3. kapitola

Výroková logika I – Špecifikácia logiky, história logiky, syntax a sémantika logiky, Boolove funkcie

3.1. Čo je logika?

Môžeme si položiť otázku – čo je logika? Odpoveď na túto otázku je, že logika je *veda o správnom usudzovaní*. Preto našu pozornosť musíme obrátiť na špecifikáciu pojmu „správna usudzovanie“, čím sa správne usudzovanie odlišuje od nesprávneho? V logike študujeme také schémy usudzovania, ktoré sú správne (korektné) bez ohľadu na pravdivosť alebo nepravdivosť ich zložiek. Uvažujme dvojicu jednoduchých tvrdení – výrokov: „*prší*“ a „*ak prší, potom je cesta mokrá*“. Z týchto dvoch tvrdení – výrokov vyplýva nové tvrdenie „*cesta je mokrá*“. Uvažujme ďalšiu podobnú dvojicu tvrdení: „*Fido je smädný*“ a „*ak je Fido smädný, potom hľadá vodu*“. Záver z týchto dvoch tvrdení je, „*Fido hľadá vodu*“. Ak porovnáme túto dvojicu usudzovaní zistíme, že aj keď sú diametrálne odlišné obsahovo, majú veľa spoločného. V oboch prípadoch existujú dve nezávislé tvrdenia (v ďalšom texte ich budeme nazývať výroky), ktoré označíme[1] symbolmi p a q, pričom prvé tvrdenie je totožné s „p“ a druhé tvrdenie má tvar „*ak p, potom q*“. Záver z týchto dvoch tvrdení je „q“, ktoré predtým nevystupovalo samostatne, ale len ako časť zložitejšieho tvrdenia „*ak p, potom q*“. To znamená, že v procese usudzovania výrok „q“ je vyvodený z pôvodných predpokladov „p“ a „*ak p, potom q*“, čo sa obvykle zapisuje takto

$$\frac{\begin{array}{c} p \\ p \Rightarrow q \end{array}}{q}$$

kde symbol $\Rightarrow$ vyjadruje spojku „ak..., potom...“. Táto formálna schéma usudzovania sa už od čias stredoveku označuje ako *modus ponens* (slov. *pravidlo odlúčenia*) a patrí medzi základne pravidlá správneho (logického) usudzovania, na ktorom je založená naša racionalita .

Naznačená formalizácia našej hovorovej reči je pre logiku charakteristická, logika študuje všeobecné formy usudzovania na symbolickej úrovni, v ktorých sa ignoruje konkrétny obsah jednotlivých tvrdení. Z týchto dôvodov býva aj moderná logika označovaná ako *formálna logika* alebo *matematická logika* [2-8] (v prvej polovici 20. storočia sa používal aj termín *logistika*, ktorý však v súčasnosti, hlavne pod vplyvom americkej angličtiny, má diametrálne odlišný význam a označuje procesy zásobovania alebo zabezpečenia potrebným materiálom). Nebudeme odlišovať formálnu logiku od matematickej, základným momentom v oboch prípadoch je nielen používanie symbolov a ich zgrupovania pomocou logických spojok (jazykové prostriedky typu „*...a...*“, „*...alebo...*“, „*ako..., potom...*“, ...) do väčších celkov nazývaných formuly, ale aj formalizácia procesu transformácie danej formuly na inú formulu metódami, ktoré sú charakteristické pre matematiku. Tak napríklad, výroková logika môže byť chápaná ako špeciálny druh algebry (Boolovej), obsahujúcej premenné (výroky),

[1] Používanie symbolov abecedy miesto konkrétnych tvrdení typu „*Fido je smädný*“ alebo „*prší*“ pochádza od gréckeho filozofa Aristotela (384-322 pr. n. l.), ktorý je považovaný za zakladateľa logiky. Toto používanie symbolov, namiesto konkrétnych tvrdení, je pokladané súčasnou históriou vedy za veľký civilizačný obrat, ktorým sa grécka civilizácia odlíšila od babylonskej a egyptskej civilizácie, pre ktoré bol pojem symbolu ešte neznámy pri popise matematických algoritmov (napr. výpočet plochy obdĺžnikovej oblasti), ktoré z tohto dôvodu boli veľmi ťažkopádne, pretože operovali s konkrétnymi číslami.

unárne a binárne operácie nad týmito premennými (logické spojky) a kde taktiež existuje striktný matematický systém odvodzovania nových formúl pomocou povolených operácií z jednoduchších formúl (axióm).

Použitie matematických metód v logike nie je samoúčelné. Umožňuje získať hlboké výsledky, ktoré odlíšili modernú logiku 20. storočia definitívne od klasickej neformálnej logiky predchádzajúcich období. Predmetom záujmu tohto textu je práve štúdium matematickej logiky pre potreby umelej inteligencie a kognitívnej vedy. Použitý prístup je založený na formalizácii prirodzeného jazyka pomocou výrokových symbolov a logických spojok, pričom usudzovanie je formalizované pomocou niekoľkých jednoduchých pravidiel. Snáď teraz si už môžeme položiť otázku, aký je rozdiel medzi matematickou a nematematickou logikou? Ako už bolo uvedené, predmetom nášho záujmu bude matematická logika. Môžeme sa teda pýtať, čo ešte zostáva v logike okrem matematickej logiky. Obvykle sa uvádza, že logika sa delí na dve časti: na matematickú logiku a na filozofickú logiku. Toto delenie má svoje historické pozadie, ktoré tu nebudeme hlbšie špecifikovať. Do filozofickej logiky sa obvykle vydeľovali neklasické logiky, ktoré mali viac ako dve pravdivostné hodnoty alebo obsahovali netradičné logické spojky (napr. modálne spojky „nutne“ a „možne“). V počiatkoch modernej logiky sa nevedelo, ako túto „neklasickú“ problemtatiku formálne spracovať, preto sa štúdium týchto neklasických logík stalo výhradne doménou „špekulatívnej“ filozofickej logiky. Avšak v súčasnosti, už aj tieto logiky majú, podobne ako výroková alebo predikátová logika, svoje formálne teórie používajúce sofistikované algebraické a množinové techniky. Z týchto dôvodov sa v súčasnosti zdá byť už rozdelenie logiky na matematickú a filozofickú umelým, neprirodzeným a prekonaným[2].

V súčasnej literatúre sa často spomínajú „neklasické logiky“. Ako odlíšime klasickú logiku od neklasickej logiky? V klasickej logike sa postuluje, že výroky sú dvojhodnotové, t.j. sú buď pravdivé alebo nepravdivé, žiadna iná tretia možnosť neexistuje. Naviac, elementárne výroky spájame do väčších zložitejších výrokov pomocou logických spojok („*...a...*“, „*...alebo...*“, „*ako..., potom...*“, ...), pričom pravdivosť týchto nových výrokov je plne určená pomocou pravdivostných hodnôt jej elementárnych výrokov a použitými logickými spojkami. Metódy konštrukcie pravdivostných hodnôt týchto zložených výrokov sú vytvárané pomocou „klasických“ tabuliek známych už od stredoveku a ktoré študenti obvykle už poznajú zo strednej školy. Tak napríklad, vieme, že výrok „*p* a *q*“ je pravdivý len vtedy, ak obe jeho zložky sú súčasne pravdivé, vo všetkých ostatných troch prípadoch výrok je nepravdivý. Ďalšia črta „neklasičnosti“ logiky môže spočívať v tom, že používame nové logické spojky, ktoré nie sú obvyklé v klasickej logike. Tieto nové spojky môžu vyjadrovať buď časové alebo modálne aspekty výrokov, alebo môžu byť dokonca ternárne (spájajúce tri elementárne výroky do nového zložitejšieho výroku).

Na záver tejto podkapitoly uvedieme ešte niekoľko poznámok o význame matematickej logiky pre umelú inteligenciu a kognitívnu vedu. V umelej inteligencii existujú odbory, ktoré sa zaoberajú simuláciou ľudského usudzovania (reprezentácia poznatkov, expertné systémy a pod.). Preto potrebujeme metódy algoritmizácie metód usudzovania, ktoré nám poskytuje matematická logika svojim formálno-matematickým aparátom. Podobne, v kognitívnej vede, ktorá sa zaoberá ľudskou kogníciou, centrálne postavenie majú procesy kogníce ľudského usudzovania, ktoré sú formalizované pomocou matematickej logiky. Môžeme teda konštatovať, že ***matematická logika tvorí jeden z pilierov moderných metód umelej inteligencie a kognitívnej vedy***. Umožňuje do určitej miery formalizovať prirodzený jazyk pomocou výrokov a logických spojok, pomocou zákonov usudzovania matematickej

[2] Podobná situácia existuje aj v chémii, ktorá je z historických a didaktických dôvodov rozdelené na dve veľké poddisciplíny, na anorganickú a organickú chémiu. Toto rozdelenie, ktoré vzniklo v 18. storočí, keď existovala zreteľná demarkačná čiara medzi anorganickými (neživými) a organickými (živými) látkami, sa stalo v súčasnosti vedeckým anachronizmom, zákony chémie sú rovnaké pre obe časti chémie.

logiky vyvodzovať deduktívnym spôsobom z takto formalizovaných poznatkov nové poznatky, ktoré neboli v pôvodnej „databáze“ explicitne obsiahnuté.

3.1.1 História výrokovej logiky

Štúdium logiky ako nezávislej vednej disciplíny bolo zahájené v starom Grécku filozofom Aristotelom (384-322 pr. n. l.). Musíme však poznamenať, že predmetom hlavného záujmu Aristotela boli kvantifikátory „každý“ a „niektorý“, ktoré nie sú predmetom záujmu výrokovej logiky. Avšak vo svojich rukopisoch o metafyzike Aristoteles diskutuje dva dôležité zákony výrokovej logiky: zákon vylúčenia tretieho a zákon kontradikcie. Podľa prvého zákona platí, že každý výrok je buď pravdivý alebo nepravdivý, tretia možnosť neexistuje; druhý zákon hovorí, že výrok nemôže byť súčasne pravdivý a nepravdivý. Oba tieto zákony majú fundamentálny význam pre klasickú výrokovú logiku, menovite špecifikujú dvojhodnotový pravdivostný charakter výrokovej logiky. V jeho spisoch existujú náznaky toho, že rozpoznal dôležitosť zložitých výrokov tvorených pomocou spojok konjunkcie, disjunkcie a implikácie, avšak prienik Aristotela alebo jeho nasledovníkov do tejto nádejnej oblasti bol veľmi malý.

