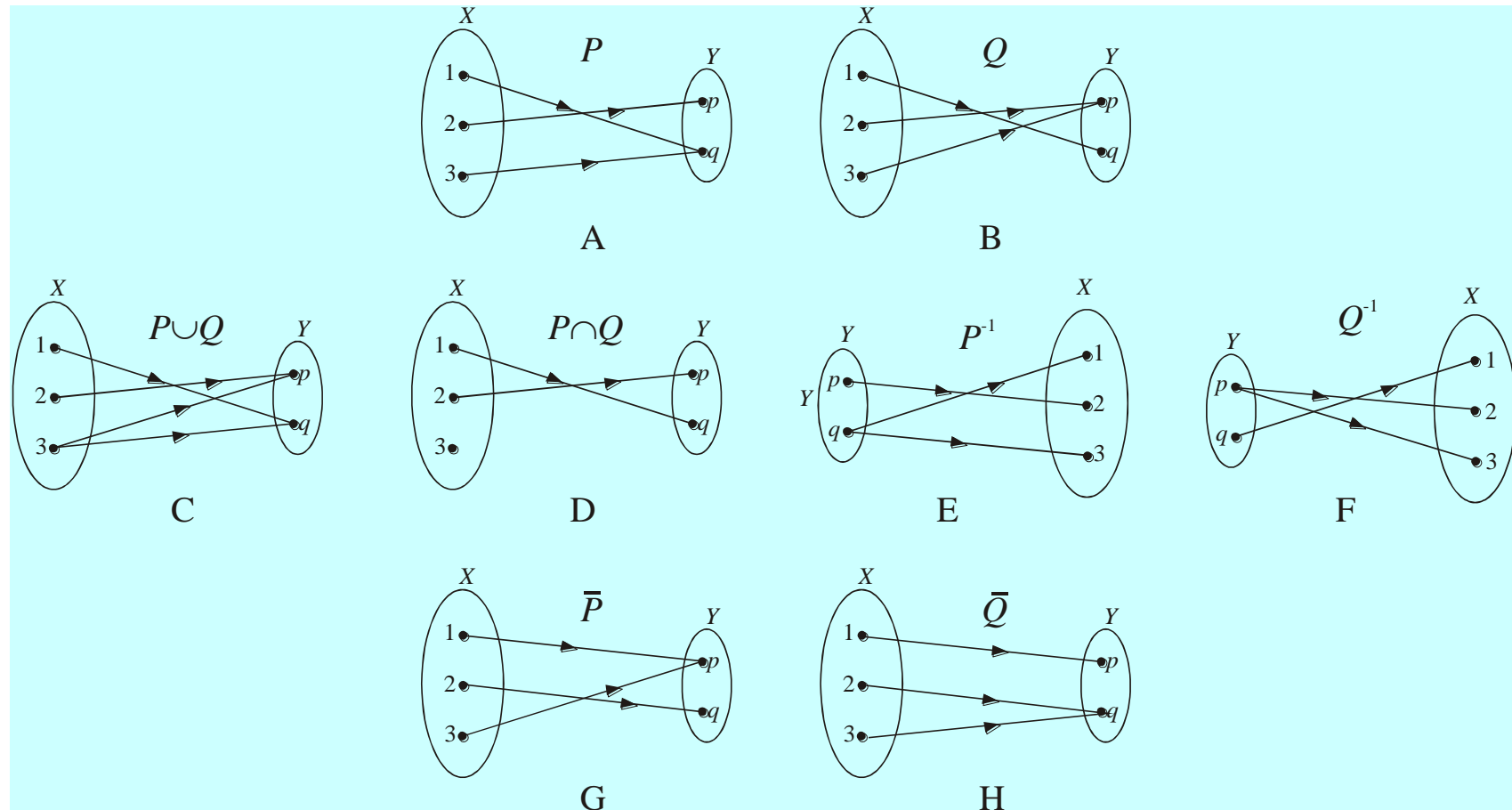
Inverzné relácie sú špecifikované

$$P^{-1} = \{(q, 1), (p, 2), (q, 3)\} \text{ a } Q^{-1} = \{(q, 1), (p, 2), (p, 3)\}$$

Doplnky k reláciám sú

$$\bar{P} = \{(1, p), (2, q), (3, p)\} \text{ a } \bar{Q} = \{(1, p), (2, q), (3, q)\}$$

Grafická reprezentácia relácií a operácií nad reláciami



Maticová reprezentácia relácie

Nech $X = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ a $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ sú dve množiny s mohutnosťami $|X| = m$ resp. $|Y| = n$. Relácia R špecifikovaná nad týmito množinami má tvar

$$R = \{(x_i, y_j); \mu_R(x_i, y_j) = 1\}$$

Definícia. Matica A reprezentuje reláciu R má m riadkov a n stĺpcov, jej maticové elementy sú špecifikované formulou

$$A_{ij} = \mu_R(x_i, y_j) = \begin{cases} 1 & (pre(x_i, y_j) \in R) \\ 0 & (pre(x_i, y_j) \notin R) \end{cases}$$

Príklad

Maticová reprezentácia relácií P a Q z predchádzajúceho príkladu má tvar

$$P = \{(1, q), (2, p), (3, q)\} \subseteq X \times Y \quad \text{a} \quad Q = \{(1, q), (2, p), (3, p)\} \subseteq X \times Y$$

$$\mathbf{A}_P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Kompozícia relácií

Definícia. Kompozícia dvoch relácií $P = \{(x, y); \mu_P(x, y) = 1\} \subseteq X \times Y$ a $Q = \{(y, z); \mu_Q(y, z) = 1\} \subseteq Y \times Z$, označená $R = P \circ Q = \{(x, z); \mu_R(x, z) = 1\}$, je definovaná pomocou charakteristickej funkcie

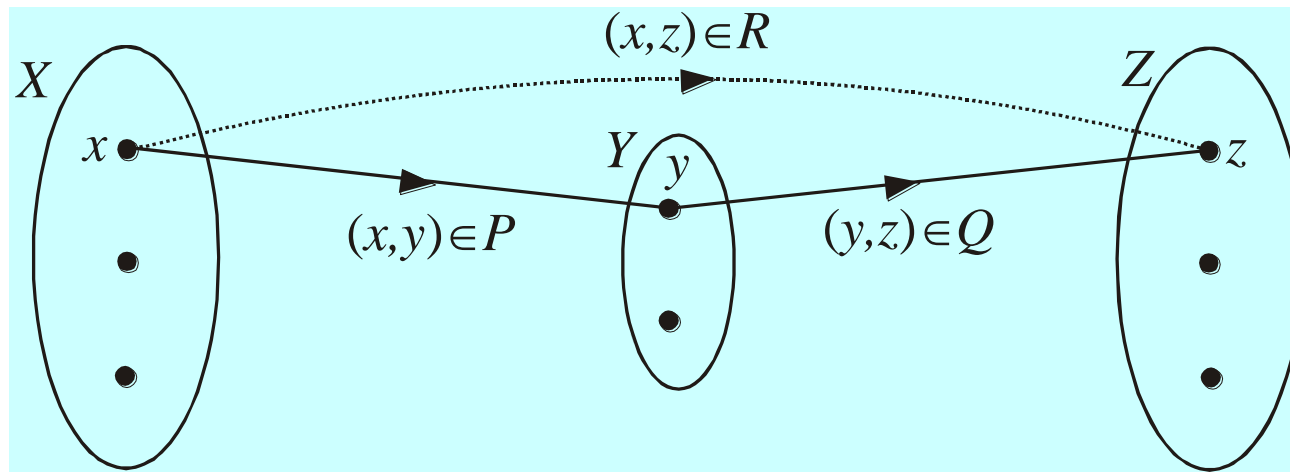
$$\mu_R(x, z) = \max_y \min \{ \mu_P(x, y), \mu_Q(y, z) \}$$

Alternatívne vyjadrenie kompozície dvoch relácií P a Q

$$R = P \circ Q = \{(x, z); x \in X \wedge z \in Z \wedge \exists y \in Y : (x, y) \in P \wedge (y, z) \in Q\}$$

V kompozícii R dva elementy $x \in X$ a $z \in Z$ tvoria usporiadanú dvojicu $(x, z) \in R$ vtedy a len vtedy, ak existuje taký „medzielement“ $y \in Y$, pre ktorý platí, že $(x, y) \in P$ a $(y, z) \in Q$.

