ADM a logika

5. prednáška

Sémantické tablá

Úvodné poznámky

Cieľom dnešnej prednášky je moderná „sémantická metóda“ verifikácie skutočnosti, či formula φ je tautológia alebo kontradikcia:

Metóda sémantických tabiel

(angl. semantic tableaux), ktorá je založená na systematickom postupe transformácie výrokovej formuly do tvaru DNF, ktorý má jednoduché podmienky pre kontradikčnosť alebo splniteľnosť.

Základná terminológia z Boolovych funkcií

Východiskový elementárny pojem je ***výroková premenná***: $p, q, r, \ldots$.
Literál je buď výroková premenná alebo jej negácia. Literály sú ***pozitívne*** (výroková premenná) alebo ***negatívne*** (negácia výrokovej premennej). Dva literály sú ***komplementárne*** ak majú tvar p a $\neg p$.

Konjunktívna* (*disjunktívna*) *klauzula je konjunkcia (disjunkcia) literálov.
Disjunktívna (konjunktívna) normálna forma (*DNF*) (***KNF***) je disjunkcia (konjunkcia) konjuktívnych klauzulí (disjunktívnych klauzulí).

Konjunktívna klauzula je kontradikcia vtedy a len vtedy ak obsahuje komplementárne literály. Podobne, disjunktívna klauzula je tautológia vtedy a len vtedy ak obsahuje komplmentárne literály

$$\underbrace{x \wedge \neg x}_{0} \wedge y \wedge \neg z \wedge \ldots \equiv 0$$

$$\underbrace{x \vee \neg x}_{1} \vee y \vee \neg z \vee \ldots \equiv 1$$

Ku každej výrokovej formule φ existuje jej DNF a KNF formula, ktorá je s ňou ekvivalentná, $\varphi \equiv \varphi_{DNF}$ resp. $\varphi \equiv \varphi_{KNF}$.

Veta 3.1.

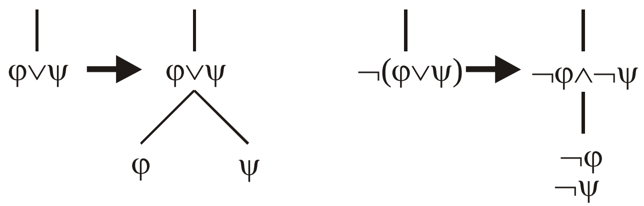
(1) Formula φ je ***kontradikcia*** vtedy a len vtedy, ak jej ekvivalentná DNF formula φ_{DNF} má všetky konjunktívne klauzuly také, že obsahujú dvojicu komplementárnych literálov.

(2) Formula φ je ***tautológia*** vtedy a len vtedy, ak jej ekvivalentná KNF formula φ_{KNF} má všetky disjunktívne klauzuly také, že obsahujú dvojicu komplementárnych literálov.

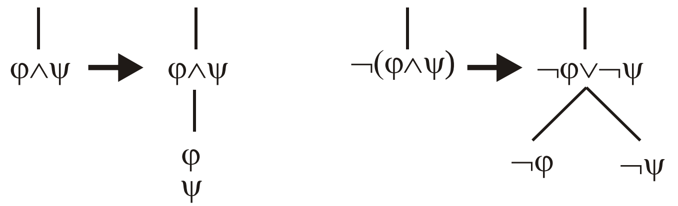
(3) Formula φ je ***splniteľná*** ak jej normálna forma (konjunktívna φ_{KNF} alebo disjunktívna φ_{DNF}) obsahuje aspoň jednu klauzulu, ktorá neobsahuje dvojicu komplementárnych literálov.