Podstatne úspešnejšie pokusy o využitie logických spojok k vytváraniu zložitejších výrokov pomocou logických spojok konjunkcie, disjunkcie a implikácie boli vykonané stoickou filozofiou (koniec 3. storočia pr. n. l.) . Pretože väčšina ich rukopisov bola nenávratne stratená, nemôžeme sa jednoznačne v súčasnosti vyjadrovať o tom, kto vytvoril tento nádejný smer v antickej logike a ktoré oblasti logiky boli študované týmto prístupom. Pozitívne vieme, na základe rukopisu Sextosa Empirikosa, že Diodorus Kronus a jeho žiak Philo navzájom diskutovali o tom, či pravdivostná hodnota implikácie závisí len na pravdivostnej hodnote predpokladu, ale taktiež aj na pravdivostnej hodnote dôsledku. Stoický filozof Chrysippos (približne 280-205 pr. n. l.) vykonal najväčší krok v rozvoji stoickej výrokovej logiky tým, že zostrojil päť rôznych schém usudzovania, ktoré sú založené na zložených výrokoch [1]:

1	*ak prvé, tak druhé* *avšak prvé* ——— *teda druhé*	2	*ak prvé, tak druhé* *avšak nie druhé* ——— *teda nie prvé*
3	*nie je pravda, že aj prvé aj druhé* *avšak prvé* ——— *teda nie druhé*	4	*buď prvé alebo druhé* *avšak prvé* ——— *teda nie druhé*
5	*buď prvé alebo druhé* *avšak nie prvé* ——— *teda druhé*		

Z pohľadu súčasnej logiky pravidlo 4 je platné len pre exkluzívnu disjunkciu (XOR), ak by sme uvažovali obyčajnú inkluzívnu disjunkciu (OR), potom je toto pravidlo evidentne neplatné. Pravidlá usudzovania z tejto tabuľky sú totožné s pravidlami prirodzenej dedukcia, ktorá patrí medzi moderné súčasti výrokovej logiky. Prvá a druhá schéma usudzovania je totožná pravidlam *modus ponens* resp. *modus tollens*. Tretiu schému usudzovania, použitím de Morganovho zákona a zámenou premenných ich negáciami, môžeme prepísať do tvaru ekvivalentného s piatou schémou. Tieto schémy usudzovania patria už od dôb gréckeho a rímskeho staroveku k základným schémam usudzovania. Stoická logika bola postupne rozvíjaná v druhom storočí nášho veku rímskym lekárom a logikom Galénom (približne 129-210), v šiestom storočí filozofom Boethiusom (približne 480-525) a neskoršie stredovekými mysliteľmi Petrom Abelardom (1079-1142) and Williamom z Ockhamu (1288-1347) a inými. Ich príspevky väčšinou spočívali v zdokonaľovaní a v lepšej formalizácii základných princípov vytvorených Aristotelom alebo Chrysipposom, menovite v spresnení terminológie a v prehĺbení argumentácie správnosti získaných výsledkov a vzájomných vzťahov medzi logickými spojkami. Tak napríklad, Abelard bol prvý logik, ktorý odlíšil exkluzívnu od inkluzívnej disjunkciu a dôvodil, že inkluzívna disjunkcia je podstatne dôležitejšia ako exkluzívna disjunkcia pre potreby výrokovej logiky.

Zo súčasného pohľadu možno konštatovať, že veľmi pozitívnu úlohu pre rozvoj modernej logiky zohral nemecký filozof a matematik Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716). Tento filozof v logike, podobne ako Descartes v geometri (kde nahradil geometrické konštrukcie matematickými manipuláciami s algebraickými výrazmi), pokúsil sa vybudovať formálny systém, ktorý by nahradil verbálne metódy usudzovania manipuláciami s formulami. Postuloval formálny systém s dvoma časťami: (1) jazyk logiky *lingua characteristica*, pomocou ktorého je možné reprezentovať každý výrok a (2) počítanie *calculus ratiocinator*, pomocou ktorého je možné uskutočňovať usudzovanie systematickým a matematicky presným spôsobom. Žiaľ, trvalo ešte ďalších 200 rokov než sa naplnila táto Leibnizova idea, keď v polovici 19 st. anglický matematici A. de Morgan a G. Boole zostrojili „kalkulus“ – výrokovú logiku.

Pre Descartesovho súčasník anglického filozofa T. Hobbesa (1588–1679) myslenie už nebolo nič iné, ako len špeciálny druh výpočtu. Hlavným argumentom Hobbesa pre toto tvrdenie bola Aristetolova teória sylogizmov, ktorých riešenie mu pripomínalo aritmetické operácie nad číslami Táto hypotéza, ktorá v 17. storočí znela veľmi neobvykle, ba až exoticky, bola až v súčasnosti plne akceptovaná a realizovaná pomocou umelej inteligencie a kognitívnej vedy, kde má postavenie centrálnej paradigmy. Tento názor na myslenie, ako na špeciálny druh výpočtu, bol veľmi stimulujúci pre Leibniza, pri jeho snahách zostrojiť calculus ratiocinator-um.

Stav výrokovej logiky vo forme vyvinutej v podstate už v starovekom Grécku a Ríme, pretrvával až do začiatku 19. storočia, kedy vďaka rozvoju algebry, došlo hlavne zásluhou Augustusa DeMorgana (1806-1871) a Georga Boola (1815-1864) v polovici tohto storočia k algebraizácii Aristotelovskej sylogistickej logiky, kde číslica "1" bola použitá pre univerzálnu triedu, číslica "0" pre prázdnu triedu, súčin "xy" pre prienik tried a súčet "x + y" pre zjednotenie tried, a pod. Tento kvázimatematický prístup umožnil formalizovať výroky aristotelovskej logiky: napr. "každé x je y" je v tomto prístupe formalizované ako "$xy = 1$". Avšak je potrebné poznamenať, že Boole zaviedol aj druhú alternatívnu interpretáciu, kde rovnica "x = 1" sa číta ako "x je pravdivé" a "x = 0" sa číta ako "x je nepravdivé", formuly získané pre jeho logiku tried môžu byť transformované do výrokovej logiky. Napríklad, formula "x + y = 1" je interpretovaná tak, že x alebo y je pravdivé, podobne, formula "xy = 1" je interpretovaná tak, že x a y sú pravdivé. Booleho matematický prístup k formulácii výrokovej logiky zaznamenal veľký záujem u matematikov. Jeho myšlienky boli neskoršie precizované a preformulované do tvaru „Boolovej algebry“, ktorá v súčasnosti tvorí matematický základ výrokovej logiky a taktiež tvorí jeden z pilierov modernej matematickej logiky s plodnými aplikáciami v informatike a umelej inteligencii.

Koncom 19. storočia nemecký matematik a logik Gottlob Frege (1848-1925) prezentoval logiku ako súčasť systematických snáh jej povýšenia na metavedu pre matematiku, z ktorej sa dajú odvodiť čisto logickými deduktívnymi prostriedkami všetky teorémy matematiky. Frege taktiež navrhol prvý moderný axiomatický systém logiky, ktorá z dnešného pohľadu obsahuje výrokovú logiku a časť predikátovej logiky. Pri formulácii tejto axiomatizácie použil skutočnosť, že výrokové spojky môžu byť redukované na negáciu a implikáciu, spojky konjunkcie, disjunkcie a ekvivalencie sú z nich odvoditeľné.

Počiatkom 20. storočia Alfred Whitehead a Bertrand Russell napísali gigantické dielo *Principia Mathematica*, ktoré možno pokladať za „štartovný kameň“ vzniku modernej logiky a ktoré je stále čitateľné a plne zrozumiteľná aj súčasníkovi, pretože použitý formalizmus je stále používaný. Koncepcia „pravdivostných tabuliek“ vznikla v druhe polovici 19. storočia hlavne zásluhou spisovateľa a popularizátora vedy L. Carrolla (1832-1898) a matematika J. Venna (1834-1923). Systematický záujem o tvorbu axiomatických systémov výrokovej logiky prejavili v prvej polovici 20. storočia takí vynikajúci matematici a lgici, akými boli David Hilbert, Paul Bernays, Alfred Tarski, Jan Łukasiewicz, Kurt Gödel, Alonzo Church a iný. V priebehu tohto obdobia bola dosiahnutých väčšina metateoretických výsledkov výrokovej logiky, ktoré budú diskutované v druhej časti tejto kapitoly. Rôzne systémy prirodzenej dedukcie, ktoré podstatne uľahčujú odvodenie zákonov výrokovej logiky vznikli na základe pionierskej práce nemeckého matematika a logika Gerharda Gentzena, ktorý v polovici 30. rokov minulého storočia publikoval túto metódu a ktorá sa veľmi rýchlo stala veľmi populárnou vo všetkých oblastiach modernej logiky.

3.2 Výrok, pravdivostná hodnota a logické spojky

Výroková logika [2-8] študuje také všeobecné formy usudzovania, pre ktoré platnosť záverov nezávisí od obsahu a ani od vnútornej štruktúry výrokov, ale výlučne len pravdivosti či nepravdivosti týchto výrokov. Analyzujme tieto jednoduché oznamovacie vety:

(1) Atóm je fyzikálna štruktúra.
(2) Atóm je sociálna štruktúra.
(3) Vo vesmíre existuje život aj mimo Zeme.
(4) Láska je rádioaktívna.
(5) Rast nášho hospodárstva má neustálu tendenciu.

Medzi uvedenými piatimi vetami sú veľké rozdiely. Možno konštatovať, že veta (1) je pravdivá, zatiaľ čo veta (2) je nepravdivá. Pri (3) zatiaľ nemôžeme rozhodnúť o jej pravdivosti alebo nepravdivosti. Veta (4) je síce gramaticky správna, ale je to zrejmý nezmysel vzhľadom na predikátu „rádioaktívny“, čiže nemá zmysel uvažovať o jej pravdivosti alebo nepravdivosti. Napokon skladba vety (5) (ktorú autor tohto textu zachytil v čsl. televízii koncom 80-tich rokov minulého storočia pri prejave vtedajšieho významného federálneho politika) je chybná, takže nemá vôbec žiadny zmysel sa pýtať na jej pravdivosť alebo nepravdivosť. Po týchto jednoduchých ilustračných príkladoch môžeme pristúpiť k tejto definície výroku.

Definícia 3.1. ***Elementárny výrok*** *je jednoduchá oznamovacia veta, pri ktorej má zmysel pýtať sa, či je alebo nie je pravdivá. Elementárne výroky budeme označovať malými písmenami abecedy p, q, r, s, p_1, p_2, ...* ***Pravdivostná hodnota*** *výroku p bude označená $val(p)$, pričom, ak výrok p je pravdivý (nepravdivý), potom $val(p)=1$ ($val(p)=0$).*

Pod pojmom „jednoduchá“ veta, budeme rozumieť takú nerozvinutú vetu, ktorá neobsahuje spojky. Pomocou týchto spojok (napr. *a, alebo, ak..., potom..., je ekvivalentné, nie je pravda, že...*) z elementárnych výrokov vytvárame zložitejšie výroky (výroky), pričom ich pravdivosť alebo nepravdivosť je určená len pravdivostnými hodnotami ich zložiek (elementárnymi výrokmi). Vo výrokovej logike sa používa jedna unárna logická spojka a štyri binárne spojky nazývané konjunkcia, disjunkcia, implikácia a ekvivalencia (pozri Tabuľka 1).

