

## 2. kapitola

### Teória množín I – množina, operácie nad množinami, množinová algebra, mohutnosť a enumerácia, karteziánsky súčin

#### 2.1 Definícia množiny

Koncepcia množiny patrí medzi základné formálne prostriedky matematiky. Umožňuje formulovať prehľadným a jednotným spôsobom všetky oblasti matematiky prostredníctvom elementárnej štruktúry množiny a operáciami nad ňou. Teória množín vznikla koncom 19. storočia hlavne zásluhou nemeckého matematika Georga Cantora (1845 – 1918). Zásľuhu na jej rozšírení má anglický logik a filozof Bertrand Russell (1872 – 1970), ktorý objavil vnútorné nekonzistentnosti jej intuitívnej formulácie, ktoré boli neskôr prekonané jej dôslednou axiomatickou výstavbou. V tejto kapitole budeme prezentovať pôvodnú intuitívnu (neaxiomatickú) výstavbu teórie množín.

Elementárnym pojmom teórie množín je *prvok* (*element*), pod ktorým budeme rozumieť nejaký reálny alebo abstraktný objekt, pričom postulujeme, že objekty medzi sebou sú dobre odlišiteľné.

**Definícia 2.1.** *Množina je neusporiadaný súbor elementov.*

Ak sa nejaké dva elementy nachádzajú v tej istej množine, potom musia byť od seba odlišiteľné; v množine sa neopakuje výskyt dvoch rovnakých (neodlišiteľných) elementov. V definícii množiny bol použitý elementárny pojem „súbor“, ktorý nebudeme bližšie špecifikovať. Pozorný čitateľ môže namietat', že pojem „súbor“ je vlastne len iný názov pre množinu. Táto skutočnosť naznačuje „osud“ všetkých definícií, pomocou ktorých špecifikujeme nové pojmy prostredníctvom iných elementárnych a intuitívne zrozumiteľných pojmov. Ak by sme pristúpili aj k špecifikácii elementárnych pojmov vyskytujúcich sa v definícii, potom by sme dospeli k nekonečnej rekurzii (opakovaniu) v definíciách, ktoré by takto stratili praktický význam a stali by sa bezcennými formálnymi prostriedkami.

Označme množinu písmenom  $A$ , potom skutočnosť, že element  $a$  *patrí* (*nepatrí*) do tejto množiny označíme výrazom  $a \in A$  ( $a \notin A$ ). Tento výraz chápeme ako výrok, ktorý je pravdivý (nepravdivý), ak element  $a$  patrí (nepatrí) do množiny  $A$ . Poznamenajme, že symbol  $\notin$  môžeme formálne definovať takto:  $x \notin A \stackrel{\text{def}}{=} \neg(x \in A)$ .

Množinu môžeme špecifikovať dvoma rôznymi spôsobmi: *Prvý* spôsob určenia množiny je založený na *vymenovaní* všetkých elementov, ktoré do nej patria

$$A = \{a, b, \dots, u\} \quad (2.1a)$$

Tento spôsob je vhodný len na špecifikácie množín, ktoré obsahujú konečný počet elementov. Ak by sme takýmto spôsobom chceli napríklad definovať množinu párnych prirodzených čísel, potom tento spôsob je nepoužiteľný, pretože párnych prirodzených čísel je nekonečne mnoho. *Druhý* spôsob špecifikácie množiny je založený na použití *predikátu*  $P(x)$ , ktorý určuje, či element  $x \in U$  patrí do množiny  $A$  (predikát  $P(x)$  je pravdivý) alebo nepatrí do množiny  $A$  (predikát  $P(x)$  je nepravdivý)

$$A = \{x \in U; P(x)\} \quad (2.1b)$$

Tak napríklad, množina obsahujúca párne nezáporné celé čísla je definovaná takto

$$A = \{n \in U; P(n)\}$$

kde  $n$  sú nezáporné celé čísla z univerza  $U = \{0, 1, 2, \dots\}$  a predikát  $P(n)$  je špecifikovaný rovnosťou  $P(n) =_{def} \exists k (n = 2k)$ , kde  $k$  je nezáporné celé číslo, alebo

$$P(n) = \begin{cases} \text{pravda}, 1 & (n \text{ je párne číslo}) \\ \text{nepravda}, 0 & (n \text{ je nepárne číslo}) \end{cases}$$

Uvedený druhý spôsob špecifikácie množiny môže byť jednoducho pretransformovaný na koncepciu **charakteristických funkcií**. V tomto prístupe predikát  $P(x)$  z (2.1b) je určený takto

$$P(x) =_{def} (\mu_A(x) = 1) \quad (2.2)$$

kde

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1 & (x \in A) \\ 0 & (x \notin A) \end{cases} \quad (2.3)$$

Pristúpme teraz k podrobnejšej diskusii špecifikácie množiny pomocou charakteristickej funkcie. Uvažujme **univerzum**  $U$ , nad ktorým sú definované všetky ostatné množiny.

**Definícia 2.2.** Každá množina  $A$  je pomocou charakteristickej funkcie vyjadrená takto

$$A = \{x \in U; \mu_A(x) = 1\} \quad (2.4)$$

kde charakteristická funkcia  $\mu_A(x)$  je zobrazenie

$$\mu_A : U \rightarrow \{0, 1\} \quad (2.5)$$

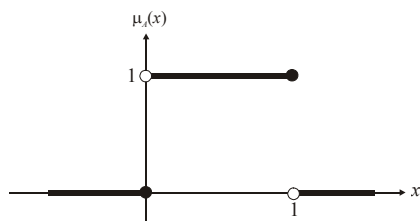
ktoré binárne ohodnocuje každý element  $x$  univerza  $U$  binárnym číslom  $\mu_A(x) \in \{0, 1\}$ , ktoré vyhovuje vlastnosti (2.3).

Pomocou charakteristickej funkcie môžeme definovať aj dve špeciálne množiny: **prázdnu množinu**  $\emptyset$ , ktorá nemá žiadny element,  $\emptyset = \{x; \mu_\emptyset(x) = 0\}$  a **univerzálnu množinu**  $U$ ,  $U = \{x; \mu_U(x) = 1\}$ , ktorá je totožná s univerzom.

**Príklad 2.1.** Vyjadrite množinu – polootvorený interval  $A = (0, 1]$  pomocou charakteristickej funkcie. V tomto prípade univerzum  $U$  je totožné s množinou reálnych čísel  $R$ . Charakteristická funkcia  $\mu_A(x)$  je definovaná takto

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1 & (\text{pre } 0 < x \leq 1) \\ 0 & (\text{ináč}) \end{cases}$$

Grafické znázornenie tejto charakteristickej funkcie je na obr. 2.1.



**Obrázok 2.1.** Charakteristická funkcia množiny  $A$ , ktorá je určená ako polootvorený interval  $A = (0,1]$ .

Pomocou charakteristických funkcií môžeme definovať operácie nad množinami:

**Definícia 2.3.** Hovoríme, že množina  $A = \{x; \mu_A(x) = 1\}$  sa **rovná** množine  $B = \{x; \mu_B(x) = 1\}$ ,  $A = B$ , vtedy a len vtedy, ak tieto množiny sú definované nad rovnakým univerzom  $U$  a charakteristické funkcie oboch množín sú rovnaké

$$(A = B) =_{def} \forall (x \in U) (\mu_A(x) = \mu_B(x)) \quad (2.6a)$$

Alternatívna definícia vzťahu rovnosti medzi množinami  $A$  a  $B$  je

$$\begin{aligned} (A = B) &=_{def} \forall (x \in U) ((x \in A) \equiv (x \in B)) \\ &=_{def} \forall (x \in U) ((x \in A \Rightarrow x \in B) \wedge (x \in B \Rightarrow x \in A)) \end{aligned} \quad (2.6b)$$

**Definícia 2.4.** Hovoríme, že množina  $A = \{x; \mu_A(x) = 1\}$  je podmnožinou množiny  $B = \{x; \mu_B(x) = 1\}$ , čo píšeme  $A \subseteq B$ , vtedy a len vtedy, ak každý element z množiny  $A$  patrí aj do množiny  $B$

$$A \subseteq B =_{def} \forall (x \in U) ((\mu_A(x) = 1) \Rightarrow (\mu_B(x) = 1)) \quad (2.7a)$$

Alternatívna definícia podmnožiny je

$$A \subseteq B =_{def} \forall (x \in U) ((x \in A) \Rightarrow (x \in B))$$

V prípade, že  $A \neq B$ , potom formula  $A \subseteq B$  sa prepíše do tvaru  $A \subset B$ . Hovoríme, že  $A$  je **vlastnou podmnožinou**  $B$ , ak  $A \subset B$  a  $A \neq \emptyset$ . Rovnosť medzi množinami  $A = B$  platí vtedy a len vtedy, ak  $(A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A)$ .

