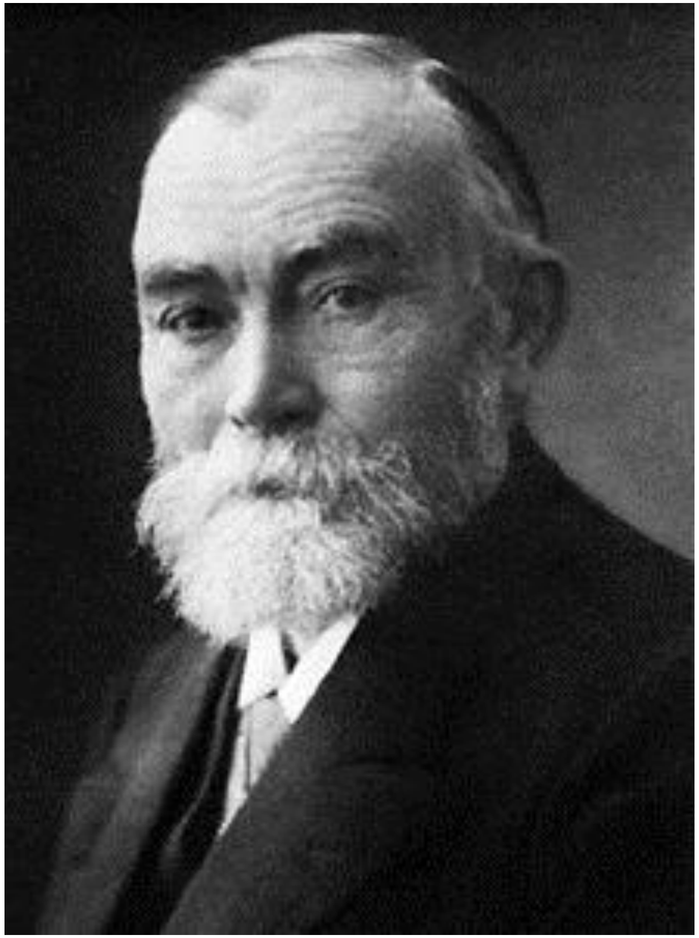
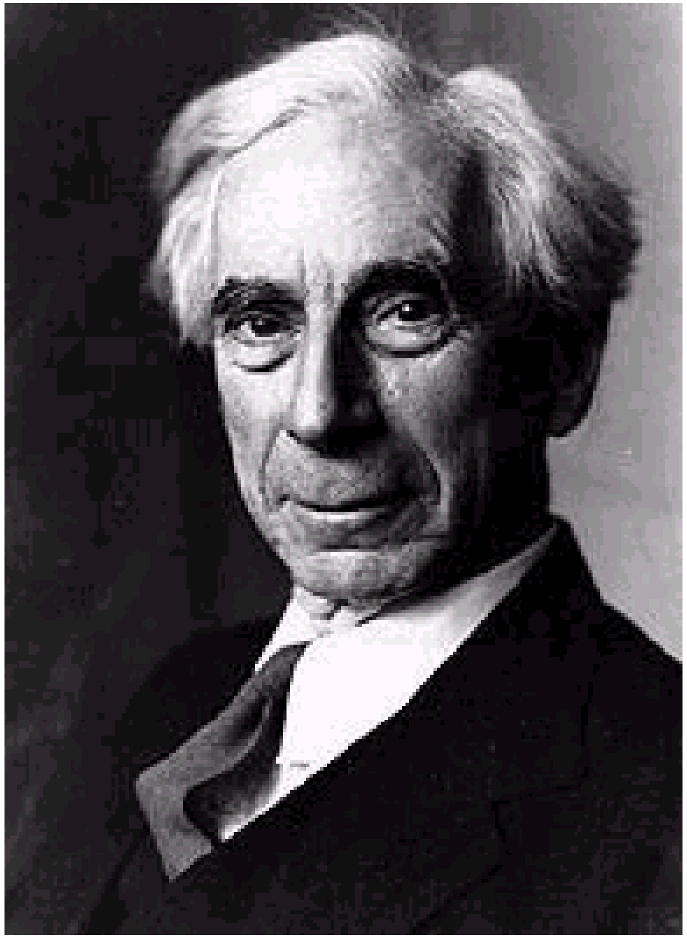
7. kapitola

Predikátová logika I
Úvod do predikátovej logiky



Gottlob Frege (1848 - 1925)



Bertrand Russell (1872-1970)

Intuitívny prechod od výrokovej logiky k predikátovej logike

Príklad 1

Milan je študent
Každý študent má index
___
Milan má index

- Druhá premisa obsahuje slovo „***každý***“, s ktorým si vo výrokovej logike nevieme poradiť.
- Výroková logika ***nepokrýva všetky situácie a možnosti*** ľudského usudzovania, ktoré sú podstatne bohatšie, ako možnosti výrokovej logiky.

- Ohraničenosť výrokovej logiky je možné prekonať jej zovšeobecnením na ***predikátovú logiku***, ktorá je schopná postihnúť aj procesy usudzovania podobné vyššie uvedenému príkladu.

Označme písmenom

- *S* vlastnosť – predikát byť študentom
- *I* vlastnosť – predikát mať vec–index.

$$\frac{\begin{array}{l}\text{Milan je } S\\ \text{Každý kto je S má } I\end{array}}{\text{Milan má } I}$$

Vidíme, že aj táto čiastočná formalizácia schémy usudzovania ešte nie je moc nápomocná k riešeniu problému jej korektnosti.

