3. kontrolná písomka z ADM, skupina A
(konaná dňa 11. 12. 2008)

1. príklad. Nájdite riešenie prvých dvoch neznámych sústavy lineárnych rovníc pomocou Crameroveho pravidla (iný spôsob riešenia bude hodnotený 0 bodmi).

$$x_1 + x_2 = 1$$
$$x_1 + x_2 + x_3 = 3 \qquad \text{(3 body)}$$
$$2x_1 - x_3 = 0$$

2. príklad. Vypočítajte determinant matice (3 body)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

3. príklad. Numericky odvoďte, prečo jednoznačne existuje alebo neexistuje obyčajný graf s 7 vrcholmi, ktorého stupne sú 5,4,4,4,1,1,1. Ak existuje, nakreslite ho. (3 body)

4. príklad. Počet hrán ohraničujúcich stenu R voláme *stupeň steny*, resp. *dĺžka oblasti* $deg(R)$. Majme planárny súvislý graf, ktorého všetkých 10 stien je stupňa 3. Koľko má vrcholov? (3 body)

5. príklad. Predpokladajme, že planárny graf má 7 oblastí a vrcholy stupňa 4,4,3,3,3,3,3,3,2,2,2. Je tento graf súvislý? (3 body)

Prémiový príklad. Máme zostaviť rozvrh skúšok tak, aby žiaden študent nemal v jeden deň dve skúšky, ale aby súčasne skúšobných dní bolo čo najmenej. Problém zobrazíme grafom, ktorého vrcholy reprezentujú skúšobné predmety, ktoré sú spojené hranou v prípade, že nejaký študent chce absolvovať skúšku z obidvoch predmetov. Keď je tento graf planárny, koľko prinajhoršom potrebujeme skúšobných dní, keď ich chceme čo najmenej? Vysvetlite, ako ste na výsledok došli. (2 body)

Poznámka: Čas na písomku je 30 min.

Riešenie príkladov

1. príklad. Nájdite riešenie prvých dvoch neznámych sústavy lineárnych rovníc pomocou Cramerovho pravidla (iný spôsob riešenia bude hodnotený 0 bodmi).

$$\begin{aligned} &x_1 + x_2 = 1 \\ &x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ &2x_1 - x_3 = 0 \end{aligned}$$

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{matrix} = -1 + 2 + 1 = 2$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \\ 0 & 0 \end{matrix} = -1 + 3 = 2, \quad x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{2}{2} = 1$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{matrix} = -3 + 2 + 1 = 0, \quad x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{0}{2} = 0$$

2. príklad. Vypočítajte determinant matice (3 body)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Determinant budeme počítať tak, že maticu budeme upravovať na trojuholníkový tvar, potom hodnota determinantu je určená pomocou súčinu diagonálnych elementov.

$$det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ III - 2I \\ 2IV - II \end{matrix} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} 2 = 1$$

3. príklad. Numericky odvoďte, prečo jednoznačne existuje alebo neexistuje obyčajný graf s 7 vrcholmi, ktorého stupne sú 5,4,4,4,1,1,1. Ak existuje, nakreslite ho. (3 body)

Podľa vety 10.3. upravujeme postupnosť nasledovne:
5,4,4,4,1,1,1
3,3,3,0,0,1
3,3,3,1,0,0
2,2,0,0,0
1,-1,0,0
Postupnosť nie je grafová, neexistuje obyčajný graf s danými stupňami vrcholov.

4. príklad. Počet hrán ohraničujúcich stenu R voláme *stupeň steny*, resp. *dĺžka oblasti deg*(R). Majme planárny súvislý graf, ktorého všetkých 10 stien je stupňa 3. Koľko má vrcholov? (3 body)

$$2|E| = \sum deg(R) = |R| \cdot deg(R) = 10 \cdot 3$$

$$|E| = 15$$

$|R|=|V|+|K| +1$, teda $|V|=|E|-|R|+|K| +1=15-10+1+1=7$

5. príklad. Predpokladajme, že planárny graf má 7 oblastí a vrcholy stupňa 4,4,3,3,3,3,3,3,2,2,2. Je tento graf súvislý? (3 body)
Riešenie: Použijeme Eulerovu formulu $|R|=|E|-|V|+|K| +1$, teda $|K|=|R|-|E|+|V|-1$,
$|K|=7-(2*4+6*3+3*2)/2+11-1=1$, keďže počet komponent je 1, graf je súvislý.

Prémiový príklad. Máme zostaviť rozvrh skúšok tak, aby žiaden študent nemal v jeden deň dve skúšky, ale aby súčasne skúšobných dní bolo čo najmenej. Problém zobrazíme grafom, ktorého vrcholy reprezentujú skúšobné predmety, ktoré sú spojené hranou v prípade, že nejaký študent chce absolvovať skúšku z obidvoch predmetov. Keď je tento graf planárny, koľko prinajhoršom potrebujeme skúšobných dní, keď ich chceme čo najmenej? Vysvetlite, ako ste na výsledok došli.