Znázornenie kompozície dvoch relácií P a Q , výsledná relácia R obsahuje dvojicu (x,z) vtedy a len vtedy, ak existuje taký element $y \in Y$, že platí $(x,y) \in P$ a $(y,z) \in Q$.



Veta 3.1. Nech P , Q a R sú relácie definované nad takými množinami, aby nasledujúce operácie boli prípustné, potom platí

$$(P \circ Q)^{-1} = Q^{-1} \circ P^{-1}$$

$$(P \circ Q) \circ R = P \circ (Q \circ R)$$

$$P \circ (Q \cup R) = (P \circ Q) \cup (P \circ R)$$

$$(Q \cup R) \circ P = (Q \circ P) \cup (R \circ P)$$

$$P \circ (Q \cap R) = (P \circ Q) \cap (P \circ R)$$

$$(Q \cap R) \circ P = (Q \circ P) \cap (R \circ P)$$

Príklad

$$X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}, Y = \{y_1, y_2, y_3\}, Z = \{z_1, z_2, z_3\}$$

$$P \subseteq X \times Y, Q \subseteq Y \times Z$$

$$A_P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, A_Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Potom relácie P a Q majú tvar

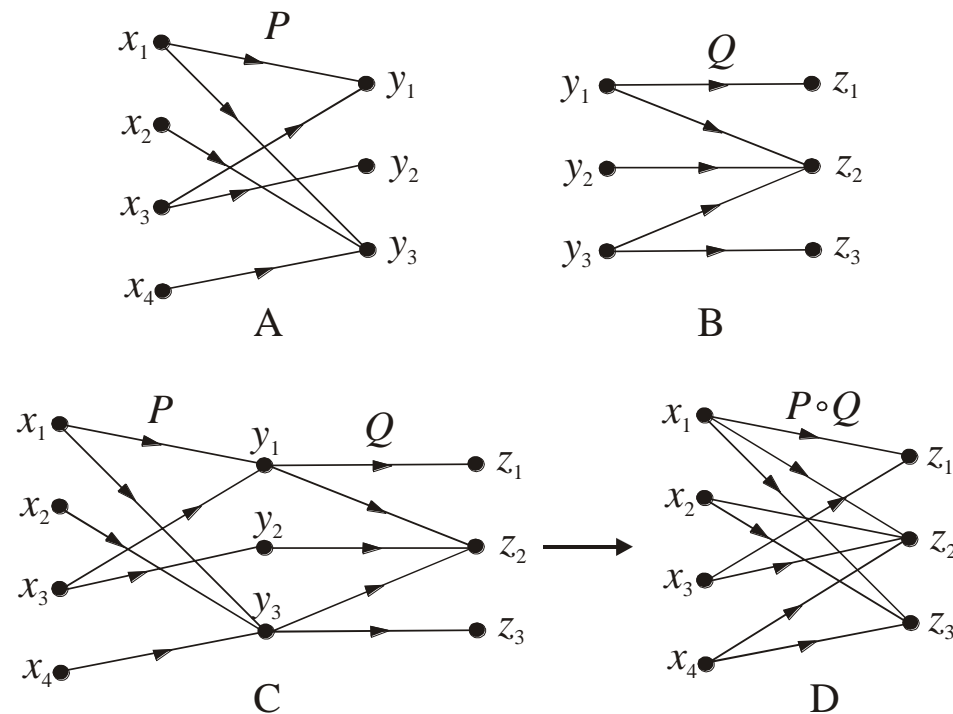
$$P = \{(x_1, y_1), (x_1, y_3), (x_2, y_3), (x_3, y_1), (x_3, y_2), (x_4, y_3)\}$$

$$Q = \{(y_1, z_1), (y_1, z_2), (y_2, z_2), (y_3, z_2), (y_3, z_3)\}$$

Kompozícia týchto relácií má tvar

$$P \circ Q = \{(x_1, z_1), (x_1, z_2), (x_1, z_3), (x_2, z_2), (x_2, z_3), (x_3, z_1), (x_3, z_2), (x_4, z_2), (x_4, z_3)\}$$

Grafická interpretácia týchto relácií je znázornená na obrázku



Vlastnosti relácií

V tomto odseku budeme študovať *relácie* $P \subseteq X \times X$, ktoré sú definované ako podmnožina karteziánskeho súčinu $X \times X$.

Definícia 3.6. Diagonálna relácia sa nazýva:

- (1) *reflexívna*, $\forall (x \in X)((x, x) \in R)$,
- (2) *symetrická*, $\forall (x, y \in X)((x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \in R)$,
- (3) *antisymetrická*, $\forall (x, y \in X)((x, y) \in R \wedge (y, x) \in R \Rightarrow x = y)$,
- (4) *tranzitívna*, $\forall (x, y, z \in X)((x, y) \in R \wedge (y, z) \in R \Rightarrow (x, z) \in R)$.

Poznámka. Pre antisymetrickú reláciu platí, že ak elementy $x \neq y$, potom platí implikácia: $(x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \notin R$. Dôsledkom tejto vlastnosti je, že ak $(x, y), (y, x) \in R$ pre $x \neq y$, potom relácia R nie je antisymetrická.

Príklad

Nech $X = \mathbb{R}$ je množina reálnych čísel a diagonálna relácia $P \subseteq X \times X$ má interpretáciu

$$((x, y) \in P) \equiv (x \leq y)$$

Takto definovaná relácia P vyhovuje týmto podmienkam:

- (a) relácia P je reflexívna, pre každé reálne číslo $x \in X$ platí $x \leq x$, t. j.
 $(x, x) \in P$,
- (b) relácie P nie je symetrická, pretože pre $x \leq y$ neimplikuje $y \leq x$,
- (c) relácia P je antisymetrická, z platnosti $x \leq y$ a $y \leq x$ plynie $x = y$,
a naopak,
- (d) relácia P je tranzitívna, z platnosti $x \leq y$ a $y \leq z$ plynie $x \leq z$.

Príklad

Nech $X = \{a, b, c, d\}$, diagonálne relácia $P \subseteq X \times X$ je špecifikovaná množinou

$$P = \{(a, a), (a, b), (a, c), (b, a), (b, c), (b, d), (d, d)\}$$

Táto relácia nespĺňa žiadnu vlastnosť z definície 3.6:

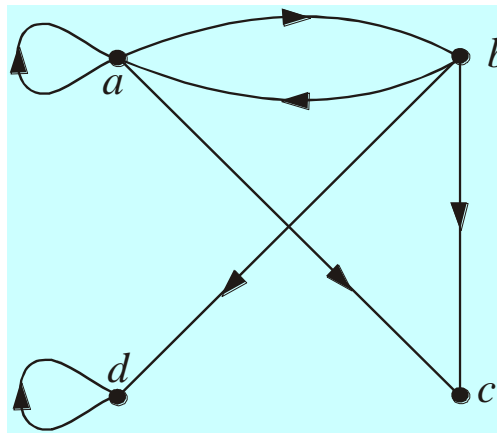
- (a) relácia P nie je reflexívna, $(b, b) \notin P$,
- (b) relácia P nie je symetrická, implikácia $(a, c) \in P \Rightarrow (c, a) \in P$ nie je pravdivá,
- (c) relácia P nie je antisymetrická, implikácia $(a, b), (b, a) \in P \Rightarrow (a, a) \in P$ nie je pravdivá,
- (d) relácia P nie je tranzitívna, implikácia $(a, b), (b, d) \in P \Rightarrow (a, d) \in P$ nie je pravdivá.

Interpretácia relácie pomocou orientovaného grafu

Relácia $P \subseteq X \times X$ má diagramatickú interpretáciu pomocou orientovaného grafu, V tomto prípade elementy množiny X sú vrcholy a usporiadané dvojice $(x, y) \in P$ sú orientované hrany, ktoré začínajú v x a končia v y . Vlastnosti diagonálnych relácií majú potom jednoduchú interpretáciu.