Zavedieme predikáty:

- symbol $S(m)$ označuje predikát S (byť študentom) s konštantou m (Milan), jeho význam je „Milan je študent“.
- symbol $I(m)$ označuje predikát I (mať index) s konštantou m, jeho význam je „Milan má index“, kde
- symbol $\forall$ označuje *univerzálny kvantifikátor.*
- symbol $\forall x$ čítame ako „pre každé x“ .

$$\begin{array}{l} S(m) \\ \forall x\big(S(x) \Rightarrow I(x)\big) \\ \hline I(m) \end{array}$$

Interpretácia univerzálneho kvantifikátora

Výraz $\forall x\left(S(x)\Rightarrow I(x)\right)$ môžeme jednoducho interpretovať ako konjunkciu implikácií pre rôzne osoby (konštanty), napr. Milan, Jozef, Rudolf,...

$$\forall x\left(S(x)\Rightarrow I(x)\right)\equiv\left(S(m)\Rightarrow I(m)\right)\wedge\left(S(j)\Rightarrow I(j)\right)\wedge\left(S(r)\Rightarrow I(r)\right)\wedge\ldots$$

$$\equiv\underset{x\in U}{\mathring{U}}\left(S(x)\Rightarrow I(x)\right)$$

kde U je množina objektov – osôb. Ako dôsledok výrokovej formuly $p\wedge q\wedge r\ldots\Rightarrow p$

$$\forall x\left(S(x)\Rightarrow I(x)\right)\Rightarrow\left(S(m)\Rightarrow I(m)\right)$$

Pozorovanie: Zo všeobecného výroku $\forall x P(x)$, kde $P(x)$ je predikát definovaný nad univerzom U, vyplýva aj jeho *konkretizácia* pre konštantu $a \in U$

$$\boxed{\forall x P(x) \Rightarrow P(a)}$$

Rozšírená schéma usudzovania

$$\frac{S(m)}{\forall x\big(S(x)\Rightarrow I(x)\big)}$$

$$\frac{\forall x\big(S(x)\Rightarrow I(x)\big)\Rightarrow\big(S(m)\Rightarrow I(m)\big)}{I(m)}$$

Upravíme pomocou pravidla modus ponens

$$\begin{array}{l} S(m) \\ \underline{S(m)\Rightarrow I(m)} \\ I(m) \end{array}$$

Týmto sme dokázali korektnosť usudzovania pôvodnej verbálne formulovanej schémy usudzovania. Musíme však zdôrazniť, že k tomu, aby sme dokázali korektnosť tejto schémy používajúcej väzbu „***každý***“ museli sme ***opustiť rámec výrokovej logiky*** a zaviesť predikáty a symbol $\forall x$, čím sme sa dostali z domény výrokovej logiky do domény tzv. predikátovej logiky.

Príklad 2

Milan je študent
Milan má index

Niektorý objekt je študent a má index

Podobne ako v predchádzajúcom príklade, táto intuitívne korektná schéma usudzovania nemôže byť študovaná v rámci výrokovej logiky.

Budeme formalizovať túto schému podobným spôsobom, ako v predchádzajúcom ilustratívnom príklade. Zavedieme nový symbol nazývaný *existenčný kvantifikátor* $\exists x$, ktorý čítame ako „existuje také x“.

$$\frac{\begin{array}{l} S(m) \\ I(m) \end{array}}{\exists x\big(S(x) \wedge I(x)\big)}$$

Výraz $\exists x\big(S(x) \wedge I(x)\big)$ môžeme jednoducho interpretovať ako disjunkciu konjunktívnych výrokov pre rôzne osoby, napr. Milan, Jozef, Rudolf,...

$$
\begin{aligned}
\exists x\big(S(x)\wedge I(x)\big) &\equiv \big(S(m)\wedge I(m)\big)\vee\big(S(j)\wedge I(j)\big)\vee\big(S(r)\wedge I(r)\big)\vee\ldots \\
&\equiv \bigvee_{x\in U}\big(S(x)\wedge I(x)\big)
\end{aligned}
$$

Z tejto interpretácie existenčného kvantifikátora vyplýva implikácia

$$
\big(S(m)\wedge I(m)\big)\Rightarrow \exists x\big(S(x)\wedge I(x)\big)
$$

Pozorovanie: Z partikulárneho výroku $P(a)$ môžeme pomocou existenčného kvantifikátora zostrojiť výrok $\exists xP(x)$, kde $P(x)$ je predikát definovaný nad univerzom U

$$
\boxed{P(a)\Rightarrow \exists xP(x)}
$$

Formálne základy predikátovej logiky

Jeden zo spôsobov ako zovšeobecniť výrokovú logiku je rozšírenie výrokovej logiky na predikátovú logiku pomocou je zavedenie dvoch kvantifikátorov (univerzálneho a existenčného). ***Univerzálny kvantifikátor*** je definovaný takto

$$(\forall x)P(x) =_{def} \begin{cases} \bigwedge_{x\in U} P(x) \equiv P(a) \wedge P(b) \wedge \ldots \wedge P(u) & (pre\,U \neq \emptyset) \\ 1 & (pre\,U = \emptyset) \end{cases}$$

kde x je indivíduová premenná z univerza $U = \{a,b,\ldots,u\}$. Formula $(\forall x)P(x)$ je pravdivá práve vtedy, ak predikát P je ***pravdivý pre každé indivíduum*** z univerza U, túto formulu čítame takto: „pre každý objekt z univerza U platí predikát (vlastnosť) P“.

Ilustračný príklad univerzálneho kvantifikátora nech je výrok „každý študent má index“, ktorý môžeme vyjadriť takto

$$
\begin{aligned}
(\forall x)Mat'\_index(x) &=_{def} \bigwedge_{x\in U} Mat'\_index(x) \\
&\equiv Mat'\_index(Fero) \wedge Mat'\_index(Jano) \wedge \ldots
\end{aligned}
$$

Množina – univerzum U vztiahnutá k tomuto kvantifikátoru má tvar

$$U = \{Fero, Jano, ..., Jana\}$$

obsahuje všetkých študentov.

Podobným spôsobom môžeme zaviesť aj ***existenčný kvantifikátor***[1]

$$\left(\exists x\right)P\left(x\right)=_{def}\begin{cases}\bigvee\limits_{x\in U}P\left(x\right)\equiv P\left(a\right)\vee P\left(b\right)\vee\ldots\vee P\left(u\right) & \left(U\neq\emptyset\right)\\ 0 & \left(U=\emptyset\right)\end{cases}$$

ktorý je ***pravdivý aspoň pre jedno indivíduum*** z univerza *U*, túto formulu čítame takto: „aspoň pre jeden objekt z univerza *U* platí predikát (vlastnosť) *P*“. Jednoduchý ilustračný príklad existenčného kvantifikátora je výrok „niektorí študenti vedia po anglický“

$$\left(\exists x\right)Vedie\check{t}\_anglicky\left(x\right)=_{def}\bigvee\limits_{x\in U}Vedie\check{t}\_anglicky\left(x\right)$$
$$\equiv Vedie\check{t}\_anglicky\left(Fero\right)\vee\ldots\vee Vedie\check{t}\_anglicky\left(Jana\right)$$

---

[1] Táto definícia univerzálneho a existenčného kvantifikátora je formálne korektná len pre konečné alebo spočítateľné univerzum *U*. Avšak, pre nespočítateľné univerzum (napr. úsečku *U* = <0,1>), táto definícia kvantifikátorov je nekorektná. Autor sa domnieva, že výhodnosť týchto dvoch „nekorektných“ definícií kvantifikátorov je tak veľká, že ospravedlňuje aj tento „teoretický lapsus“ pre nespočítateľné univerzá.