Príklad diagramamticej metódy transformácie formuly φ na DNF/KNF

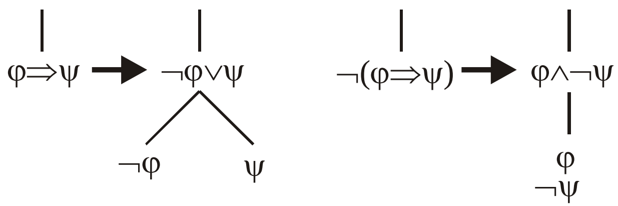
Tabuľka diagramamtických elementárnych operácií pre tvorbu DNF



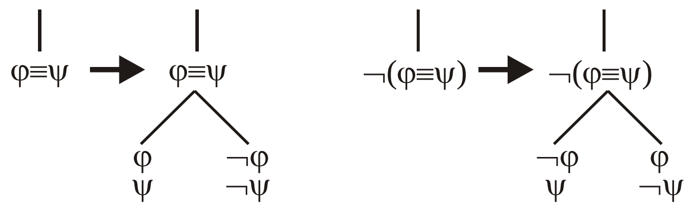
A (*disjunkcia*)



B (*konjunkcia*)

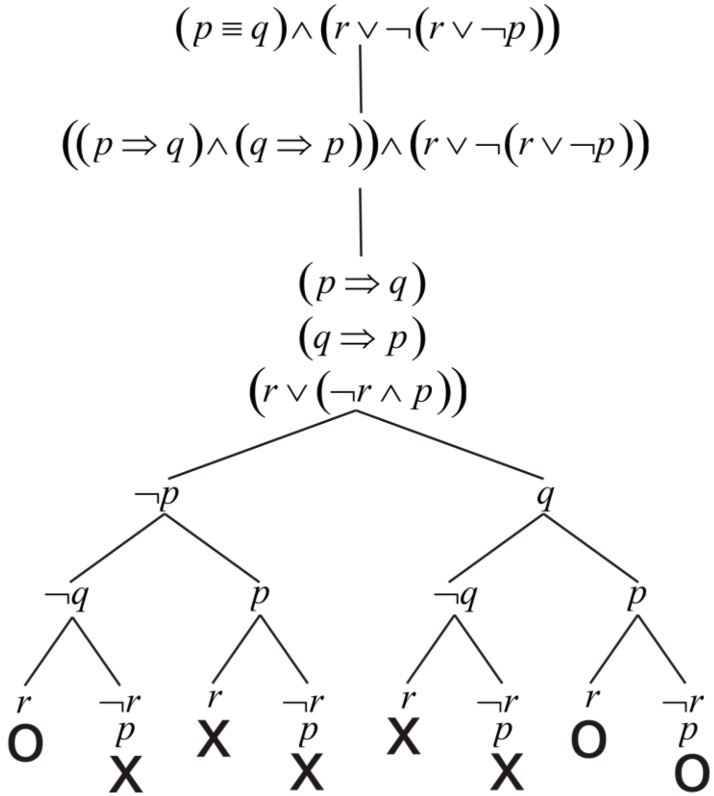


C (*implikácia*)



D (*ekvivalencia*)

Vykonajte transformáciu formule $\varphi = (p \equiv q) \wedge (r \vee \neg(r \vee \neg p))$ do DNF tvaru



$$\varphi_{DNF} = (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee \underbrace{(q \wedge p \wedge r) \vee (q \wedge p \wedge \neg r)}_{rezolventa}$$

$$= (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (q \wedge p) \vee \cancel{(r \wedge \neg r)}$$

$$= (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (q \wedge p)$$

$$\varphi = (p \equiv q) \wedge \big(r \vee \neg(r \vee \neg p)\big) \equiv \varphi_{DNF} = (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (q \wedge p)$$

#	p	q	r	$p \equiv q$	$r \vee \neg p$	$\neg(r \vee \neg p)$	$r \vee \neg(r \vee \neg p)$	φ
1	0	0	0	1	1	0	0	**0**
2	0	0	1	1	1	0	1	**1**
3	0	1	0	0	1	0	0	**0**
4	0	1	1	0	1	0	1	**0**
5	1	0	0	0	0	1	1	**0**
6	1	0	1	0	1	0	1	**0**
7	1	1	0	1	0	1	1	**1**
8	1	1	1	1	1	0	1	**1**