(1) *Negácia.* Táto unárna logická spojka pre výrok *p* má formu „nie je pravda, že *p*“, čo zapíšeme pomocou symbolu negácie takto: $\neg p$. Za premennú *p* môžeme dosadiť nejaký konkrétny výrok, ktorý je pravdivý alebo nepravdivý. Ak je tento výrok pravdivý (nepravdivý), potom jeho negácia je nepravdivá (pravdivá), formálne

$$val(\neg p) = 1 - val(p) \tag{3.1}$$

(2) *Konjunkcia.* Binárna symetrická spojka z dvoch výrokov *p, q* vytvára nový výrok „*p* a *q*“, ktorý je formálne označený „$p \wedge q$“. Pre konkrétnosť uvažujme zložený výrok „Peter je v škole a Milan je v kine“, kde elementárne výroky sú *p* = ‘*Peter je v škole*‘ a *q* = ‘*Milan je v kine*‘. Pravdivostná hodnota zloženého výroku závisí od pravdivostných hodnôt jeho zložiek, pričom nutným predpokladom, aby jeho pravdivostná hodnota bola pravda je pravdivosť oboch jeho zložiek

$$val(p \wedge q) = min\{val(p), val(q)\} \tag{3.2}$$

(3) *Disjunkcia.* Binárna symetrická logická spojka z dvoch výrokov *p, q* vytvára nový výrok „*p* alebo *q*“, ktorý je formálne označený „$p \vee q$“. K tomu, aby bol pravdivý zložený výrok $p \vee q$, nutne aspoň jedna jeho zložka musí byť pravdivá; ak sú obe nepravdivé, potom pravdivostná hodnota zloženého výroku je nepravda

$$val(p \vee q) = max\{val(p), val(q)\} \tag{3.3}$$

(4) *Implikácia.* Táto binárna logická spojka z dvoch výrokov *p* a *q* vytvára nový výrok „ak *p*, potom *q*“, alebo „*p* implikuje *q*“, formálne „$p \Rightarrow q$“. Na rozdiel od logických spojok konjunkcie a disjunkcie, vzťah pravdivostnej hodnoty implikácie $p \Rightarrow q$ k pravdivostným hodnotám jej zložiek je o mnoho zložitejší a závislý na konvenciách prirodzeného jazyka. Budeme postulovať, že implikácia je nepravdivá len vtedy, ak *val*(*p*)=**1** a *val*(*q*)=**0**, pre všetky ostatné pravdivostné hodnoty *p* a *q* je pravdivá

$$val(p \Rightarrow q) = \begin{cases} 1 & (\text{ak } val(p) \le val(q)) \\ 0 & (\text{ak } val(p) = 1, val(q) = 0) \end{cases} \tag{3.4}$$

Dosaďme napríklad v implikácii za *p* nepravdivý výrok „*5+2=8*“ a za *q* pravdivý výrok „*Masaryk bol prvý prezident Československa*“. Podľa Tabuľky 3.1, implikácia $p \Rightarrow q$ je pravdivá pre nepravdivé *p* a pravdivé *q*, potom zložený výrok „pretože *5+2=8,* potom „*Masaryk bol prvý prezident Československa*“ je pravdivý výrok, aj keď bežný čitateľ bude pokladať tento výrok za nepravdivý ba až nezmyselný. Jeden zo zakladateľov modernej logiky G. Frege (1848-1925) navrhol riešiť tento problém tak, že v rámci tejto „materiálnej“ implikácie sa môžu vyskytovať len výroky, ktoré sú v príčinnej súvislosti. Tieto problémy s určením pravdivostných hodnôt implikácie viedli v prvej polovici 20.storočia niektorých logikov k štúdiu tzv. *neklasických logík*, ktoré majú jemnejšie prostriedky na špecifikáciu implikácie (chápanej ako relácia príčinného vzťahu).

(5) *Ekvivalencia.* Táto binárna symetrická logická „*p* je ekvivalentné *q*“, formálne „$p \equiv q$“, ktorá je pravdivá len vtedy, ak jej elementárne výroky *p* a *q* sú súčasne buď pravdivé alebo nepravdivé. Formálne túto skutočnosť vyjadríme pomocou relatívne komplikovaného vzťahu:

$$val(p \equiv q) = \begin{cases} 1 & (\text{ak } val(p) = val(q)) \\ 0 & (\text{ak } val(p) \neq val(q)) \end{cases} \tag{3.5}$$

V matematike sa často používa táto logická spojka v týchto dvoch alternatívnych jazykových formách: „*p* je nutnou a postačujúcou podmienkou *q*“ alebo „*p* práve vtedy a len vtedy ak *q*“.

Tabuľka 3.1. Funkčné vyjadrenie pravdivostných hodnôt logických spojok.

logická spojka	funkčné vyjadrenie pravdivostnej hodnoty
$\bar{p}$	$val(\bar{p}) = 1 - val(p)$
$p \wedge q$	$val(p \wedge q) = min\{val(p), val(q)\}$
$p \vee q$	$val(p \vee q) = max\{val(p), val(q)\}$
$p \Rightarrow q$	$val(p \Rightarrow q) = \begin{cases} 1 & (\text{ak } val(p) \leq val(q)) \\ 0 & (\text{ak } val(p) = 1, val(q) = 0) \end{cases}$
$p \equiv q$	$val(p \equiv q) = \begin{cases} 1 & (\text{ak } val(p) = val(q)) \\ 0 & (\text{ak } val(p) \neq val(q)) \end{cases}$

Pravdivostné hodnoty jednotlivých logických spojok špecifikovaných vyššie sú uvedené v tabuľke 1.2. Poznamenajme, že všetkých možných binárnych logických spojok je 16, v tabuľke sú uvedené len štyri základné logické spojky, ostatné sa dajú vyjadriť pomocou týchto základných zložiek.

Tabuľka 1.2. Pravdivostné hodnoty základných logických spojok

p	q	$\neg p$ (negácia)	$p \wedge q$ (konjunkcia)	$p \vee q$ (disjunkcia)	$p \Rightarrow q$ (implikácia)	$p \equiv q$ (ekvivalencia)
0	0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	1	1	0
1	0	0	0	1	0	0
1	1	0	1	1	1	1

3.3 Jazyk výrokovej logiky (syntax)

Zavedieme formálny systém nazývaný jazyk výrokovej logiky *L* nad množinou $P = \{p, q, r, ..., p_1, p_2, ...\}$ elementárnych výrokových premenných (alebo atómických formúl) a $\{0,1\}$ je množina výrokových konštánt, ktoré reprezentujú pravdivý resp. nepravdivý výrok.

Definícia 3.2. *Jazyk výrokovej logiky definovaný nad množinou P výrokových premenných je zostrojená opakovaným použitím týchto dvoch pravidiel:*

(1) *Každá výroková premenná* $p \in P$ *alebo výroková konštanta je výroková formula,*

(2) *ak výrazy* φ *a* ψ *sú výrokové formuly, potom aj výrazy* $(\neg\varphi)$, $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \Rightarrow \psi)$ *a* $(\varphi \equiv \psi)$ *sú výrokové formuly,*

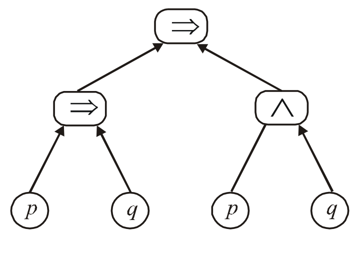
(3) *žiadne iné symboly nie sú formuly.*

Zátvorky sa používajú ako pomocné symboly, pomocou ktorých môžeme odstrániť prípadnú nejednoznačnosť výrokových formúl. Uvažujme formulu $p \wedge q \vee r$, pomocou zátvoriek môžeme ju interpretovať dvoma rôznymi spôsobmi $(p \wedge q) \vee r$ a $p \wedge (q \vee r)$.

Definícia 3.3.
Konštrukcia *formuly* φ *nad množinami* P *a* $\{0,1\}$ *je tvorená postupnosťou formúl* $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n$, *pričom posledný prvok* φ_n *je totožný s formulou* φ, *pre každé* $i = 1,2,...,n$ *platí jedna s týchto troch možností:*
(1) φ_i *je výroková premenná z P alebo výroková konštanta.*
(2) φ_i *vznikla z niektorého z prvkov množiny* $\{\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_{i-1}\}$ *aplikáciou unárnej logickej spojky negácie,* $\varphi_i = (\neg \varphi_j)$, *pre* $j = 1,2,...,i-1$.
(3) φ_i *vznikla z niektorých dvoch prvkov množiny* $\{\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_{i-1}\}$ *aplikáciou nejakej binárnej logickej spojky* ♠ (konjunkcie, disjunkcie, implikácie alebo ekvivalencie), *t. j.* $\varphi_i = (\varphi_j ♠ \varphi_k)$, *pre* $j < k = 1,2,...,i-1$.
Prvky postupnosti $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n$ *sa nazývajú* ***podformuly*** *formuly* φ, $\varphi_i \subset \varphi$ *pre* $i = 1,2,...,n$.

Formuly môžeme chápať ako slová, ktoré sú zostrojené nad abecedou *P* výrokových premenných, výrokových konštánt a logických spojok (a taktiež pomocných zátvoriek). Tvorba týchto slov je určená pomocou dvoch pravidiel z definície 3.2, pričom spôsob konštrukcie slova je špecifikovaný postupnosťou $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n$ z definície 3.3. Ak predpokladáme, že táto postupnosť má minimálnu dĺžku, potom formula ψ má len podformuly z tejto postupnosti, iné podformuly nemá. Všetky možné formuly zostrojené nad množinami *P* a $\{0,1\}$ tvoria konkrétny *jazyk L* výrokovej logiky (vzhľadom k daným množinám).

V definíciách 3.2 a 3.3 sme použili mimologické symboly φ, ψ, ..., ktoré reprezentujú formuly vyjadrené reťazcami symbolov zostrojených nad abecedou, ktorá obsahuje nielen výrokové premenné, ale aj symboly pre logické spojky a zátvorky (a taktiež aj mimologické symboly reprezentujúce podformuly). Potom môžeme povedať, že dve formuly φ α ψ sú **rovnaké**, φ = ψ, keď sú reprezentované rovnakými reťazcami symbolov.



Obrázok 3.1 Syntaktický (alebo derivačný) strom formuly $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \wedge q)$. Koncové vrcholy stromu reprezentujú výrokové premenné p a q, vrcholy z nasledujúcich vrstiev sú priradené spojkám implikácie a konjunkcie. Vyhodnocovanie tohto stromu prebieha postupne zdola nahor.