Medzi univerzálnym a existenčným kvantifikátorom existuje vzťah, ktorý sa dá jednoducho odvodiť z ich definícií použitím ***De Morganových vzťahov***

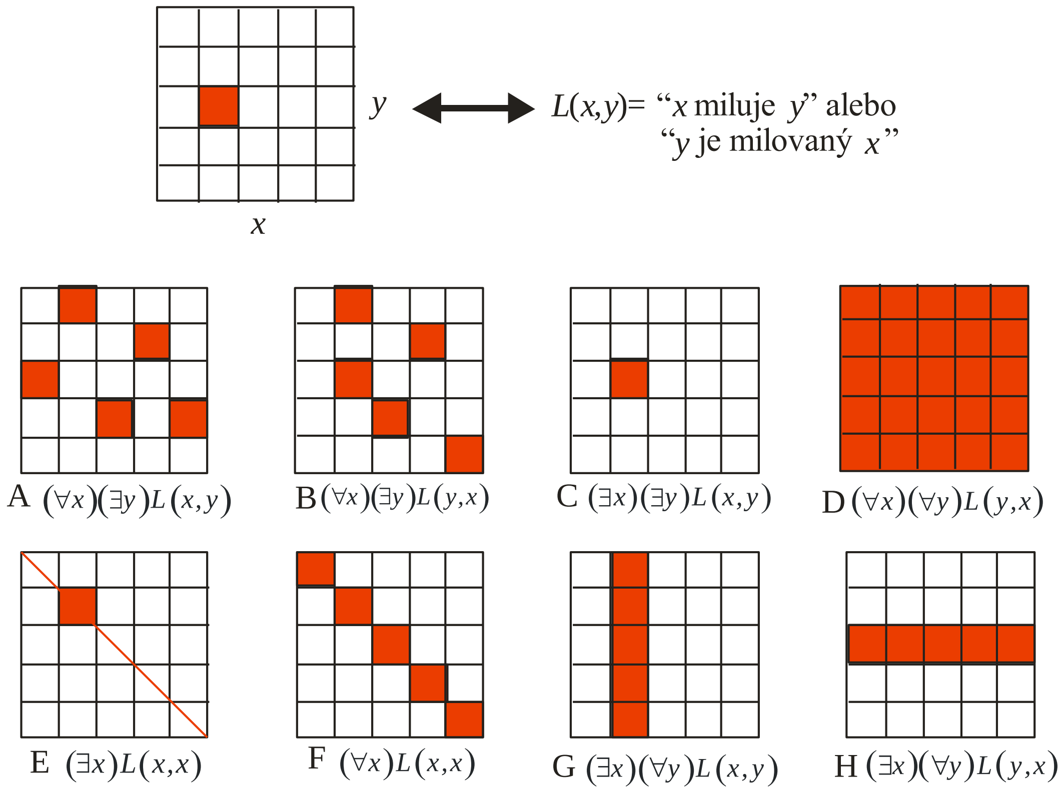
$$\neg(\forall x)P(x) \equiv (\exists x)\neg P(x)$$
$$\neg(\exists x)P(x) \equiv (\forall x)\neg P(x)$$

Pomocou týchto dvoch formúl ľahko sa dokáže vlastnosť, že vybraný kvantifikátor sa môže vyjadriť pomocou druhého kvantifikátora

$$(\forall x)P(x) \equiv_{def} \neg(\exists x)\neg P(x)$$

$$(\exists x)P(x) \equiv_{def} \neg(\forall x)\neg P(x)$$

Ilustračné príklady pre kvantifikátory



Ilustratívne znázornenie významu binárneho predikátu $L(x,y)$, ktorý sa interpretuje ako "*x* miluje *y*" alebo "*y* je milovaný *x*", kde *x* a *y* sú osoby z množiny *U* obsahujúcej päť elementov. Význam jednotlivých diagramov je tento:

(A) "*Každý je niekým milovaný*", $(\forall x)(\exists y)L(x,y)$, žiadny stĺpec nie je prázdny;
(B) "*každý je niekým milovaný*", $(\forall x)(\exists y)L(y,x)$, žiadny riadok nie je prázdny;
(C) "*niekto je niekým milovaný*", $(\exists x)(\exists y)L(y,x)$, $(\exists x)(\exists y)L(x,y)$, jedno políčko je obsadené;
(D) "*každý miluje každého*", $(\forall x)(\forall y)L(y,x)$ alebo $(\forall x)(\forall y)L(x,y)$, každý riadok a stĺpec sú plne obsadené;
(E) "*niekto je milovaný sebou samým*", $(\exists x)L(x,x)$, aspoň jedno políčko na hlavnej diagonále je obsadené;
(F) "*každý miluje sám seba samého*", $(\forall x)L(x,x)$, všetky políčka na diagonále sú obsadené;
(G) "*niekto miluje každého*", $(\exists x)(\forall y)L(x,y)$, existuje úplne zaplnený stĺpec;
(H) "*každý miluje niekoho*", $(\exists x)(\forall y)L(y,x)$, existuje úplne zaplnený riadok.

Jazyk predikátovej logiky (syntax)

Ako už bolo naznačené v predchádzajúcej časti tejto kapitoly, jazyk predikátovej logiky bude bohatší ako jazyk výrokovej logiky, bude obsahovať vyjadrovacie prostriedky, pomocou ktorých sme schopní rozlišovať jednotlivé objekty (indivídua), ich vlastnosti a vzťahy medzi nimi. Konštrukcia formúl výrokovej logiky na základe definícií 1.2 a 1.3 bude rozšírená o predikáty a kvantifikátory.