**Definícia 2.5.** Hovoríme, že množina  $A \cup B$  je **zjednotenie množín**  $A$  a  $B$ , vtedy a len vtedy, ak

$$A \cup B =_{def} \{x; (x \in A) \vee (x \in B)\} = \{x; \mu_{A \cup B}(x) = 1\} \quad (2.8a)$$

kde

$$\mu_{A \cup B}(x) = \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\} \quad (2.8b)$$

**Definícia 2.6.** Hovoríme, že množina  $A \cap B$  je **prienik množín**  $A$  a  $B$ , vtedy a len vtedy, ak

$$A \cap B =_{def} \{x; (x \in A) \wedge (x \in B)\} = \{x; \mu_{A \cap B}(x) = 1\} \quad (2.9a)$$

kde

$$\mu_{A \cap B}(x) = \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\} \quad (2.9b)$$

**Definícia 2.7.** Hovoríme, že množina  $\bar{A}$  je **doplňok** množiny  $A$  (vzhľadom k univerzu  $U$ ), vtedy a len vtedy, ak

$$\bar{A} =_{def} \{x; x \notin A\} = \{x; \mu_{\bar{A}}(x) = 1\} \quad (2.10a)$$

kde

$$\mu_{\bar{A}}(x) = 1 - \mu_A(x) \quad (2.10b)$$

Poznamenajme, že platí jednoduchá ekvivalencia  $(x \notin A) \equiv (x \in \bar{A})$ , t. j. element  $x$  nie je z množiny  $A$  práve vtedy a len vtedy, ak patrí do komplementu  $\bar{A}$ .

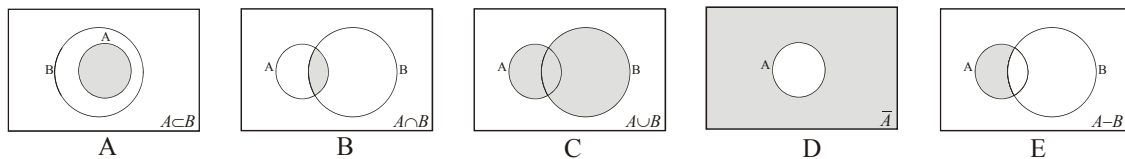
**Definícia 2.8.** Hovoríme, že množina  $A - B$  (alebo  $A \setminus B$ ) je **rozdiel množín (relatívny doplnok množín)**  $A$  a  $B$ , vtedy a len vtedy, ak

$$A - B =_{def} \{x; (x \in A) \wedge (x \notin B)\} = \{x; \mu_{A-B}(x) = 1\} \quad (2.11a)$$

kde

$$\mu_{A-B}(x) = \min\{\mu_A(x), 1 - \mu_B(x)\} \quad (2.11b)$$

Takto definované operácie nad množinou  $U$  sú znázornené pomocou Vennových<sup>1</sup> diagramov (pozri obr. 2.2), ktoré reprezentujú rozšírený spôsob vizualizácie množinových operácií a ich formúl.



**Obrázok 2.2.** Znáozornenie základných operácií nad množinami pomocou Vennových diagramov. Na týchto diagramoch obdĺžniková oblasť znázorňuje univerzum  $U$ , kde množiny  $A$  a  $B$  sú podmnožiny univerza. Diagram A znázorňuje reláciu „podmnožina“  $A \subset B$ , keď množina – oblasť  $A$  celá leží v množine – oblasti  $B$ . Diagram B znázorňuje operáciu „prienik“  $A \cap B$ , kde vyšrafovaná oblasť reprezentuje prienik množín  $A$  a  $B$ . Porovnaním diagramov A a B zistíme, že ak  $A \subset B$ , potom  $A \cap B = A$ . Diagram C znázorňuje operáciu zjednotenia množín  $A$  a  $B$ , vyšrafovaná je oblasť, ktorá sa nachádza v množine  $A$  alebo v množine  $B$ . Diagram D znázorňuje operáciu doplnok množiny  $A$  vzhľadom k univerzu  $U$ . Diagram E znázorňuje rozdiel množín  $A$  a  $B$ , vyšrafovaná je oblasť, ktorá sa nachádza v  $A$  a súčasne sa nenachádza v  $B$ .

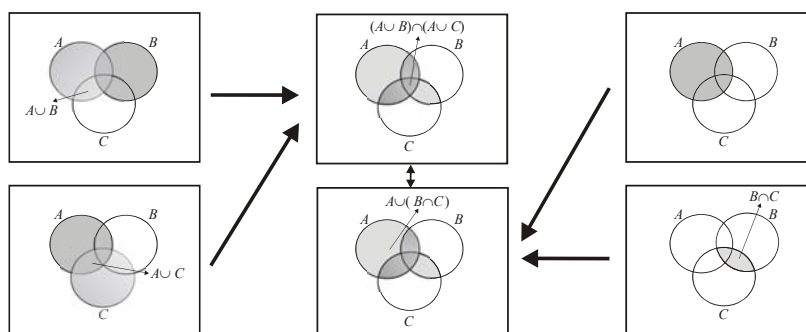
Tabuľka 2.1 obsahuje základné formuly pre množinové operácie, ktoré tvoria tzv. **algebru teórie množín**. Každá formula z tejto tabuľky má pomerne jednoduchú vizualizáciu pomocou Vennových diagramov, ktoré v mnohých textoch o teórii množín slúžia aj ako podklad pre dôkaz ich korektnosti, pozri obr. 2.3.

**Tabuľka 2.1.** Formuly teórie množín

vlastnosť	formula teórie množín
komutatívnosť	$A \cap B = B \cap A$ $A \cup B = B \cup A$
asociatívnosť	$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
distributívnosť	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

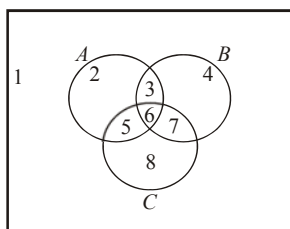
<sup>1</sup> John Venn (1834-1923) je anglicky matematik, ktorý sa zaslúžil o ďalší rozvoj Boolových algebraických snáh formalizovať výrokovú logiku.

De Morganove vzťahy	$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$ $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$
idempotentnosť	$A \cap A = A, A \cup A = A$
identita	$A \cap U = A, A \cup \emptyset = A$
absorpcia	$A \cap \emptyset = \emptyset, A \cup U = U$
involúcia	$\overline{\bar{A}} = A,$
zákon vylúčenia tretieho	$A \cup \bar{A} = U$
zákon sporu	$A \cap \bar{A} = \emptyset$
rozdiel množín	$A - B = A \cap \bar{B}$
distributívne zákony pre rozdiel	$A \cap (B - C) = (A \cap B) - (\bar{A} \cup C)$ $A \cup (B - C) = (A \cup B) - (\bar{A} \cap C)$



**Obrázok 2.3.** Verifikácia korektnosti formuly  $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ . Prostredný Vennov diagram je zostrojený dvoma rôznymi nezávislými spôsobmi, v oboch prípadoch dostávame ten istý výsledok.