Príklad 3.1. Nech $P = \{p,q,r,s\}$ je množina výrokových premenných, potom

$$(p \wedge q) \Rightarrow (p \vee q)$$

$$((p \Rightarrow (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (\bar{r} \Rightarrow \bar{s}))$$

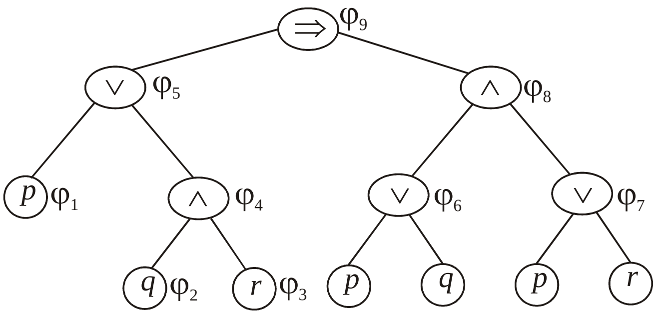
$$\left(\left(\overline{p} \wedge (r \vee s)\right) \wedge (p \Rightarrow s)\right)$$

sú výrokové formuly, zatiaľ čo

$$(\Rightarrow (\wedge p))$$

$$((\Rightarrow\Rightarrow s) \Rightarrow p)$$

nie sú výrokové formuly. Každá výroková formula je reprezentovaná pomocou grafického útvaru nazývaného *syntaktický strom,* pozri obr. 3.1.



Obrázok 3.2. Podformuly formuly $\varphi = \left(\left(p \vee (q \wedge r)\right) \Rightarrow \left((p \vee q) \wedge (p \vee r)\right)\right)$ sú určené pomocou vrcholov syntaktickeého stromu formuly.

Príklad 3.2. Študujme formulu $\varphi = \left(\left(p \vee (q \wedge r)\right) \Rightarrow \left((p \vee q) \wedge (p \vee r)\right)\right)$, syntaktický strom formuly má tvar znázornený na obr. 3.2.

Jednotlivé podformuly sú určené takto:

$$\varphi_1 = p,$$

$$\varphi_2 = q,$$

$$\varphi_3 = r,$$

$$\varphi_4 = \varphi_2 \wedge \varphi_3 = q \wedge r,$$

$$\varphi_5 = \varphi_1 \vee \varphi_4 = p \vee (q \wedge r)$$

$$\varphi_6 = p \vee q,$$

$$\varphi_7 = p \vee r,$$

$$\varphi_8 = \varphi_6 \wedge \varphi_6 = (p \vee q) \wedge (p \vee r),$$

$$\varphi_9 = \varphi_5 \Rightarrow \varphi_8 = \left(\left(p \vee (q \wedge r)\right) \Rightarrow \left((p \vee q) \wedge (p \vee r)\right)\right).$$

3.4 Pravdivostné ohodnotenie formúl výrokovej logiky (sémantika)

Ako už bolo povedané v predchádzajúcej časti tejto kapitoly, syntax formúl výrokovej logiky je jednoznačne určená spôsobom ich konštrukcie, pomerne ľahko vieme rozhodnúť, či daná formula ma korektnú syntax, alebo nemá.

Vyššie špecifikovaný spôsob konštrukcie výrokových formúl nazývame *syntaxou výrokovej logiky*. Podobne ako v prirodzenom jazyku, kde syntax špecifikuje tvar vety, nie všetky vety, ktoré môžeme zostrojiť jednoduchým zreťazením slov, sú syntakticky korektné. Podobne aj vo výrokovej logike, nie každé zreťazenie prípustných symbolov nám definuje formulu, existujú formuly, ktoré nie sú syntakticky správne.

Ďalší pojem dôležitý pre výrokovú logiku je *sémantika*. Pojem pochádza z teórie prirodzených jazykov, kde sémantika špecifikuje význam danej vety (ktorá ma tiež aj svoju syntax). Vo výrokovej logike, ktorá sa zaoberá len pravdivostnými hodnotami premenných a ich formúl, *sémantika* nie je veľmi bohatá. Sémantika výrokovej formuly je vlastne tabuľka pravdivostných hodnôt formuly pre rôzne hodnoty jej výrokov. Tak napríklad: pre formulu $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \wedge q)$, ktorá má korektnú syntax (napr. reprezentovaný syntaktickým stromom), je jej sémantika plne určená vyššie uvedenou tabuľkou jej pravdivostných hodnôt pre všetky štyri kombinácie výrokov *p* a *q*.

Uvažujme formulu výrokovej logiky *A*, ktorej výrokové premenné $p_1, p_2, ..., p_n$ sú interpretované *τ*, ktorý určuje pravdivostné hodnoty jej premenných. Táto interpretácia *premenných* $\boldsymbol{\tau} = (p/\tau_1, q/\tau_2, ..., r/\tau_n)$, kde $\tau_1, \tau_2, ..., \tau_n \in \{0,1\}$, spočíva v priradení binárnych pravdivostných hodnôt jednotlivým premenným. Rôznych interpretácií premenných $\boldsymbol{\tau}$, ktoré sú priradené *n* výrokovým premenným je 2^n. Pravdivostná hodnota formuly φ pre danú interpretáciu $\boldsymbol{\tau}$ je označená výrazom $val_\tau(\varphi)$.

Ako bude prebiehať výpočet $val_\tau(\varphi)$. V súhlase s definíciou 3.3 predpokladajme, že konštrukcia formuly φ je tvorená postupnosťou formúl $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n$, pričom $\varphi = \varphi_n$. Pravdivostné vyhodnotenie jednotlivých členov postupnosti pre $i = 1,2,...,n$ sa vykonáva takto:

(1) Ak φ_i je výroková premenná, potom $val_\tau(\varphi_i)$ je určená priamo interpretáciou τ, ktorý špecifikuje pravdivostné hodnoty premenných.
(2) Ak φ_i nie je výroková premenná a vznikla z niektorého z prvkov množiny $\{\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_{i-1}\}$ aplikáciou unárnej logickej spojky negácie, $\varphi_i = (\neg\varphi_j)$, pre $j = 1,2,...,i-1$, potom $val_\tau(\varphi_i) = 1 - val_\tau(\varphi_j)$.

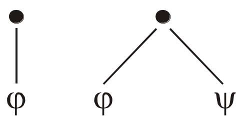
(3) Ak φ_i nie je výroková premenná a *vznikla z niektorýho dvoch prvkov množiny* $\varphi_j, \varphi_k \in \{\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_{i-1}\}$ *aplikáciou binárnej logickej spojky, potom* $val_\tau(\varphi_i)$ je vyhodnotený na základe tabuľky 3.3 pomocou už známych pravdivostných hodnôt $val_\tau(\varphi_j)$ a $val_\tau(\varphi_k)$.

Tabuľka 3.3. Pravdivostné ohodnotenie zložených výrazov

(1)	$val_\tau(\varphi \wedge \psi) = 1$	*vtt*	$val_\tau(\varphi) = 1$ *a* $val_\tau(\psi) = 1$
(1′)	$val_\tau(\varphi \wedge \psi) = 0$	*vtt*	$val_\tau(\varphi) = 0$ *alebo* $val_\tau(\psi) = 0$
(2)	$val_\tau(\varphi \vee \psi) = 1$	*vtt*	$val_\tau(\varphi) = 1$ *alebo* $val_\tau(\psi) = 1$
(2′)	$val_\tau(\varphi \vee \psi) = 0$	*vtt*	$val_\tau(\varphi) = 0$ *a* $val_\tau(\psi) = 0$
(3)	$val_\tau(\varphi \Rightarrow \psi) = 1$	*vtt*	$val_\tau(\varphi) = 0$ *alebo* $val_\tau(\psi) = 1$
(3′)	$val_\tau(\varphi \Rightarrow \psi) = 0$	*vtt*	$val_\tau(\varphi) = 1$ *a* $val_\tau(\psi) = 0$
(4)	$val_\tau(\varphi \equiv \psi) = 1$	*vtt*	$val_\tau(\varphi) = val_\tau(\psi)$
(4′)	$val_\tau(\varphi \equiv \psi) = 0$	*vtt*	$val_\tau(\varphi) \neq val_\tau(\psi)$
(5)	$val_\tau(\neg\varphi) = 1$	*vtt*	$val_\tau(\varphi) = 0$

(5′)	$val_\tau(\neg\varphi)=0 \quad vtt \quad val_\tau(\varphi)=1$

Tento rekurentný postup je názorne realizovaný pomocou tabuľkovej metódy, kde postupne počítame pravdivostné hodnoty jednotlivých podformúl pre všetky možné interpretácie τ. Pri vyhodnocovaní pravdivostných hodnôt formúl pomocou tejto metódy je užitočný pojem „*hlavná podformula*“ (alebo „*hlavné podformuly*“). Nech π je formula, ktorej tvar je $\pi=\neg\varphi$, kde $\neg$ je unárna logická spojka negácie, potom φ sa nazýva ***hlavná podformula***. Vo všeobecnejšom prípade, nech formula π má tvar $\pi=\varphi\spadesuit\psi$, kde $\spadesuit$ je binárna logická spojka (napr. konjunkcia alebo implikácia), potom φ a ψ sa nazývajú ***hlavné podformuly***; v prípade, že $\spadesuit$ je nekomutatívna binárna spojka (napr. implikácia), potom φ a ψ sa nazývajú ***ľavá resp. pravá hlavná podformula*** (pozri obrázok 3.3)



Obrázok 3.3 Znázornenie syntaktického stromu s centrálnou unárnou resp. binárnou spojkou.

Prvá formula s unárnou centrálna spojka obsahuje jednu hlavnú podformulu, druhá formula s binárnou centrálnou spojkou obsahuje dva hlavné podformuly. Vyššie uvedenú tabuľku môžeme použiť pre vyhodnocovania pravdivostnej hodnoty formuly $\varphi(p,q,...,r)\in L$ pre danú interpretáciu výrokových premenných $\boldsymbol{\tau}=(p/\tau_1,q/\tau_2,...,r/\tau_n)$. Množinu všetkých možných interpretácií τ formuly φ s n výrokovými premennými, označíme $\mathcal{T}$, $\mathcal{T}=\{\tau\}$, potom jej kardinalita je $|\mathcal{T}|=2^n$. Postup tohto výpočtu pravdivostnej hodnoty je založený na ***princípe funkcionality***, podľa ktorého pravdivostná hodnota formuly φ je rekuretne určená pomocou jej hlavných podformúl, pričom rekuretný postup aktivácie funkcie pravdivostnej hodnoty podformúl je ukončený vtedy, keď aktuálna hlavná podformula je výrokovou premennou s pravdivostnou hodnotou určenou pomocou interpretácie τ.

Príklad 3.3. Tabuľková metóda bude ilustrovaný výpočtom pravdivostných hodnôt formuly $\varphi=((p\vee(q\wedge r))\Rightarrow((p\vee q)\wedge(p\vee r)))$. Výsledná tabuľka pravdivostných hodnôt je znázornená na Tab. 3.4.