Nech $X = \{a, b, c, d\}$, diagonálne relácia $P \subseteq X \times X$ je špecifikovaná množinou

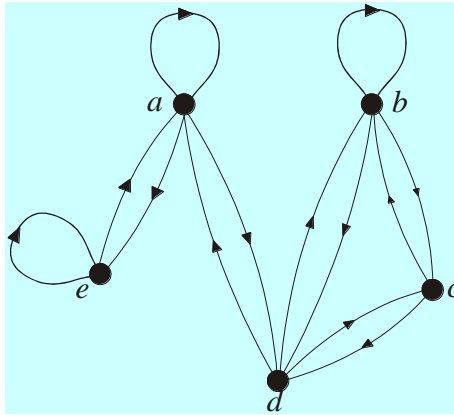
$$P = \{(a, a), (a, b), (a, c), (b, a), (b, c), (b, d), (d, d)\}$$



- (a) Relácia P je *reflexívna*, potom každý vrchol $x \in X$ má slučku – orientovanú hranu, ktorá začína a končí v tom istom vrchole.
- (b) Relácia P je *symetrická*, ak vrcholy $x, y \in X$ sú spojené hranou $(x, y) \in P$, potom existuje aj opačná hrana $(y, x) \in P$. V tomto prípade symetrickej relácie, jej grafická interpretácia obsahuje hrany medzi vrcholmi x a y vždy po dvojiciach, t. j. existencia hrany (x, y) implikuje existenciu hrany (y, x) , a naopak.
- (c) Relácia P je *antisymetrická*, medzi dvoma rôznymi vrcholmi $x \neq y$ nemôže existovať dvojica hrán (x, y) a (y, x) . V prípade, že by existovala, potom z podmienky antisymetričnosti vyplýva, že $x = y$, čo je v spore s pôvodným predpokladom.
- (d) Relácia P je *tranzitívna*, z existencie hrán (x, y) a (y, z) , ktoré majú spoločný vrchol y a $x \neq z$, vyplýva existencia hrany (x, z)

Príklad

Nech $X = \{a, b, c, d, e\}$, diagonálna relácia definovaná nad touto množinou je určená grafom



- (1) relácia nie je reflexívna, potrebné slučky neexistujú na vrchoch c a d ,
- (2) relácia je symetrická, ak medzi vrcholmi x a y existuje hrana (x,y) , potom existuje aj opačná hrana (y,x) ,
- (3) relácia nie je antisymetrická, z existencie dvojíc opačne orientovaných hrán na rôznych vrchoch, nevyplýva rovnosť týchto dvoch vrcholov.
- (4) relácia nie je tranzitívna, pretože existencia hrán (e,a) a (a,d) neimplikuje existenciu hrany (e,d) .

Relácia ekvivalentnosti

Definícia. Relácia $P \subseteq X \times X$ sa nazýva *relácia ekvivalentnosti* vtedy a len vtedy, ak je reflexívna, symetrická a tranzitívna.

Reláciu ekvivalentnosti P budeme označovať symbolom ' \sim ', t. j.

$$\forall (x, y \in X) ((x \sim y) =_{def} (x, y) \in P)$$

Pomocou relácie ekvivalentnosti môžeme množinu X rozdeliť na dve disjunktívne podmnožiny $X_1, X_2 \subset X$, kde $X = X_1 \cup X_2$ a $X_1 \cap X_2 = \emptyset$

$$\begin{aligned}x, y \in X_1 &\Rightarrow x \sim y \\x, y \in X_2 &\Rightarrow x \sim y \\(x \in X_1) \wedge (y \in X_2) &\Rightarrow (x \not\sim y)\end{aligned}$$

Príklad

Nech $X = \mathbb{R}$ je množina reálnych čísel, relácia $P \subseteq X \times X$ je definovaná takto:

$$((x, y) \in P) \equiv (x^2 = y^2)$$

- (1) Relácia P je reflexívna, pretože $x^2 = x^2$, pre každé $x \in \mathbb{R}$,
- (2) relácia P symetrická, pretože $x^2 = y^2$ implikuje $y^2 = x^2$,
- (3) relácia P je tranzitívna, pretože $x^2 = y^2$ a $y^2 = z^2$ implikuje $x^2 = z^2$.

Z tohto vyplýva, že P je relácia ekvivalentnosti.

Definícia. Nech P je relácia ekvivalentnosti nad množinou X a nech $x \in X$. Trieda ekvivalentnosti $[x]$, priradená elementu x , je množina všetkých možných elementov X , ktoré sú ekvivalentné danému elementu x

$$[x] = \{y; x \sim y\}$$

Veta. Nech $P \subseteq X \times X$ je relácia ekvivalentnosti a nech $x, y \in X$. Potom podmienka $[x] = [y]$ je splnená vtedy a len vtedy, ak $x \sim y$.

Veta. Nech $P \subseteq X \times X$ je relácia ekvivalentnosti, potom množina X má disjunktný rozklad pomocou všetkých rôznych tried ekvivalentnosti

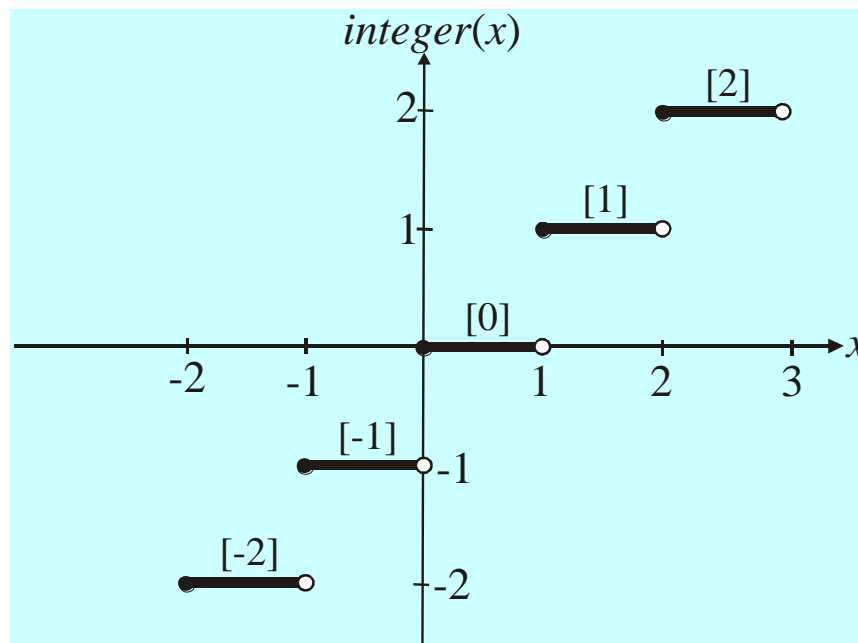
$$X = [x] \cup [y] \cup \dots \cup [z]$$

Príklad

Nech $X = \mathbb{R}$ je množina reálnych čísel, relácia $P \subseteq X \times X$ je definovaná

$$((x, y) \in P) \equiv (\text{integer}(x) = \text{integer}(y))$$

kde funkcia $\text{integer}(x)$ je definovaná ako maximálne celé číslo, ktoré je menšie alebo rovné reálnemu číslu x



$$\mathbb{R} = \bigcup_i [i] = \dots [-2] \cup [-1] \cup [0] \cup [1] \cup [2] \dots$$

Relácia čiastočného usporiadania

Pre mnohé množiny je možné definovať reláciu usporiadania jej elementov. Tak napríklad, množina reálnych čísel \mathbb{R} majú prirodzené usporiadanie svojich elementov pomocou relácie ' \leq ' (pozri príklad 3.4). Táto relácia je reflexívna, antisymetrická a tranzitívna.

Definícia. Relácia $P \subseteq X \times X$ sa nazýva *čiastočné usporiadanie* vtedy a len vtedy, ak je reflexívna, antisymetrická a tranzitívna. Množina X spolu s touto reláciou sa nazýva *čiastočne usporiadaná množina (poset)*.