Na obr. 2.3 je znázornená verifikácia formuly  $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$  pomocou Vennových diagramov. Ľavá a pravá strana tejto formuly reprezentujú rôzne prístupy ku konštrukcii Vennovho diagramu, v oboch prípadoch dostávame ten istý výsledok, čiže verifikovaná formula je korektná. Tento postup môžeme „algebraizovať“ podobným štýlom, ako sa počítajú pravdivostné hodnoty formúl výrokovej logiky. Na obr. 2.4 je označených 8 oblastí v univerze  $U$ , ktoré buď ležia alebo neležia v množinách  $A$ ,  $B$  a  $C$ . Tak napr. oblasť 5 je taká, že existuje element, ktorý sa súčasne nachádza v množinách  $A$  a  $C$ , a nenachádza sa v množine  $B$ . Formula je korektná vtedy a len vtedy, ak pre každú oblasť obe strany formuly dávajú rovnaký výsledok, pozri tab. 2.2. V tejto tabuľke je každý riadok priradený jednej z ôsmich oblastí na obr. 2.4. Binárne hodnoty v jednotlivých riadkoch reprezentujú skutočnosť, či pre danú oblasť existuje taký element, ktorý je v oblasti špecifikujúcej daný stĺpec. Tak napríklad, ôsmy stĺpec v tabuľke 2.2 obsahuje binárne elementy, ktoré špecifikujú, či  $A \cup B$  a  $A \cup C$  obsahujú spoločný element. Pri vytváraní tabuľky platí princíp kompozicionality, t. j. ohodnotenie zložitejších výrazov je vytvárané pomocou ich jednoduchších zložiek.



**Obrázok 2.4.** Vyznačenie jednotlivých oblastí v množine univerza  $U$ . Oblasť 1 obsahuje elementy, ktoré nie sú obsiahnuté v množinách  $A$ ,  $B$  a  $C$ . Oblasť 2 obsahuje elementy, ktoré sú obsiahnuté v množine  $A$ , ale nie sú obsiahnuté v množinách  $B$  a  $C$ . Podobným spôsobom môžu byť charakterizované ostatné oblasti 3, 4, ..., 8.

**Tabuľka 2.2.** Tabuľková metóda pre verifikáciu formúl teórie množín

oblasť	$A$	$B$	$C$	$A \cup B$	$A \cup C$	$B \cap C$	$(A \cup B) \cap (A \cup C)$	$A \cup (B \cap C)$
1	0	0	0	0	0	0	0	0
2	1	0	0	1	1	0	1	1
3	1	1	0	1	1	0	1	1
4	0	1	0	1	0	0	0	0
5	1	0	1	1	1	0	1	1
6	1	1	1	1	1	1	1	1
7	0	1	1	1	1	1	1	1
8	0	0	1	0	1	0	0	0

**Príklad 2.2.** Pomocou tabuľkovej metódy verifikujte korektnosť De Morganových formúl  $\overline{(A \cup B)} = \bar{A} \cap \bar{B}$  a  $\overline{(A \cap B)} = \bar{A} \cup \bar{B}$ .

$A$	$B$	$A \cup B$	$\bar{A}$	$\bar{B}$	$A \cap B$	$\overline{A \cup B}$	$\bar{A} \cap \bar{B}$	$\overline{A \cap B}$	$\bar{A} \cup \bar{B}$
0	0	0	1	1	0	1	1	1	1
0	1	1	1	0	0	0	0	1	1
1	0	1	0	1	0	0	0	1	1
1	1	1	0	0	1	0	0	0	0

**Príklad 2.3.** Dokážte De Morganovu formulu  $\overline{(A \cup B)} = \bar{A} \cap \bar{B}$

$$\mu_{\overline{A \cup B}}(x) = 1 - \mu_{A \cup B}(x) = 1 - \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\} \quad (2.12a)$$

$$\mu_{\bar{A} \cap \bar{B}}(x) = \min\{1 - \mu_A(x), 1 - \mu_B(x)\} \quad (2.12b)$$

Použitím algebraickej identity<sup>2</sup>

$$1 - \max\{a, b\} = \min\{1 - a, 1 - b\}$$

dokážeme, že formuly (2.12a-b) sú totožné pre ľubovoľné charakteristické funkcie, čiže platí

$$\forall (x \in U) (\mu_{\overline{A \cup B}}(x) = \mu_{\bar{A} \cap \bar{B}}(x)) \quad (2.13)$$

Použitím podmienky (2.6a) dostaneme, že množiny  $\overline{(A \cup B)}$  a  $\bar{A} \cap \bar{B}$  sa navzájom rovnajú.

**Príklad 2.4.** Dokážte distributívnu formulu  $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ .

$$\mu_{A \cup (B \cap C)}(x) = \max\{\mu_A(x), \mu_{B \cap C}(x)\} = \max\{\mu_A(x), \min\{\mu_B(x), \mu_C(x)\}\}$$

$$\mu_{(A \cup B) \cap (A \cup C)}(x) = \min\{\mu_{A \cup B}(x), \mu_{A \cup C}(x)\} = \min\{\max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}, \max\{\mu_A(x), \mu_C(x)\}\}$$

<sup>2</sup> Ktorá sa jednoducho dokáže použitím metódy vymenovania prípadov z kapitoly 1.4.

Použitím algebraickej identity (pozri príklad 1.13)

$$\max\{a, \min\{b, c\}\} = \min\{\max\{a, b\}, \max\{a, c\}\}$$

dostaneme, že vyššie uvedené charakteristické funkcie sa rovnajú

$$\forall (x \in U) (\mu_{A \cup (B \cap C)}(x) = \mu_{(A \cup B) \cap (A \cup C)})$$

čiže sa rovnajú aj množiny, ktoré určujú,  $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ .

**Príklad 2.5.** Dokážte distributívne zákony pre rozdiel množín.

K dôkazu použijeme formulu z Tabuľky 2.1 pre rozdiel množín,  $A - B = A \cap \bar{B}$ . Pristúpime k dôkazu prvej formuly  $A \cap (B - C) = (A \cap B) - (\bar{A} \cup C)$ , upravíme jej ľavú a pravú stranu

$$A \cap (B - C) = A \cap (B \cap \bar{C}) = A \cap B \cap \bar{C}$$

$$(A \cap B) - (\bar{A} \cup C) = (A \cap B) \cap \overline{(\bar{A} \cup C)} = (A \cap B) \cap (A \cap \bar{C}) = A \cap B \cap \bar{C}$$

Týmto sme dokázali, že ľavá a pravá strana sú si rovné, čiže platí prvý distributívny zákon pre rozdiel množín. Úplne analogickým spôsobom dokážeme aj platnosť druhej formuly  $A \cup (B - C) = (A \cup B) - (\bar{A} \cap C)$ , pomocou vzťahu  $A - B = A \cap \bar{B}$  upravíme ľavú a pravú stranu

$$A \cup (B - C) = A \cup (B \cap \bar{C}) = (A \cup B) \cap (A \cup \bar{C})$$

$$(A \cup B) - (\bar{A} \cap C) = (A \cup B) \cap \overline{(\bar{A} \cap C)} = (A \cup B) \cap (A \cup \bar{C})$$

Podobne ako aj v predchádzajúcom dôkaze, ľavá a pravá strana sú si rovné, čiže platí aj druhý distributívny zákon pre rozdiel množín.

Ak množina  $A$  je **konečná** (obsahuje konečný počet elementov), potom jej **mohutnosť** (**kardinalita**), označená  $|A|$ , je počet elementov, ktoré obsahuje. V prípade, že množina  $A$  nie je konečná, potom jej mohutnosť je nekonečná,  $|A| = \infty$ .

**Príklad 2.6.** Aká je mohutnosť množín?

(a)  $A = \{x; x \text{ je celé číslo ohraničené } 1/8 < x < 17/2\}$ ,  $|A| = 8$ ,

(b)  $A = \{x; \sqrt{x} \text{ je celé číslo}\} = \{0, 1, 4, 9, 16, \dots\}$ ,  $|A| = \infty$ ,

(c)  $A = \{x; x^2 = 1 \text{ alebo } 2x^2 = 1\} = \{1, -1, 1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}\}$ ,  $|A| = 4$ ,

(d)  $A = \{a, \{a, b\}, \{a, b, c\}\}$ ,  $|A| = 3$ ,

(e)  $A = \{a, \{a\}, \{\{a\}\}\}$ ,  $|A| = 3$ .

(f)  $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ,  $B = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ ,  $|A - B| = 4$ .

