Cvičenia

Cvičenie 3.1. Zostrojte množinu usporiadaných dvojíc pre reláciu $R \subseteq A \times A$, $A = \{0,1,2,3,4\}$, kde $(x, y) \in R$ vtedy a len vtedy, ak

(a) $x = y$,
$R = \{(0,0),(1,1),(2,2),(3,3),(4,4)\}$

(b) $x + y = 4$,
$R = \{(0,4),(4,0),(1,3),(3,1),(2,2)\}$

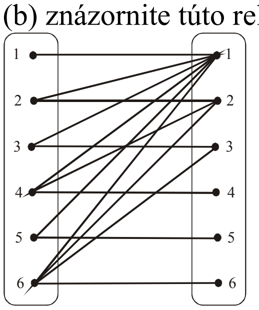
(c) $x > y$,
$R = \{(1,0),(2,0),(2,1),(3,0),(3,1),(3,2),(4,0),(4,1),(4,2),(4,3)\}$

(d) x je deliteľné y.
$R = \{(0,1),(0,2),(0,3),(0,4),(1,1),(2,1),(2,2),(3,1),(3,3),(4,1),(4,2),(4,4)\}$

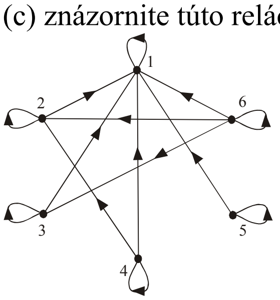
Cvičenie 3.2.

(a) Zostrojte množinu usporiadaných dvojíc pre reláciu $R = \{(x, y); x \text{ je deliteľné } y\}$ pre
$X = \{1,2,3,4,5,6\}$,
$R = \{(1,1),(2,1),(2,2),(3,1),(3,3),(4,1),(4,2),(4,4),(5,1),(5,5),(6,1),(6,2),(6,3),(6,6)\}$

(b) znázornite túto reláciu diagramaticky tak, ako je to vykonané na obr. 3.2.



(c) znázornite túto reláciu grafom tak, ako je to vykonané na obr. 3.5,



(d) reprezentujte reláciu pomocou binárnej matice $\boldsymbol{A}$ z definície 3.4.

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&0\\1&1&0&0&0&0\\1&0&1&0&0&0\\1&1&0&1&0&0\\1&0&0&0&1&0\\1&1&1&0&0&1\end{pmatrix}$$

Cvičenie 3.3. Pre každú z nasledujúcich relácií R nad množinou $\{1,2,3,4\}$ zistite, či je reflexívna, symetrická, antisymetrická, alebo tranzitívna.

(a) $\{(2,2),(2,3),(2,4),(3,2),(3,3),(3,4)\}$,
je tranzitívna

(b) $\{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,3),(4,4)\}$
je reflexívna: $\forall x\left((x,x)\in R\right)$
je symetrická
je tranzitívna

(c) $\{(2,4),(4,2)\}$
je symetrická

(d) $\{(1,2),(2,3),(3,4)\}$
je antisymetrická

(e) $\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4)\}$
je reflexívna, symetrická a aj antisymetrická a tranzitívna

(f) $\{(1,3),(1,4),(2,3),(2,4),(3,1),(3,4)\}$
$\varnothing$

Cvičenie 3.4. Zistite, či relácia R nad množinou všetkých ľudí je reflexívna, symetrická, antisymetrická, alebo tranzitívna, pričom $(x,y)\in R$ vtedy a len vtedy, ak

(a) x je menší ako y,
tranzitívna: $\forall x\forall y\forall z\left((x<y)\wedge(y<z)\Rightarrow(x<z)\right)$
antisymetrická

(b) x a y sa narodili v rovnakom dni,
reflexívna: $\forall x\left((x,x)\in R\right)$
symetrická: $\forall x\forall y\left((x,y)\in R\Rightarrow(y,x)\in R\right)$
tranzitívna: $\forall x\forall y\forall z\left((x,y)\in R\wedge(y,z)\in R\Rightarrow(x,z)\in R\right)$

