1. kontrolná písomka z ADM
(konaná dňa 15. 10. 2008)

1. príklad. Dokážte pomocou matematickej indukcie formulu $f'(x) = nx^{n-1}$ pre prvú deriváciu funkcie $f(x) = x^n$. (3 body)

2. príklad. Dokážte, pre navzájom rôzne *a*,*b*,*c*, metódou vymenovaním prípadov, či formula

$$min\{a, max\{b,c\}\} = min\{max\{a,b\}, c\}$$

je identita alebo nie. (3 body)

3. príklad. Čo môžeme vždy povedať o množinách *A* a *B*, ak platí
(a) $A - B = B - A$ (1 bod)
(b) $A \cap B = B \cap A$ (1 bod)
(c) $A - B = A$ (1 bod)

4. príklad. Znázornite reláciu pomocou orientovaného grafu a rozhodnite, či daná relácia je reflexívna, symetrická, antisymetrická a tranzitívna
(a) $\{(2,2),(2,3),(2,4),(3,2),(3,3),(3,4),(4,4)\}$ (2 body)
(b) $\{(1,2),(2,3),(3,4)\}$ (1 bod)

5. príklad. Z predchádzajúceho príkladu nech relácia z (a) je označená *P* a relácia z (b) je označená *Q*. Zostrojte kompozície $P \circ Q$ (1.5 bodu) a $Q \circ P$ (1.5 bodu)

Prémiový príklad. Pomocou de Morganovho vzťahu pre komplement zjednotenia dvoch množín dokážte formulu

$$\overline{(A_1 \cup A_2 \cup A_3)} = \bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3 \quad \text{(2 body)}$$

kde A_i sú množiny.

Riešenie príkladov

1. príklad. Dokážte pomocou matematickej indukcie formulu $f'(x) = nx^{n-1}$ pre prvú deriváciu funkcie $f(x) = x^n$. (3 body)

(1) Indukčný predpoklad $P(n): (x^n)' = nx^{n-1}$

(2) Platnosť pre n=1 $P(1): (x^1)' = 1$ (tento predpoklad je platný)

(3) Dôkaz platnosti pre n+1

$$P(n+1): (x^{n+1})' = (x^n \cdot x)' = (x^n)' \cdot x + x^n \cdot (x)' = (nx^{n-1}) \cdot x + x^n \cdot 1 = (n+1)x^n$$

2. príklad. Dokážte, pre navzájom rôzne $a,b,c,$ metódou vymenovaním prípadov, či formula

$$min\{a, max\{b,c\}\} = min\{max\{a,b\}, c\}$$

je identita alebo nie. (3 body)

(1) $a<b<c$

$$\underbrace{min\left\{a, \underbrace{max\{b,c\}}_{c}\right\}}_{a} = \underbrace{min\left\{\underbrace{max\{a,b\}}_{b}, c\right\}}_{b} \Rightarrow a = b \text{ kontradikcia s predpokladom } a<b$$

Záver: študovaná formula nie je identita, existujú hodnoty a, b, c pre ktoré neplatí.

3. príklad. Čo môžeme povedať o množinách A a B, ak platí

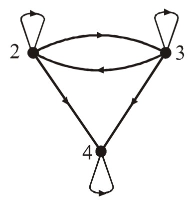
(a) $A - B = B - A$ (1 bod) .... $A = B$

(b) $A \cap B = B \cap A$ (1 bod).......platí pre každé množiny A, B, t. j. je to identita.

(c) $A - B = A$ (1 bod) .... $B \cap A = \emptyset$

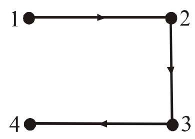
4. príklad. Znázornite každú reláciu pomocou orientovaného grafu a rozhodnite, či daná relácia je reflexívna, symetrická, antisymetrická alebo tranzitívna

(a) $\{(2,2),(2,3),(2,4),(3,2),(3,3),(3,4),(4,4)\}$ (2 body)



Relácia je reflexívna, nie je symetrická, nie je antisymetrická a je tranzitívna.

(b) $\{(1,2),(2,3),(3,4)\}$ (1 bod)

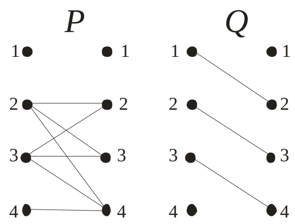


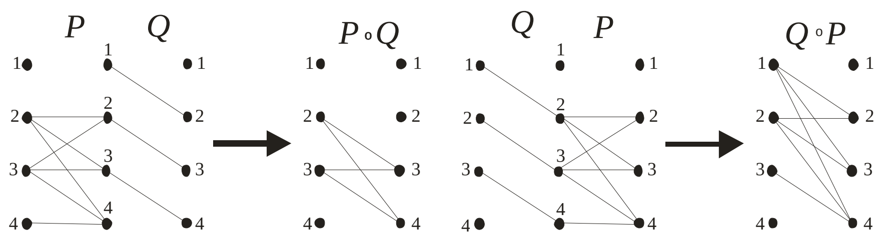
Relácia nie je reflexívna, nie je symetrická, je antisymetrická a nie je tranzitívna.

5. príklad. Z predchádzajúceho príkladu nech relácia z (a) je označená P a relácia z (b) je označená Q. Zostrojte kompozície $P \circ Q$ (1.5 bodu) a $Q \circ P$ (1.5 bodu)

$$P = \{(2,2),(2,3),(2,4),(3,2),(3,3),(3,4),(4,4)\}$$

$$Q = \{(1,2),(2,3),(3,4)\}$$





$$P \circ Q = \{(2,3),(2,4),(3,3),(3,4)\}$$

$$Q \circ P = \{(1,2),(1,3),(1,4),(2,2),(2,3),(2,4),(3,4)\}$$

Prémiový príklad. Pomocou de Morganovho vzťahu pre komplement zjednotenia dvoch množín dokážte formulu

$$\overline{(A_1 \cup A_2 \cup A_3)} = \bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3 \quad \text{(2 body)}$$

kde A_i sú množiny.

$$\overline{(A_1 \cup A_2 \cup A_3)} = \overline{(A_1 \cup (A_2 \cup A_3))} = \bar{A}_1 \cap \overline{(A_2 \cup A_3)} = \bar{A}_1 \cap (\bar{A}_2 \cap \bar{A}_3)$$

$$= \bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3$$