## 2.2 Enumerácia elementov v konečných množinách

V rôznych aplikáciách teórie množín vystupuje do popredia problém enumerácie elementov danej konečnej množiny, čiže aká je mohutnosť danej množiny. Poznamenajme, že v tejto kapitole sa budeme zaoberať len konečnými množinami. Nech  $A$  a  $B$  sú disjunktné množiny

(ich prienik je prázdna množina,  $A \cap B = \emptyset$ ), potom mohutnosť ich zjednotenia je určená súčtom mohutností jednotlivých množín

$$|A \cup B| = |A| + |B| \quad (2.14a)$$

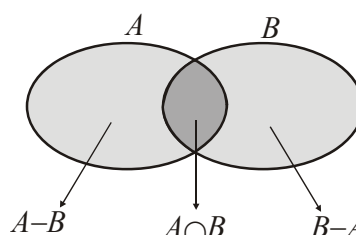
Tento výsledok môže byť jednoducho zovšeobecnený pomocou matematickej indukcie na mohutnosť zjednotenia  $n$  vzájomne disjunktných množín

$$|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| = |A_1| + |A_2| + \dots + |A_n| \quad (2.14b)$$

Zovšeobecnenie formuly (2.14a) pre množiny, ktoré majú neprázdny prienik (nedisjunktné množiny) je špecifikované vetou

**Veta 2.1.** Mohutnosť množiny  $A \cup B$  je určená formulou

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| \quad (2.15)$$



**Obrázok 2.5.** Rozklad množín  $A$  a  $B$  na tri disjunktné podmnožiny:  $A-B$ ,  $B-A$  a  $A \cap B$ .

Formulu (2.15) ľahko dokážeme pomocou rozkladu množín  $A$  a  $B$  na disjunktné podmnožiny, pozri obr. 2.5, potom použitím (2.14) dostaneme

$$|A \cup B| = |A - B| + |B - A| + |A \cap B|$$

Mohutnosť samotných množín  $A$  a  $B$  je určená takto

$$|A| = |A - B| + |A \cap B|$$

$$|B| = |B - A| + |A \cap B|$$

Kombináciou týchto troch formúl dostaneme vzťah (2.15).

Podobne ako pre (2.14a), formula (2.15) môže byť zovšeobecnená pre mohutnosť zjednotenia 3 množín

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C| \quad (2.16)$$

Formulu (2.15) ľahko zovšeobecníme indukciou na

$$|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| = \sum_{i=1}^n |A_i| - \sum_{\substack{i,j=1 \\ (i < j)}}^n |A_i \cap A_j| + \sum_{\substack{i,j,k=1 \\ (i < j < k)}}^n |A_i \cap A_j \cap A_k| + \dots + (-1)^{n+1} |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n| \quad (2.17)$$

**Príklad 2.7.** Každý zo 100 študentov Fakulty informatiky UGBM študuje aspoň jeden z týchto odborov: matematika, informatika a ekonómia. Nech  $U$  je množina všetkých študentov FI UGBM,  $M$  je množina študentov matematiky,  $I$  je množina študentov informatiky a  $E$  je množina študentov ekonómie. Počty študentov sú určené tabuľkou:

Študenti	symbol	počet
Všetci	$ U $	100
matematika	$ M $	65



informatika	$ I $	45
ekonómia	$ E $	42
matematika a informatika	$ M \cap I $	20
matematika a ekonómia	$ M \cap E $	25
informatika a ekonómia	$ I \cap E $	15

(i) Prvou úlohou je zistiť, koľko študentov súčasne študuje tri odbory,  $|M \cap I \cap E| = ?$

Použitím formuly (2.16) dostaneme

$$|U| = |M \cup I \cup E| = |M| + |I| + |E| - |M \cap I| - |M \cap E| - |I \cap E| + |M \cap I \cap E|$$

Táto formulu nám špecifikuje počet študentov, ktorí súčasne študujú matematiku, informatiku a ekonómiu

$$100 = 65 + 45 + 42 - 20 - 25 - 15 + |M \cap I \cap E|$$

potom  $|M \cap I \cap E| = 8$ .

(ii) Druhou úlohou je zistiť, koľko študentov študuje matematiku a informatiku, ale nie ekonómiu,  $|M \cap I \cap \bar{E}| = ?$  Mohutnosť množiny  $M \cap I$  môžeme vyjadriť takto

$$|M \cap I| = |M \cap I \cap E| + |M \cap I \cap \bar{E}| \Rightarrow |M \cap I \cap \bar{E}| = -|M \cap I \cap E| + |M \cap I|$$

Použitím predchádzajúcich výsledkov dostaneme

$$|M \cap I \cap \bar{E}| = -|M \cap I \cap E| + |M \cap I| = 20 - 8 = 12$$

(iii) Poslednou, treťou úlohou je zistiť, koľko študentov študuje len informatiku, ale nie matematiku a ekonómiu,  $|\bar{M} \cap I \cap \bar{E}| = ?$  Kardinalitu množiny  $I$  rozložíme na štyri časti

$$|I| = |I \cap (M \cup \bar{M}) \cap (E \cup \bar{E})| = |I \cap M \cap E| + |I \cap M \cap \bar{E}| + |I \cap \bar{M} \cap E| + |I \cap \bar{M} \cap \bar{E}|$$

Platia tieto identity

$$|I \cap \bar{M} \cap E| = |I \cap E| - |I \cap M \cap E|$$

$$|I \cap M \cap \bar{E}| = |I \cap M| - |I \cap M \cap E|$$

Dosadením týchto výsledkov do predošlého vzťahu dostaneme

$$|I| = -|I \cap M \cap E| + |I \cap E| + |I \cap M| + |I \cap \bar{M} \cap \bar{E}|$$

alebo

$$|I \cap \bar{M} \cap \bar{E}| = |I| + |I \cap M \cap E| - |I \cap E| - |I \cap M| = 45 + 8 - 15 - 20 = 18$$

Pojem množina môže byť zovšeobecnený tak, že elementy množiny môžu byť taktiež množiny (pozri príklad 2.6, zadanie d, e). Ak pristúpime na túto terminológiu, potom je korektný výrok „množina všetkých možných množín, ktoré neobsahujú samy seba ako prvky“. Označme túto množinu  $M$ , potom obsahuje také množiny  $A$  pre ktoré platí  $A \notin A$ , formálne  $M = \{A; A \notin A\}$ . Russell bol prvý, ktorý počiatkom 20. storočia poukázal na skutočnosť, že takto formulované výroky sú vnútorne rozporné. Položme si otázku, či táto množina obsahuje samu seba,  $M \in M$ ? Nech platí  $M \in M$ , potom podľa definície musí platiť  $M \notin M$ . Nech platí  $M \notin M$ , potom však z definície vyplýva taktiež  $M \in M$ . Tieto dva závery (implikácie) môžeme spojiť do jednej ekvivalencie,  $(M \in M) \equiv (M \notin M)$ , čo je evidentná kontradikcia. Russell navrhol prekonať túto vnútornú kontradikčnosť intuitívnej teórie množín tak, že

pojmem množina sa môže používať len na „prvej“ úrovni, t. j. keď prvkami tejto množiny sú elementy, ktoré nemajú svoju štruktúru. Na druhej úrovni používal termín „rodina množín“, jej prvky sú množiny z prvej úrovne. Na ďalšej tretej úrovni môžeme hovoriť o triede množín, jej prvky sú rodiny množín z predchádzajúcej druhej úrovne. Týmto spôsobom výrok „množina, ktorá obsahuje všetky možné množiny“ je nekorektný, jeho správna forma je „rodina všetkých možných množín“, potom už máme (hlavne zásluhou vhodnej terminológie) odstránený zmienený paradox, ktorý svojho času zohral fundamentálnu úlohu v teórii množín. Iný spôsob prekonania paradoxov Russellovho typu je dôsledná axiomatizácia teórie množín.