(c) x má rovnaké krstné meno ako y,
reflexívna: $\forall x\left((x,x)\in R\right)$
symetrická: $\forall x\forall y\left((x,y)\in R\Rightarrow (y,x)\in R\right)$
tranzitívna: $\forall x\forall y\forall z\left((x,y)\in R\wedge (y,z)\in R\Rightarrow (x,z)\in R\right)$

(d) x a y majú aspoň jednu dvojicu spoločných starých rodičov.
reflexívna: $\forall x\left((x,x)\in R\right)$
symetrická: $\forall x\forall y\left((x,y)\in R\Rightarrow (y,x)\in R\right)$

Cvičenie 3.5. Zistite, či relácia R nad množinou všetkých www stránok je reflexívna, symetrická, antisymetrická, alebo tranzitívna, pričom $(x,y)\in R$ vtedy a len vtedy, ak

(a) každý, kto navštívil túto stránku x, navštívil aj stránku y,
reflexívna: $\forall x\left((x,x)\in R\right)$
tranzitívna

(b) neexistuje priame prepojenie medzi stránkami x a y,
symetrická: $\forall x\forall y\left((x,y)\in R\Rightarrow (y,x)\in R\right)$

(c) existuje aspoň jedno prepojenie medzi stránkami x a y,
symetrická: $\forall x\forall y\left((x,y)\in R\Rightarrow (y,x)\in R\right)$

(d) existuje stránka, ktorá obsahuje prepojenia tak na stránku x ako aj na stránku y.
symetrická: $\forall x\forall y\left((x,y)\in R\Rightarrow (y,x)\in R\right)$

Cvičenie 3.6. Zistite, či relácia R nad množinou reálnych čísel je reflexívna, symetrická, antisymetrická, alebo tranzitívna, pričom $(x,y)\in R$ vtedy a len vtedy, ak

(a) $x+y=0$,
symetrická: $\forall x\forall y\left((x+y=0)\Rightarrow (y+x=0)\right)$

(b) $x=\pm y$,
reflexívna: $\forall x\left(x=x\right)$
symetrická: $\forall x\forall y\left((x=\pm y)\Rightarrow (y=\pm x)\right)$
tranzitívna: $\forall x\forall y\forall z\left((x=\pm y)\wedge (y=\pm z)\Rightarrow (x=\pm z)\right)$

(c) $x-y$ je racionálne číslo,
reflexívna: $\forall x\left(x-x\ \textit{je rac. číslo}\right)$
symetrická: $\forall x\forall y\left(x-y\ \textit{je rac. číslo}\Rightarrow y-x\ \textit{je rac. číslo}\right)$

tranzitívna: $\forall x \forall y \forall z \left(\left(x - y \ \textit{je rac. číslo} \right) \wedge \left(y - z \ \textit{je rac. číslo} \right) \Rightarrow \left(x - z \ \textit{je rac. číslo} \right) \right)$

(d) $x = 2y$,
antisymetrická: $\forall x \forall y \left(\left(x = 2y \right) \wedge \left(y = 2x \right) \Rightarrow \left(x = y = 0 \right) \right)$

(e) $xy \geq 0$,
reflexívna: $\forall x \left(x \cdot x \geq 0 \right)$
symetrická: $\forall x \forall y \left(\left(xy \geq 0 \right) \Rightarrow \left(yx \geq 0 \right) \right)$
nie je tranzitívna: $\forall x \forall y \forall z \left(\left(xy \geq 0 \right) \wedge \left(yz \geq 0 \right) \Rightarrow \left(xz \geq 0 \right) \right)$
neplatí pre x=-1, y=0, z=1

(f) $xy = 0$,
symetrická: $\forall x \forall y \left(\left(xy = 0 \right) \Rightarrow \left(yx = 0 \right) \right)$

(g) $x = 1$,
antisymetrická: $\forall x \forall y \left(\left(x = 1 \right) \wedge \left(y = 1 \right) \Rightarrow \left(x = y = 1 \right) \right)$
tranzitívna: $\forall \left(x, y, z \in X \right) \left(\left(x = 1, y \right) \in R \wedge \left(y = 1, z \right) \in R \Rightarrow \left(x = 1, z \right) \in R \right)$

