Náhradná 1. kontrolná písomka z ADM
(konaná dňa 18. 12. 2008)

1. príklad. Dokážte pomocou matematickej indukcie

$$n^2 \geq n \quad \text{(3 body)}$$

2. príklad. Metódou vymenovaním prípadov pre navzájom rôzne a,b,c, dokážte alebo vyvráťte hypotézu, že formula

$$min\{b, max\{a,c\}\} = min\{max\{a,b\}, c\}$$

je identita. (3 body)

3. príklad. Čo môžeme povedať o množinách A a B, ak platí
(a) $A - B = B - A$ (1 bod)
(b) $A \cap B = B \cap A$ (1 bod)
(c) $A - B = A$ (1 bod)

4. príklad. Znázornite reláciu pomocou orientovaného grafu a rozhodnite, či daná relácia je reflexívna, symetrická, antisymetrická a tranzitívna
(a) $\{(2,2),(2,3),(2,4),(3,2),(3,3),(3,4),(4,4)\}$ (2 body)
(b) $\{(1,2),(2,3),(3,4)\}$ (1 bod)

5. príklad. Nájdite koeficient x^2y^5 v rozvoji $(2x + y)^7$. (3 body)

Prémiový príklad. Pomocou de Morganovho vzťahu pre komplement zjednotenia dvoch množín dokážte formulu

$$\overline{(A_1 \cup A_2 \cup A_3)} = \overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \overline{A}_3 \quad \text{(2 body)}$$

kde A_i sú množiny.

Riešenie príkladov

1. príklad. Dokážte pomocou matematickej indukcie

$$n^2 \geq n \quad \text{(3 body)}$$

(1) Indukčný predpoklad $P(n) = n^2 \geq n$

(2) Platnosť pre n=1 $P(1) = 1^2 \geq 1$ (tento predpoklad je platný)

(3) Dôkaz platnosti pre n+1

$$P(n+1) = (n+1)^2 = n^2 + (2n+1) = n + \underbrace{(n^2 + n + 1)}_{>0}$$

$$\Rightarrow n^2 = n + n^2 - n = n + \underbrace{n(n-1)}_{>0}$$

$$\Rightarrow n^2 \geq n$$

2. príklad. Metódou vymenovaním prípadov pre navzájom rôzne *a*,*b*,*c*, dokážte alebo vyvráťte hypotézu, že formula

$$min\{b, max\{a,c\}\} = min\{max\{a,b\}, c\}$$

je identita. (3 body)

(1) *a*<*b*<*c*

$$\underbrace{min\left\{b, \underbrace{max\{a,c\}}_{c}\right\}}_{b} = \underbrace{min\left\{\underbrace{max\{a,b\}}_{b}, c\right\}}_{b} \Rightarrow a = a$$

(2) *a*<*c*<*b*

$$\underbrace{min\left\{b, \underbrace{max\{a,c\}}_{c}\right\}}_{c} = \underbrace{min\left\{\underbrace{max\{a,b\}}_{b}, c\right\}}_{c} \Rightarrow c = c$$

(3) *b*<*a*<*c*

$$\underbrace{min\left\{b, \underbrace{max\{a,c\}}_{c}\right\}}_{b} = \underbrace{min\left\{\underbrace{max\{a,b\}}_{a}, c\right\}}_{a} \Rightarrow b \neq a$$

Záver: študovaná formula nie je identita, existujú hodnoty a, b, c pre ktoré neplatí.

3. príklad. Čo môžeme povedať o množinách A a B, ak platí

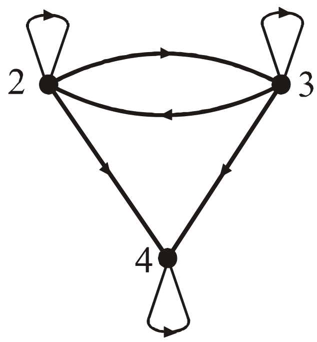
(a) $A - B = B - A$ (1 bod) .... $A = B$

(b) $A \cap B = B \cap A$ (1 bod).......platí pre každé množiny A, B, t. j. je to identita.

(c) $A - B = A$ (1 bod) .... $B \cap A = \emptyset$

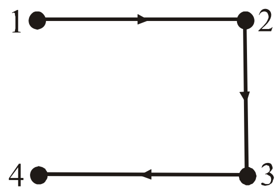
4. príklad. Znázornite každú reláciu pomocou orientovaného grafu a rozhodnite, či daná relácia je reflexívna, symetrická, antisymetrická alebo tranzitívna

(a) $\{(2,2),(2,3),(2,4),(3,2),(3,3),(3,4),(4,4)\}$ (2 body)



Relácia je reflexívna, nie je symetrická, nie je antisymetrická a je tranzitívna.

(b) $\{(1,2),(2,3),(3,4)\}$ (1 bod)



Relácia nie je reflexívna, nie je symetrická, je antisymetrická a nie je tranzitívna.

5. príklad. Nájdite koeficient x^2y^5 v rozvoji $(x+y)^7$. (3 body)

$$\left(2x+y\right)^7 = \sum_{j=0}^{7}\binom{7}{j}\left(2x\right)^{7-j}y^j = \ldots + \binom{7}{5}2^2x^2y^5 + \ldots$$

Koeficient pri x^2y^5 je 4-násobok binomiálneho koeficientu $2^2\binom{7}{5} = 4\cdot 7!/\left(2!\,5!\right) = 84$

Prémiový príklad. Pomocou de Morganovho vzťahu pre komplement zjednotenia dvoch množín dokážte formulu

$$\overline{\left(A_1 \cup A_2 \cup A_3\right)} = \bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3 \quad \text{(2 body)}$$

kde A_i sú množiny.

$$\overline{\left(A_1 \cup A_2 \cup A_3\right)} = \overline{\left(A_1 \cup \left(A_2 \cup A_3\right)\right)} = \bar{A}_1 \cap \overline{\left(A_2 \cup A_3\right)} = \bar{A}_1 \cap \left(\bar{A}_2 \cap \bar{A}_3\right)$$

$$= \bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3$$