

## Riešenie cvičení z 4. kapitoly

**Cvičenie 2.1.** Nájdite model pre tieto formuly

(a)  $\psi = p \Rightarrow (q \Rightarrow p)$

$$\psi = \{0,1\}^2 \text{ (tautológia)}$$

(b)  $\psi = ((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$

$$\psi = \{0,1\}^3 \text{ (tautológia)}$$

(c)  $\psi = (p \Rightarrow q) \Rightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$

$$\psi = \{0,1\}^2 \text{ (tautológia)}$$

(d)  $\psi = (p \wedge q) \Rightarrow (p \wedge \neg q)$

$$\psi = \{\tau_1 = (0,0), \tau_2 = (0,1), \tau_3 = (1,0)\} \text{ (splniteľná)}$$

(e)  $\psi = p \Rightarrow (q \Rightarrow \neg p)$

$$\psi = \{\tau_1 = (0,0), \tau_2 = (0,1), \tau_3 = (1,0)\} \text{ (splniteľná)}$$

(f)  $\psi = (p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r) \Rightarrow (q \vee r)$ .

$$\psi = \{\tau_1 = (0,0,0), \tau_2 = (0,0,1), \tau_3 = (0,1,0), \tau_4 = (1,0,1), \tau_5 = (0,1,1), \tau_6 = (1,1,0), \tau_7 = (1,1,1)\} \text{ (splniteľná)}$$

**Cvičenie 2.2.** Dokážte, že pre teóriu  $\Phi$  a pre formulu  $\varphi$  platí  $\Phi \vdash \varphi$

(a)  $\Phi = \{p, p \Rightarrow q, q \Rightarrow r\}$ ,  $\varphi = r$ ,

$$\Phi = \{\tau_1 = (1,1,1)\},$$

$$\varphi = \{\tau_1 = (0,0,1), \tau_2 = (0,1,1), \tau_3 = (1,0,1), \tau_4 = (1,1,1)\},$$

platí  $\Phi \subset \varphi$ , potom  $\Phi \vdash \varphi$ .

(b)  $\Phi = \{p \Rightarrow (q \Rightarrow r), q\}$ ,  $\varphi = p \Rightarrow r$ ,

$$\Phi = \{\tau_1 = (0,1,0), \tau_2 = (0,1,1), \tau_3 = (1,1,1)\}$$

$$\varphi = \{\tau_1 = (0,0,0), \tau_2 = (0,0,1), \tau_3 = (0,1,0), \tau_4 = (0,1,1), \tau_5 = (1,0,1), \tau_6 = (1,1,1)\}$$

platí  $\Phi \subset \varphi$ , potom  $\Phi \vdash \varphi$ .

(c)  $\Phi = \{p, \neg p\}$ ,  $\varphi = q$ ,

$$\Phi = \emptyset,$$

$$\varphi = \{\tau_1 = (0,0), \tau_2 = (1,0)\}$$

platí  $\Phi \subset \varphi$ , potom  $\Phi \vdash \varphi$ , t. j.  $p \wedge \neg p \Rightarrow q$  (tautológia).

**Cvičenie 2.3.** Zostrojte pre danú teóriu  $\Phi$  formulu  $\varphi$ , ktorá je jej sémantickým dôsledkom

- (a)  $\Phi = \{p \Rightarrow q, \neg p \Rightarrow q\}$ ,  $\varphi = q$   
 (b)  $\Phi = \{p \Rightarrow q \vee r, q\}$ ,  $\varphi = q$   
 (c)  $\Phi = \{p \Rightarrow q \wedge r, q\}$ ,  $\varphi = p \Rightarrow p \wedge r$   
 (d)  $\Phi = \{p \wedge q \Rightarrow r, p\}$ ,  $\varphi = p \Rightarrow r$ ,  
 (e)  $\Phi = \{p \vee q \Rightarrow r, p\}$ ,  $\varphi = r$ .