(h) $x = 1$ alebo $y = 1$.
symetrická: $\forall x \forall y \left(\left(x = 1 \text{ alebo } y = 1 \right) \Rightarrow \left(y = 1 \text{ alebo } x = 1 \right) \right)$

Cvičenie 3.7. Zostrojte inverznú reláciu $R^{-1} \subseteq Y \times X$ pre relácie $R \subseteq X \times Y$, ktoré sú špecifikované

(a) $R = \left\{ \left(x, y \right); x < y \right\}$ nad množinou celých čísel.
$R^{-1} = \left\{ \left(x, y \right); y < x \right\}$
Inverzná relácia k relácii $R = \left\{ \left(x, y \right); x < y \right\}$ je definovaná reláciou $R^{-1} = \left\{ \left(y, x \right); x < y \right\}$, substitúciou $x \leftrightarrow y$ dostaneme $R^{-1} = \left\{ \left(x, y \right); y < x \right\} \Rightarrow R^{-1} = \left\{ \left(x, y \right); x > y \right\}$.
(b) $R = \left\{ \left(x, y \right); x \text{ je deliteľné } y \right\} \subseteq X \times Y$ nad množinou $X, Y = \left\{ 1, 2, 3, \ldots \right\}$.
Pôvodnú reláciu R prepíšeme do ekvivalentného tvaru $R = \left\{ \left(x, y \right); x = ny \right\}$, kde n je nenulové celé číslo, potom $R^{-1} = \left\{ \left(y, x \right); x = yn \right\}$, pomocou substitúcie $x \leftrightarrow y$ prepíšeme túto inverznú reláciu do tvaru $R^{-1} = \left\{ \left(x, y \right); y = xn \right\}$.

(c) R je relácia nad všetkými európskymi štátmi, ktorá obsahuje dvojicu (x,y) vtedy a len vtedy, ak štát x susedí so štátom y.
Platí $R^{-1} = R$.

Cvičenie 3.8.

Nech $P=\{(1,2),(2,3),(3,4)\}$ a $Q=\{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3),(3,4)\}$, $P,Q\subseteq X\times X$ sú relácie nad $X=\{1,2,3,4\}$. Nájdite

(a) $P\cup Q$, $P\cap Q$,

$P\cup Q=Q=\{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3),(3,4)\}$

$P\cap Q=P=\{(1,2),(2,3),(3,4)\}$

(b) $P-Q$, $Q-P$,

$P-Q=\varnothing$

$Q-P=\{(1,1),(2,1),(2,2),(3,1),(3,2),(3,3)\}$

(c) $\overline{P}$, $\overline{Q}$,

$\overline{P}=\{(1,1),(1,3),(1,4),(2,1),(2,2),(2,4),(3,1),(3,2),(3,3),(4,1),(4,2),(4,3),(4,4)\}$

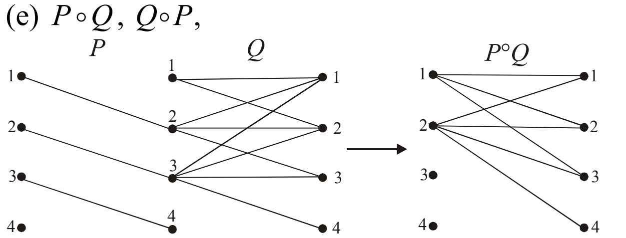
$\overline{Q}=\{(1,3),(1,4),(2,4),(4,1),(4,2),(4,3),(4,4)\}$