Definícia. Symboly jazyka predikátovej logiky sú

(1) množina indivíduových premenných $\mathcal{U} = \{x, y, ..., x_1, x_2, ...\}$;

(2) množina indivíduových konštánt $\mathcal{C} = \{a, b, ..., a_1, b_2, ...\}$;

(3) množina predikátových symbolov (predikátov) $\mathcal{P} = \{P, Q, ..., P_1, P_2, ...\}$;

(4) množina logických symbolov $\mathcal{L} = \{\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \equiv, \forall, \exists\}$;

(5) množina pomocných symbolov $\mathcal{B} = \{(,)\}$.

Syntax formúl predikátovej logiky je určený touto definíciou:

Definícia. Jazyk predikátovej logiky je definovaný nad množinami z predchádzajúcej definície takto:

***Termy*:**

(1) Indivíduové premenné a indivíduové konštanty sú termy;

(2) žiadne iné symboly nie sú termy.

***Atomické formuly*:**

(1) Ak P je n-miestny predikátový symbol, t_1, t_2, ..., t_n sú termy, potom výraz $P(t_1,t_2, ...,t_n)$ je atomická formula;

(2) žiadne iné symboly nie sú atomické formuly.

***Formuly*:**

(1) Každá atomická formula je formula;

(2) ak φ a ψ sú formule, x je premenná, potom výrazy $(\neg\varphi)$, $(\varphi\wedge\psi)$, $(\varphi\vee\psi)$, $(\varphi\Rightarrow\psi)$, $(\varphi\equiv\psi)$, $((\forall x)\varphi)$ a $((\exists x)\varphi)$ sú formuly.

(3) Žiadne iné symboly nie sú formuly.

Základnou entitou jazyka predikátovej logiky je ***formula*** (označovaná malými gréckymi písmenami), ktorej spôsob konštrukcie je určený predchádzajúcou definíciou rekurentného charakteru.

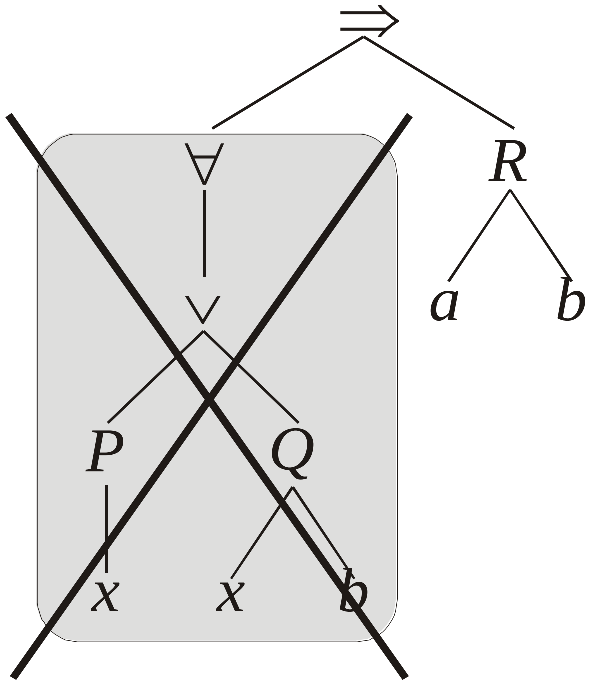
Príklad

Študujme tieto dva reťazce symbolov

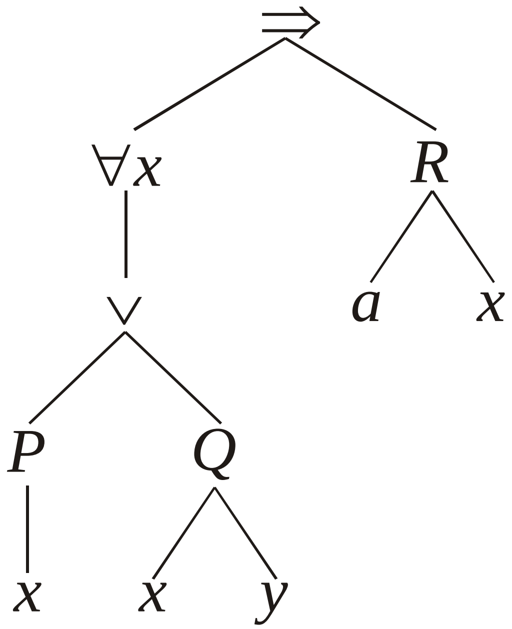
$$\xcancel{\alpha = \left(\left(\forall\right)\left(P\left(x\right) \vee Q\left(x,b\right)\right)\right) \Rightarrow R\left(a,b\right)}$$

$$\beta = \left(\left(\forall x\right)\left(P\left(x\right) \vee Q\left(x,y\right)\right)\right) \Rightarrow R\left(a,x\right)$$

kde P je unárny predikát, Q a R sú binárne predikáty, a a b sú konštanty, x a y sú premenné. Reťazec α nie je formula, pretože symbol $\forall$ nie je nasledovaný symbolom premennej. Reťazec β je korektná formula.



formula α



formula β

Príklad

Zapíšte pomocou jazyka predikátovej logiky tieto výroky prirodzeného jazyka:

(1) Každý riaditeľ má aspoň jedného podriadeného zamestnanca.
Riešenie: $(\forall x)\ \left(R(x) \Rightarrow (\exists y) P(x,y)\right)$, kde $R(x)$ znamená, že indivíduum x je riaditeľ, $P(x,y)$ znamená, že indivíduum y je podriadením indivídua x.

(2) Neexistuje taký človek, ktorý by sa každému páčil.
Riešenie: $\neg(\exists x)(\forall y)\, P(x,y)$, kde $P(x,y)$ znamená, že indivíduum x sa páči indivíduu y.

(3) Nie je pravda, že každý člen vedenia podniku je aj majiteľom podnikových akcií.
Riešenie: $\neg(\forall x)\left(V(x) \Rightarrow A(x)\right)$, kde $V(x)$ znamená, že indivíduum x je člen vedenia podniku a $A(x)$ znamená, že indivíduum x je majiteľom podnikových akcií.

(4) Postupnosť $\{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$ má limitu a: Pre každé $\varepsilon > 0$ existuje také n_0, že pre každé $n > n_0$ platí $|a - a_n| < \varepsilon$.

Riešenie: $\forall(\varepsilon > 0)\,\exists(n_0)\,\forall(n > n_0)\big(|a - a_n| < \varepsilon\big)$.