Každý deň, v ktorom sa koná skúška je reprezentovaný rozdielnou farbou. Rozvrh skúšok potom zodpovedá zafarbeniu zodpovedajúceho grafu. ***Chromatické číslo*** grafu je počet farieb nutných na zafarbenie vrcholov tak, že susedné vrcholy majú rôznu farbu. Podľa vety o štyroch farbách každý planárny graf má chromatické číslo maximálne 4, teda potrebujeme maximálne 4 skúškové dni.

3. kontrolná písomka z ADM, skupina B
(konaná dňa 11. 12. 2008)

1. príklad. Nájdite riešenie prvých dvoch neznámych sústavy lineárnych rovníc pomocou Crameroveho pravidla (iný spôsob riešenia bude hodnotený 0 bodmi).

$$x_1 + x_2 = 1$$
$$x_1 + x_2 + x_3 = 3 \qquad \text{(3 body)}$$
$$2x_1 - x_3 = 0$$

2. príklad. Vypočítajte determinant matice (3 body)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

3. príklad. Numericky odvoďte, prečo jednoznačne existuje alebo neexistuje obyčajný graf s 7 vrcholmi, ktorého stupne sú 5,4,4,4,1,1,1. Ak existuje, nakreslite ho. (3 body)

4. príklad. Počet hrán ohraničujúcich stenu R voláme *stupeň steny*, resp. *dĺžka oblasti* $deg(R)$. Majme planárny súvislý graf, ktorého všetkých 10 stien je stupňa 3. Koľko má vrcholov? (3 body)

5. príklad. Predpokladajme, že planárny graf má 7 oblastí a vrcholy stupňa 4,4,3,3,3,3,3,3,2,2,2. Je tento graf súvislý? (3 body)

Prémiový príklad. Môže existovať cesta koňom na šachovnici 8x8, ktorá by navštívila každé pole práve raz, s výnimkou poľa umiestneného na druhom riadku a treťom stĺpci, ktoré nenavštívi, pričom posledným skokom koňa by sa kôň vrátil na začiatočnú pozíciu? (2 body)

Poznámka: Čas na písomku je 30 min.

Riešenie príkladov

1. príklad. Nájdite riešenie prvých dvoch neznámych sústavy lineárnych rovníc pomocou Cramerovho pravidla (iný spôsob riešenia bude hodnotený 0 bodmi).

$$\begin{aligned} &x_1 + x_2 = 1 \\ &x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ &2x_1 - x_3 = 0 \end{aligned}$$

$$D = \left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right. = -1 + 2 + 1 = 2$$

$$D_1 = \left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right. = -1 + 3 = 2, \quad x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{2}{2} = 1$$

$$D_2 = \left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right. = -3 + 2 + 1 = 0, \quad x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{0}{2} = 0$$

2. príklad. Vypočítajte determinant matice (3 body)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Determinant budeme počítať tak, že maticu budeme upravovať na trojuholníkový tvar, potom hodnota determinantu je určená pomocou súčinu diagonálnych elementov.

$$det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ III - 2I \\ 2IV - II \end{array} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} 2 = 1$$

3. príklad. Numericky odvoďte, prečo jednoznačne existuje alebo neexistuje obyčajný graf s 7 vrcholmi, ktorého stupne sú 5,4,4,4,1,1,1. Ak existuje, nakreslite ho. (3 body)

Podľa vety 10.3. upravujeme postupnosť nasledovne:
5,4,4,4,1,1,1
3,3,3,0,0,1
3,3,3,1,0,0
2,2,0,0,0
1,-1,0,0
Postupnosť nie je grafová, neexistuje obyčajný graf s danými stupňami vrcholov.

4. príklad. Počet hrán ohraničujúcich stenu R voláme *stupeň steny*, resp. *dĺžka oblasti deg*(R). Majme planárny súvislý graf, ktorého všetkých 10 stien je stupňa 3. Koľko má vrcholov? (3 body)

$$2|E| = \sum deg(R) = |R| \cdot deg(R) = 10 \cdot 3$$

$$|E| = 15$$

$|R|=|V|+|K| +1$, teda $|V|=|E|-|R|+|K| +1=15-10+1+1=7$

5. príklad. Predpokladajme, že planárny graf má 7 oblastí a vrcholy stupňa 4,4,3,3,3,3,3,3,2,2,2. Je tento graf súvislý? (3 body)

Riešenie: Použijeme Eulerovu formulu $|R|=|E|-|V|+|K| +1$, teda $|K|=|R|-|E|+|V|-1$, $|K|=7-(2*4+6*3+3*2)/2+11-1=1$, keďže počet komponent je 1, graf je súvislý.

Prémiový príklad. Môže existovať cesta koňom na šachovnici 8x8, ktorá by navštívila každé pole práve raz, s výnimkou poľa umiestneného na druhom riadku a treťom stĺpci, ktoré nenavštívi, pričom posledným skokom koňa by sa kôň vrátil na začiatočnú pozíciu?

Nemôže, kôň skáče z bielych políčok na čierne a naopak, pri nepárnom celkovom počte polí 64-1=63 sa farba prvého a posledného poľa zhodujú, teda kôň medzi nimi nemôže skočiť.