$\tau_1 = (0,0,1)$

$\tau_2 = (1,1,\#)$

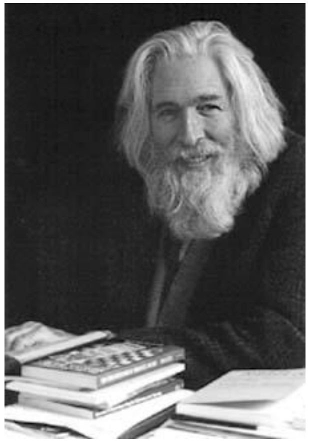
Súhrn: Pomocou diagramatickej metódy ľahko a prehladne vykonáme transformáciu formule φ do tvaru DNF.

Metóda sémantických tabiel

Metóda sémantických tabiel bola naformulovaná ako dôležitý a efektívny prostriedok pre jednoduchú konštrukciu pravdivostnej interpretácie formúl nielen výrokovej logiky, ale hlavne neklasických logík, pre ktoré je táto technika vlastne jediným prístupom k získaniu pravdivostnej interpretácie.

(A) E. W. Beth

(B) J. Hintikka



(C) R. Smullyan

Tvorcovia techniky sémantických tabiel. (A) Belgický matematik a logik Evert Willem Beth (1908 –1964), ktorého práce podstatne ovplyvnili základy matematiky. (B) Fínsky filozof a logik Jaakko Hintikka (1929) patrí medzi významné osobnosti, ktoré sa zaslúžili o rozvoj modálnej logiky. (C) Americký matematik, filozof, logik a koncertný umelec Raymond Smullyan vytvoril modernú verziu sémantických tabiel.

Proces transformácie formuly φ do DNF tvaru môže byť reprezentovaný koreňovým stromom (nazývaný ***sémantické tablo***), ktorý už predpokladá, že z formuly boli odstránené ekvivalencie a implikácie. Aplikáciou vyššie uvedených pravidiel zostrojíme sémantické tablo (koreňový strom) pre transformáciu formuly do DNF tvaru. Tie vetve stromu, ktoré obsahujú komplementárne literály sú označené symbolom ´×´ a nazývajú sa ***uzavreté vetve***. Podobne, tie vetve, ktoré neobsahujú komplementárne literály sú označené symbolom ´´ a nazývajú sa ***otvorené vetve***. Ak sémantické tablo obsahuje len uzavreté vetve, potom sa nazýva ***uzavreté sémantické tablo***, v opačnom prípade, ak obsahuje aspoň jednu otvorenú vetvu, potom sa nazýva ***otvorené sémantické tablo***. Sémantické tablo priradené formule φ je označené $\mathcal{T}(\varphi)$.

V čom spočíva výhoda sémantického tabla pred formálnymi manipuláciami s formulou φ, ktoré ju transformujú do DNF tvaru?