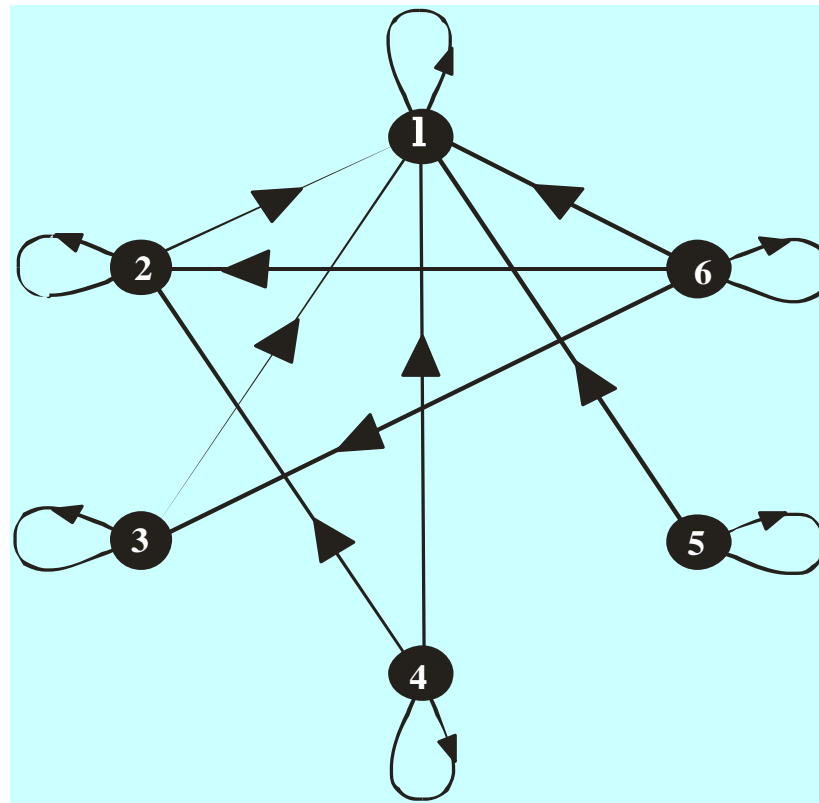
Príklad

(1) Nech $F = \mathcal{P}(A)$ je potenčná množina vzhľadom k množine A . Pomocou množinovej relácie ' \subseteq ' môžeme nad touto množinou F definovať reláciu P tak, že $((X, Y) \in P) =_{def} (X \subseteq Y)$. Ľahko sa presvedčíme, že táto relácia je čiastočne usporiadanie, je reflexívna, antisymetrická a tranzitívna.

(2) Nech $X = \mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$ je množina prirodzených čísel. Definujme nad touto množinou reláciu $P \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ pomocou pojmu deliteľnosti; $((m, n) \in P) =_{def} (m \text{ je deliteľné } n)$. Tak napríklad, pre $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ relácia P obsahuje dvojice

$$P = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6), (2,1), (3,1), (4,1), (4,2), (5,1), (6,1), (6,2), (6,3)\}$$

Táto relácia je čiastočné usporiadanie, pretože je reflexívna, antisymetrická a tranzitívna.



Maximálny a minimálny element

Definícia. Nech $P \subseteq X \times X$ je čiastočné usporiadanie. *Maximálny element* (ak existuje) $x_{max} \in X$ je určený podmienkou

$$\forall (x \in X) ((x_{max}, x) \in P \Rightarrow (x_{max} = x))$$

Minimálny element (ak existuje) $x_{min} \in X$ je určený podmienkou

$$\forall (x \in X) ((x, x_{min}) \in P \Rightarrow (x_{min} = x))$$

Táto definícia maximálneho elementu $x_{max} \in X$ je založená na podmienke, že neexistuje taký element $x \in X$, ktorý by bol „väčší“ ako element x_{max} . Podobne, pre minimálny element $x_{min} \in X$ neexistuje taký element $x \in X$, ktorý by bol menší ako x_{min} .

Príklad

Študujme množinu $X = \{1,2,3\}$, jej potenčná množina $\mathcal{P}(X)$ obsahuje všetky možné podmnožiny X

$$\mathcal{P}(X) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$$

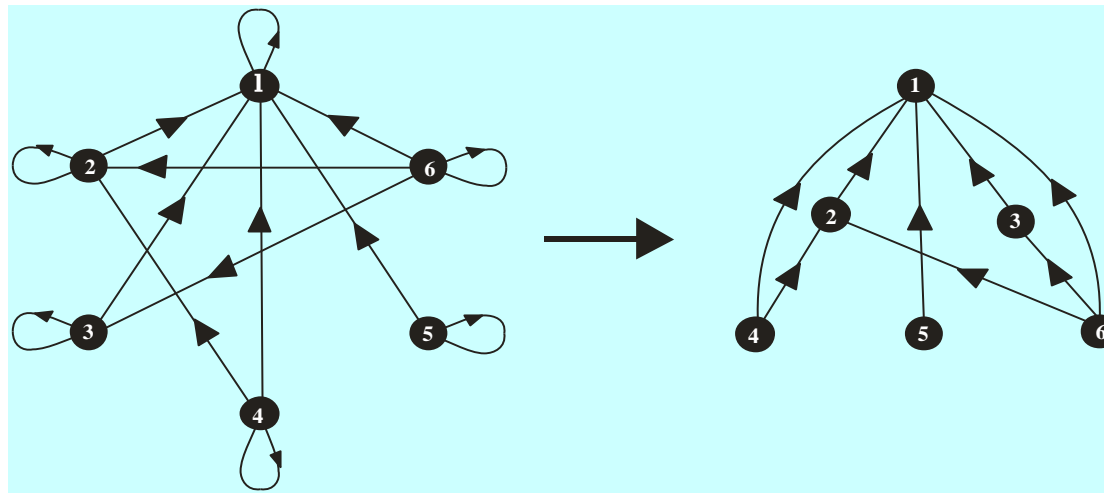
Čiastočne usporiadanie nad touto potenčnou množinou je relácia ' \subseteq ', potom maximálny (minimálny) element je $\{1,2,3\}$ (\emptyset).

Príklad

Nech pre $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ relácia P „deliteľnosti“ obsahuje dvojice $((m, n) \in P) \equiv (m \text{ je deliteľné } n)$, potom

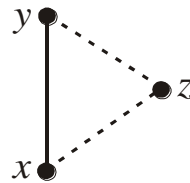
$$P = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6), (2,1), (3,1), (4,1), (4,2), (5,1), (6,1), (6,2), (6,3)\}$$

Táto relácia je čiastočné usporiadanie, maximálny prvok je 1 a minimálne prvky sú 4, 5 a 6.



Hasseho diagramy

Nech P je čiastočne usporiadaná množina s reláciou $P \subseteq X \times X$. Hovoríme, že element y je pokrytý elementom x vtedy, ak $(x, y) \in P$ a neexistuje taký element z , pre ktorý súčasne platí $(x, z) \in P$ a $(z, y) \in P$



Hasseho diagram relácie čiastočného usporiadania $P \subseteq X \times X$ obsahuje vrcholy, ktoré sú stotožnené s elementmi z X ; pričom dva vrcholy $x, y \in X$ sú spojené hranou $(x, y) \in P$ vtedy a len vtedy, ak element y pokrýva element x .

Poznámka: Hasseho diagram relácie čiastočného usporiadanie *neobsahuje hrany, ktoré sú dôsledkom tranzitívnosti relácie.*

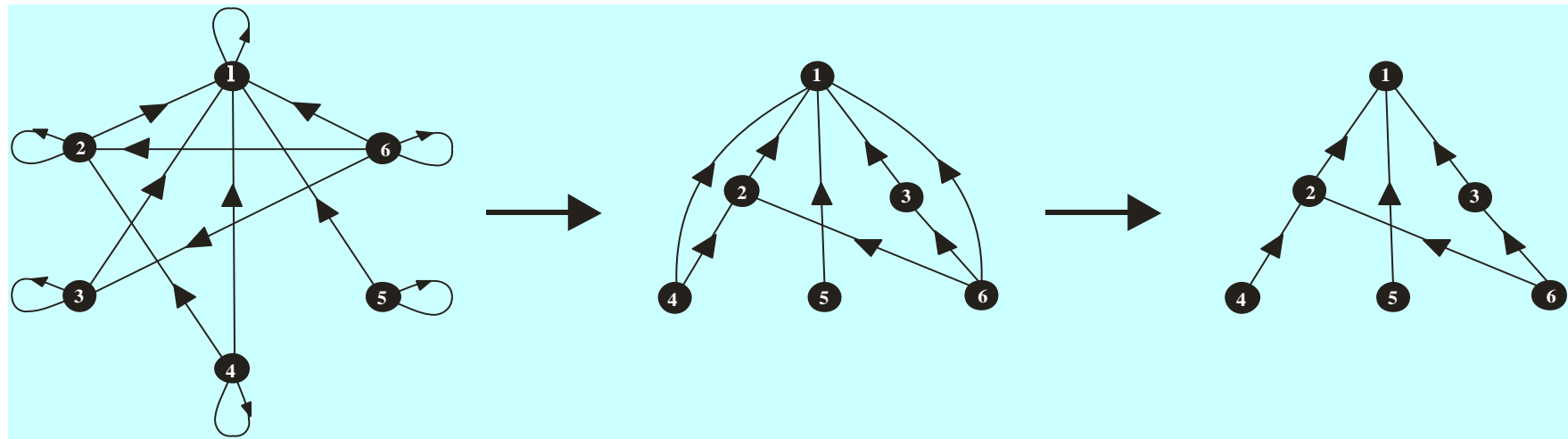
Príklad

Nakreslite Hasseho diagram relácie čiastočného usporiadania P „deliteľnosti“
 $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, relácia obsahuje dvojice