(d) P^{-1}, Q^{-1},

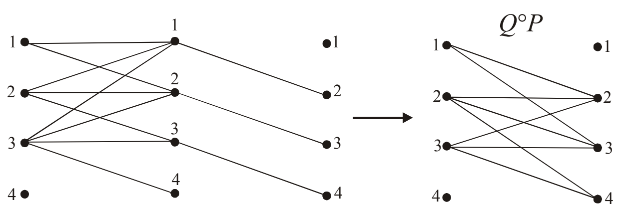
$P^{-1}=\{(2,1),(3,2),(4,3)\}$

$Q^{-1}=\{(1,1),(2,1),(1,2),(2,2),(3,2),(1,3),(2,3),(3,3),(4,3)\}$

(e) $P\circ Q$, $Q\circ P$,



$P\circ Q=\{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(2,4)\}$



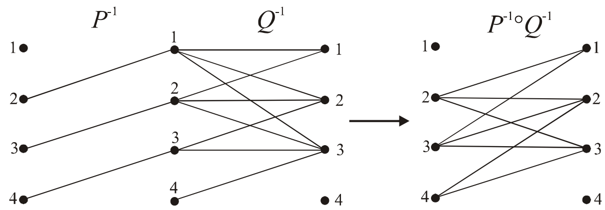
$Q\circ P=\{(1,2),(1,3),(2,2),(2,3),(2,4),(3,2),(3,3),(3,4)\}$

(f) $(P\circ Q)^{-1}$, $(Q\circ P)^{-1}$,

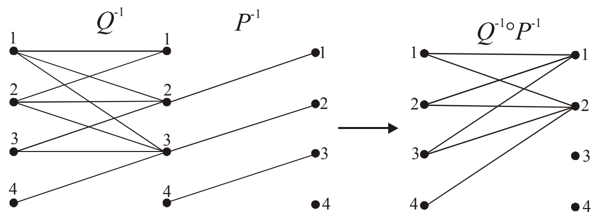
$(P\circ Q)^{-1}=\{(1,1),(2,1),(3,1),(1,2),(2,2),(3,2),(4,2)\}$

$(Q\circ P)^{-1}=\{(2,1),(3,1),(2,2),(3,2),(4,2),(2,3),(3,3),(4,3)\}$

(g) $P^{-1}\circ Q^{-1}$, $Q^{-1}\circ P^{-1}$.



$P^{-1} \circ Q^{-1} = \{(2,1),(3,1),(2,2),(3,2),(4,2),(2,3),(3,3),(4,3)\}$



$Q^{-1} \circ P^{-1} = \{(1,1),(2,1),(3,1),(1,2),(2,2),(3,2),(4,2)\}$

Cvičenie 3.9. Nájdite chybu v dôkaze tejto vety:
Ak relácia $R \subseteq X \times X$ je symetrická a tranzitívna, potom je aj reflexívna.
Dôkaz: Nech $x \in X$, zoberte taký element $y \in X$ pre ktorý $(x,y) \in R$. Pretože R je symetrická relácia, potom taktiež $(y,x) \in R$. Použitím vlastnosti tranzitívnosti relácie R dostaneme $(x,x) \in R$, pretože $(x,y),(y,x) \in R$.
Chybný predpoklad, že pre každé x existuje y pre ktorý $(x,y)\in R$.

Cvičenie 3.10. Nech $R,S \subseteq X \times X$ sú reflexívne relácie. Dokážte alebo vyvráťte tieto tvrdenia:

(a) $R \cup S$ je reflexívna relácia,
$(\forall x((x,x) \in R)) \wedge (\forall y((y,y) \in S)) \Rightarrow (\forall t((t,t) \in R \cup S))$, tvrdenie je platné.

(b) $R \cap S$ je reflexívna relácia,
$(\forall x((x,x) \in R)) \wedge (\forall y((y,y) \in S)) \Rightarrow (\forall t((t,t) \in R \cap S))$, tvrdenie je platné.

(c) $R - S$ je reflexívna relácia,
$(\forall x((x,x) \in R)) \wedge (\forall y((y,y) \in S)) \Rightarrow (\forall t((t,t) \notin R - S))$, tvrdenie nie je platné.

(d) $R \circ S$ je reflexívna relácia,
$(\forall x((x,x) \in R)) \wedge (\forall y((y,y) \in S)) \Rightarrow (\forall t((t,t) \in R \circ S))$, tvrdenie je platné.
U „kontrapríkladu" pre R={(1,1),(1,2),(2,2)} a S={(2,2)} je $R \circ S = \{(1,2),(2,2)\}$,
kde chýba k reflexívnosti (1,1), ale vzhľadom k tomu, že reflexívna relácia musí obsahovať (x,x) pre všetky x z X, relácia S z nášho kontrapríkladu potom nie je reflexívna a kontrapríklad teda neplatí.