**Cvičenie 2.4.** Doplňte výsledok u týchto schém usudzovania

- (1)  $\frac{p \Rightarrow q}{p} \frac{p \Rightarrow q}{q}$ , (2)  $\frac{p \Rightarrow q}{\emptyset} \frac{p \Rightarrow q}{q}$ , (3)  $\frac{p \Rightarrow q}{\emptyset} \frac{p \Rightarrow q}{\neg p}$ , (4)  $\frac{p \Rightarrow q}{\neg p} \frac{p \Rightarrow q}{\neg q}$ ,  
 (5)  $\frac{\neg p \Rightarrow q}{\emptyset} \frac{\neg p \Rightarrow q}{q}$ , (6)  $\frac{\neg p \Rightarrow q}{\emptyset} \frac{\neg p \Rightarrow q}{p}$ , (7)  $\frac{\neg p \Rightarrow q}{q} \frac{\neg p \Rightarrow q}{\neg p}$ , (8)  $\frac{\neg p \Rightarrow q}{p} \frac{\neg p \Rightarrow q}{\neg q}$ ,  
 (9)  $\frac{p \Rightarrow \neg q}{\neg q} \frac{p \Rightarrow \neg q}{\neg p}$ , (10)  $\frac{p \Rightarrow \neg q}{\neg p} \frac{p \Rightarrow \neg q}{\neg q}$ , (11)  $\frac{p \Rightarrow \neg q}{\emptyset} \frac{p \Rightarrow \neg q}{\neg p}$ , (12)  $\frac{p \Rightarrow \neg q}{\emptyset} \frac{p \Rightarrow \neg q}{\neg q}$ ,  
 (13)  $\frac{\neg p \Rightarrow \neg q}{\emptyset} \frac{\neg p \Rightarrow \neg q}{p}$ , (14)  $\frac{\neg p \Rightarrow \neg q}{p} \frac{\neg p \Rightarrow \neg q}{\neg q}$ , (15)  $\frac{\neg p \Rightarrow \neg q}{\neg q} \frac{\neg p \Rightarrow \neg q}{\emptyset}$ , (16)  $\frac{\neg p \Rightarrow \neg q}{\emptyset} \frac{\neg p \Rightarrow \neg q}{\neg q}$ ,

**Cvičenie 2.5.** Doplňte výsledok u týchto schém usudzovania

- (1)  $\frac{p \Rightarrow q}{q \Rightarrow r} \frac{p \Rightarrow q}{p \Rightarrow r}$ , (2)  $\frac{p \Rightarrow q}{p \Rightarrow q \wedge r} \frac{p \Rightarrow q}{p \Rightarrow r}$ , (3)  $\frac{p \Rightarrow q}{p \vee r \Rightarrow q} \frac{p \Rightarrow q}{r \Rightarrow q}$ , (4)  $\frac{p \Rightarrow \neg q}{q \Rightarrow \neg p \wedge r} \frac{p \Rightarrow \neg q}{q \Rightarrow r}$ , (5)  $\frac{\neg p \Rightarrow q}{\neg p \Rightarrow r} \frac{\neg p \Rightarrow q}{q \Rightarrow r}$

**Cvičenie 2.6.** Overte správnosť/nesprávnosť dôsledkov, v prípade nesprávneho dôsledku upravte predpoklady tak, aby dôsledok bol správny:

- (a) Ak motor nebeží, potom je motor chybný alebo nejde prúd.  
 Ak je motor chybný, potom sa musí zavolať opravár.  
 Prúd ide.

---

Ak nebeží motor, potom sa musí zavolať opravár.

Elementárne výroky:

$p$  = motor beží,

$q$  = motor je chybný,

$r$  = ide prúd,

$s$  = musí sa zavolať opravár.

1. predpoklad:  $\varphi_1 = (\neg p) \Rightarrow (q \vee \neg r)$

2. predpoklad:  $\varphi_2 = (q \Rightarrow s)$

3. predpoklad:  $\varphi_3 = r$

záver:  $\varphi = (\neg p \Rightarrow s)$

1.  $\neg p$  (aktivácia predpokladu)
2.  $(\neg p) \Rightarrow (q \vee \neg r)$  (1. predpoklad)
3.  $q \Rightarrow s$  (2. predpoklad)
4.  $r$  (3. predpoklad)
5.  $(q \vee \neg r) = (r \Rightarrow q)$  (aplikácia modus ponens na 1. a 2.)
6.  $q$  (aplikácia modus ponens na 4. a 5.)
7.  $s$  (aplikácia modus ponens na 3. a 6.)
8.  $\neg p \Rightarrow s$  (deaktivácia predpokladu)

Týmto sme dokázali, že záver je dokázateľný z predpokladov.

(b) Je doma alebo je v kaviarni.

Ak je doma, potom vás očakáva.

Ak vás neočakáva, potom je v kaviarni.

Elementárne výroky:

$p$  = je doma,

$q$  = je v kaviarni,

$r$  = očakáva vás.