$$((m, n) \in P) \equiv (m \text{ je deliteľné } n)$$

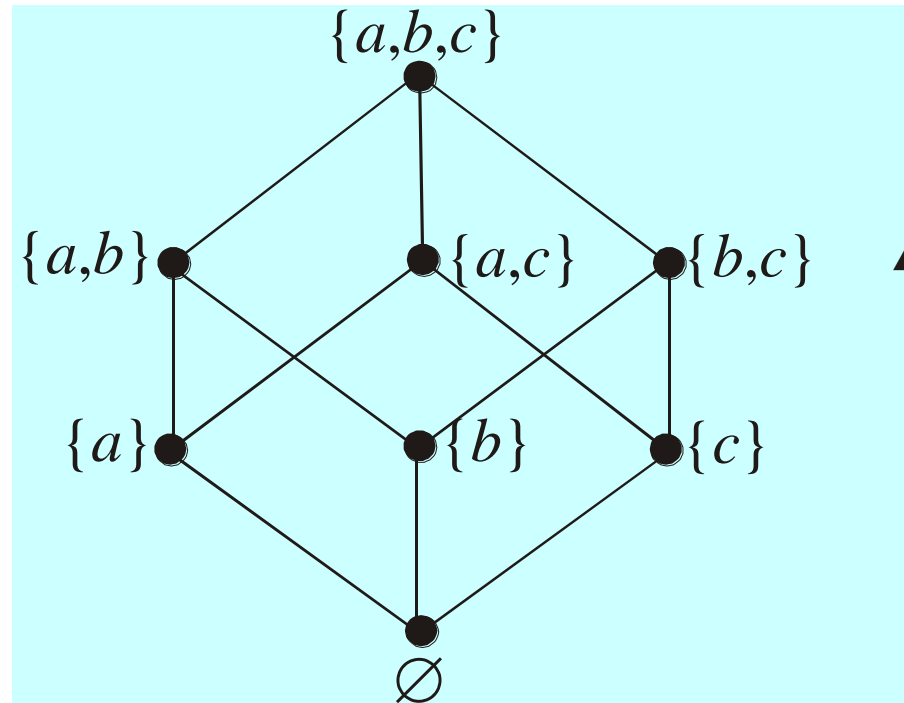
potom

$$P = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6), (2,1), (3,1), (4,1), (4,2), (5,1), (6,1), (6,2), (6,3)\}$$



Príklad

Hasseho diagram pre množiny $X = \mathcal{P}(\{a,b,c\})$, ktorá je čiastočne usporiadaná pomocou relácie ' \subseteq ' je znázornený na obrázku



Hasseho diagram pre reláciu čiastočného usporiadania P nad konečnou množinou X ukazuje jasne maximálne a minimálne prvky.

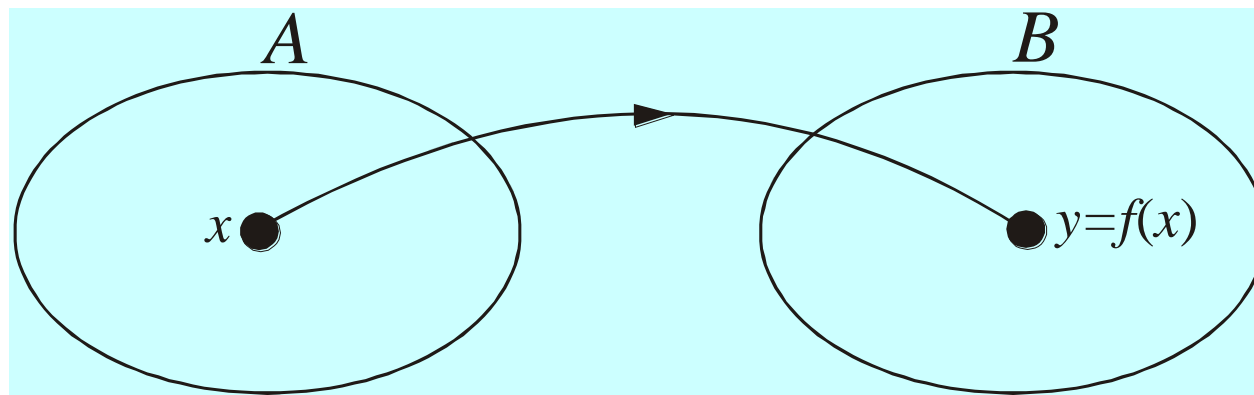
Veta. Každá relácia čiastočného usporiadania $P \subseteq X \times X$ obsahuje aspoň jeden minimálny element a aspoň jeden maximálny element.

Nech $a_1 \in X$, ak je tento element minimálny, dôkaz je dokončený. V opačnom prípade existuje $a_2 \in X$ taký, že $(a_2, a_1) \in P$. Element a_2 je buď minimálny alebo ak nie, potom existuje taký element $a_3 \in X$, že $(a_3, a_2) \in P$. Pretože množina X má konečný počet elementov, tento proces predlžovania smerom dole, musí byť v nejakom momente ukončený elementom, ktorý je minimálny. Podobným spôsobom môžeme zostrojiť element, ktorý je maximálny.

Funkcie

Pojem funkcie (alebo zobrazenia) patrí medzi základné pojmy matematiky. V matematike pod funkciou f rozumieme jednoznačný predpis pomocou ktorého každému argumentu x z množiny A priradíme práve jednu funkčnú hodnotu označenú $f(x)$ z množiny B

$$f : A \rightarrow B$$



$$f = \{(x, f(x)); x \in A\}$$

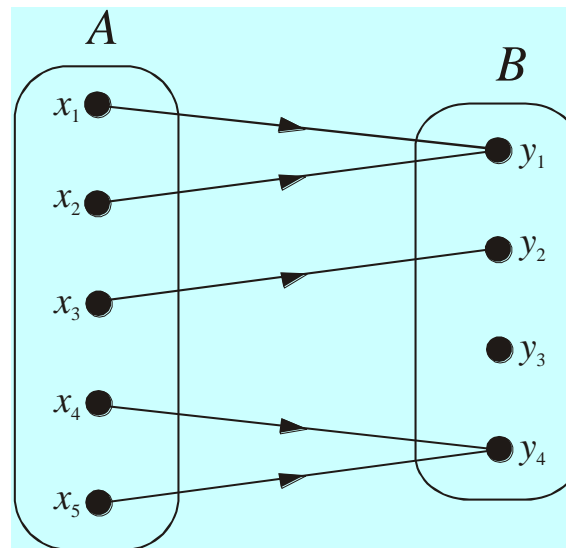
Definícia 3.11. Relácia $f \subset A \times B$ sa nazýva *funkcia* vtedy a len vtedy, ak pre každé $x \in A$ existuje práve jedno $y \in B$ také, že $(x, y) \in f$

$$\forall x \exists! y (x, y) \in f$$

Množina A sa nazýva *obor definície* (alebo len *obor*) funkcie f , $D_f = A$, množina B sa nazýva *koobor* funkcie f . *Obor funkčných hodnôt* funkcie f je množina $H_f = \{f(x); x \in A\} = f(A)$. Ak $(x, y) \in F$, potom x sa nazýva *argument* a y sa nazýva *funkčná hodnota (obraz)*. Funkcia sa taktiež nazýva *zobrazenie*.