Nech  $I = \{1, 2, \dots, n\}$  je množina indexov, ktorá obsahuje prvých  $n$  kladných celých čísel. Predpokladajme, že pre každý index  $i \in I$  má definovanú množinu  $A_i$ , potom rodina množín je definovaná takto

$$\mathcal{A} = \{A_i; i \in I\} = \{A_1, A_2, \dots, A_n\} \quad (2.18)$$

Pre rodinu množín  $\mathcal{A}$  môžeme definovať operáciu prieniku a zjednotenia jej množín

$$\bigcap_{i \in I} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n = \{x; x \in A_i, \text{ pre každé } i \in I\} \quad (2.19a)$$

$$\bigcup_{i \in I} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \{x; x \in A_i, \text{ pre nejaké } i \in I\} \quad (2.19b)$$

**Príklad 2.8.** Nech  $I = R$ , t. j. množina indexov je totožná s množinou reálnych čísel a nech

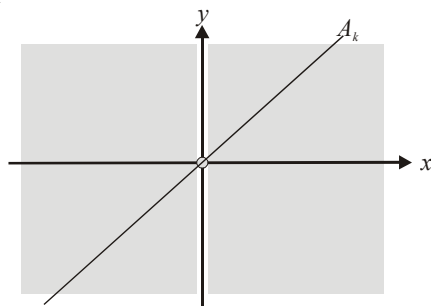
$$A_k = \{(x, kx); x \in R\}$$

kde  $k \in R$ . Geometrická interpretácia množiny  $A_k$  je priamka so smernicou  $k$ , ktorá prechádza stredom súradnicového systému, pozri obr. 2.6. To znamená, že prienik množín  $A_k$  je jednoprvková množina, ktorá obsahuje stred súradnicového systému

$$\bigcap_{k \in R} A_k = \{(0, 0)\}$$

Zjednotenie týchto množín nám dáva celú rovinu bez osi  $o_y$  doplnenú o stred súradnicového systému (pozri obr. 2.6)

$$\bigcup_{k \in R} A_k = \{(x, y); x, y \in R \text{ a } x \neq 0\} \cup \{(0, 0)\}$$



**Obrázok 2.6.** Vytieňovaná oblasť znázorňuje zjednotenie všetkých množín  $A_k$ , ktoré reprezentuje celú rovinu, z ktorej je odstránená os  $o_y$ , plus počiatok súradnicového systému  $(0,0)$ . Množina  $A_k$  je reprezentovaná priamkou  $y=kx$ .

**Definícia 2.9.** Množina  $\mathcal{P}(A)$  sa nazýva potenčná množina vzhľadom k množine (alebo jednoducho, množiny)  $A$  vtedy a len vtedy, ak obsahuje všetky možné podmnožiny množiny  $A$

$$\mathcal{P}(A) = \{B; B \subseteq A\} \quad (2.20)$$

Potenčná množina obsahuje prázdnu množinu  $\emptyset$  a taktiež aj množinu  $A$ , pretože obe tieto množiny sú podmnožinou množiny  $A$ . Vlastnosti potenčnej množiny sú určené vetou

**Veta 2.2.** Potenčná množina  $\mathcal{P}(A)$  spĺňa tieto vlastnosti

$$(A \subseteq B) \equiv (\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)) \quad (2.21a)$$

$$\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B) \quad (2.21b)$$

$$\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cap B) \quad (2.21c)$$

Dokážeme ekvivalenciu (2.21a), musíme dokázať dve nezávisle implikácie  $(A \subseteq B) \Rightarrow (\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B))$  a  $(\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)) \Rightarrow (A \subseteq B)$ .

(1) Predpokladajme, že  $A \subseteq B$ , nech  $X \in \mathcal{P}(A)$ , potom  $X \subseteq A$ . Pretože predpokladáme platnosť  $A \subseteq B$ , potom musí platiť aj  $X \subseteq B$ , teda aj  $X \in \mathcal{P}(B)$ . Týmto sme dokázali, že z predpokladu  $A \subseteq B$  je odvoditeľná implikácia  $(X \in \mathcal{P}(A)) \Rightarrow (X \in \mathcal{P}(B))$ , z čoho priamo plynie  $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$ .

(2) Predpokladajme, že  $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$ , pretože  $A \in \mathcal{P}(A)$ , potom z predpokladu vyplýva, že musí platiť aj  $A \in \mathcal{P}(B)$ , čo je možné len vtedy, ak  $A \subseteq B$ .

Dôkaz vzťahu (2.21b) bude spočívať v dôkaze implikácie  $X \in (\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)) \Rightarrow X \in \mathcal{P}(A \cup B)$ . Predpokladajme  $X \in \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$ , potom

$$\begin{aligned} (X \in \mathcal{P}(A)) \vee (X \in \mathcal{P}(B)) &\Rightarrow (X \subseteq A) \vee (X \subseteq B) \Rightarrow \\ X \subseteq (A \cup B) &\Rightarrow X \in \mathcal{P}(A \cup B) \end{aligned}$$

Týmto sme dokázali  $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B)$ .

Dôkaz formuly (2.21c) je podobný poslednému dôkazu (v tomto prípade sa jedná o množinovú rovnosť, t. j. musíme dokázať dve implikácie  $p \Rightarrow q$  a  $q \Rightarrow p$ ).

**Príklad 2.9.** Niekoľko ilustračných príkladov potenčných množín:

(a)  $A = \emptyset$ ,  $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset\}$ ,

(b)  $A = \{a\}$ ,  $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{a\}\}$ ,

(c)  $A = \{a, b\}$ ,  $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$ ,

(d)  $A = \{a, b, c\}$ ,  $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}\}$ .

**Príklad 2.10.** Pri práci s potenčnými množinami musíme veľmi starostlivo rozlišovať medzi symbolmi  $\in$  a  $\subseteq$ . Ak  $a \in A$ , potom  $\{a\} \subseteq A$  alebo  $\{a\} \in \mathcal{P}(A)$ . Študujme množinu  $A = \{1, 2, \{1\}\}$ , potom  $1 \in A$  a  $\{1\} \in A$ , preto  $\{1\} \in \mathcal{P}(A)$  a taktiež aj  $\{\{1\}\} \in \mathcal{P}(A)$ . Potenčná množina  $\mathcal{P}(A)$  je

$$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{\{1\}\}, \{1, 2\}, \{1, \{1\}\}, \{2, \{1\}\}, \{1, 2, \{1\}\}\}$$

Pripomíname, že elementy 1,  $\{1\}$  a  $\{\{1\}\}$  sú rôzne. Prvý element z tejto trojice je číslo, druhý element je množina s jedným elementom – číslom a tretí element je množina s jedným elementom – množinou, ktorá obsahuje číslo 1.

Zostrojme postupnosť

$$1, \{1\}, \{\{1\}\}, \{\{\{1\}\}\}, \dots$$

každý element (s výnimkou prvého elementu) tejto postupnosti je množina, ktorá obsahuje predchádzajúci element. Táto vlastnosť rekurentnosti môže byť použitá na definíciu  $n$ -tého člena postupnosti

$$X_1 = 1 \quad \text{a} \quad X_{n+1} = \{X_n\}, \quad \text{pre } n = 1, 2, 3, \dots$$

**Veta 2.3.** Mohutnosť potenčnej množiny  $\mathcal{P}(A)$  konečnej množiny  $A$  je určená jednoduchým vzťahom

$$|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|} \quad (2.22)$$

Tento výsledok pre mohutnosť potenčnej množiny sa ľahko dokáže pomocou nasledujúcej úvahy: Nech konečná množina  $A$  obsahuje  $n$  elementov,  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ , každá podmnožina  $A' \subseteq A$  môže byť charakterizovaná pomocou charakteristickej funkcie – binárneho vektora dĺžky  $n$ . Ak v  $i$ -tej polohe tohto vektora je 1 (0), potom  $a_i \in A'$  ( $a_i \notin A'$ ). To znamená, že každá podmnožina z potenčnej množiny  $\mathcal{P}(A)$  je jednoznačne špecifikovaná binárnym vektorom dĺžky  $n$ . Pretože v každej polohe binárneho vektora sú prípustné len dve hodnoty (1 a 0), potom celkový počet rôznych binárnych vektorov dĺžky  $n$  je  $2^n$ , toto číslo špecifikuje aj mohutnosť potenčnej množiny,  $|\mathcal{P}(A)| = 2^n$ , kde  $|A| = n$ . Tento jednoduchý výsledok viedol niektorých autorov k tomu, že potenčnú množinu označili symbolom  $2^A$ , jej mohutnosť sa rovná  $2^{|A|}$ .