(5) Funkcia $f(x)$ má v bode x_0 minimum: existuje také $\varepsilon > 0$, že pre každé $x \in U_\varepsilon(x_0) = \{x \mid x_0 - \varepsilon < x < x_0 + \varepsilon\}$ platí $f(x) \geq f(x_0)$. (Množina $U_\varepsilon(x_0)$ je ε-okolie bodu x_0).

Riešenie: $\exists(\varepsilon > 0)\,\forall\big(x \in U_\varepsilon(x_0)\big)\big(f(x) \geq f(x_0)\big)$.

(6) V každom meste je radnica , v niektorých mestách radnica nie je.

Riešenie: $\Big((\forall x)\big(M(x) \Rightarrow R(x)\big)\Big) \vee \Big((\exists x)\big(M(x) \wedge \neg R(x)\big)\Big)$, kde $M(x)$ znamená, že indivíduum x je mesto, symbol $R(x)$ znamená, že indivíduum x má radnicu.

Pravdivostné hodnotenie formúl predikátovej logiky (sémantika)

Problém pravdivostného hodnotenia formúl predikátovej modálnej logiky je podstatne zložitejší proces ako vo výrokovej logike. K tomu, aby sme toto hodnotenie korektne realizovali, musíme poznať tzv. interpretáciu konštánt a predikátových symbolov. Pre lepšie pochopenie tohto nového problému budeme študovať ilustračný príklad.

Príklad

Majme formulu $(\forall x)\big(P(x) \Rightarrow (\exists y)Q(x,y)\big)$, kde P je unárny predikát a Q je binárny predikát. Uvažujme tieto dve rôzne interpretácie:

(1) Interpretácia $\mathcal{I}_1$. Indivíduá sú ľudia. Predikát $P(x)$ reprezentuje vlastnosť „objekt x je učiteľ“ a predikát $Q(x,y)$ reprezentuje vlastnosť objekt y je žiakom objektu x. Potom študovaná formula má význam „každý učiteľ má aspoň jedného žiaka, pravdivostná hodnota tejto formuly je pravda.

(2) Interpretácia $\mathcal{I}_2$. Indivíduá sú prirodzené čísla. Predikát $P(x)$ reprezentuje vlastnosť „objekt x je prvočíslo“, predikát Q(x,y) reprezentuje vlastnosť „objekt x je deliteľný objektom y, pričom $y \neq x$. Význam formule je „pre každé prvočíslo x existuje také iné prvočíslo y, ktoré je deliteľom x“, čo je evidentne nepravdivý výraz.

Z toho jednoduchého príkladu vyplýva, že ***pravdivostná hodnota predikátovej formuly je určená interpretáciou*** $\mathcal{I}$ ***premenných, konštánt a predikátov***.

Pravdivostná hodnota formuly s univerzálnym kvantifikátorom $(\forall x)P(x)$ je pravdivá vtedy, keď v rámci zvolenej interpretácie $\mathcal{I}$ je predikát $P(x)$ vždy pravdivý.

Formula s existenčným kvantifikátorom $(\exists x)P(x)$ je pravdivá vtedy, keď v rámci zvolenej interpretácie $\mathcal{I}$ je predikát $P(x)$ pravdivý aspoň pre jeden objekt.

Príklad

Potom formula $(\forall x)\big(P(x)\Rightarrow(\exists y)Q(x,y)\big)$ je pravdivá práve vtedy, ak predikát – podformula $P(x)\Rightarrow(\exists y)Q(x,y)$ je vždy pravdivá. Táto podmienka je splnená napríklad vtedy, ak jednotlivé výrazy z formule interpretujeme pomocou $\mathcal{I}_1$ (kde univerzum je množina ľudí), predikát $P(x)$ je pravdivý, ak x je učiteľ a predikát $Q(x,y)$ pravdivý vtedy, ak y je žiakom x. Pre alternatívnu interpretáciu $\mathcal{I}_2$ (kde univerzum je množina prvočísel) formula $(\forall x)\big(P(x)\Rightarrow(\exists y)Q(x,y)\big)$ je nepravdivá.

Výpočet pravdivostnej hodnoty pre danú interpretáciu $\mathcal{I}$

(1) Formula $\varphi = P(t_1, t_2, ..., t_n)$, pre danú interpretácie $\mathcal{I}$ je pravdivá

(2) Ak φ a ψ sú formuly, ich pravdivostné vyhodnotené bolo vykonané v predchádzajúcom kroku pre interpretáciu $\mathcal{I}$ (t. j. poznáme $\mathcal{I} \models \varphi$ a $\mathcal{I} \models \psi$), potom nové formuly majú pravdivostné hodnoty určené takto:

- $(\mathcal{I} \models \neg\varphi) =_{def} \neg(\mathcal{I} \models \varphi)$
- $(\mathcal{I} \models \varphi \wedge \psi) =_{def} (\mathcal{I} \models \varphi) \wedge (\mathcal{I} \models \psi)$
- $(\mathcal{I} \models \varphi \vee \psi) =_{def} (\mathcal{I} \models \varphi) \vee (\mathcal{I} \models \psi)$
- $(\mathcal{I} \models \varphi \Rightarrow \psi) =_{def} (\mathcal{I} \not\models \varphi) \vee (\mathcal{I} \models \psi)$
- $(\mathcal{I} \models \varphi \equiv \psi) =_{def} (\mathcal{I} \models \varphi) \equiv (\mathcal{I} \models \psi)$
- $(\mathcal{I} \models (\forall x)\, \varphi(x)) =_{def}$ *pre každé* $x \in U\, (\mathcal{I} \models \varphi(x))$
- $(\mathcal{I} \models (\exists x)\, \varphi(x)) =_{def}$ *pre niektoré* $x \in U\, (\mathcal{I} \models \varphi(x))$

Definícia 5.3.

(1) Formula φ sa nazýva ***splniteľná*** v interpretácii $\mathcal{I}$ vtedy a len vtedy, ak je v tejto interpretácii pravdivá, $\mathcal{I} \models \varphi$.

(2) Formula φ sa nazýva ***tautológia*** vtedy a len vtedy, ak je splniteľná pre každú interpretáciu $\mathcal{I}$, $\mathcal{I} \models \varphi$, čo zapisujeme $\models \varphi$, alebo $(\models \varphi) =_{def} (\forall \mathcal{I})(\mathcal{I} \models \varphi)$.