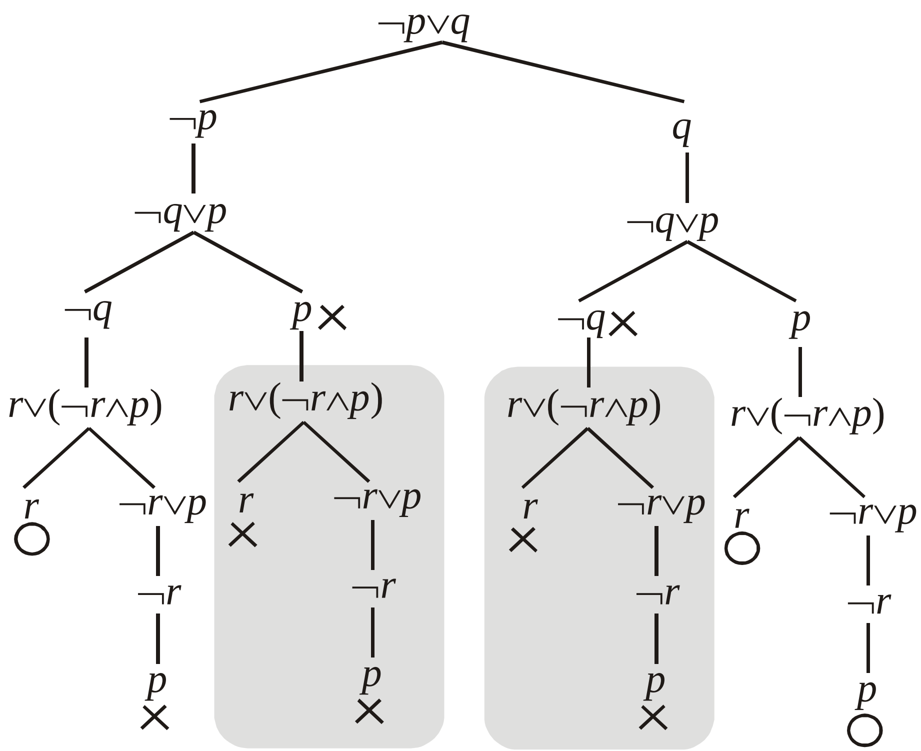
Aplikácia distribučných zákonov pri úprave formuly DNF tvaru je pomerne náročnou operáciou a preto je výhodné prenechať ju diagramatickej metódy konštrukcie sémantického tabla. Druhý, nemenej dôležitý aspekt konštrukcie je uzavretie tej vetvy, ktorá obsahuje komplementárne literály. Predlžovanie takejto vetve už neprináša žiadnu novú skutočnosť z pohľadu toho, či daná formula je kontradikciou alebo je splniteľná. Prípadne ďalšie výskyty dvojíc komplementárnych literálov už nemení nič na skutočnosti, že daný konjunkt v DNF je nepravdivý. Preto táto možnosť „okamžitého“ uzavretia vetvy pri konštrukcii sémantického tabla obvykle patrí medzi významné zjednodušenia jeho konštrukcie, celé veľké podstromy v sémantickom table môžu byť ignorované ako nevýznamné.

Veta 3.2.

(1) Formula φ je ***kontradikcia*** vtedy a len vtedy, ak sémantické tablo $\mathcal{T}(\varphi)$ je uzavreté .

(2) Formula φ je ***tautológia*** vtedy a len vtedy, ak sémantické tablo $\mathcal{T}(\neg\varphi)$ je uzavreté.

(3) Formula φ je ***splniteľná*** vtedy a len vtedy, ak sémantické tablo $\mathcal{T}(\varphi)$ alebo $\mathcal{T}(\neg\varphi)$ obsahuje aspoň jednu uzavretú vetvu a jednu otvorenú vetvu.



Koncové vrcholy označené symbolom ´×´ znamená, že príslušná vetva stromu je uzavretá a nepravdivá (obsahuje komplementárne literály). Koncové vrcholy označené symbolom ´○´ znamená, že príslušná vetva je otvorená splniteľná. V tomto prípade existujú špecifikácie premenných $\tau_1 = (p/0, q/0, r/1)$, $\tau_2 = (p/1, q/1, r/1)$ a $\tau_3 = (p/1, q/1, r/0)$ pre ktoré je formula pravdivá.