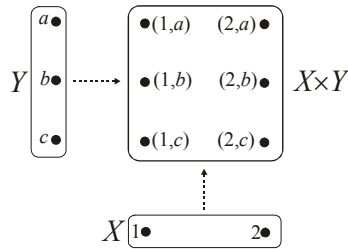
### 2.3 Karteziánsky súčin množín

V mnohých matematických disciplínach alebo v ich aplikáciách vystupujú usporiadané dvojice elementov. Tak napríklad, komplexné číslo môže byť charakterizované ako usporiadaná dvojica reálnych čísel  $z = (x, y)$ , kde  $x$  ( $y$ ) je reálna (komplexná) časť. Základná relácia pre usporiadané dvojice je rovnosť:  $(x, y) = (x', y')$ , ktorá platí vtedy a len vtedy, ak sú si rovné ich prvé a druhé časti,  $x = x'$  a  $y = y'$ . Táto podmienka rovnosti platí aj pre komplexné čísla, ktoré sú si rovné vtedy a len vtedy, ak sa rovnajú ich reálne a imaginárne časti. Dalším ilustračným príkladom použitia usporiadanej dvojice v matematike je špecifikácia bodu ležiaceho v rovine, ktorý je taktiež plne určený usporiadanou dvojicou  $(x, y)$  svojich súradníc. Dva body (dve usporiadané dvojice)  $A = (x, y)$  a  $B = (x', y')$  sú rovné vtedy a len vtedy, ak sú rovné ich súradnice,  $x = x'$  a  $y = y'$ .

**Definícia 2.10.** Množina  $X \times Y$  sa nazýva *karteziánsky súčin*<sup>3</sup> dvoch množín  $X$  a  $Y$  vtedy a len vtedy, ak

$$X \times Y = \{(x, y); x \in X \text{ a } y \in Y\} \quad (2.23)$$

<sup>3</sup> Pomenovanie je po francúzskom matematikovi a filozofovi René Descartesovi (1596 – 1650), ktorý sa pokladá za zakladateľa analytickej geometrie. Je tvorcom koncepcie ortogonálneho súradnicového systému, v ktorom je bod charakterizovaný usporiadanou dvojicou súradníc – reálnych čísel. Táto „matematizácia“ geometrie sa pokladá za jeden z najväčších úspechov matematiky 17. storočia, ktorý umožnil, okrem iného aj Leibnizovi zaviesť pojem derivácie funkcie ako smernicu dotyčnice ku grafu funkcie.



**Obrázok 2.7.** Znázornenie karteziánskeho súčinu pomocou Vennových diagramov.

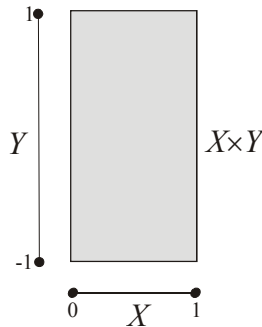
V prípade, že  $X = Y$ , potom  $X \times X = X^2$ . Poznamenajme, že ak aspoň jedna z množín  $X$  alebo  $Y$  je prázdna množina, potom aj karteziánsky súčin  $X \times Y$  je prázdny. Ak množiny  $X$  a  $Y$  sú obe neprázde, potom  $X \times Y = Y \times X$  vtedy a len vtedy, ak  $X = Y$  (táto vlastnosť je priamym dôsledkom podmienky rovnosti,  $(x,y) = (x',y')$ , medzi dvoma usporiadanými dvojicami).

**Príklad 2.11.** Nech  $X = \{1,2\}$  a  $Y = \{a,b,c\}$ , potom

$$X \times Y = \{(1,a), (1,b), (1,c), (2,a), (2,b), (2,c)\}$$

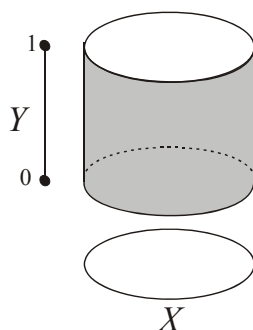
reprezentácia tohto súčinu pomocou Vennovho diagramu je znázornená na obr. 2.7.

**Príklad 2.12.** Nech  $X = [0,1]$  a  $Y = [-1,1]$  sú uzavreté intervaly reálnych čísel, karteziánsky súčin týchto dvoch intervalov môže byť znázornený pomocou obdĺžnika na obr. 2.8.



**Obrázok 2.8.** Znázornenie karteziánskeho súčinu dvoch úsečiek  $X$  a  $Y$ , výsledná oblasť je obdĺžnik.

**Príklad 2.13.** Nech  $X = \{(x,y); x^2 + y^2 = 1\}$  je kružnica o polomere 1 so stredom v centre súradnicového systému a  $Y = [0,1]$  je jednotková úsečka, karteziánsky súčin týchto dvoch oblastí produkuje povrch plášťa valca dĺžky 1 a s polomerom 1, pozri obr. 2.9.



**Obrázok 2.9.** Znáozornenie karteziánskeho súčinu kružnice  $X$  a úsečky  $Y$ , výsledná oblasť je valcová plocha.

Koncepcia usporiadanej dvojice môže byť zovšeobecnená na usporiadanú  $n$ -tícu, pomocou karteziánskeho súčinu  $n$  množín. Hovoríme, že dve  $n$ -tice  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  a  $(x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$  sa rovnajú vtedy a len vtedy, ak sú rovné ich zložky,  $x_1 = x'_1$ ,  $x_2 = x'_2$ , ...,  $x_n = x'_n$ .

**Definícia 2.11.** Množina  $X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$  sa nazýva karteziánsky súčin  $n$  množín  $X_1, X_2, \dots, X_n$  vtedy a len vtedy, ak

$$X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n); x_1 \in X_1, x_2 \in X_2, \dots, x_n \in X_n\} \quad (2.24a)$$

Karteziánsky súčin môžeme taktiež vyjadriť symbolicky takto

$$X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n = \prod_{i=1}^n X_i \quad (2.24b)$$

Ak všetky množiny z karteziánskeho súčinu sa rovnajú množine  $X$ , potom výraz  $X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$  je zjednodušený na  $X^n$ .

**Príklad 2.14.** Nech  $A = \{1, 2\}$ ,  $B = \{a, b\}$  a  $C = \{\alpha, \beta\}$ , potom karteziánsky súčin týchto množín má tvar

$$A \times B \times C = \{(1, a, \alpha), (1, a, \beta), (1, b, \alpha), (1, b, \beta), (2, a, \alpha), (2, a, \beta), (2, b, \alpha), (2, b, \beta)\}$$

**Príklad 2.15.** Nech  $X_1 = X_2 = \dots = X_n = R$ , kde  $R$  je množina reálnych čísel. Potom  $R^n$  je množina obsahujúca všetky  $n$ -tice reálnych čísel

$$R^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n); x_1, x_2, \dots, x_n \in R\}$$

a môže byť interpretovaná ako  **$n$ -rozmerný lineárny priestor**.

**Veta 2.4.** Mohutnosť karteziánskeho súčinu  $X \times Y$  dvoch konečných množín  $X$  a  $Y$  s mohutnosťami,  $|X| = m$  a  $|Y| = n$ , sa rovná súčinu mohutností jej zložiek

$$|X \times Y| = |X| \cdot |Y| = m \cdot n \quad (2.25a)$$

Tento výsledok môže byť jednoducho zovšeobecnený indukciou na  $n$ -násobný karteziánsky súčin konečných množín

$$|X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n| = |X_1| \cdot |X_2| \cdot \dots \cdot |X_n| = m_1 \cdot m_2 \cdot \dots \cdot m_n \quad (2.25b)$$

kde  $m_i$  je mohutnosť množiny  $X_i$ .