Tabuľka 3.4. Výpočet pravdivostných hodnôt formuly
$\varphi=((p\vee(q\wedge r))\Rightarrow((p\vee q)\wedge(p\vee r)))$

1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\varphi_1=p$	$\varphi_2=q$	$\varphi_3=r$	$\varphi_4=q\wedge r$	$\varphi_5=\varphi_1\vee\varphi_4$	$\varphi_6=p\vee q$	$\varphi_7=p\vee r$	$\varphi_8=\varphi_6\wedge\varphi_6$	$\varphi_9=\varphi_5\Rightarrow\varphi_8$
0	0	0	0	0	0	0	0	1
0	0	1	0	0	0	0	0	1
0	1	0	0	0	1	0	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1

Tabuľka sa buduje postupne, pomocou syntaktického stromu formuly, najprv vyhodnocujeme podformuly priradené výrokovým premenným (stĺpce 1-3), v ďalších krokoch vyhodnotíme postupne tie podformuly, ktoré obsahujú už vyhodnotené podformuly, proces ukončíme vyhodnotením samotnej formuly, všetky jej podformuly už sú vyhodnotené. Z tabuľky 3.3 vyplýva, že pre každé pravdivostné hodnoty premenných p, q a r formula $\varphi = \big(\big(p \vee (q \wedge r)\big) \Rightarrow \big((p \vee q) \wedge (p \vee r)\big)\big)$ je pravdivá.

Tabuľka 3.5. Alternatívný výpočet pravdivostných hodnôt formuly

$$\varphi = \big(\big(p \vee (q \wedge r)\big) \Rightarrow \big((p \vee q) \wedge (p \vee r)\big)\big)$$

1	2	3	4	5		6	7	8	9
p	*q*	*r*	((*p* ∨ (*q*	∧	*r*))	⇒	((*p* ∨ *q*)	∧	(*p* ∨ *r*))
0	0	0	0	0		1	0	0	0
0	0	1	0	0		1	0	0	1
0	1	0	0	0		1	1	0	0
0	1	1	1	1		1	1	1	1
1	0	0	1	0		1	1	1	1
1	0	1	1	0		1	1	1	1
1	1	0	1	0		1	1	1	1
1	1	1	1	1		1	1	1	1

Alternatívny výpočet pravdivostných hodnôt formuly $p \vee (q \wedge r) \Rightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ je znázornený na Tab. 3.5. V prvom kroku sme spočítali stĺpec 5, v druhom kroku stĺpec 4, tým sme ukončili výpočet ľavej strany implikácie 6. V tretom a štvrtom kroku spočíteme stĺpce 7 resp. 9, v piatok kroku spočítame konjunkciu v stĺpci 8. Na záver v šiestom kroku spočítame pravdivostnú hodnotu formuly pomocou výpočtu stĺpcu 6. Tabuľku 3.4 dostaneme z tabuľky 3.5 tak, že vhodným spôsobom permutujeme stĺpce.

Vo výrokovej logike majú mimoriadne postavenie také formuly, ktorých pravdivostná hodnota je pravda pre všetky možné kombinácie pravdivostných hodnôt premenných vo všetkých riadkoch. Takéto formuly nazývame *tautológie* a majú postavenie „zákonov" výrokovej logiky. Ich používanie pri odvodzovaní nových formúl zabezpečuje, že sú taktiež tautológie.

Definícia 3.4. *Formula φ sa nazýva* **tautológia** (*čo vyjadríme $\models \varphi$*)*, ak pre každú interpretáciu τ platí $val_\tau(\varphi) = 1$; v opačnom prípade, ak pre každú interpretáciu τ platí $val_\tau(\varphi) = 0$, formula sa nazýva* **kontradikcia**. *Ak existuje aspoň jedna interpretácia τ taká, že $val_\tau(\varphi) = 1$, potom formula φ je* ***splniteľná*** (to znamená, že tautológia je špeciálny prípad splniteľnosti).

Túto definíciu môžeme parafrázovať tak, že všetky formuly, ktoré nie sú kontradikcie sú splniteľné a tautológie sú také splniteľné formuly, ktoré sú pre všetky možné interpretácie τ pravdivé.

Môžeme teda konštatovať, že výroková logika je „*rozhodnuteľná*" , máme k dispozícii jednoduchú tabuľkovú metódu, pomocou, ktorej môžeme zistiť, či daná formula je tautológia, kontradikcia alebo len splniteľná. Určité komplikácie s použitím tejto jednoduchej výpočtovej metódu môžu nastať, keď formula obsahuje 5 alebo viac výrokových premenných, potom príslušná tabuľka obsahuje 2^5 = 32 riadkov, čo už môže spôsobovať vážne „organizačné" problémy užívateľovi pre použití tabuľkovej metódy. Hovoríme, vo všeobecnosti, že zložitosť tabuľkovej metódy rastie exponenciálne s počtom premenných, t. j. $t_{CPU} \sim 2^n$.

Niektoré tautológie sa často používajú nielen v samotnej výrokovej logike, ale aj v bežnom usudzovaní a sú obvykle označované aj vlastným menom. Väčšinou ide o tautológie tvaru ekvivalencie, ktoré umožňujú nahradzovať jedny formuly inými bez straty vlastnosti ich tautologickosti. Medzi najznámejšie zákony výrokovej logiky patria tieto tautológie:

(1) Zákon totožnosti $\models (p \Rightarrow p)$.

(2) Zákon dvojitej negácie $\models (\neg\neg p \equiv p)$.

(3) Zákon vylúčenia tretieho $\models (p \vee \neg p)$.

(4) Zákon kontradikcie $\models \neg(p \wedge \neg p)$.

(5) De Morganov zákon pre konjunkciu $\models (\neg(p \wedge q) \equiv (\neg p \vee \neg q))$.

(6) De Morganov zákon pre disjunkciu $\models (\neg(p \vee q) \equiv (\neg p \wedge \neg q))$.

(7) Zákon ekvivalencie $\models ((p \equiv q) \equiv ((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)))$.

(8) Zákon tranzitívnosti implikácie[3] $\models (p \Rightarrow r) \Rightarrow ((r \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow q))$.

(9) Distribúcia konjunkcie $\models ((p \vee (q \wedge r)) \equiv ((p \vee q) \wedge (p \vee r)))$.

(10) Distribúcia disjunkcie $\models ((p \wedge (q \vee r)) \equiv ((p \wedge q) \vee (p \wedge r)))$.

(11) Zákon asociatívnosti konjunkcie $\models ((p \wedge (q \wedge r)) \equiv ((p \wedge q) \wedge r))$

(12) Zákon asociatívnosti disjunkcie $\models ((p \vee (q \vee r)) \equiv ((p \vee q) \vee r))$

(13) Zákon komutatívnosti konjunkcie $\models ((p \wedge q) \equiv (q \wedge p))$

(14) Zákon komutatívnosti disjunkcie $\models ((p \vee q) \equiv (q \vee p))$

(15) Zákon kontrapozície $\models ((p \Rightarrow q) \equiv (\neg q \Rightarrow \neg p))$.

(16) Zákon „reductio ad absurdum“ $\models (((p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow \neg q)) \Rightarrow \neg p)$.

(17) Zákon nahradenia implikácie $\models ((p \Rightarrow q) \equiv (\neg p \vee q))$.

(18) Zákon „modus ponens“ $\models ((p \Rightarrow q) \wedge p) \Rightarrow q$

(19) Zákom „modus tollens“ $\models ((p \Rightarrow q) \wedge \neg q) \Rightarrow \neg p$

Platnosť všetkých týchto zákonov môžeme prekontrolovať pre všetky pravdivostné hodnoty premenných pomocou tabuľkovej metódy (t. j., sú to tautológie).

3.5 Boolove funkcie

Formula výrokovej logiky $\varphi(x_1, x_2, ..., x_n)$, ktorá obsahuje *n* výrokových premenných (atomických formúl) $x_1, x_2, ..., x_n$ môže byť na sémantickej úrovni interpretovaná ako zobrazenie vektora binárnych argumentov na binárnu funkčnú hodnotu. Takéto zobrazenie sa nazýva ***Boolova funkcia***“

[3] Tradičný názov je zákon hypotetického sylogizmu.

$$\varphi:\{0,1\}^n \to \{0,1\} \quad \text{alebo} \quad y=\varphi(x_1,x_2,...x_n) \tag{3.6}$$

ktorá priradí *n* binárnym premenný (argumentom $x_1,x_2,...x_n$) binárnu funkčnú hodnotu *y*.

Pre lepšie pochopenie významu tohto prístupu pre výrokovú logiku uvažujme tento výrok, ktorý obsahuje štyri výrokové premenné

$$\varphi(x_1,x_2,x_3,x_4)=\left(\left(\left(x_1\wedge x_2\right)\vee\left(x_3\Rightarrow x_4\right)\right)\Rightarrow x_1\right) \tag{3.7}$$

Táto Boolova funkcia“ ma 16=2^4 rôznych špecifikácií premenný. Použitím tabuľkovej metódy môžeme vypočítať pravdivostné (funkčné) hodnoty tejto funkcie (pozri tab. 3.6).

Tabuľka 3.6. Boolova funkcia 4 premenných

#	x_1	x_2	x_3	x_4	φ(x_1,x_2,x_3,x_4)
1	0	0	0	0	0
…………………………………………………					
16	1	1	1	1	1

K tomu, aby sme dostali teóriu Boolových funkcií do priamej súvislosti s výrokovou logikou definujme elementárne Boolove funkcie 1- a 2-premenných - logické spojky, pomocou ktorých za zostrojujú všeobecné Boolove funkcie (pozri tab. 3.7 a 3.8). Tretia unárna funkcia $u_3(x)$ reprezentuje Boolovu spojku negácie, ostatné tri unárne funkcie nemajú vo výrokovej logike analógiu.

Tabuľka 3.7. Unárne logické spojky

#	*x*	u_1	u_2	u_3	u_4
1	0	0	0	1	1
2	1	0	1	0	1

Tabuľka 3.8. Binárne logické spojky

#	x_1	x_2	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}	f_{16}
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
2	0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
3	1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
4	1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
log. spojky				$\wedge$		x_1		x_2	$\oplus$	$\vee$	$\downarrow$	$\equiv$	$\neg x_2$		$\neg x_1$	$\Rightarrow$	$\uparrow$	

Celkový počet binárnych logických spojok je 16=2^4, avšak len štyri z nich majú vo výrokovej logike svojich reprezentantov, v tab. 3.8 sú vyznačené tmavými stĺpcami. Tmavším tieňovaným sme odlíšili ešte ďalšie tri binárne funkcie:

(1) Funkcia f_7, nazývaná *exkluzívne alebo* (eXclusive OR, XOR), ktorá aj keď v klasickej výrokovej logike nemá svoju obdobu, často sa využíva v elektronických aplikáciách teórie logických funkcií. Jej alternatívna definícia sa dá uskutočniť pomocou funkcie ekvivalencie

$$p\oplus q =_{def} \neg(p\equiv q) \tag{3.8a}$$

(2) Funkcia f_9 , nazývaná *Peircov symbol* (negácia disjunkcie, preto sa niekedy označuje ako Non OR, NOR, pomocou tejto spojky sa dá vyjadriť každá unárna a aj binárna funkcia. Jej alternatívna definícia je

$$p\downarrow q =_{def} \neg(p\vee q) \tag{3.8b}$$

Tvorí množinu, ktorá je funkčne úplná a ostatné logické spojky sa dajú vyjadriť takto:

(a) Negácia $\neg p \equiv p \downarrow p$,

(b) konjunkcia $p \wedge q \equiv (p \downarrow p) \downarrow (q \downarrow q)$,

(c) disjunkcia $p \vee q \equiv (p \downarrow q) \downarrow (p \downarrow q)$.