Cvičenie 3.11. Dokážte tieto tvrdenia:

(a) Relácia $R \subseteq X \times X$ je symetrická vtedy a len vtedy, ak $R = R^{-1}$.
$\left(\forall x \forall y \left((x,y) \in R \Rightarrow (y,x) \in R\right)\right) \Rightarrow \left(\forall x \forall y \left((y,x) \in R^{-1} \Rightarrow (x,y) \in R^{-1}\right)\right)$, tvrdenie je platné.

(b) Relácia $R \subseteq X \times X$ je antisymetrická vtedy a len vtedy, ak $R \cap R^{-1}$ je podmnožinou „diagonálnej" relácie $\Delta = \{(x,x); x \in X\}$.
Máme dokázať

$$\left(\forall x \forall y \left(\left(\left((x,y) \in R\right) \wedge \left((y,x) \in R\right)\right) \Rightarrow (x = y)\right)\right) \equiv \left(\left(R \cap R^{-1}\right) \subseteq \Delta = \{(x,x); x \in X\}\right)$$

antisymetrickú reláciu rozdelíme na dve disjunktné časti, diagonálnu a nediagonálnu

$$R = R_{diag} \cup R_{nondiag} = \underbrace{\{(x,x); (x,x) \in R\}}_{R_{diag}} \cup \underbrace{\{(x,y); ((x,y) \in R) \wedge (x \neq y)\}}_{R_{nondiag}}$$

Pre inverznú reláciu potom platí

$$R^{-1} = R^{-1}_{diag} \cup R^{-1}_{nondiag} = \underbrace{\{(x,x); (x,x) \in R\}}_{R^{-1}{}_{diag}} \cup \underbrace{\{(y,x); ((x,y) \in R) \wedge (x \neq y)\}}_{R^{-1}{}_{nondiag}}$$

Množiny $R_{nondiag}$ a $R^{-1}_{nondiag}$ sú disjunktné. Nech majú tieto dve množiny spoločný prvok (x,y) a (y,x), potom však zo skutočnosti, že relácia R je antisymetrická, vyplýva, že ak takého dvojice existujú, potom musí platiť $x = y$, čiže ich existencia je v spore s vlastnosťou antisymetričnosti relácie R. Prienik $R \cap R^{-1}$ obsahuje teda len diagonálne dvojice, takže musí byť podmnožinou množiny Δ.

(c) Relácia $R \subseteq X \times X$ je reflexívna vtedy a len vtedy, ak R^{-1} je reflexívna relácia.
K dôkazu tejto vlastnosti použijeme formule pre R a R^{-1} z predchádzajúceho príkladu. Pretože relácia R je reflexívna, potom jej diagonálna časť R_{diag} je totožná s množinou Δ, $R_{diag} = \Delta$. Z tvorby inverznej relácie R^{-1} vyplýva, že aj táto relácia má diagonálnu časť totožnú s Δ, $R^{-1}_{diag} = \Delta$, z čoho priamo vyplýva, že aj inverzná relácia R^{-1} je reflexívna.

(d) Ak je relácia $R \subseteq X \times X$ reflexívna a tranzitívna, potom pre každé $n > 0$ platí, že $R^n = R$, kde $R^n = \underbrace{R \circ R \circ \ldots \circ R}_{n-kr\acute{a}t}$.
Dokáže sa úplnou indukciou. Prípad n=1 je triviálny, pretože je to totožné s tvrdením, že R=R. Predpokladajme platnosť indukčnej hypotézy, že $R^n = R$, potom musíme dokázať, že $R^{n+1} = R$. Platí, že $R^{n+1} = R^n \circ R$. Musíme teda ukázať, že $R^n \circ R \subseteq R$ a $R \subseteq R^n \circ R$. Prvý vzťah dokážeme pomocou tranzitivity R takto: predpokladajme, že dvojica $(a,c) \in R^n \circ R$, to znamená, že musí existovať taký element b, že $(a,b) \in R$ a $(b,c) \in R^n$. Pomocou induktívnej hypotézy druhý výraz môžeme zjednodušiť na $(b,c) \in R$. Ak použijeme tranzitivitu R, vidíme, že $(a,c) \in R$, čo bolo potrebné dokázať.