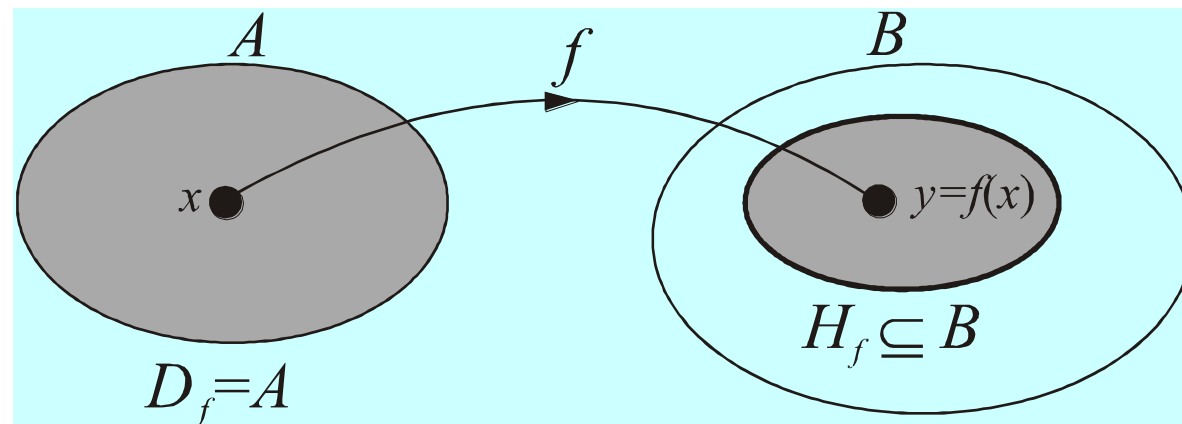
Znázornenie funkcie $f \subset A \times B$, pre každé $x \in A$ existuje práve jedno $y \in B$ také,

$$\text{že } (x, y) \in f, f = \{(x_1, y_1), (x_2, y_1), (x_3, y_2), (x_4, y_4), (x_5, y_4)\}$$



Definícia funkcie nezabezpečuje, aby množina funkčných hodnôt $\{f(x); x \in A\}$ bola totožná s množinou B , vo všeobecnosti platí len

$$B' = f(A) = \{f(x); x \in A\} \subseteq B$$



Definícia. Hovoríme, že dve funkcie $f : A \rightarrow B$ a $g : A' \rightarrow B'$ sa *rovnajú* vtedy a len vtedy, ak súčasne platí

$$(1) A = A' \text{ a } B = B',$$

$$(2) \forall (x \in A)(f(x) = g(x)).$$

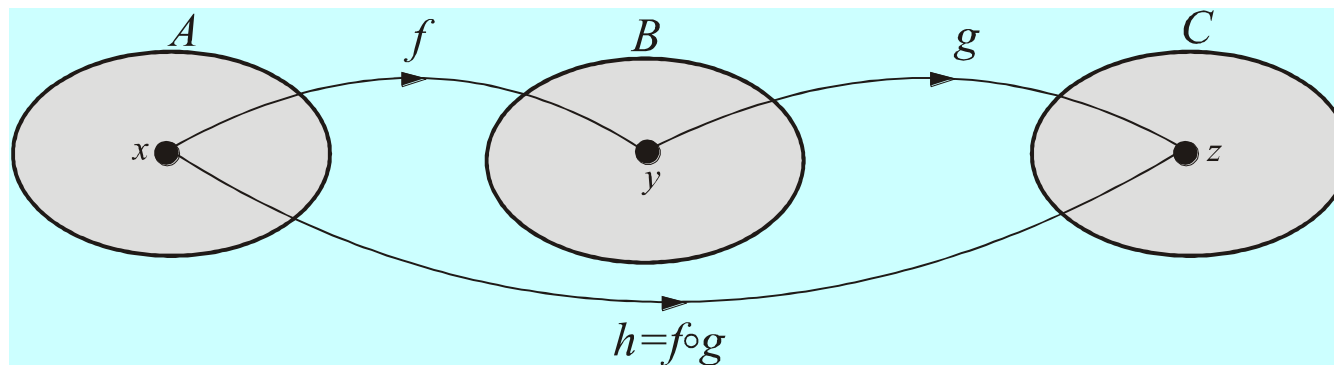
Definícia. Hovoríme, že funkcia $i_A : A \rightarrow A$ je *jednotková* vtedy a len vtedy, ak

$$\forall (x \in A)(i_A(x) = x)$$

Obor a obor funkčných hodnôt sú si rovné, $D_{i_A} = H_{i_A} = A$

Zložená funkcia

Majme dve funkcie $f : A \Rightarrow B$ a $g : B \Rightarrow C$, kompozíciou týchto dvoch funkcií vytvoríme novú funkciu $h = f \circ g : A \Rightarrow C$, ktorá sa nazýva zložená funkcia.



Zložená funkcia existuje len vtedy, keď prienik oboru funkčných hodnôt H_f funkcie f a definičného oboru funkcie g je neprázdny, $H_f \cap D_g \neq \emptyset$.

Definícia. Hovoríme, že kompozíciou funkcií $f : A \rightarrow B$ a $g : B \rightarrow C$ vznikne *zložená funkcia* $h = f \circ g : A \rightarrow C$, vtedy a len vtedy, ak

$$h = f \circ g = \left\{ (x, z) \in A \times C; \exists (y \in B) \left((x, y) \in f \right) \wedge \left((y, z) \in g \right) \right\}$$

Z tejto definície priamo plynie, že zložená funkcia $h = f \circ g$ existuje len vtedy, ak pre danú dvojicu $(x, z) \in A \times C$ existuje taký element $y \in B$, pre ktorý súčasne platí $(x, y) \in f$ a $(y, z) \in g$, alebo $H_f \cap D_g \neq \emptyset$.

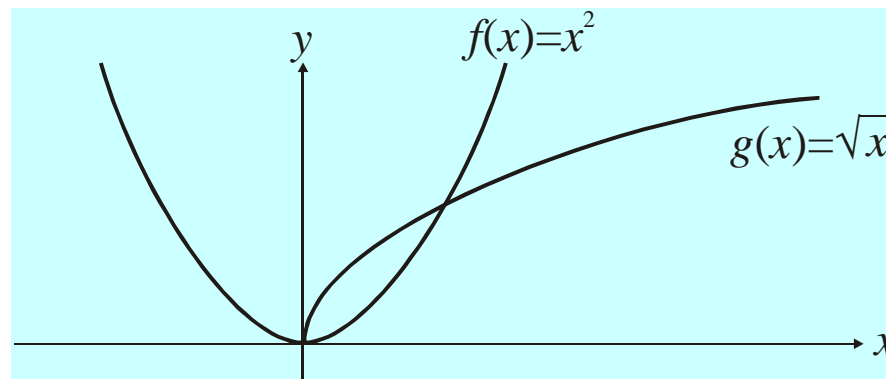
$$f \left(\begin{array}{c} g(z) \\ y \end{array} \right) = f(y) = z = f[g(z)] = x$$

Príklad

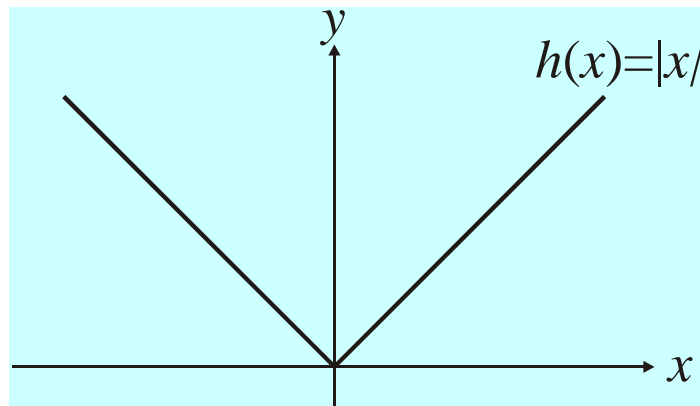
Študujme dve funkcie

(1) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, ktorej analytický tvar je $f(x) = x^2$, jej obor je $D_f = \mathbb{R}$ množina reálnych čísel a obor funkčných hodnôt je $H_f = \langle 0, \infty \rangle$ množina nezáporných reálnych čísel.

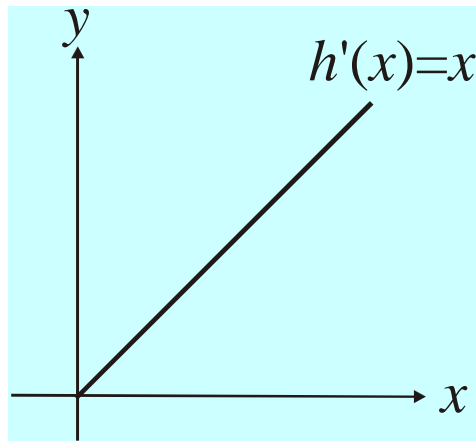
(2) $g : \langle 0, \infty \rangle \rightarrow \langle 0, \infty \rangle$, ktorej analytický tvar je $g(x) = \sqrt{x}$, táto má rovnaký obor definície a obor funkčných hodnôt, $D_g = H_g = \langle 0, \infty \rangle$..