Formula φ je logickým dôsledkom formuly z množiny formúl (predpokladov) $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n\}$ ako postupnosť formúl $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m)$, kde $\alpha_m = \varphi$. Táto podmienka je ekvivalentná s podmienkou $\vdash \varphi_1 \wedge ... \wedge \varphi_n \Rightarrow \varphi$, t. j. skúmaním, či táto formula logický vyplýva z axiomatického systému. Pomocou sémantických tabiel je problém $\vdash \varphi_1 \wedge ... \wedge \varphi_n \Rightarrow \varphi$ formulovateľný veľmi efektívne pomocou vety:

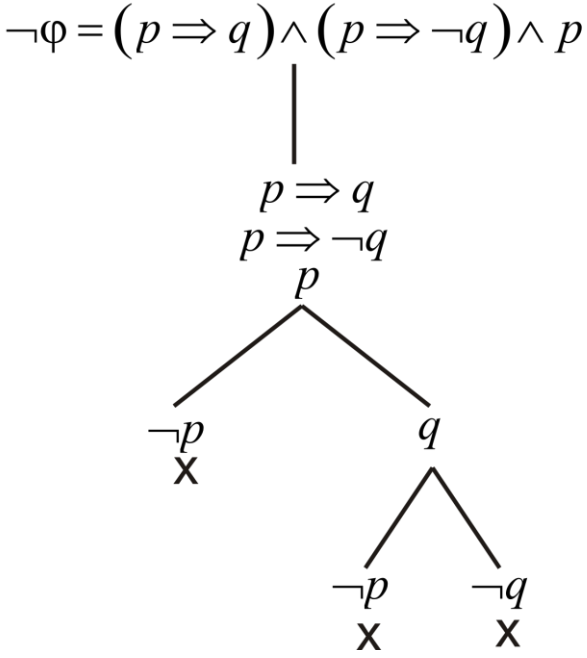
Veta 3.3. Formula φ je logickým dôsledkom množiny formúl $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n\}$, $\Phi \vdash \varphi$, vtedy a len vtedy, ak sémantické tablo, ktorého vrchol je priradený formule $\varphi_1 \wedge ... \wedge \varphi_n \wedge \neg\varphi$, je uzavreté.

Príklad

Pomocou techniky sémantického tabla verifikujte logické vyplývanie (pravidlo reductio ad absurdum)

$$\{p \Rightarrow q, p \Rightarrow \neg q\} \vdash \neg p$$

Zostrojíme sémantické tablo pre formulu $\neg\varphi = (p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow \neg q) \wedge p$



Konštrukcia sémantického vyplývania pomocou sémantických tabiel

Prvú úlohu, ktorú budeme riešiť v tomto aplikačnom odseku kapitoly, bude úloha zostrojiť pomocou sémantických tabiel množinu interpretácií pre teóriu $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n\}$

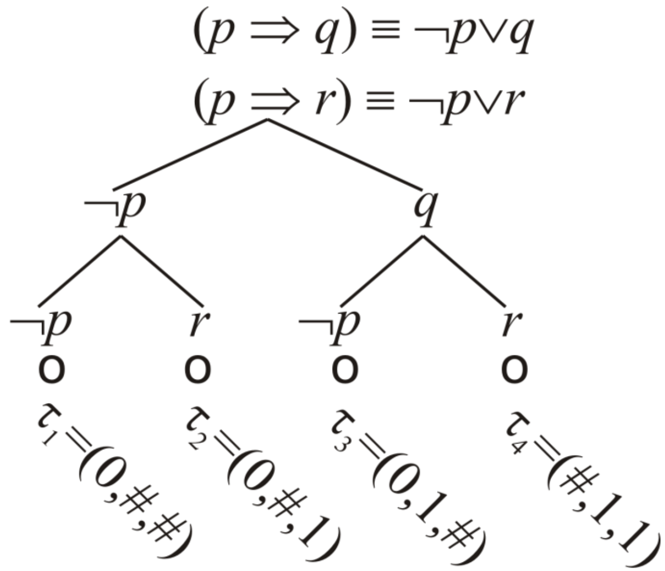
$$\Phi = \{\tau_1, \tau_2, ..., \tau_a\}$$

Danú úlohu rieši nasledujúca veta

Veta 3.4.
Interpretácie z množiny $\Phi = \{\tau_1, \tau_2, ..., \tau_a\}$ sú určené pomocou otvorených vetví sémantického tabla $\mathcal{T}(\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge ... \wedge \varphi_n)$. Každej otvorenej vetve môžeme priradiť interpretáciu $\boldsymbol{\tau} \in \Phi$, pre ktorú sú všetky literály na danej vetve pravdivé

Príklad

Uvažujme teóriu $\Phi = \{p \Rightarrow q, p \Rightarrow r\}$, našim cieľom bude zostrojiť množinu modelov Φ .