Príklad

Pre dve rôzne interpretácie $\mathcal{I}_1$ a $\mathcal{I}_2$ zostrojíme pravdivostnú hodnotu formuly

$$\varphi = (\forall x)\big(P(x) \Rightarrow (\exists x)Q(x,y)\big)$$

(1) Interpretácia $\mathcal{I}_1$

$$U = \{ľudia\}$$

$$P(x)...objekt\ x \in U\ \ je\ občanom\ Slovenska$$

$$Q(x,y)...objekt\ x \in U\ \ je\ príbuzný\ s\ objektom\ y \in U$$

Formula φ je pravdivá pre interpretáciu $\mathcal{I}_1$

(2) Interpretácia $\mathcal{I}_2$

$$U = \{2,3,4,...\}$$

$$P(x)...objekt\ x \in U\ \ je\ prvočíslo$$

$$Q(x,y)...objekt\ x \in U\ \ je\ delteľný\ objektom\ x \in U,\ kde\ x \neq$$

ˇ Formula φ je nepravdivá pre interpretáciu $\mathcal{I}_2$

- Záver: formula φ nie je tautológia
- Vlastnosť tautologičnosti bola falzifikovaná interpretáciou $\mathcal{I}_2$, pre ktorú bolo jednoducho ukázené, že formula φ nie je tautológia.
- Metóda falzifikácie patrí medzi hlavné prístupy k dôkazu netautologičnosti formuly.
- Inverzný problém, dôkaz tautologičnosti formuly je komplikovaný problém a musí sa riešiťv inými prostriedkami akou je metóda falzifikácie
- V ďalšej časti ukážeme, že napr. metóda sémantických tabiel je vhodnou metódou ba priamy dôkaz tautologičnosti.

Najznámejšie tautológie predikátovej logiky

1. ***Eliminácia univerzálneho kvantifikátora*** (konkretizácia)

$$\boxed{\left(\forall x\, P(x)\right) \Rightarrow P(a)}$$

Táto formula je dôsledkom tautológie $p \wedge q \Rightarrow p$

$$\forall x\, P(x) \equiv P(a) \wedge P(b) \wedge \ldots \Rightarrow P(a)$$

čo bolo potrebné dokázať.

2. ***Zavedenie existenčného kvantifikátora*** (abstrakcia)

$$\boxed{P(a) \Rightarrow \left(\exists x\, P(x)\right)}$$

Táto formula je dôsledkom tautológie $p \Rightarrow p \vee q$

$$\exists x\, P(x) \equiv P(a) \vee P(b) \vee \ldots \equiv \acute{\bigcup_{x \in U}} P(s)$$

$$P(a) \Rightarrow P(a) \vee P(b) \vee \ldots \equiv \exists x\, P(x)$$

čo bolo potrebné dokázať.

3. ***Zmena univerzálneho kvantifikátora na existenčný kvantifikátor***

$$\boxed{\left(\forall x\, P(x)\right) \Rightarrow \exists x\, P(x)}$$

Dôkaz priamo vyplýva z predchádzajúcich dvoch formúl

$$\left(\forall x\, P(x)\right) \Rightarrow P(a)$$
$$P(a) \Rightarrow \left(\exists x\, P(x)\right)$$

Ak použijeme zákon hypotetického sylogizmu (tranzitivita implikácie) $(p \Rightarrow q) \Rightarrow \left((q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)\right)$, potom dostaneme dokazovanú formulu.

4. ***Negácia univerzálneho kvantifikátora***

$$\neg\forall x\, P(x) \equiv \left(\exists x\, \neg P(x)\right)$$

Dôkaz tejto formuly plynie priamo z de Morganovho zákona výrokovej logiky pre konjunkciu

$$\neg\left(\forall x\, P(x)\right) \equiv \neg\left(P(a) \wedge P(b) \wedge \ldots\right) \equiv \left(\neg P(a)\right) \vee \left(\neg P(b)\right) \vee \ldots \equiv$$

$$\underset{x\in U}{\text{Ú}}\left(\neg P(s)\right) \equiv \exists x\, \neg P(x)$$

5. ***Negácia existenčného kvantifikátora***

$$\neg\left(\exists x\, P(x)\right) \equiv \left(\forall x\, \neg P(x)\right)$$

Dokáže sa podobným spôsobom ako predchádzajúca formula pomocou de Morganovho zákona pre negáciu disjunkcie

6. ***Komutácia univerzálnych kvantifikátorov***

$$\boxed{\left(\forall x\, \forall y\, P(x,y)\right) \equiv \left(\forall y\, \forall x\, P(x,y)\right)}$$

Dôkaz tejto tautológie je založený na komutatívnosti a asociatívnosti konjunkcie $(p \wedge q \equiv q \wedge p)$

$$\begin{aligned}
\forall x\, \forall y\, P(x,y) &\equiv P(a,a) \wedge P(a,b) \wedge P(a,c) \wedge \ldots \\
&\wedge P(b,a) \wedge P(b,b) \wedge P(b,c) \wedge \ldots \\
&\wedge P(c,a) \wedge P(c,b) \wedge P(c,c) \wedge \ldots \\
&\equiv P(c,a) \wedge P(b,a) \wedge P(a,a) \wedge \ldots \\
&\wedge P(c,b) \wedge P(b,b) \wedge P(a,b) \wedge \ldots \\
&\wedge P(c,c) \wedge P(b,c) \wedge P(a,c) \wedge \ldots \equiv \forall y\, \forall x\, P(x,y)
\end{aligned}$$

7. ***Komutácia existenčných kvantifikátorov***

$$\boxed{\left(\exists x\, \exists y\, P\left(x,y\right)\right) \equiv \left(\exists y\, \exists x\, P\left(x,y\right)\right)}$$

Dôkaz je podobný ako predchádzajúci dôkaz, v tomto prípade je založený na komutatívnosť a asociatívnosti disjunkcie.

