2. kontrolná písomka z ADM, konaná dňa 20. 11. 2008

1. príklad. Koľko existuje binárnych reťazcov dĺžky 7, ktoré obsahujú
(a) nepárny počet núl, (0.75 bodu)
(b) párny počet núl, (0.75 bodu)
(c) aspoň jednu nulu, (0.75 bodu)
(d) podreťazec 10? (0.75 bodu)

2. príklad. Na fakulte je 300 študentov, ktorí si zapísali predmet Matematická analýza, 200 študentov, ktorí si zapísali predmet Diskrétna matematika a 150 študentov, ktorí si zapísali súčasne predmety Matematická analýza a Diskrétna matematika.
(a) Koľko študentov má zapísaný predmet Matematická analýza alebo predmet Diskrétna matematika? (1.5 bodu)
(b) Koľko študentov nemá zapísaný predmet Matematická analýza a má zapísaný predmet Diskrétna matematika? (1.5 bodu)

3. príklad. Nech $(\mathcal{N},*)$ je algebraická štruktúra, kde $\mathcal{N}$ je množina obsahujúca nezáporné celé čísla. Binárna operácia je definovaná takto

$$x * y = min\{x, y\}$$

(a) Dokážte, že algebraická štruktúra $(\mathcal{N},*)$ je pologrupa. (2 body)
(b) Rozhodnite, či $(\mathcal{N},*)$ je monoid, odôvodnite. (1 bod)

4. príklad. Pomocou Quinovej a McCluskeyho metódy nájdite optimálny tvar Boolovej funkcie
$wxyz + wxy\overline{z} + wx\overline{y}z + w\overline{x}\,\overline{y}z + w\overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z} + \overline{w}x\overline{y}z + \overline{w}\,\overline{x}y\overline{z} + \overline{w}\,\overline{x}\,\overline{y}z$ (3 body)

5. príklad. Matica A má tvar

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(3 body)

(a) Rozhodnite, či matica A je regulárna? (1 bod)
(b) Ak je regulárna, zostrojte inverznú maticu. (2 body)

Prémiový príklad. Sekretárka napíše 5 rôznych listov piatim ľuďom a dá do každej z piatich obálok vopred adresovaných týmto ľuďom jeden z listov. Koľkými spôsobmi si môže omylom poprehadzovať listy tak, aby žiaden z piatich adresátov nedostal list jemu určený? (2 body)

Poznámka: Doba na vypracovanie písomky je 30 min. Maximálny počet bodov je 5×3+2 = 17.

Riešenie príkladov

1. príklad. Koľko existuje binárnych reťazcov dĺžky 7, ktoré obsahujú
(a) nepárny počet núl, (0.75 bodu)
(b) párny počet núl, (0.75 bodu)
(c) aspoň jednu nulu, (0.75 bodu)
(d) podreťazec 10? (0.75 bodu)

Riešenie:

(a) $\binom{7}{1}+\binom{7}{3}+\binom{7}{5}+\binom{7}{7}=7+35+21+1=64$

(b) $\binom{7}{0}+\binom{7}{2}+\binom{7}{4}+\binom{7}{6}=1+21+35+7=64$

(c) $2^7-1=127$

(d)
$2^7-\left|\{0000000,0000001,0000011,0000111,0001111,0011111,0111111,1111111\}\right|=$
$2^7-8=120$

2. príklad. Na fakulte je 300 študentov, ktorí si zapísali predmet Matematická analýza, 200 študentov, ktorí si zapísali predmet Diskrétna matematika a 150 študentov, ktorí si zapísali súčasne predmety Matematická analýza a Diskrétna matematika.
(a) Koľko študentov má zapísaný predmet Matematická analýza alebo predmet Diskrétna matematika? (1.5 bodu)
(b) Koľko študentov nemá zapísaný predmet Matematická analýza a má zapísaný predmet Diskrétna matematika? (1.5 bodu)

Riešenie:
$|MA|=300$, $|DM|=200$, $|MA\cap DM|=150$

(a) $|MA\cup DM|=|MA|+|DM|-|MA\cap DM|=300+200-150=350$

(b) $|\overline{MA}\cap DM|=|(U-MA)\cap DM|=|U\cap DM-MA\cap DM|=|DM-MA\cap DM|$
$=|DM|-|MA\cap DM|=200-150=50$

3. príklad. Nech $(\mathbb{N},*)$ je algebraická štruktúra, kde $\mathbb{N}$ je množina obsahujúca nezáporné celé čísla. Binárna operácia je definovaná takto

$$x*y=min\{x,y\}$$

(a) Dokážte, že algebraická štruktúra $(\mathbb{N},*)$ je pologrupa.