(4) Funkcia f_{15}, nazývaná *Shefferov symbol* (negácia konjunkcie, preto sa niekedy označuje ako Non AND, NAND), jej alternatívna definícia je

$$p \uparrow q =_{def} \neg(p \wedge q) \tag{3.8c}$$

Táto spojka je zaujimavá tým, že má podobnú vlastnosť ako Peircov symbol, pomocou tejto spojky sa dá vyjadriť každá unárna a aj binárna funkcia. Táto netradičná logická spojka tvorí množinu, ktorá je funkčne úplná. Štandardné logické spojky sú pomocou Shefferovho symbolu vyjadrené takto:

(a) Negácia $\neg p \equiv p \uparrow p$,

(b) konjunkcia $p \wedge q \equiv (p \uparrow q) \uparrow (p \uparrow q)$,

(c) disjunkcia $p \vee q \equiv (p \uparrow p) \uparrow (q \uparrow q)$.

Nech φ a ψ sú dve formuly výrokovej logiky s rovnakými výrokovými premennými, $\varphi = \varphi(x_1, x_2, ..., x_n)$ a $\psi = \psi(x_1, x_2, ..., x_n)$. Nech $\boldsymbol{\tau} = (\tau_1, \tau_2, ..., \tau_n) \in \{0,1\}^n$ je interpretácia týchto výrokových premenných, t. j. pre každé $\boldsymbol{\tau} \in \{0,1\}^n$ platí: $val_\tau(x_i) = \tau_i$. Tak napríklad, pre n = 3, premenné x_1, x_2, x_3 sú interpretované $\boldsymbol{\tau} = (0,1,1) \in \{0,1\}^3$ takto: $val_\tau(x_1) = 0$, $val_\tau(x_2) = 1$, $val_\tau(x_3) = 1$, t. j. premenná x_1 je nepravdivá a premenné x_2, x_3 sú pravdivé.

Definícia 3.5.
Hovoríme, že formuly $\varphi = \varphi(x_1, x_2, ..., x_n)$ a $\psi = \psi(x_1, x_2, ..., x_n)$ sú (logicky) ***ekvivalentné***, čo zapisujeme $\varphi \sim \psi$, vtedy a len vtedy, ak ich pravdivostné hodnoty sú rovnaké pre každú interpretáciu $\boldsymbol{\tau} \in \{0,1\}^n$,

$$(\varphi \sim \psi) =_{def} val_\tau(\varphi) = val_\tau(\psi) \quad \left(pre\ každé\ \boldsymbol{\tau} \in \{0,1\}^n\right) \tag{3.9}$$

Poznamenajme, že symbol ´~´ je binárna relácia a nie binárna logická spojka, aj keď svojou definíciou je veľmi blízka spojke ´≡´.

Pre naše ďalšie úvahy o význame teórie Boolových funkcií vo výrokovej logike zavedieme dva dôležité pojmy a ukážeme, že pomocou nich môže byť „analyticky“ vyjadrená každá Boolova funkcia, ktorá je špecifikovaná len tabuľkou svojich funkčných hodnôt (pozri tab. 3.1). Každá formula výrokovej logiky (a teda ja každá Boolova funkcia, ktorá používa len klasické binárne funkcie) môže byť prepísaná do ekvivalentného konjunktívneho alebo disjunktívneho tvaru. Práve tieto špeciálne tvary Boolových funkcií (alebo aj výrokových formúl) majú význam pre konštrukciu „analytických“ funkcií určených len tabuľkou. Zavedieme nasledujúcu terminológiu:

Definícia 3.6. ***Literál*** je výroková premenná alebo jej negácia, t. j. $l = p$ alebo $l = \neg p$, dva literály l a l' sa nazývajú ***komplementárne***, ak sú tvorené výrokovou premennou a jej negáciou, t. j. $l = p$ a $l' = \neg p$.

1. ***Konjunktívna klauzula*** je vytvorená pomocou konjunkcie literálov ($l_1 \wedge l_2 \wedge ...$). Podobne, *disjunktívna klauzula* je vytvorené pomocou disjunkcie literálov ($l_1' \vee l_2' \vee \ldots$).

2. ***Konjunktívna normálna forma (KNF)*** je tvorená pomocou konjunkcie disjunktívnych klauzúl ($(l_1 \vee l_2 \vee \ldots) \wedge (l_1' \vee l_2' \vee \ldots) \wedge \ldots$). Podobne, ***disjunktívna normálna forma (DNF)*** je tvorená pomocou disjunkcie konjunktívnych klauzúl ($(l_1 \wedge l_2 \wedge \ldots) \vee (l_1' \wedge l_2' \wedge \ldots) \vee \ldots$).

Príklad 3.4. Príkladom disjunktívnej normálnej resp. konjunktívnej normálnej formy sú tieto dve formuly

$$(p_1 \wedge \neg p_2 \wedge \neg p_3 \wedge p_4) \vee (\neg p_3 \wedge p_5 \wedge \neg p_6)$$
$$(\neg p_1 \vee \neg p_2 \vee \neg p_3) \wedge (\neg p_3 \vee p_5)$$

Ukážeme, že každá výroková formula (Boolova funkcia s klasickými spojkami) φ môže byť prepísaná do ekvivalentnej disjunktívnej resp. konjunktívnej normálnej formy, $\varphi = \varphi_{DNF}$ resp. $\varphi = \varphi_{KNF}$ tvaru. Tento postup je založený na použití disjunktívneho tvaru implikácie, De Morganových zákonov a distributívnych zákonov pre konjunkciu a disjunkciu. Uvažujme formulu $\varphi = (p \vee q) \Rightarrow (r \wedge \neg q)$, použitím disjunktívneho tvaru implikácie túto formulu prepíšeme do tvaru

$$\neg(p \vee q) \vee (r \wedge \neg q)$$

Aplikáciou De Morganov zákon pre negáciu disjunkcie dostaneme požadovaný disjunktívny tvar

$$\varphi_{DNF} = (\neg p \wedge \neg q) \vee (r \wedge \neg q)$$

kde $\varphi \equiv \varphi_{DNF}$. Podobne, ako v predošlom ilustračnom príklade, ukážeme, že každá výroková formula môže byť prepísaná taktiež aj do konjunktívneho tvaru. Budeme študovať rovnakú formulu ako v predošlom príklade, jej disjunktný tvar $(\neg p \wedge \neg q) \vee (r \wedge \neg q)$ je ďalej upravovaný pomocou distributívnych zákonov pre konjunkcie a disjunkciu

$$\begin{aligned}
&((\neg p \wedge \neg q) \vee (r \wedge \neg q)) \equiv (\neg p \vee (r \wedge \neg q)) \wedge (\neg q \vee (r \wedge \neg q)) \equiv \\
&(\neg p \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg q) \wedge (\neg q \vee r) \wedge (\neg q \vee \neg q) \equiv \\
&(\neg p \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg q) \wedge (\neg q \vee r) \wedge \neg q
\end{aligned}$$

Potom

$$\varphi_{KNF} = (\neg p \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg q) \wedge (\neg q \vee r) \wedge \neg q$$

Veta 3.1.
(1) Pre každú formulu φ existuje ekvivalentná formula, ktorá má tvar ***disjunktívnej normálnej formy***

$$\varphi \equiv \varphi_{DNF} \tag{3.10a}$$

(2) Pre každú formulu φ existuje ekvivalentná formula, ktorá má tvar ***konjunktívnej normálnej formy***

$$\varphi \equiv \varphi_{KNF} \tag{3.10b}$$

Disjunktívna normálna forma pre kontradikciu (konštantná formula vždy nepravdivá) je tvorená disjunkciou konjunktívnych klauzúl, z ktorých každá obsahuje dvojicu komplementárnych literálov, $\varphi_{DNF} \equiv \left(\underbrace{l \wedge \neg l}_{0} \wedge \ldots\right) \vee \left(\underbrace{l' \wedge \neg l'}_{0} \wedge \ldots\right) \vee \ldots \equiv 0$. Podobne, konjunktívna normálna forma pre tautológiu (konštantná formula vždy pravdivá) je tvorená konjunkciou disjunktívnych klauzúl, v ktorých každá obsahuje dvojicu komplementárnych literálov, $\varphi_{KNF} \equiv \left(\underbrace{l \vee \neg l}_{1} \vee \ldots\right) \wedge \left(\underbrace{l' \vee \neg l'}_{1} \vee \ldots\right) \wedge \ldots \equiv 1$.

Predpokladajme, že disjunktívna normálna forma obsahuje také dve klauzuly, ktoré sú zložené z jedného literálu, pričom tieto literály sú komplementárne, $\varphi_{DNF} \equiv \underbrace{(l) \vee (\neg l)}_{1} \vee (l_1 \wedge l_2 \wedge \ldots) \vee \ldots \equiv 1$, potom táto formula je tautológia. Alternatívne rovnaký predpoklad urobíme aj pre konjunktívnu normálnu formu, že obsahuje dve klauzuly zložené z jedného literálu, , pričom tieto literály sú komplementárne, $\varphi_{KNF} \equiv \underbrace{(l) \wedge (\neg l)}_{0} \wedge (l_1 \vee l_2 \vee \ldots) \wedge \ldots \equiv 0$, potom táto formula je kontradikcia. Tieto zaujímavé štyri vlastnosti zhrnieme do nasledujúcej vety.

Veta 3.2.
(1) Formula φ je ***kontradikcia*** práve vtedy, ak jej ekvivalentná disjunktívna normálna forma φ_{DNF} obsahuje v každej konjunktívnej klauzule dvojicu komplementárnych literálov.
(2) Formula φ je ***tautológiu*** práve vtedy, ak jej ekvivalentná konjunktívna normálna forma φ_{KNF} obsahuje v každej disjunjktívnej klauzule dvojicu komplementárnych literálov.
(3) Formula φ je **tautológia** práve vtedy, ak jej ekvivalentná disjunktívna normálna forma φ_{DNF} obsahuje také dve elementárne klauzuly zložené z jedného literálu, pričom tieto literály sú komplementárne.
(4) Formula φ je ***kontradikcia*** práve vtedy, ak jej ekvivalentná konjunktívna normálna forma φ_{KNF} obsahuje také dve elementárne klauzuly zložené z jedného literálu, pričom tieto literály sú komplementárne.