Sémantické tablo $\mathcal{T}\big((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)\big)$pre teóriu $\Phi = \{p \Rightarrow q, p \Rightarrow r\}$, v tomto prípade každá vetva je otvorená, čiže môžeme k nej priradiť interpretáciu $\boldsymbol{\tau}_i$, pre i = 1, 2, 3, 4.

$$\boldsymbol{\tau}_1 = (0,\#,\#),\ \boldsymbol{\tau}_2 = (0,\#,1),\ \boldsymbol{\tau}_3 = (0,1,\#),\ \boldsymbol{\tau}_4 = (\#,1,1)$$

Ak poznáme množinu modelov Φ, potom môžeme zostrojiť funkcie φ, ktorá je pravdivá pre každú interpretáciu $\boldsymbol{\tau} \in \Phi$, t. j. je tautologickým dôsledkom teórie Φ. Definujme premenné pre danú interpretáciu $\boldsymbol{\tau} = (\tau_1, \tau_2, ..., \tau_a) \in \Phi$

$$p_i^{(\tau_i)} = \begin{cases} p_i & (ak\ \tau_i = 1) \\ \neg p_i & (ak\ \tau_i = 0) \\ 1 & (ak\ \tau_i = \#) \end{cases}$$

Potom môžeme definovať konjunktívnu klauzulu (pozri (2.6))

$$\psi_\tau(p_1, p_2, ..., p_n) = p_1^{(\tau)} \wedge p_2^{(\tau)} \wedge ... \wedge p_n^{(\tau)}$$

Pomocou tejto klauzuly definujme výslednú funkciu

$$\varphi(p_1, p_2, ..., p_n) = \bigvee_{\tau \in \Phi} p_1^{(\tau)} \wedge p_2^{(\tau)} \wedge ... \wedge p_n^{(\tau)}$$

ktorá je pravdivá pre každú interpretáciu $\boldsymbol{\tau} \in \Phi$

$$(\forall \boldsymbol{\tau} \in \Phi)(val_{\boldsymbol{\tau}}(\varphi) = 1)$$

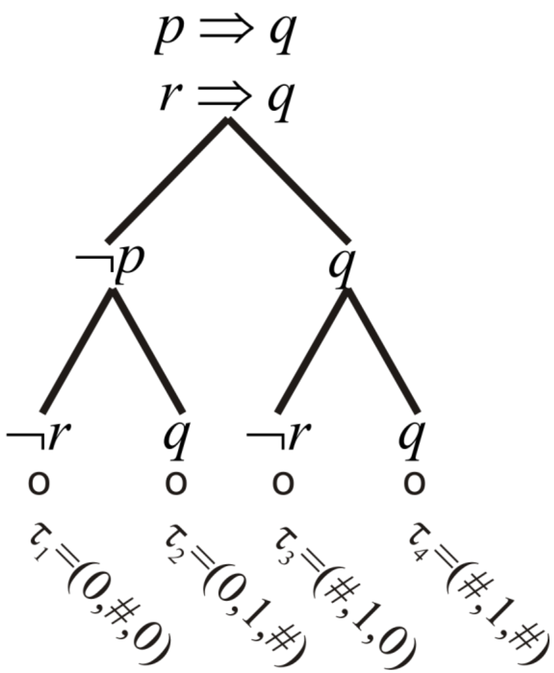
$$\begin{aligned}\varphi(p,q,r) &= (\neg p)\vee(\neg p\wedge r)\vee(\neg p\wedge q)\vee(q\wedge r)\\ &= (\neg p)\wedge\underbrace{(1\vee r\vee q)}_{1}\vee(q\wedge r)\\ &= (\neg p)\vee(q\wedge r) = (p\Rightarrow q\wedge r)\end{aligned}$$