8. ***Komutácia univerzálneho a existenčného kvantifikátora***

$$\left(\exists x\,\forall y\,P(x,y)\right)\Rightarrow\left(\forall y\,\exists x\,P(x,y)\right)$$

Dôkaz uskutočníme tak, že implikáciu prepíšeme do disjunktného tvaru.

$$\left(\exists x\,\forall y\,P(x,y)\right)\Rightarrow\left(\forall y\,\exists x\,P(x,y)\right)\equiv\neg\left(\exists x\,\forall y\,P(x,y)\right)\vee\left(\forall y\,\exists x\,P(x,y)\right)$$

$$\equiv\left(\forall x\,\exists y\,\neg P(x,y)\right)\vee\left(\forall y\,\exists x\,P(x,y)\right)\equiv\left(\forall x\,\exists y\,\neg P(x,y)\right)\vee\left(\forall x\,\exists y\,P(y,x)\right)$$

$$\equiv\forall x\,\exists y\left(\left(\neg P(x,y)\right)\vee P(y,x)\right)$$

Poznamenajme, že tento spôsob dôkazu je nepoužiteľný pre obrátenú implikáciu, $\left(\forall y\,\exists x\,P(x,y)\right)\Rightarrow\left(\exists x\,\forall y\,P(x,y)\right)$.

Vybrané zákony predikátovej logiky

(1) ***Distributívne zákony kvantifikátorov***:

- $(\forall x)\big(P(x) \wedge Q(x)\big) \equiv (\forall x)\,P(x) \wedge (\forall x)\,Q(x)$
- $(\forall x)\,P(x) \vee (\forall x)\,Q(x) \Rightarrow (\forall x)\big(P(x) \vee Q(x)\big)$
- $(\exists x)\big(P(x) \vee Q(x)\big) \equiv (\exists x)\,P(x) \vee (\exists x)\,Q(x)$
- $(\exists x)\big(P(x) \wedge Q(x)\big) \Rightarrow (\exists x)\,P(x) \wedge (\exists x)\,Q(x)$
- $(\forall x)\big(P(x) \Rightarrow Q(x)\big) \Rightarrow \big((\forall x)\,P(x) \Rightarrow (\forall x)\,Q(x)\big)$
- $(\forall x)\big(P(x) \Rightarrow Q(x)\big) \Rightarrow \big((\exists x)\,P(x) \Rightarrow (\exists x)\,Q(x)\big)$

(2) ***Zákony prenexných operácií (kde P je výrok, t. j. predikát bez argumentu)***:

- $(\forall x)\big(P \Rightarrow Q(x)\big) \equiv \big(P \Rightarrow (\forall x)\,Q(x)\big)$
- $(\exists x)\big(P \Rightarrow Q(x)\big) \equiv \big(P \Rightarrow (\exists x)\,Q(x)\big)$
- $(\forall x)\big(Q(x) \Rightarrow P\big) \equiv \big((\forall x)\,Q(x) \Rightarrow P\big)$
- $(\exists x)\big(Q(x) \Rightarrow P\big) \equiv \big((\exists x)\,Q(x) \Rightarrow P\big)$
- $(\forall x)\big(P \wedge Q(x)\big) \equiv P \wedge (\forall x)\,Q(x)$
- $(\exists x)\big(P \wedge Q(x)\big) \equiv P \wedge (\exists x)\,Q(x)$
- $(\forall x)\big(P \vee Q(x)\big) \equiv P \vee (\forall x)\,Q(x)$
- $(\exists x)\big(P \vee Q(x)\big) \equiv P \vee (\exists x)\,Q(x)$

5.2.4 *Odvodzovanie formúl predikátovej logiky, logický dôkaz*

Axiomatický systém predikátovej logiky je rozšírením axiomatického systému výrokovej logiky, ktorý bol prezentovaný v kapitole 2.2 a ktorý sa zaoberal odvodzovaním formúl výrokovej logiky.

Pravidlá logického dôkazu (2.1.-3) sú rozšírené o ďalšie štvrté pravidlo:

(4) ***Pravidlo zovšeobecnenia***. Ak je pravdivá formula $\varphi(x)$ pre každé x, pričom táto premenná sa vyskytuje len ako voľná premenná v každej časti celkového dôkazu, potom ju môžeme zovšeobecniť do tvaru s univerzálnym kvantifikátorom

$$\frac{\varphi(t)}{\forall x\, \varphi(x)}$$

Hilbertové axiómy výrokovej logiky sú rozšírené o ďalšie, ktoré obsahujú univerzálny kvantifikátor $\forall$:

$$\boldsymbol{Ax_{11}}.\ \forall x\, \varphi(x) \Rightarrow \varphi(t)$$

$$\boldsymbol{Ax_{12}}.\ \forall x\left(\varphi \Rightarrow \psi(x)\right) \Rightarrow \left(\varphi \Rightarrow \forall x\, \psi(x)\right)$$

Definovaný axiomatický systém predikátovej logiky neobsahuje existenčný kvantifikátor $\exists$. Môže byť dodefinovaný do nášho systému ako „metasymbol“ k označeniu zložených formúl špeciálneho tvaru

$$\exists x\, \varphi(x) =_{def} \neg \forall x \neg \varphi(x)$$

Na záver pristúpime k modifikácii definície, ktorá definuje pojmy dôsledok a dôkaz pre výrokovú logiku.

Definícia.

(1) *Formula* φ *je* ***bezprostredným dôsledkom*** *množiny formúl* Φ, *ak vznikne aplikáciou jedného z pravidiel logického dôkazu na formule z* Φ.

(2) *Formula* φ *je* ***logickým dôsledkom (dokázateľná)*** *množiny formúl* Φ *(čo označíme* $\Phi \vdash \varphi$*), ak* $\varphi \in \Phi$ *alebo je bezprostredným dôsledkom* Φ *alebo je bezprostredným dôsledkom* Φ *rozšírenej o niektoré jej bezprostredné dôsledky.*

(3) ***Dôkazom (logickým)*** *formuly* φ *z množiny* Φ *je každá konečná postupnosť formúl* $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$, *pričom* $\varphi = \varphi_n$ *a každá formula z tejto postupnosti je buď bezprostredným dôsledkom niektorých formúl z* Φ alebo formúl z $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{i-1}$.

Veta (o dedukcii). *Nech* Φ *je množina formúl a* φ, ψ *sú nejaké dve formule, potom* $\Phi \vdash \varphi \Rightarrow \psi$ *platí vtedy a len vtedy (vtt) ak* $\Phi \cup \{\varphi\} \vdash \psi$

$$\left(\Phi \vdash \varphi \Rightarrow \psi\right) \mathit{vtt} \left(\Phi \cup \{\varphi\} \vdash \psi\right)$$

V 1. Prednáške bola dokázaná Postova veta o úplnosti, ktorá má pre výrokovú logiku fundamentálny význam a hovorí o tom, že dokázateľná formula je tautológia a naopak, čo formálne môžeme zapísať ako $\left(\models \varphi\right) \equiv \left(\vdash \varphi\right)$. Podobnú vetu pre predikátovú logiku dokázal v r. 1930 Gödel.