**Veta 2.5.** Karteziánsky súčin množiny  $A$  s prienikom alebo zjednotením dvoch množín  $X$  a  $Y$  vyhovuje podmienkam distributívnosti

$$A \times (X \cap Y) = (A \times X) \cap (A \times Y) \quad (2.26a)$$

$$(X \cap Y) \times A = (X \times A) \cap (Y \times A) \quad (2.26b)$$

$$A \times (X \cup Y) = (A \times X) \cup (A \times Y) \quad (2.26c)$$

$$(X \cup Y) \times A = (X \times A) \cup (Y \times A) \quad (2.26d)$$

Dokážeme prvú rovnosť (2.26a), ostatné sa môžu dokázať analogickým spôsobom. Nech  $(a, x) \in A \times (X \cap Y)$ , potom  $a \in A$  a  $x \in (X \cap Y)$ . Z posledného výrazu vyplýva, že  $x$  sa súčasne vyskytuje v  $X$  a taktiež aj v  $Y$ . Potom  $(a, x) \in A \times X$  a taktiež aj  $(a, x) \in A \times Y$ , čiže  $(a, x) \in (A \times X) \cap (A \times Y)$ , čím sme dokázali  $A \times (X \cap Y) \subseteq (A \times X) \cap (A \times Y)$ . Predpokladajme, že  $(a, x) \in (A \times X) \cap (A \times Y)$ , potom  $(a, x) \in (A \times X)$  a  $(a, x) \in (A \times Y)$ . Tieto dva vzťahy môžeme prepísať takto:  $a \in A$  a  $x \in X \cap Y$ , alebo  $(a, x) \in A \times (X \cap Y)$ , čím sme dokázali  $(A \times X) \cap (A \times Y) \subseteq A \times (X \cap Y)$ . Spojením týchto dvoch relácií inklúzie dostaneme dokazovanú rovnosť  $A \times (X \cap Y) = (A \times X) \cap (A \times Y)$ , čo bolo potrebné dokázať.

**Príklad 2.16.** Nech  $A = \{a, b, c\}$ ,  $X = \{x, y, z\}$  a  $Y = \{y, z, t\}$ .

$$\begin{aligned} A \times (X \cap Y) &= \{a, b, c\} \times (\{x, y, z\} \cap \{y, z, t\}) = \{a, b, c\} \times \{y, z\} \\ &= \{(a, y), (b, y), (c, y), (a, z), (b, z), (c, z)\} \\ (A \times X) \cap (A \times Y) &= (\{a, b, c\} \times \{x, y, z\}) \cap (\{a, b, c\} \times \{y, z, t\}) \\ &= \{(a, x), (a, y), (a, z), (b, x), (b, y), (b, z), (c, x), (c, y), (c, z)\} \cap \\ &\quad \{(a, y), (a, z), (a, t), (b, y), (b, z), (b, t), (c, y), (c, z), (c, t)\} \\ &= \{(a, y), (b, y), (c, y), (a, z), (b, z), (c, z)\} \end{aligned}$$

Ak porovnáme pravé strany oboch výrazov, dostaneme, že ľavé strany sú si rovné, t. j. platí (2.26a). Podobným spôsobom môžeme verifikovať formuly (2.26b-d).

**Veta 2.6.** Pre ľubovoľné tri množiny  $A$ ,  $B$  a  $X$  platí implikácia

$$(A \subseteq B) \Rightarrow ((A \times X) \subseteq (B \times X)) \quad (2.27a)$$

Ak  $X$  je neprázdna množina, potom

$$((A \times X) \subseteq (B \times X)) \Rightarrow (A \subseteq B) \quad (2.27b)$$

Dôkaz tejto vety je pomerne jednoduchý, a preto ho prenecháme pozornému čitateľovi.

## 2.4. Množina ako dátová štruktúra v informatike

V mnohých aplikáciách množinová dátová štruktúra podstatne uľahčuje implementáciu algoritmov, ktoré sú založené na formalizme teórie množín. Ako príklad takýchto algoritmov môže slúžiť teória grafov, ktorej jednoduchá a súčasne aj elegantná teória je založená na množinách. Mnohé algoritmy teórie grafov (napr. problém obchodného cestujúceho) patrí medzi základné algoritmy, preto je dôležité, hlavne z pedagogických dôvodov, mať možnosť využívať dátovú štruktúru množiny pre zjednodušenie a sprehládnenie týchto algoritmov.

Základný prístup k implementácii dátovej štruktúry množiny je jej charakteristická binárna funkcia, ktorá môže byť reprezentovaná binárnym vektorom. Maximálna dĺžka tohto vektora (napr.  $2^8 = 256$ ) špecifikuje maximálnu mohutnosť implementovanej množiny. Pre jednoduchosť uvažujme binárne vektory dĺžky  $2^3 = 8$ , ktoré určujú množiny v rámci univerzálnej množiny  $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ . Tak napr. binárny vektor (11001100) špecifikuje množinu  $A = \{1, 2, 5, 6\}$ . Ak binárny vektor obsahuje len nuly, potom množina  $A = \emptyset$ ; v opačnom prípade, ak binárny vektor obsahuje len jednotky, potom  $A = U$ . Pomocou binárnych vektorov môžeme pomerne jednoducho vykonávať algebraické operácie nad množinami.

(1) **Operácia zjednotenia** množín  $A$  a  $B$ ,  $C = A \cup B$ , ktoré sú reprezentované binárnymi vektormi

$$\mu_A = (a_1, a_2, \dots, a_n)$$

$$\mu_B = (b_1, b_2, \dots, b_n)$$

je realizovaná pomocou binárnej operácie 'disjunkcie'

$$\mu_{A \cup B} = (c_1, c_2, \dots, c_n) = (a_1, a_2, \dots, a_n) \vee (b_1, b_2, \dots, b_n)$$

kde

$$c_i = \max\{a_i, b_i\}$$

(2) **Operácia prieniku** množín  $A$  a  $B$ ,  $C = A \cap B$ , je realizovaná pomocou binárnej operácie 'konjunkcie'

$$\mu_{A \cap B} = (c_1, c_2, \dots, c_n) = (a_1, a_2, \dots, a_n) \wedge (b_1, b_2, \dots, b_n)$$

kde

$$c_i = \min\{a_i, b_i\}$$

(3) **Operácia komplementu** množiny  $A$ ,  $C = \bar{A}$ , je realizovaná pomocou unárnej operácie 'komplementu'

$$\mu_{\bar{A}} = (c_1, c_2, \dots, c_n) = (1 - a_1, 1 - a_2, \dots, 1 - a_n)$$

**Príklad 2.17.** Definujme dva binárne vektory dĺžky 8 (t. j. univerzum  $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ )  $\mu_A = (11001111)$  a  $\mu_B = (00011001)$ , ktoré reprezentujú množiny  $A = \{1, 2, 5, 6, 7, 8\}$  a  $B = \{4, 5, 8\}$ . Nad množinami  $A$  a  $B$  vykonáme základné operácie pomocou binárnych operácií nad vektormi. Zjednotenie  $A \cup B$  je určené pomocou binárnej operácie 'disjunkcie'

$$(11001111) \vee (00011001) = (11011111)$$

Výsledný vektor špecifikuje množinu  $C = \{1, 2, 4, 5, 6, 7, 8\}$ . Podobným spôsobom môžeme vykonať aj operáciu prieniku  $A \cap B$  pomocou operácie 'konjunkcie' pre binárne vektory

$$(11001111) \wedge (00011001) = (00001001)$$



Výsledný vektor špecifikuje množinu  $C = \{5,8\}$ . Komplementy  $\bar{A}$  a  $\bar{B}$  sú zostrojené pomocou operácie negácie binárnych vektorov

$$\mu_{\bar{A}} = -(11001111) = (00110000)$$

$$\mu_{\bar{B}} = -(00011001) = (11100110)$$

Výsledné vektory reprezentujú množiny  $C = \bar{A} = \{3,4\}$  a  $C = \bar{B} = \{1,2,3,6,7\}$ .

## Cvičenia

**Cvičenie 2.1.** Ktoré elementy patria do množiny:

- (a)  $\{x; (x \in \mathbb{R}) \wedge (x^2 = 1)\}$ , (kde  $\mathbb{R}$  je množina reálnych čísel)
- (b)  $\{x; (x \in \mathbb{R}) \wedge (x^2 - 3x + 2 = 0)\}$ ,
- (c)  $\{x; (x \in \mathbb{N}) \wedge (x < 12)\}$ , (kde  $\mathbb{N}$  je množina nezáporných celých čísel)
- (d)  $\{x; (x \in \mathbb{N}) \wedge (x^2 < 100)\}$ ,
- (e)  $\{x; (x \in \mathbb{N}) \wedge (x^2 = 2)\}$ .