Táto formula tautologicky vyplýva z predpokladov obsiahnutých v teórii $\Phi = \{p\Rightarrow q, p\Rightarrow r\}$

$$\{p\Rightarrow q, p\Rightarrow r\}\models(p\Rightarrow q\wedge r)$$

Príklad

Uvažujme teóriu $\Phi = \{ p \Rightarrow q, r \Rightarrow q \}$, našim cieľom bude zostrojiť množinu modelov Φ .

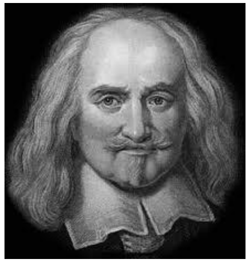


Model Φ obsahuje tieto interpretácie

$$\Phi = \left\{ \tau_1 = (0,\#,0), \tau_2 = (0,1,\#), \tau_3 = (\#,1,0), \tau_4 = (\#,1,\#) \right\}$$

Potom funkcia φ, ktorá tautologicky vyplýva z modelu $\Phi \vDash \varphi$ má tvar

$$\begin{aligned}\varphi &= (\neg p \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q) \vee (q \wedge \neg r) \vee (q)\\ &\equiv (\neg p \wedge \neg r) \vee \underbrace{(\neg p \vee \neg r \vee 1)}_{1} \wedge q\\ &\equiv (\neg p \wedge \neg r) \vee q \equiv \neg(p \vee r) \vee q\\ &\equiv p \vee r \Rightarrow q\end{aligned}$$

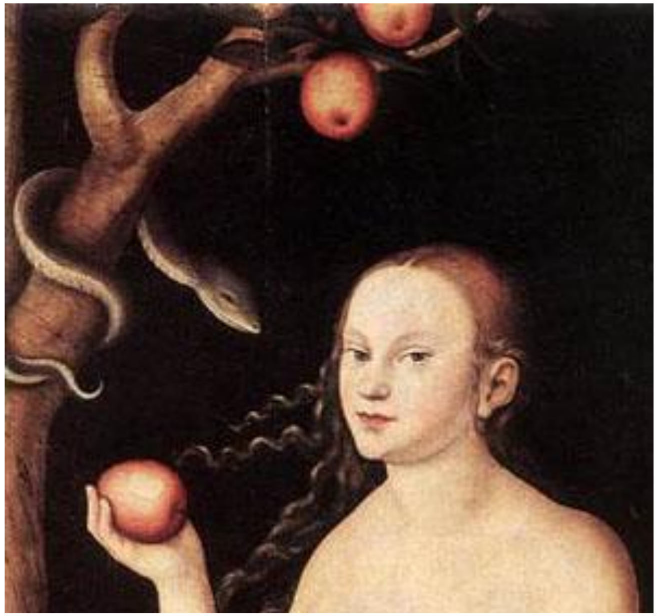


Poznámka: Použitie techniky konštrukcie tautologického vyplývania $\Phi \vDash \varphi$ pomocou sémantického tabla možno charakterizovať ako špeciálny druh výpočtu - kalkulu. Pre anglického filozofa T. Hobbesa[1] myslenie už bolo len špeciálny druh výpočtu. Táto hypotéza, ktorá v 17. storočí znela veľmi neobvykle ba až exoticky, až v súčasnosti bola plne akceptovaná a realizovaná pomocou umelej inteligencie a kognitívnej vedy, kde má postavenie centrálnej paradigmy.

---

[1] Hobbesovi pripadalo riešenie Aristetolových sylogizmov ako špeciálny druh výpočtu, preto aj myslenie, vo všeobecnosti, považoval za špecifický výpočet.

Nová verzia podania jablka



The End