Riešenie:
K dôkazu, že algebraická štruktúra $(\mathbb{N},*)$ je pologrupa musíme dokázať, že binárna operácia $'*'$ je asociatívna. K dôkazu asociatívnosti binárnej operácie použijeme metódu vymenovania prípadov (pozri kapitolu 1.4)

(a1) $x<y<z$

$$(x*y)*z=x*z=x$$
$$x*(y*z)=x*y=x$$

(a2) $x<z<y$

$$(x*y)*z=x*z=x$$
$$x*(y*z)=x*z=x$$

(a3) $y<x<z$

$$(x*y)*z=y*z=y$$
$$x*(y*z)=x*y=y$$

(a4) $y<z<x$

$$(x*y)*z=y*z=y$$
$$x*(y*z)=x*y=y$$

(a5) $z<x<y$

$$(x*y)*z=x*z=z$$
$$x*(y*z)=x*z=z$$

(a6) $z<y<x$

$$(x*y)*z=y*z=z$$
$$x*(y*z)=x*z=z$$

Vo všetkých 6 prípadoch sme dostali vždy rovnosť $(x*y)*z=x*(y*z)$, z čoho vyplýva, že binárna operácia je asociatívna, t. j. algebraická štruktúra $(\mathbb{N},*)$ je pologrupa (v prípadoch, kedy *x*=*y* či *y*=*z* je jedno, ktorú z dvojice premenných uvedieme ako výsledok operácie min, teda môžeme vybrať možnosť, ktorá odpovedá vyššie uvedeným prípadom).

(b) Rozhodnite, či $(\mathbb{N},*)$ je monoid.

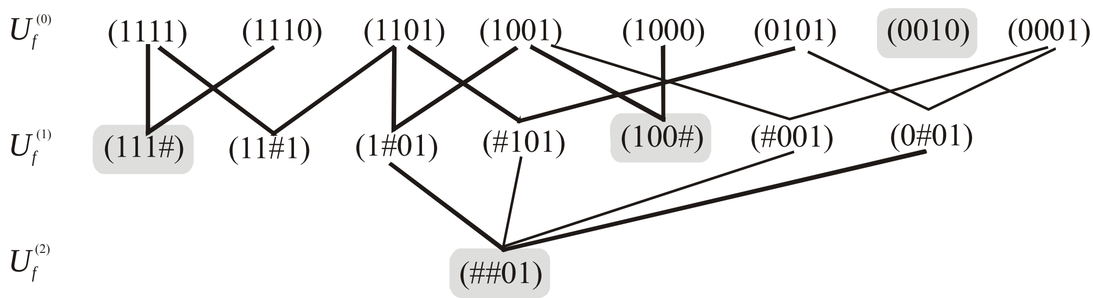
Riešenie:
Daná algebraická štruktúra $(\mathbb{N},*)$ nie je monoid, neexistuje jednotkový element *e*, ktorý patrí do množiny $\mathbb{N}$ (jednotkovým prvkom by potenciálne mohlo byť ∞, ktoré však nepatrí do $\mathbb{N}$).

4. príklad. Pomocou Quinovej a McCluskeyho metódy nájdite optimálny tvar Boolovej funkcie

$$wxyz+wxy\overline{z}+wx\overline{y}z+w\overline{x}\,\overline{y}z+w\overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z}+\overline{w}x\overline{y}z+\overline{w}\,\overline{x}y\overline{z}+\overline{w}\,\overline{x}\,\overline{y}z\,.$$

Riešenie:

0. etapa			1. etapa				2. etapa		
1	(1111)		1	(1,2)	(111#)		1	(3,7)	(##01)
2	(1110)		2	(1,3)	(11#1)		2	(4,6)	(##01)
3	(1101)		3	(3,4)	(1#01)				
4	(1001)		4	(3,6)	(#101)				
5	(1000)		5	(4,5)	(100#)				
6	(0101)		6	(4,8)	(#001)				
7	(0010)		7	(6,8)	(0#01)				
8	(0001)								



$$\tilde{V} = \{(111\#),(\#\#01),(100\#),(0010)\}$$

$$f(w,x,y,z) = w\,x\,y + \overline{y}\,z + w\,\overline{x}\,\overline{y} + \overline{w}\,\overline{x}\,y\,\overline{z}$$

5. príklad. Zostrojte inverznú maticu k matici

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Riešenie:

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Prémiový príklad. Sekretárka napíše 5 rôznych listov piatim ľuďom a dá do každej z piatich obálok vopred adresovaných týmto ľuďom jeden z listov. Koľkými spôsobmi si môže omylom poprehadzovať listy tak, aby žiaden z piatich adresátov nedostal list jemu určený? (2 body)

Počet derangementálnych permutáií piatich prvkov je

$$5!\left(1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\frac{1}{5!}\right)=2\cdot3\cdot4\cdot5\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{6}+\frac{1}{24}-\frac{1}{120}\right)=120\,\frac{60-20+5-1}{120}=44$$