Prvá zložená funkcia má tvar $h(x) = g(f(x)) = \sqrt{x^2} = |x|$, jej obor definície je $D_h = \mathbb{R}$ a obor funkčných hodnôt je $H_h = \langle 0, \infty \rangle$, t. j. zobrazuje množinu reálnych čísel \mathbb{R} na množinu nazáporných reálnych. Priebeh funkcie $h(x) = |x|$ je znázornený na obrázku



Druhá zložená funkcia má tvar $h'(x) = f(g(x)) = (\sqrt{x})^2 = x$, táto funkcia má rovnaký definičný obor a obor funkčných hodnôt, $D_{h'} = H_{h'} = \langle 0, \infty \rangle$, t. j. zobrazuje „lineárne“ množinu nezáporných reálnych čísel na tú istú podmnožinu. Priebeh funkcie $h'(x) = x$ je znázornený na obrázku



Zložené funkcie $h(x)$ a $h'(x)$ sa nerovnajú.

Inverzná funkcia

Definícia. Funkcia $f : A \rightarrow B$ sa nazýva injekcia (jedno-jednoznačná) vtedy a len vtedy, ak vyhovuje podmienke

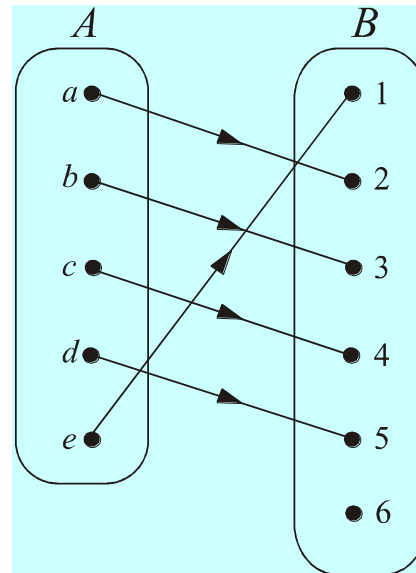
$$\forall (x, x' \in A) (x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x'))$$

Spojením tejto podmienky s podmienkou jednoznačnosti dostaneme

$$\forall (x, x' \in A) ((x \neq x') \equiv (f(x) \neq f(x')))$$

To znamená, že podmienka rôznosti argumentov je ekvivalentná podmienke rôznosti ich funkčných hodnôt.

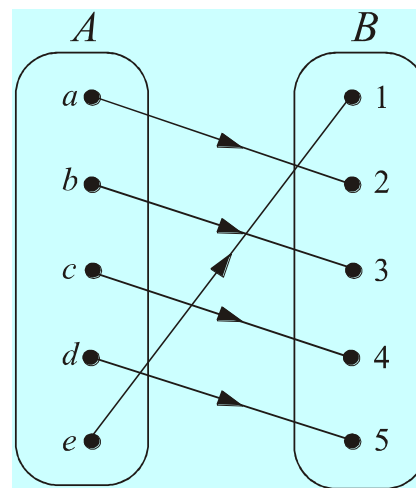
Schématické znázornenie injekcie $f : A \rightarrow B$



Ku každému argumentu je priradená práve jedna funkčná hodnota, a taktiež aj naopak, ku každej funkčnej hodnote existuje práve jeden argument. Musíme však poznamenať, že množina B môže obsahovať prvky, ktoré nie sú funkčné hodnoty f .

Definícia. Injekcia $f : A \rightarrow B$ sa nazýva **bijekcia** vtedy a len vtedy, ak pre každý element $y \in B$ existuje taký element $x \in A$, že $y = f(x)$.

Pre bijektívne zobrazenie $f : A \rightarrow B$, kde A a B sú konečné množiny platí, že tieto množiny majú rovnakú mohutnosť, $|A| = |B|$.



Definícia. Nech funkcia $f : A \rightarrow B$ je bijekcia. Hovoríme, že funkcia $f^{-1} : B \rightarrow A$ je *inverzná* k funkcii f vtedy a len vtedy, ak platí

$$f(f^{-1}(x)) = i_B(x)$$

$$f^{-1}(f(x)) = i_A(x)$$

kde i_X je jednotková funkcia nad doménou X .

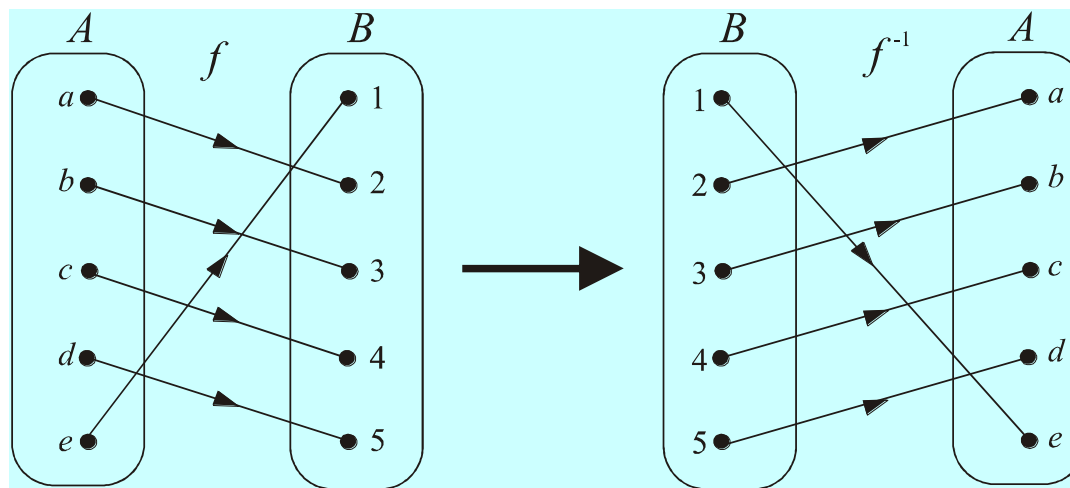
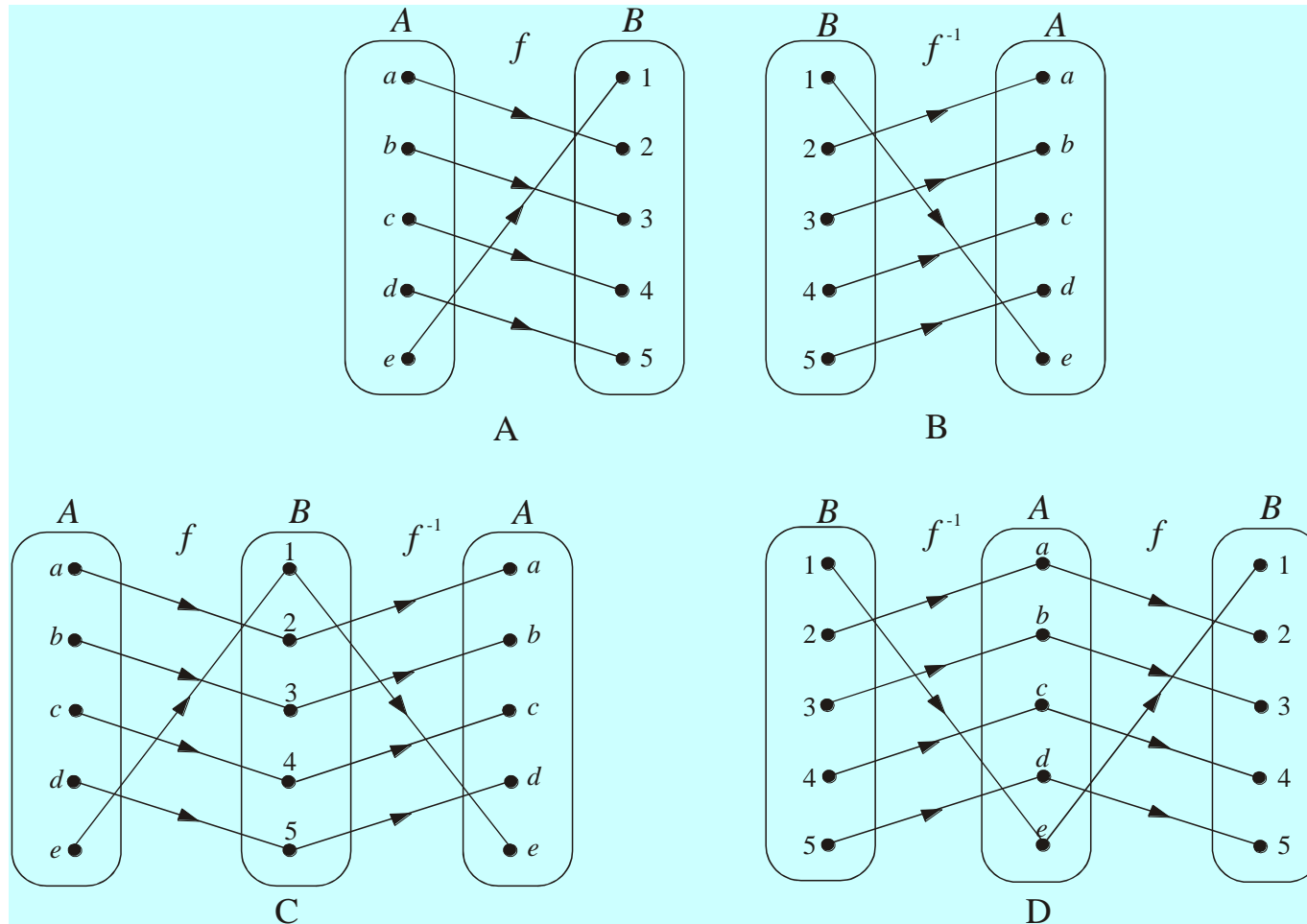