Táto veta tvorí teoretický základ metód dôkazu tautologičnosti alebo kontradiktívnosti logických formúl pomocou techniky sémantického tabla (položky 1 a 2), ako aj metódy rezolučného princípu (položky 3 a 4). Zo skutočnosti, že sa odlišujú len tvarom ekvivalentnej formuly (DNF alebo KNF) vyplýva, že obe tieto metódy sú medzi sebou veľmi blízke.

Prvý alternatívny dôkaz vety 3.1, kde upriamime našu pozornosť najprv na konštrukciu ekvivalentnej formuly v disjunktívnom tvare. Budeme uvažovať len tie interpretácie premenných **τ**, ktoré vytvárajú jednotkovú pravdivostnú hodnotu formuly φ, t.j. pre dané **τ** platí $val_\tau(\varphi)=1$. Podobne pre dané τ nové funkčné premenné (literály)

$$x_i^{(\tau)} = \begin{cases} x_i & (\text{ak } val_\tau(x_i)=1) \\ \neg x_i & (\text{ak } val_\tau(x_i)=0) \end{cases} \tag{1.11}$$

Konjunkcia týchto premenných môže byť chápaná ako pomocná Boolova funkcia

$$\psi_\tau(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1^{(\tau)} \wedge x_2^{(\tau)} \wedge \ldots \wedge x_n^{(\tau)} \tag{3.12}$$

Táto konjunkcia má jednotkovú funkčnú hodnotu (je pravdivá) len pre také hodnoty premenných, ktoré sú totožné s binárnymi hodnotami interpretácie **τ**, pre všetky ostatné hodnoty premenných je funkčná pravdivostná hodnota nulová. Potom disjunktívna forma funkcie φ_{DNF}, ktorá je ekvivalentná formule φ, $\varphi_{DNF} \equiv \varphi$, má tvar

$$\varphi_{DNF} = \bigvee_{\substack{\tau \\ (val_\tau(\varphi)=1)}} x_1^{(\tau)} \wedge x_2^{(\tau)} \wedge \ldots \wedge x_n^{(\tau)} \tag{3.13}$$

kde disjunkcia beží cez všetky τ, pre ktoré $val_\tau(\varphi)=1$.

Analogickým spôsobom zostrojíme aj konjunktívnu formu φ_{KNF} formuly φ, kde $\varphi_{KNF} \equiv \varphi$. V tomto prípade budeme uvažovať len také interpretácie **τ**, ktoré majú nulovú pravdivostnú funkčnú hodnotu, t.j. pre dané τ platí $val_\tau(\varphi)=0$. Definujme pre dané **τ** nové funkčné premenné (literály)

$$\tilde{x}_i^{(\tau)} = \begin{cases} x_i & (\text{ak } val_\tau(x_i)=0) \\ \neg x_i & (\text{ak } val_\tau(x_i)=1) \end{cases} \tag{3.14}$$

Disjunkcia týchto premenných tvorí pomocnú Boolovu funkciu

$$\tilde{\psi}_\tau(x_1,x_2,...,x_n) = \tilde{x}_1^{(\tau)} \vee \tilde{x}_2^{(\tau)} \vee ... \vee \tilde{x}_n^{(\tau)} \tag{3.15}$$

Konjunktívny tvar formuly φ je

$$\varphi_{KNF} = \bigwedge_{\substack{\tau \\ (val_\tau(\varphi)=0)}} \tilde{x}_1^{(\tau)} \vee \tilde{x}_2^{(\tau)} \vee ... \vee \tilde{x}_n^{(\tau)} \tag{3.16}$$

kde konjunkcia beží cez všetky špecifikácie τ, pre ktoré $val_\tau(\varphi)=0$.

To, akým spôsobom zostrojíme Boolovu funkciu, či v disjunktívnej alebo konjunktívnej forme, je určené počtom jednotkových resp. nulových funkčných hodnôt. Tak napr. ak v tabuľke sú dominantné nulové (jednotkové) funkčné hodnoty, potom je výhodné použiť konjunktívnu (disjunktívnu) normálnu formu, týmto výberom sa minimalizuje rozsah zostrojovanej formy. V prípade, keď tabuľka obsahuje približne rovnaký počet nulových a jednotkových funkčných hodnôt, konštrukcia Boolovej funkcie je približne rovnako obtiažna v oboch formách.

Tabuľka 3.9. Určenie dvoch formúl α a β pomocou funkčných hodnôt

#	x_1	x_2	x_3	α	β
1	0	0	0	0	1
2	0	0	1	0	1
3	0	1	0	1	0
4	0	1	1	0	1
5	1	0	0	0	1
6	1	0	1	1	1
7	1	1	0	0	0
8	1	1	1	0	1

Príklad 3.5. Vykonajte konštrukcia Boolových funkcií v disjunktívnej a/alebo konjunktívnej forme, ktoré sú určené funkčnými hodnotami uvedenými v tabuľke 3.8, metódou konštruktívneho dôkazu vety 3.1. V prvom kroku vykonáme konštrukciu formuly α, ktorej funkčné hodnoty sú určené v tab. 3.9 V tomto prípade počet výskytov jednotkových funkčných hodnôt je podstatne menší ako nulových hodnôt, preto konštrukciu vykonáme v disjunktívnej forme. Ku konštrukcii použijeme teda len riadky 3 a 6, interpretácie premenných sú $\boldsymbol{\tau}_3=(x_1/0,x_2/1,x_3/0)$ a $\boldsymbol{\tau}_6=(x_1/1,x_2/0,x_3/1)$. Príslušné konjunkcie $\psi_\tau(x_1,x_2,...,x_n)$ (2.6) majú tvar

$$\psi_{\tau_3}(x_1,x_2,x_3) = \neg x_1 \wedge x_2 \wedge \neg x_3$$

$$\psi_{\tau_6}(x_1,x_2,x_3) = x_1 \wedge \neg x_2 \wedge x_3$$

Použitím (3.7) dostaneme konečný tvar zostrojovanej formy

$$\alpha = (\neg x_1 \wedge x_2 \wedge \neg x_3) \vee (x_1 \wedge \neg x_2 \wedge x_3)$$

V druhom kroku vykonáme konštrukciu konjuktívnej formy formuly β, ktorej funkčné hodnoty sú špecifikované tabuľkou 3.9. Príslušné interpretácie **τ**, ktoré sú priradené nulovým funkčným hodnotám majú tvar: $\tau_3 = (x_1/0, x_2/1, x_3/0)$ a $\tau_7 = (x_1/1, x_2/1, x_3/0)$. Priradené disjunkcie podľa (2.9) týmto interpretáciám sú

$$\omega_{\tau_3}(x_1, x_2, x_3) = x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3$$

$$\omega_{\tau_7}(x_1, x_2, x_3) = \neg x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3$$

Použitím (3.7) dostaneme konečný tvar zostrojovanej konjuktívnej formy

$$\beta = (x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3)$$

Druhý alternatívny dôkaz vety 3.1, použijeme metódu z príkladu 3.2. Táto metóda spočíva v tom, že formulu φ postupne prepisujeme do tvaru φ_{DNF} pomocou známych ekvivalencií výrokovej logiky, akými sú De Morganove zákony a distributívne zákony medzi disjunkciou a konjunkciou. Dôkaz vykonáme indukciou vzhľadom k syntaktickému stromu formuly φ. V tabuľke 3.10 sú uvedené základné formuly pre prepis do tvaru DNF.

Tabuľka 3.10. Elementárne transformácia prepisu formuly φ na φ_{DNF}.

#	Pôvodná formula		Transformovaná formula
1	$(\alpha \wedge \beta)$	$\rightarrow$	$(\alpha) \wedge (\beta)$
2	$(\alpha \vee \beta)$	$\rightarrow$	$(\alpha) \vee (\beta)$
3	$(\alpha \Rightarrow \beta)$	$\rightarrow$	$\neg(\alpha) \vee (\beta)$
4	$(\alpha \equiv \beta)$	$\rightarrow$	$(\neg(\alpha) \wedge \neg(\beta)) \vee ((\alpha) \wedge (\beta))$
5	$\neg(\alpha \wedge \beta)$	$\rightarrow$	$\neg(\alpha) \vee \neg(\beta)$
6	$\neg(\alpha \vee \beta)$	$\rightarrow$	$\neg(\alpha) \wedge \neg(\beta)$
7	$\neg(\alpha \Rightarrow \beta)$	$\rightarrow$	$(\alpha) \wedge \neg(\beta)$
8	$\neg(\alpha \equiv \beta)$	$\rightarrow$	$(\neg(\alpha) \wedge (\beta)) \vee ((\alpha) \wedge \neg(\beta))$
9	$\alpha \wedge (\beta \vee \gamma)$	$\rightarrow$	$(\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma)$
10	$\alpha \vee (\beta \wedge \gamma)$	$\rightarrow$	$(\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma)$

Prvé štyri riadky tejto tabuľky obsahujú transformácie elementárnych logických spojok do tvaru konjunkcie alebo disjunkcie literálov. Ďalšie štyri transformácie 5-8 obsahujú transformácie negácie elementárnych logických spojok do tvaru konjunkcie alebo disjunkcie literálov. Posledné dve transformácie 9 a 10 reprezentujú použitie distributívnzch zákonov medzi konjunkciou a disjunkciou, ktoré musia byť použité k zjednodušeniu upravovanej formuly.

Príklad 3.6. Vykonajte transformáciu formuly

$$\varphi = (p \wedge q) \vee (q \wedge r) \Rightarrow (q \Rightarrow r)$$

do tvaru DNF pomocou elementárnych transformácií z tabuľky 3.10. Tento prepis bude vykonaný pre názornosť ako postupnosť elementárnych krokov:

Krok 1: Centrálna implikácia (tvoriaca koreň príslušného syntaktického stromu) v φ je prepísaná pomocou elementárnej transformácie 3

$$\varphi = \underbrace{(p \wedge q) \vee (q \wedge r)}_{\alpha} \Rightarrow \underbrace{(q \Rightarrow r)}_{\beta}$$

$$\downarrow$$

$$\neg\big((p \wedge q) \vee (q \wedge r)\big) \vee (q \Rightarrow r)$$

Krok 2: Centrálna spojka disjunkcie na ľavej strane je prepísaná pomocou elementárnej transformácie 6 a centrálna spojka na pravej strane je prepísaná pomocou 3

$$\neg\left(\underbrace{(p \wedge q)}_{\alpha} \vee \underbrace{(q \wedge r)}_{\beta}\right) \vee \left(\underset{\gamma}{q} \Rightarrow \underset{\delta}{r}\right)$$

$$\downarrow$$

$$\big(\neg(p \wedge q) \wedge \neg(q \wedge r)\big) \vee (\neg q \vee r)$$

Krok 3. Centrálne spojky konjunkcie sú prepísané pomocou 5

$$\left(\neg\left(\underset{\alpha}{p} \wedge \underset{\beta}{q}\right) \wedge \neg\left(\underset{\gamma}{q} \wedge \underset{\delta}{r}\right)\right) \vee (\neg q \vee r)$$

$$\downarrow$$

$$\big((\neg p \vee \neg q) \wedge (\neg q \vee \neg r)\big) \vee (\neg q \vee r)$$