**Cvičenie 2.2.** Vyjadrite tieto množiny pomocou predikátu (pozri (2.1b)):

- (a)  $A = \{0,3,6,9,12\}$ ,
- (b)  $A = \{-3,-2,-1,0,1,2,3\}$ ,
- (c)  $A = \{m,n,o,p\}$ .

**Cvičenie 2.3.** Zistite, či množiny z každej dvojice sú navzájom rovné:

- (a)  $A = \{1,2,2,3,3,3,4,4,4,4\}$ ,  $B = \{1,2,3,4\}$ ,
- (b)  $A = \{\{1\}\}$ ,  $B = \{1,\{1\}\}$ ,
- (c)  $A = \emptyset$ ,  $B = \{\emptyset\}$ ,

**Cvičenie 2.4.** Nech  $A = \{2,4,6\}$ ,  $B = \{2,6\}$ ,  $C = \{4,6\}$ ,  $D = \{4,6,8\}$ . Zistite, ktoré množiny sú podmnožiny ktorých množín.

**Cvičenie 2.5.** Pre každú množinu  $A$  určite, či platí  $2 \in A$ :

- (a)  $A = \{x \in \mathbb{R}; x < 2\}$ ;
- (b)  $A = \{x \in \mathbb{R}; \exists (n \in \mathbb{N})(x = n^2)\}$
- (c)  $A = \{2, \{2\}\}$ ;
- (d)  $A = \{\{2\}, \{\{2\}\}\}$ ,
- (e)  $A = \{\{2\}, \{2, \{2\}\}\}$ .

**Cvičenie 2.6.** Pre každý príklad z cvičenia 2.5 rozhodnite, či element  $\{2\}$  je elementom množiny  $A$ .

**Cvičenie 2.7.** Rozhodnite, či výroky sú pravdivé alebo nepravdivé:

- (a)  $0 \in \emptyset$ ,
- (b)  $\emptyset \in \{0\}$ ,
- (c)  $\{0\} \subset \emptyset$ ,
- (d)  $\emptyset \subset \{0\}$ ,
- (e)  $\{0\} \in \{0\}$ ,
- (f)  $\{0\} \subset \{0\}$ ,
- (g)  $\{0\} \subseteq \{0\}$ .

**Cvičenie 2.8.** Rozhodnite, či výroky sú pravdivé alebo nepravdivé:

- (a)  $\emptyset \in \{\emptyset\}$ ,
- (b)  $\emptyset \in \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ ,
- (c)  $\{\emptyset\} \in \{\emptyset\}$ ,
- (d)  $\{\emptyset\} \in \{\{\emptyset\}\}$ ,
- (e)  $\{\emptyset\} \subset \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ ,
- (f)  $\{\{\emptyset\}\} \subset \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ .

**Cvičenie 2.9.** Nech  $A \subseteq B$  a  $B \subseteq C$ , dokážte  $A \subseteq C$ .

**Cvičenie 2.10.** Nájdite také dve množiny  $A$  a  $B$ , aby platilo

- (a)  $A \in B$ ,
- (b)  $A \subseteq B$ .

**Cvičenie 2.11.** Aká je mohutnosť týchto množín:

- (a)  $\{a\}$ ,
- (b)  $\{\{a\}\}$ ,
- (c)  $\{a, \{a\}\}$ ,
- (d)  $\{a, \{a\}, \{a, \{a\}\}\}$ .

**Cvičenie 2.12.** Aká je mohutnosť týchto množín:

- (a)  $\emptyset$ ,
- (b)  $\{\emptyset\}$ ,
- (c)  $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ ,
- (d)  $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$ .

**Cvičenie 2.13.** Zostrojte potenčnú množinu  $\mathcal{P}(A)$  pre

- (a)  $A = \{a\}$ ,
- (b)  $A = \{a, b\}$ ,

(c)  $A = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ .

**Cvičenie 2.14.** Dokážte alebo vyvráťte implikáciu  $(\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(B)) \Rightarrow (A = B)$ .

**Cvičenie 2.15.** Určite, ktorá z množín je potenčná množina

- (a)  $\emptyset$ ,
- (b)  $\{\emptyset, \{a\}\}$ ,
- (c)  $\{\emptyset, \{a\}, \{\emptyset, a\}\}$ ,
- (d)  $\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$ .

**Cvičenie 2.16.** Nech  $A = \{a, b, c\}$ ,  $B = \{x, y\}$ , zostrojte

- (a)  $A \times B$ ,
- (b)  $B \times A$ .

**Cvičenie 2.17.** Aký význam má karteziánsky súčin  $A \times B$ , kde  $A$  je množina prednášok, ktoré poskytuje Ústav aplikovanej informatiky a  $B$  je množina pedagógov Fakulty informatiky?

**Cvičenie 2.18.** Aký je význam karteziánskeho súčinu  $A \times B \times C$ , kde  $A$  je množina všetkých leteckých spoločností,  $B$  a  $C$  sú množiny letísk na svete.

**Cvičenie 2.19.** Nech  $A$  je množina študentov FIIT, ktorí sú z Bratislavy a  $B$  je množina študentov FIIT, ktorí jazdia na fakultu autom. Popíšte študentov, ktorí patria do množiny

- (a)  $A \cap B$ ,
- (b)  $A \cup B$ ,
- (c)  $A - B$ ,
- (d)  $B - A$ .

**Cvičenie 2.20.** Nech  $A$  je množina prvkov na našej fakulte a  $B$  je množina študentov navštevujúcich diskretnú matematiku. Vyjadrite pomocou množín  $A$  a  $B$  tvrdenia:

- (a) Množina prvkov, ktorí navštevujú prednášku z diskretnej matematiky.
- (b) Množina prvkov, ktorí nenavštevujú prednášku z diskretnej matematiky.
- (c) Množina študentov, ktorí sú prváci alebo navštevujú prednášku z diskretnej matematiky.
- (d) Množina študentov, ktorí nie sú prváci alebo nenavštevujú prednášku z diskretnej matematiky.

**Cvičenie 2.21.** Nech  $A$  a  $B$  sú množiny, dokážte

- (a)  $(A \cap B) \subseteq A$ ,
- (b)  $(A \cap B) \subseteq B$ ,
- (c)  $A \subseteq (A \cup B)$ ,
- (d)  $B \subseteq (A \cup B)$ ,
- (e)  $A - B \subseteq A$ ,
- (f)  $A \cap (B - A) = \emptyset$ .

**Cvičenie 2.22.** Nech  $A$ ,  $B$  a  $C$  sú množiny, dokážte  $(A - B) - C = (A - C) - (B - C)$ .

**Cvičenie 2.23.** Čo môžeme povedať o množinách  $A$  a  $B$ , ak platí

- (a)  $A \cup B = A$ ,
- (b)  $A \cap B = A$ ,
- (c)  $A - B = A$ ,
- (d)  $A \cap B = B \cap A$ ,
- (e)  $A - B = B - A$ .

**Cvičenie 2.24.** Nech  $A$ ,  $B$  a  $C$  sú množiny, zistite, či sú pravdivé implikácie:

- (a)  $(A \cup C = B \cup C) \Rightarrow (A = B)$ ,
- (b)  $(A \cap C = B \cap C) \Rightarrow (A = B)$ .

**Cvičenie 2.25.** Nech  $A$  a  $B$  sú množiny, dokážte vlastnosť  $(A \subseteq B) \Rightarrow (\bar{B} \subseteq \bar{A})$ .

**Cvičenie 2.26.** Nech  $A_i = \{1, 2, \dots, i\}$ , pre  $i=1, 2, \dots, n$ . Nájdite

- (a)  $A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n$ ,
- (b)  $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$ .

**Cvičenie 2.27.** Nech  $A_i$  je množina binárnych reťazcov, ktorých dĺžka nie je väčšia ako  $i$ , pre  $i=1, 2, \dots, n$ . Nájdite

- (a)  $A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n$ ,
- (b)  $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$ .

**Cvičenie 2.28.** Dokážte pomocou matematickej indukcie vzťahy

(a)  $\overline{\bigcup_{i=1}^n A_i} = \bigcap_{i=1}^n \bar{A}_i$

(b)  $\overline{\bigcap_{i=1}^n A_i} = \bigcup_{i=1}^n \bar{A}_i$