1. predpoklad:  $\varphi_1 = (p \vee q)$

2. predpoklad:  $\varphi_2 = (p \Rightarrow r)$

záver:  $\varphi = (\neg r \Rightarrow q)$

1.  $\neg r$  (aktivácia predpokladu)
2.  $p \vee q \Rightarrow (\neg p \Rightarrow q)$  (1. predpoklad)
3.  $p \Rightarrow r$  (2. predpoklad)
4.  $\neg p$  (modus tollens pre 1. a 3.)
5.  $q$  (modus ponens pre 2. a 4.)
6.  $\neg r \Rightarrow q$  (deaktivácia predpokladu)

Týmto sme dokázali, že záver je dokázateľný z predpokladov.

(c) Nie je pravda, že študent vie po nemecky a anglicky.  
Študent nevie po anglicky.

---

Študent nevie po nemecky.

Elementárne výroky:

$p$  = študent vie po nemecky,

$q$  = študent vie po anglicky,

1. predpoklad:  $\varphi_1 = \neg(p \wedge q) = (\neg p \wedge \neg q) = (p \Rightarrow \neg q)$

2. predpoklad:  $\varphi_2 = \neg q$

---

záver:  $\varphi = \neg p$

Záver nie je dokázateľný, ak sa však predpoklady zmodifikujú takto:

Nie je pravda, že študent vie po nemecky a nevie po anglicky.  
Študent nevie po anglicky.

---

Študent nevie po nemecky.

1. predpoklad:  $\varphi_1 = \neg(p \wedge \neg q) = (\neg p \wedge q) = (p \Rightarrow q)$

2. predpoklad:  $\varphi_2 = \neg q$

---

záver:  $\varphi = \neg p$

Záver jednoducho odvodíme aplikáciou modus tollens na 1. a 2.

(d) Ak študujem, získam dobré postavenie.  
Ak neštudujem, potom si užívam.

---

Užívam si alebo dosiahnem dobré postavenie.

Elementárne výroky:

$p$  = študujem,

$q$  = získam dobré postavenie,

$r$  = užívam si

1. predpoklad:  $\varphi_1 = p \Rightarrow q$

2. predpoklad:  $\varphi_2 = \neg p \Rightarrow r$

---

záver:  $\varphi = (q \vee r) \equiv (\neg q \Rightarrow r)$

- |    |  |                                      |
|----|--|--------------------------------------|
| 1. | $\neg q$                                   | (aktivovaný predpoklad)              |
| 2. | $p \Rightarrow q$                          | (1. predpoklad)                      |
| 3. | $\neg p \Rightarrow r$                     | (2. predpoklad)                      |
| 4. | $\neg p$                                   | (aplikácia modus tollens na 1. a 2.) |
| 5. | $r$  | (aplikácia modus ponens na 3. a 4.)  |
| 6. | $(\neg q \Rightarrow r) \equiv (q \vee r)$ | (deaktivácia predpokladu)            |

Týmto sme dokázali, že záver je dokázateľný z predpokladov.

**Cvičenie 2.7.** Aké sú dôsledky týchto predpokladov:

(a)

Karol pocestuje vlakom alebo autobusom

Ak pocestuje Karol autobusom alebo autom, potom pricestuje neskoro

Karol nepricestoval neskoro

---

?

Riešenie: Karol pricestoval vlakom.

(b)

Karol pocestuje vlakom alebo lietadlom

ak pocestuje lietadlom, potom navštívi priateľov

nenavštívilo priateľov

---

?

Riešenie: Karol pocestuje vlakom.

(c)

ak pocestujem do zahraničia, potom si zoberiem dovolenku

ak si zoberiem dovolenku, potom som necestoval do zahraničia

---

?

Riešenie: Nepocestujem do zahraničia.

(d)

nie som občanom štátu XY

ak by som sa narodil v AB, potom by som bol občanom XY

---

?

Riešenie: Nenarodil som sa v AB

(e)

som absolventom univerzity v PQ

ak by som bol sociológom, potom nemôžem byť absolventom univerzity v PQ

---

?

Riešenie: Nie som sociológom

(f)

som učiteľom a taktiež som aj informatikom

---

ak je niekto informatikom, potom má vysoké IQ

---

?

(g)

Jano je informatikom

ak je Jano informatikom alebo matematikom, potom studoval v CD

---

?

Riešenie: Mám vysoké IQ.