Dôkaz druhého vzťahu $R \subseteq R^n \circ R$ je analogický. Predpokladajme, že $(a,b) \in R$, potom musíme dokázať, že $(a,b) \in R^n \circ R$. Pomocou induktívnej hypotézy, $R^n = R$, a preto je R^n reflexívne. Potom $(b,b) \in R^n$. Pretože $(a,b) \in R$ a $(b,b) \in R^n$, potom $(a,b) \in R^n \circ R$, čo bolo potrebné dokázať.

Cvičenie 3.12. Rozhodnite, či $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ak

(a) $f(x) = 1/x$, $D_f = \mathbb{R} - \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$, teda neplatí $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

(b) $f(x) = \sqrt{x}$, $D_f = \langle 0, \infty)$, teda neplatí $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

(c) $f(x) = \sqrt{1+x^2}$, $D_f = \mathbb{R}$, teda platí $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (obor funkčných hodnôt $H_f = \langle 1, \infty) \subset \mathbb{R}$, pre funkciu $f : A \to B$ musí platiť iba $A = D_f$, obor funkčných hodnôt môže byť podmnožinou kooboru *B*).

.

Cvičenie 3.13. Nájdite definičný obor a obor hodnôt funkcií:

(a) funkcia priradí každému bitovému reťazcu rozdiel medzi počtom jednotiek a počtom núl v reťazci,

$$D_f = \{0,1\}^n,\ H_f = \begin{cases} \{-n, -n+2, \dots, -2, 0, 2, \dots, n-2, n\} & (\text{pre } n \text{ párne}) \\ \{-n, -n+1, \dots, -1, 1, \dots, n-1, n\} & (\text{pre } n \text{ nepárne}) \end{cases}$$

(b) funkcia priradí každému bitovému reťazcu dvojnásobok počtu núl v reťazci,

$D_f = \{0,1\}^n$, $H_f = \{0, 2, 4, \dots, 2n\}$

(c) funkcia priradí (štandardným spôsobom) každému bitovému reťazcu dekadické číslo.

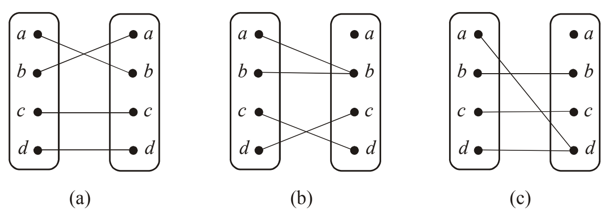
$D_f = \{0,1\}^n$, $H_f = \{0, 1, \dots, 2^n - 1\}$

Cvičenie 3.14. Zistite, či funkcie $f : A \to A$, kde $A = \{a, b, c, d\}$, sú injektívne a nakreslite diagram zobrazenia podľa obr. 3.11.:

(a) $f(a) = b, f(b) = a, f(c) = c, f(d) = d$, injekcia

(b) $f(a) = b, f(b) = b, f(c) = d, f(d) = c$, jednoznačné zobrazenie

(c) $f(a) = d, f(b) = b, f(c) = c, f(d) = d$, jednoznačné zobrazenie



Cvičenie 3.15. Zistite, či funkcie $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$, kde $\mathbb{N}=\{1,2,3,...\}$ je množina prirodzených čísel, môžu byť definované nasledujúcim spôsobom:
(a) $f(n)=n-1$, nie, platí $f(1)=0$, $H_f \not\subset \mathbb{N}$
(b) $f(n)=n^2$, áno, $H_f \subset \mathbb{N}$
(c) $f(n)=1+integer(n/2)$, kde *integer*(x) je celá časť reálneho čísla, áno, $H_f=\mathbb{N}$
(d) $f(n)=n^3$, áno, $H_f \subset \mathbb{N}$

Cvičenie 3.16. Nech $f:A\to B$, zostrojte $H_f=f(A)$ kde $A=\{-1,0,2,4,7\}$, pre
(a) $f(x)=1$, $f(A)=\{1\}$,
(b) $f(x)=2x+1$, $f(A)=\{-1,1,5,9,15\}$
(c) $f(x)=integer(x/5)$, $f(A)=\{0,1\}$
(d) $f(x)=integer\left(\left(1+x^2\right)/3\right)$, $f(A)=\{0,1,5,16\}$.