Diagram C znázorňuje zloženú funkciu $h = f^{-1} \circ f = i_A : A \rightarrow A$, diagram D znázorňuje zloženú funkciu $h' = f \circ f^{-1} = i_B : B \rightarrow B$.



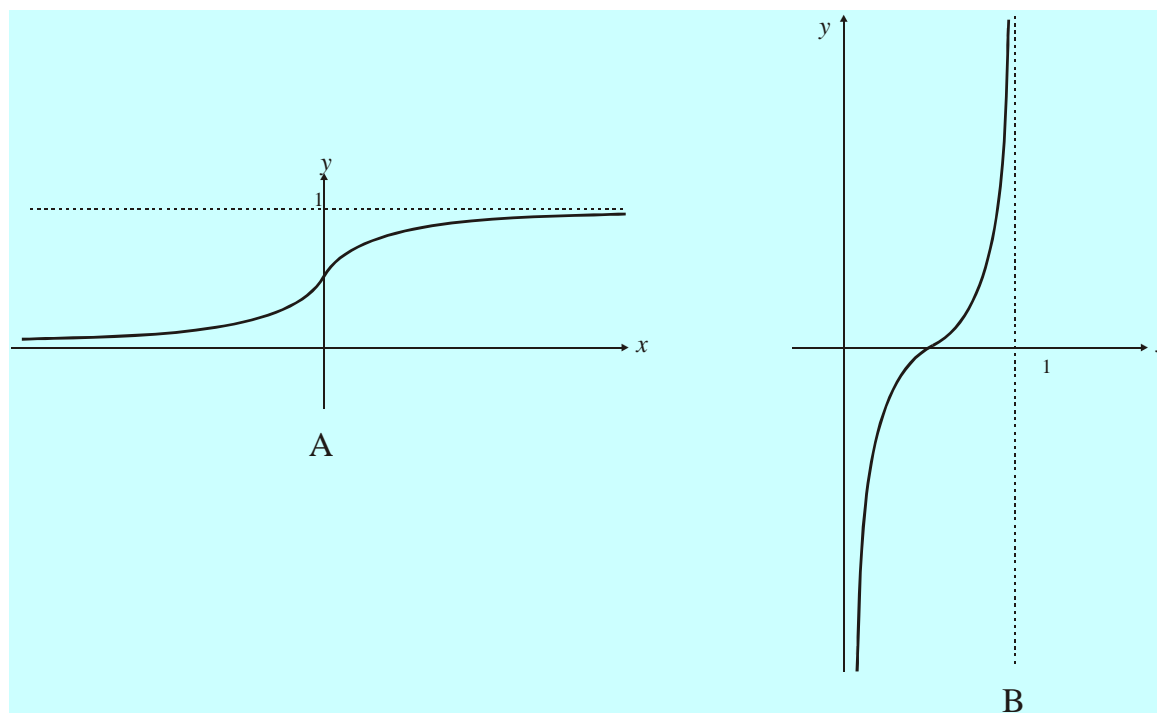
Príklad

Zostrojte inverznú funkciu k funkcii $f(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}}$

Táto funkcia zobrazuje obor definície doménu $D_f = \mathbb{R}$ na obor funkčných hodnôt $H_f = (0,1)$. Funkcia je monotónne rastúca a vyhovuje asymptotickým podmienkam $f(\infty) = 1$ a $f(-\infty) = 0$. Z monotónnosti vyplýva, že funkcia je bijekcia, čiže k nej existuje inverzná funkcia,

$$f^{-1}(x) = \ln \frac{x}{1-x}$$

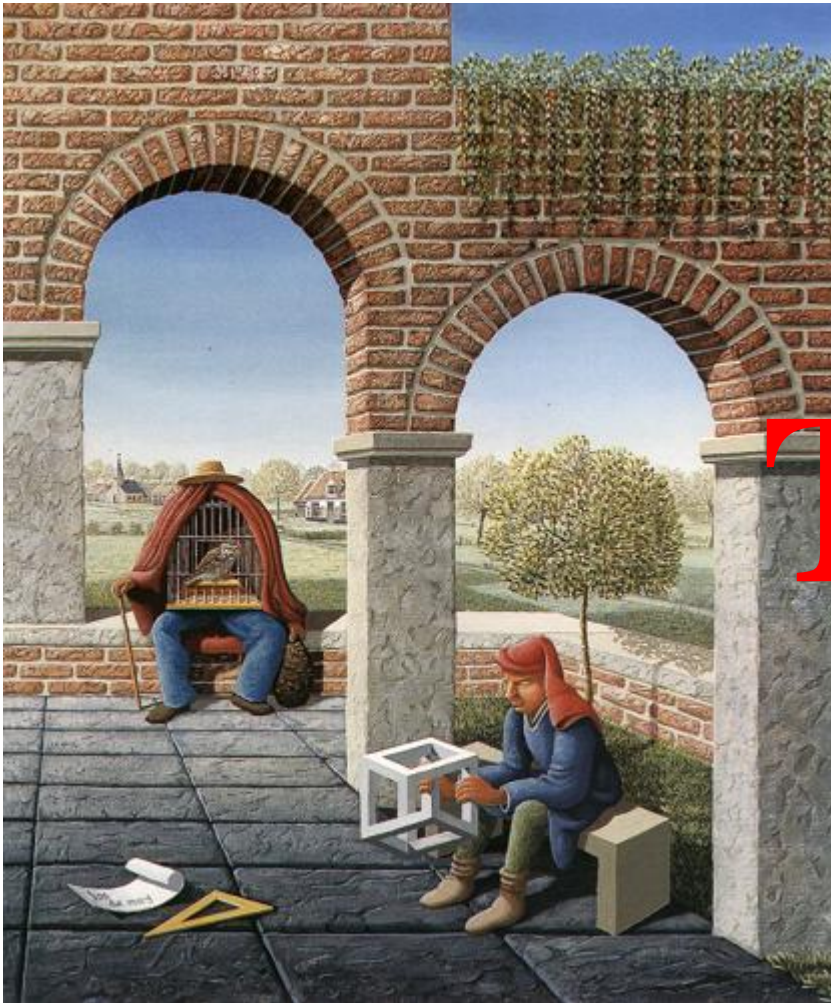
Priebehy funkcií (A) $f(x) = 1/(1 + e^{-x})$ a (B) $f^{-1}(x) = \ln x/(1 - x)$



Na záver budeme počítat' zložené funkcie

$$f(f^{-1}(x)) = \frac{1}{1 + \exp(-f^{-1}(x))} = \frac{1}{1 + \exp(-\ln x / (1-x))} = \frac{1}{1 + \frac{1-x}{x}} = x = i_{(0,1)}(x)$$

$$f^{-1}(f(x)) = \ln \frac{f(x)}{1-f(x)} = \ln \frac{\frac{1}{1+e^{-x}}}{1 - \frac{1}{1+e^{-x}}} = \ln \frac{\frac{1}{1+e^{-x}}}{\frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}} = \ln e^x = x = i_{(-\infty, \infty)}(x)$$



The End