Veta . Pre súbor formúl predikátovej logiky Φ a pre formulu φ platí

$$\left(\models \varphi\right) \equiv \left(\vdash \varphi\right)$$

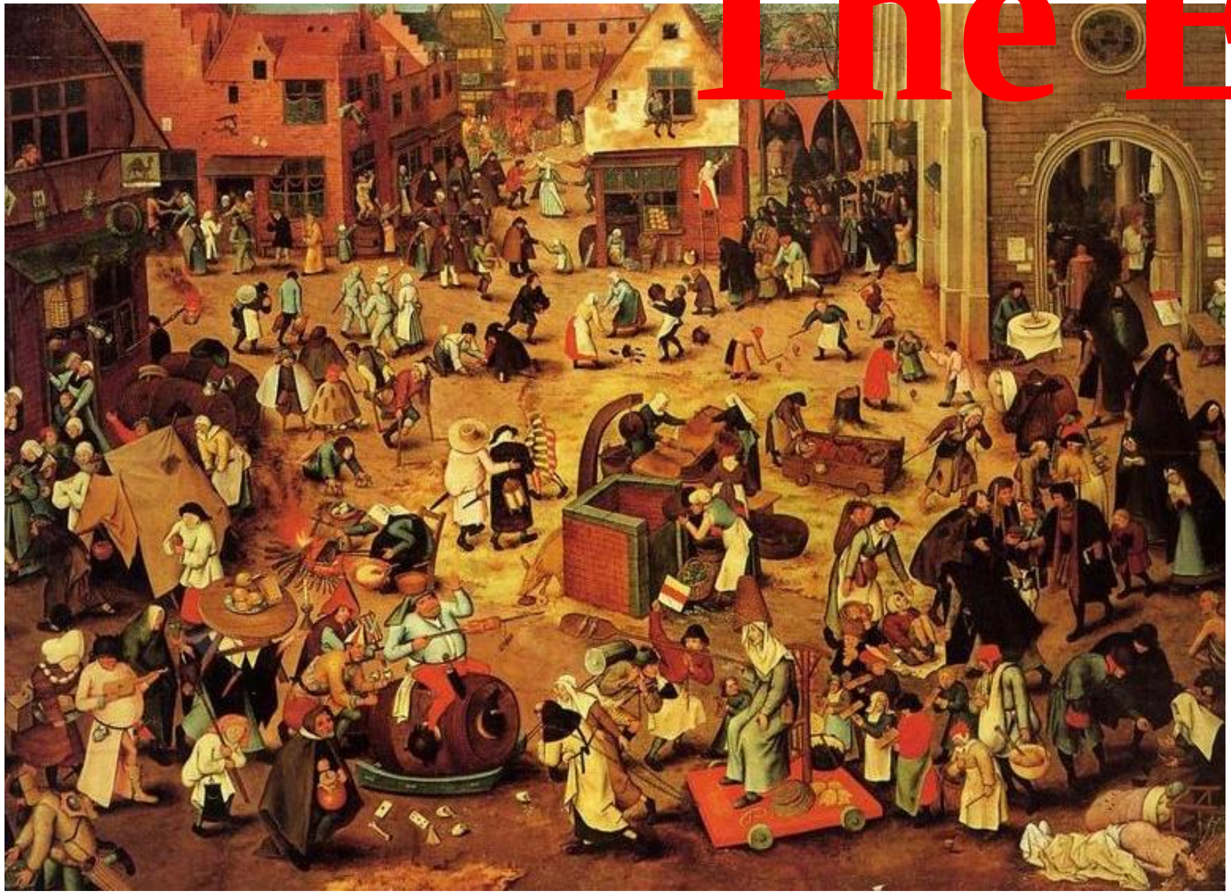
Dôkaz tejto vety je netriviálny, vyžaduje špeciálne znalosti z univerzálnej algebry a teórie modelov.

Na záver tejto kapitoly môžeme si položiť otázku, či formálny systém predikátovej logiky má podobné vlastnosti ako formálny systém výrokovej logiky, t.j. kladieme si otázku, či je korektný, nerozporný, úplný a rozhodnuteľný. Na základe toho, čo bolo v tejto kapitole prezentované. môžeme uzavrieť, že predikátová logika má podobné vlastnosti ako výroková logika, je

- **korektná**,
- **nerozporná** a
- **úplná**.

Výroková logika bola taktiež charakterizovaná aj štvrtou vlastnosťou, a to, že je ***rozhodnuteľná***. Musíme zdôrazniť, že v predikátovej logike neexistuje všeobecný algoritmus, ktorý by vždy rozhodol s absolútnou istotou, či daná formula predikátovej logiky je tautológia, kontradikcia, alebo len splniteľná. Proces rozhodnuteľnosti v predikátovej logike je silne závislý od vhodnej interpretácie $\mathcal{I}$, v rámci ktorej sa vlastne pravdivosť alebo nepravdivosť formuly študuje. Vo všeobecnosti platí, že predikátová logika je nerozhodnuteľná, ak obsahuje aspoň jednu dvojmiestnú reláciu Ako najjednoduchší protipríklad k tomuto tvrdeniu uvedieme predikátovú logiku obsahujúcu len unárne predikáty (t. j. predikáty s jedným argumentum), potom je rozhodnuteľná, napríklad pomocou metódy rezolventy alebo pomocou metódy sémantických tabiel. Preto sa niekedy hovorí, že predikátová logika je **polorozhodnuteľná** (angl. semidecidable). Táto dôležitá vlastnosť predikátovej logiky bola dokázaná americkým logikom A. Churchom v r. 1936, týmto dal definitívnu odpoveď na slávny trinásty Hilbertov problém rozhodnuteľnosti (nem. Entscheidungsproblem) pre predikátovú logiku. Tento Hilbertov problém bol študovaný vo všeobecnej rovine anglickým matematikom a logikom A. Turingom v r. 1931. Dokázal, že neexistuje univerzálny algoritmus, pomocou ktorého by sa dal vyriešiť každý problém rozhodnuteľnosti.

The End



Jedno z prvých znázornení metafory multiagentového systému holandským maliarom Pieter Bruegel the Elder (1525-1569) na obraze “The Battle between Lenten and Carnival“