Krok 4. Centrálna spojka konjunkcie na ľavej strane je roznásobená dvojnásobným použitím elementárnej transformácie 9

$$\left(\underbrace{(\neg p \vee \neg q)}_{\alpha} \wedge \left(\underset{\beta}{\neg q} \vee \underset{\gamma}{\neg r}\right)\right) \vee (\neg q \vee r)$$

$$\downarrow$$

$$\left(\left(\left(\underset{\alpha}{\neg p} \vee \underset{\beta}{\neg q}\right) \wedge \left(\underset{\gamma}{\neg q}\right)\right) \vee \left(\left(\underset{\alpha'}{\neg p} \vee \underset{\beta'}{\neg q}\right) \wedge \left(\underset{\gamma'}{\neg r}\right)\right)\right) \vee (\neg q \vee r)$$

$$\downarrow$$

$$\varphi_{DNF} = (\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg q) \vee (\neg p \wedge \neg r) \vee (\neg q \wedge \neg r) \vee (\neg q) \vee (r)$$

To znamená, že výsledná formula φ_{DNF} je určená poslednou formulou z predchádzajúcej schémy formúl

$$\varphi_{DNF} = (\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg q) \vee (\neg p \wedge \neg r) \vee (\neg q \wedge \neg r) \vee (\neg q) \vee (r)$$

V kapitole X bude ukázané, že tento proces transformácie ľubolnej formuly φ môže byť názorne reprezentovaný koreňovým stromom nazývaným sémantické tablo.

Pomocou tohto jednoduchého ilustratívneho príkladu sme ukázali, že v princípe každá formula výrokovej logiky môže byť prepísaná do ekvivalentného DNF tvaru pomocou postupnosti elementárnych transformácií z tabuľky 3.10. Spôsob dôkazu vety 3.2 môže byť charakterizovaný ako úplná indukcia vzhľadom k syntaktickému stromu danej formuly. Idúc zhora nadol, vždy pomocou vhodnej elementárnej transformácie z tabuľky 3.10 vykonáme vhodný prepis formuly tak, aby bol bližšie k tvaru DNF formuly. Poznamenajme, že analogický dôkaz môže byť vykonaný aj pre konštrukciu KNF formuly.

Na záver tejto kapitoly upriamime našu pozornosť na rôzne podmnožiny logických spojok z celkovej množiny $S=\{\neg,\Rightarrow,\wedge,\vee,\equiv,\uparrow,\downarrow\}$ z pohľadu podmienky ich úplnosti, t.j. schopnosti vyjadriť ľubovoľnú výrokovú formulu (Boolovu funkciu) len pomocou niektorých logických spojok tvoriacich podmnožinu $S'\subset S$.

Veta 3.2.
(1) *Podmnožina* $S'=\{\neg,\wedge,\vee\}$ *je úplná,*
(2) *podmnožiny* $S'=\{\neg,\wedge\}$ *a* $S''=\{\neg,\vee\}$ *sú uplné,*
(3) *podmnožina* $S'=\{\neg,\Rightarrow\}$ *je úplná a*
(4) *podmnožiny* $S'=\{\uparrow\}$ *a* $S''=\{\downarrow\}$ *sú uplné.*

Vlastnosť (1) vyplýva z vety (3.1), podľa ktorej, každá výroková formula môže byť vyjadrená pomocou ekvivalentnej NDF alebo NKF. Vlastnosť (2) vyplýva z už dokázanej vlastnosti (1) a De Morganových zákonov výrokovej logiky . Vlastnosť (3) vyplýva z vlastnosti (2) špecifikovanej pre podmnožinu $S''=\{\neg,\vee\}$ a zo zákona nahradenia implikácie výrokovej logiky $(p\Rightarrow q)\equiv(\neg p\vee q)$. Konečne, vlastnosť (4) vyplýva z vlastností Peircovho a Shafferovho symbolu, ktorí boli diskutované v tejto kapitole v texte za tabuľkou 3.2.

Cvičenia

Cvičenie 3.1. Prepíšte z prirodzeného jazyka do jazyka výrokovej logiky:
(a) *Jano pôjde na výlet a Fero pôjde na výlet*; (1) vyjadrite túto vetu pomocou implikácie a negácie a (2) vykonajte negáciu pôvodnej vety.
(b) *Eva pôjde na výlet alebo Viera nepôjde na výlet*; (1) vyjadrite túto vetu pomocou implikácie a negácie a (2) vykonajte negáciu pôvodnej vety.
(c) *Ak Viera pôjde na výlet, potom Fero nepôjde na výlet*; (1) vyjadrite túto vetu pomocou implikácie a disjunkcie a (2) vykonajte inverziu pôvodnej implikácie.
(d) Ak Viera alebo Jano pôjdu na výlet, potom Fero pôjde na výlet a Eva nepôjde na výlet; (1) vyjadrite túto vetu pomocou implikácie a disjunkcie a negácie a (2) vykonajte inverziu pôvodnej implikácie.
(e) *Viera na výlet pôjde a Eva na výlet nepôjde*; (1) vyjadrite túto vetu konjunkcie a (2) vykonajte negáciu pôvodnej vety.

Cvičenie 3.2. Negujte tieto výroky.
(a) Budem sa prechádzať alebo si budem spievať.
(b) Jano nefandí ani Slovanu ani Interu.
(c) Ak je streda, potom máme schôdzu.
(d) Ak sa budem moc učiť, tak pôjdem študovať na vysokú školu.
(e) Ak sa budem moc učiť a budem mať trochu šťastia, potom urobím skúšku z logiky.
(f) Dám ti facku, ak ma oklameš.
(g) Ak bude pekné počasie a nepokazí sa nám auto, potom pôjdeme na výlet a budeme sa kúpať.

Cvičenie 3.3. Zostrojte syntaktické stromy formúl, zostrojte podformuly daných formúl:
(a) $p\Rightarrow(q\Rightarrow p)$,
(b) $((p\Rightarrow q)\wedge(q\Rightarrow r))\Rightarrow(p\Rightarrow r)$,

(c) $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$,
(d) $(p \wedge q) \Rightarrow (p \vee q)$,
(e) $p \Rightarrow (\neg p \Rightarrow q)$,
(f) $((p \Rightarrow q) \Rightarrow p) \Rightarrow q$.

Cvičenie 3.4. Prečo uvedené výrazy nie sú formuly výrokovej logiky?
(a) $((p \Rightarrow q) \wedge (\vee (q \Rightarrow r))) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$,
(b) $(p \wedge q) \Rightarrow (p \looparrowright q)$.

Cvičenie 3.5. Preverte pomocou tabuľkovej metódy, ktoré formuly z cvičenia 3.3 sú tautológie, kontradikcie a splniteľné.

Cvičenie 3.6. Použitím tabuľkovej metódy určite pre ktoré interpretácie premenných τ sú výrokové formuly splniteľné:
(a) $((p \vee q) \Rightarrow r) \wedge (\neg r \Rightarrow p)$,
(b) $((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \Rightarrow \neg r)$.

Cvičenie 3.7. Preverte pomocou tabuľkovej metódy zákony výrokovej logiky (1-13) zo str. 10-11.

Cvičenie 3.8. Dokážte tieto ekvivalencie:

(a) $(p \wedge q) \equiv (p \downarrow p) \downarrow (q \downarrow q)$,

(b) $(p \vee q) \equiv (p \downarrow q) \downarrow (p \downarrow q)$,

(c) $(p \wedge q) \equiv (p \uparrow q) \uparrow (p \uparrow q)$,

(d) $(p \vee q) \equiv (p \uparrow p) \uparrow (q \uparrow q)$.

Cvičenie 3.9. Pretransformujte do DNF a KNF výrokové formuly:
(a) $(p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow \neg r)$,

(b) $\neg (p \wedge q \wedge q) \Rightarrow p$,

(c) $(((p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow \neg q)) \Rightarrow \neg p)$.

Cvičenie 3.10. Zostrojte DNF a KNF Boolovej funkcie určenej tabuľkou

#	x_1	x_2	x_3	α
1	0	0	0	1
2	0	0	1	1
3	0	1	0	0
4	0	1	1	0
5	1	0	0	1
6	1	0	1	1
7	1	1	0	0
8	1	1	1	0

Cvičenie 3.11. Zostrojte Boolovu funkciu $(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4)=f(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$ pomocou ktorej je implementovaný súčin dvoch binárnych čísel $(\alpha_1\alpha_2)$ a $(\alpha_3\alpha_4)$

$$\begin{array}{r} \alpha_1\ \alpha_2 \\ \times\alpha_3\ \alpha_4 \\ \hline \beta_4\ \beta_3\ \beta_2\ \beta_1 \end{array}$$

Cvičenie 3.12. Zostrojte Boolovu funkciu $(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=f(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$ pomocou ktorej je implementovaný súčet dvoch binárnych čísel $(\alpha_1\alpha_2)$ a $(\alpha_3\alpha_4)$

$$\begin{array}{r} \alpha_1\ \alpha_2 \\ \alpha_3\ \alpha_4 \\ \hline \beta_1\ \beta_2\ \beta_3 \end{array}$$

Cvičenie 3.13. Zostrojte Boolovu funkciu $f(x,y,z)$ vo forme konjuktívnej a disjunktívnej normálnej formy

(a) $x=y=0,z=1$,

(b) $x=0,y=1,z=0$,

(c) $y=z=1$.

Cvičenie 3.14. Zostrojte Boolovu funkciu $f(x,y,z)$ vo forme sumy produktov klauzúl k premenným *x*, *y* a *z*, ktorá je ekvivalentná s funkciou

(a) $F(x,y,z)=x+y+\overline{z}$,

(b) $F(x,y,z)=x\overline{z}$.

Literatúra

[1] Gahér, F.: *Stoická sémantika a logika. Z pohľadu intenzionálnej logiky*. Vydavateľstvo UK, Bratislava, 2006.

[2] Kvasnička V., Pospíchal, J.: *Matematická logika*. Vydavateľstvo STU, Bratislava, 2006.

[3] Kvasnička V., Pospíchal, J.: *Algebra a diskrétna matematika*. Vydavateľstvo STU, Bratislava, 2008.

[4] Peregrin, J: *Logika a logiky*. Academia, Praha, 2004.

[5] Sochor, A.: *Klasická matematická logika*. Karolinum, Praha, 2001.

[6] Svoboda, V., Peregrin. J.: *Od jazyka k logice. Filozofický úvod do moderní logiky*. Academia, Praha, 2009.

[7] Švejdar, V.: *Logika: neúplnost, složitost a nutnost*. Academia, Praha, 2002.

[8] Zouhar, M.: *Základy logiky pre spoločenskovedné a humanitné odbory*. Veda, Bratislava, 2008.