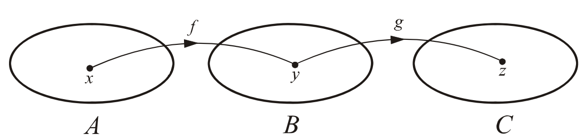
Cvičenie 3.17. Nech $f(x)=2x$, zostrojte:

(a) $f(A)$, kde A je množina celých čísel, $f(A)=\{2k;k\in A\}$

(b) $f(A)$, kde A je množina kladných celých čísel, $f(A)=\{2k;k\in A\}$,

(c) $f(\mathbb{R})$, kde $\mathbb{R}$ je množina reálnych čísel, $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$.

Cvičenie 3.18. Nech $f:A\to B$ a $g:B\to C$, dokážte, že ak funkcie *f* a *g* sú injektívne, potom aj ich kompozícia $g\circ f:A\to C$ je injektívna funkcia.



Injektívne funkcie *f* a *g* sú definované takto:

$$x_1\neq x_2 \Rightarrow f(x_1)\neq f(x_2)$$
$$y_1\neq y_2 \Rightarrow g(y_1)\neq g(y_2)$$

Pre zloženú funkciu platí

$$y=f(x)$$
$$z=g(y)$$
$$z=g(y)=g(f(x))=g\circ f(x)=h(x)$$

Ľahko sa dokáže, že z predpokladu injektívnosti funkcií *f* a *g* vyplýva aj injektívnosť ich zloženej funkcie *h*. Postuluje sa, že funkcie *f* a *g* sú injekcie

$$x_1\neq x_2 \Rightarrow \underbrace{f(x_1)}_{y_1}\neq \underbrace{f(x_2)}_{y_2} \Rightarrow g(y_1)\neq g(y_2) \Rightarrow \underbrace{z_1}_{h(x_1)=g(f(x_1))} \neq \underbrace{z_2}_{h(x_2)=g(f(x_2))}$$

potom platí, že aj zložená funkcia *h* je injekcia.

Cvičenie 3.19. Zostrojte zložené funkcie $f\left(g\left(x\right)\right)$ a $g\left(f\left(x\right)\right)$, kde $f\left(x\right)=1+x^2$ a $g\left(x\right)=x+2$ sú funkcie s oborom reálnych čísel.

$$f\left(g\left(x\right)\right)=f\left(x+2\right)=1+\left(x+2\right)^2$$
$$g\left(f\left(x\right)\right)=g\left(1+x^2\right)=\left(1+x^2\right)+2$$

Cvičenie 3.20. Nech $f\left(x\right)=ax+b$ a $g\left(x\right)=cx+d$, kde *a*, *b*, *c* a *d* sú konštanty, zistite, za akých podmienok platí $f\left(g\left(x\right)\right)=g\left(f\left(x\right)\right)$.

$$f\left(g\left(x\right)\right)=a\,g\left(x\right)+b=a\left(cx+d\right)+b=acx+ad+b$$
$$g\left(f\left(x\right)\right)=c\,f\left(x\right)+d=c\left(ax+b\right)+d=acx+bc+d$$

Aby platilo $f\left(g\left(x\right)\right)=g\left(f\left(x\right)\right)$, musí platiť $ad+b=bc+d$.

Cvičenie 3.21. Za ktorých podmienok existuje k funkcii $f\left(x\right)=ax+b$ funkcia inverzná $f^{-1}\left(x\right)$.

$$f\left(x\right)=y\Rightarrow ax+b=y\Rightarrow x=f^{-1}\left(y\right)=\frac{1}{a}\left(y-b\right)$$

Inverzná funkcia existuje ak $a\neq 0$.

Cvičenie 3.22. Nech $f:A\to B$ a nech $A',A''\subseteq A$. Dokážte platnosť týchto formúl:

(a) $f\left(A'\cup A''\right)=f\left(A'\right)\cup f\left(A''\right)$,

$f\left(A\right)=\left\{f\left(x\right);x\in A\right\}$,

$f\left(A'\cup A''\right)=\left\{f\left(x\right);x\in\left(A'\cup A''\right)\right\}=\left\{f\left(x\right);x\in A'\right\}\cup\left\{f\left(x\right);x\in A''\right\}=f\left(A'\right)\cup f\left(A''\right)$

(b) $f\left(A'\cap A''\right)\subseteq f\left(A'\right)\cap f\left(A''\right)$.

$f\left(A'\cap A''\right)=\left\{f\left(x\right);x\in\left(A'\cap A''\right)\right\}\subseteq\left\{f\left(x\right);x\in A'\right\}\cap\left\{f\left(x\right);x\in A''\right\}=f\left(A'\right)\cap f\left(A''\right)$

Cvičenie 3.23. Nech $f\left(x\right)=x^2$ je funkcia s oborom nezáporných reálnych čísel. Nájdite

(a) $f^{-1}\left(1\right)$, $f\left(1\right)=1\Rightarrow f^{-1}\left(1\right)=1$

(b) $f^{-1}\left(\left\{x;0<x<1\right\}\right)$, $A=\left(0,1\right)$, $f\left(A\right)=\left\{f\left(x\right)=x^2;x\in A\right\}=A\Rightarrow f^{-1}\left(A\right)=A$

(c) $f^{-1}\left(\left\{x;x>4\right\}\right)$, $A=\left(2,\infty\right)$, $f\left(A\right)=\left(4,\infty\right)=B\Rightarrow f^{-1}\left(B\right)=A$

Cvičenie 3.24. Nech $f: A \to B$ a nech $B', B'' \subseteq B$. Dokážte platnosť týchto formúl:

(a) $f^{-1}(B' \cap B'') = f^{-1}(B') \cap f^{-1}(B'')$,

$f^{-1}(B' \cap B'') = \left\{f^{-1}(y); y \in (B' \cap B'')\right\} \subseteq \left\{f^{-1}(y); y \in B'\right\} \cap \left\{f^{-1}(y); y \in B''\right\} =$

$f^{-1}(B') \cap f^{-1}(B'')$

$f^{-1}(B') \cap f^{-1}(B'') = \left\{f^{-1}(y); y \in B'\right\} \cap \left\{f^{-1}(y); y \in B''\right\} \subseteq \left\{f^{-1}(y); y \in (B' \cap B'')\right\}$

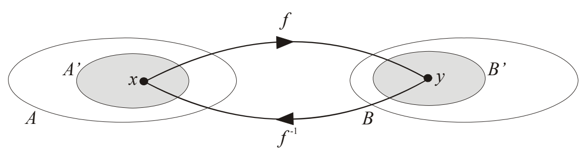
(b) $f^{-1}(B' \cup B'') = f^{-1}(B') \cup f^{-1}(B'')$.

$f^{-1}(B' \cup B'') = \left\{f^{-1}(y); y \in (B' \cup B'')\right\} \subseteq \left\{f^{-1}(y); y \in B'\right\} \cup \left\{f^{-1}(y); y \in B''\right\} =$

$f^{-1}(B') \cup f^{-1}(B'')$

$f^{-1}(B') \cup f^{-1}(B'') = \left\{f^{-1}(y); y \in B'\right\} \cup \left\{f^{-1}(y); y \in B''\right\} \subseteq \left\{f^{-1}(y); y \in (B' \cup B'')\right\}$

Cvičenie 3.25. Nech $f: A \to B$ a nech $B' \subseteq B$. Dokážte platnosť formuly $f^{-1}\left(\overline{B'}\right) = \overline{f^{-1}(B')}$.



$\overline{A}' = A - A'$, $\overline{B}' = B - B'$

$f(A') = \left\{f(x); x \in A'\right\} = B'$, $f\left(\overline{A}'\right) = \left\{f(x); x \in \overline{A}'\right\} = \overline{\left\{f(x); x \in A'\right\}} = \overline{f(A')} = \overline{B}'$

$f^{-1}(B') = \left\{f^{-1}(y); y \in B'\right\} = A'$, $f^{-1}\left(\overline{B'}\right) = \left\{f^{-1}(y); y \in \overline{B'}\right\} = \overline{\left\{f^{-1}(y); y \in B'\right\}} = \overline{f^{-1}(B')}$