3. kapitola

Teória množín II – relácie, operácie nad reláciami, ekvivalencia, usporiadanosť, funkcie

3.1 Relácie

Definícia 3.1. Nech X a Y sú dve množiny, množina R sa nazýva ***binárna relácia*** z množiny X do množiny Y vtedy a len vtedy, ak je podmnožinou karteziánskeho súčinu množín X a Y

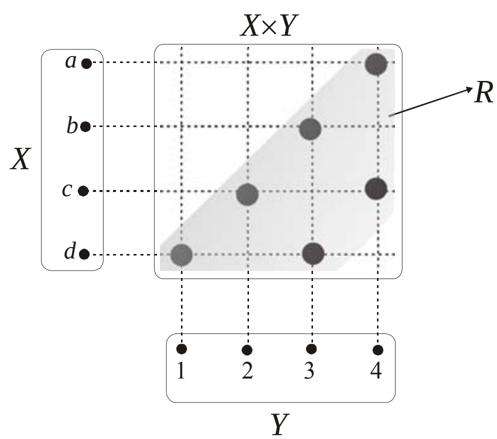
$$R \subseteq X \times Y \tag{3.1}$$

Relácia R môže byť alternatívne zadaná pomocou charakteristickej funkcie

$$R = \{(x,y);\, \mu_R(x,y) = 1\} \tag{3.2}$$

kde $\mu_R(x,y)$ je charakteristická funkcia špecifikujúca množinu R.

Na obr. 3.1 je znázornená relácia $R \subseteq X \times Y$, kde $X = \{a,b,c,d\}$ a $Y = \{1,2,3,4\}$, táto relácia obsahuje 6 usporiadaných dvojíc z karteziánskeho súčinu $X \times Y$, ktorý obsahuje 4×4 = 16 elementov.



Obrázok 3.1. Znázornenie relácie R ako podmnožiny karteziánskeho súčinu (vytieňovaná oblasť) dvoch množín X a Y, $R = \{(d,1),(c,2),(b,3),(d,3),(a,4),(c,4)\}$.

Definícia 3.2. Nech $R \subseteq X \times Y$ je relácia, potom množina usporiadaných dvojíc $(y,x) \in Y \times X$, ktorých inverzia patrí do relácie $(x,y) \in R$, sa nazýva ***inverzná relácia*** R^{-1} (vzhľadom k relácii R) vtedy a len vtedy, ak

$$R^{-1} = \{(y,x);(x,y) \in R\} \tag{3.3}$$

Pre relácie, ktoré sú definované nad rovnakou dvojicou množín X a Y, môžeme definovať obvyklé množinové operácie prieniku, zjednotenia a negácie. Majme dve relácie $P,Q \subseteq X \times Y$, ktorých špecifikácia pomocou charakteristických funkcií má tvar

$$P = \left\{ (x,y);\, \mu_P(x,y) = 1 \right\}$$

$$Q = \left\{ (x,y);\, \mu_Q(x,y) = 1 \right\}$$

Definícia 3.3. Relácia $R = P \cup Q$ sa nazýva ***zjednotenie relácií*** P a Q vtedy a len vtedy, ak platí

$$P \cup Q = \left\{ (x,y);\, \mu_{P\cup Q}(x,y) = 1 \right\} \tag{3.4a}$$

$$\mu_{P\cup Q}(x,y) = max\left\{ \mu_P(x,y), \mu_Q(x,y) \right\} \tag{3.4b}$$

Relácia $R = P \cap Q$ sa nazýva ***prienik relácií*** P a Q vtedy a len vtedy, ak platí

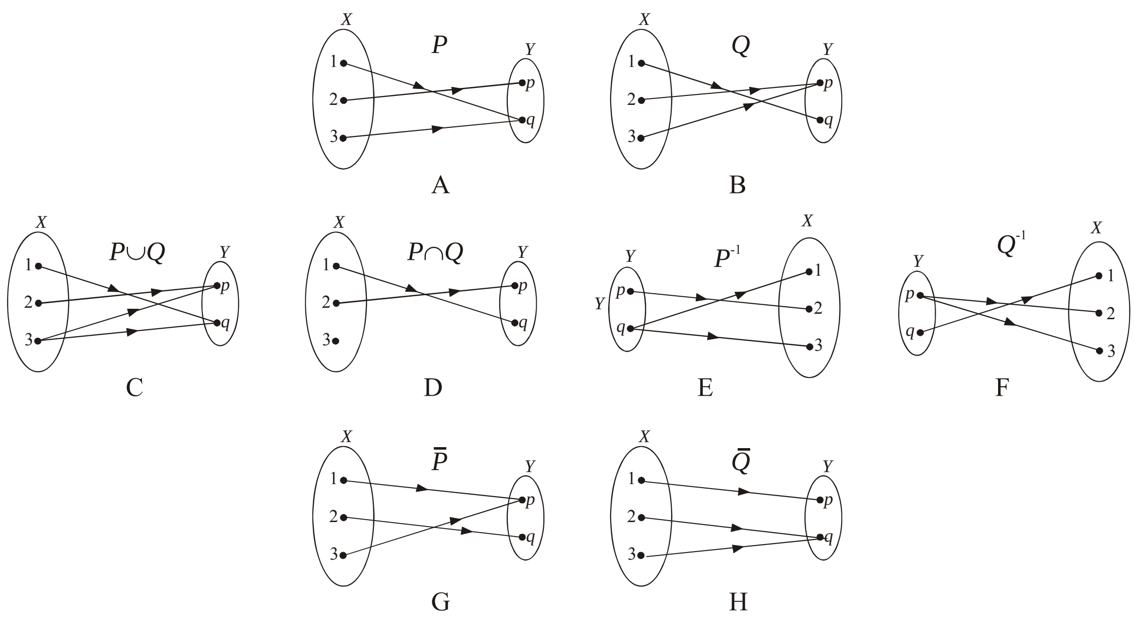
$$P \cap Q = \left\{ (x,y);\, \mu_{P\cap Q}(x,y) = 1 \right\} \tag{3.5a}$$

$$\mu_{P\cap Q}(x,y) = min\left\{ \mu_P(x,y), \mu_Q(x,y) \right\} \tag{3.5b}$$

Relácia $R = \overline{P}$ sa nazýva **doplnok relácie** P vtedy a len vtedy, ak

$$\overline{P} = \left\{ (x,y);\, \mu_{\overline{P}}(x,y) = 1 \right\} \tag{3.6a}$$

$$\mu_{\overline{P}}(x,y) = 1 - \mu_P(x,y) \tag{3.6b}$$



Obrázok 3.2. Diagramy A a B znázorňujú relácie P a Q definované nad rovnakými množinami X a Y. Diagramy C a D znázorňujú zjednotenie resp. prienik týchto dvoch relácií. Diagramy E a F znázorňujú inverzné relácie P^{-1} resp. Q^{-1}. Diagramy G a H znázorňujú doplnky k reláciám P resp. Q.

Príklad 3.1. Nech $X = \{1,2,3\}$ a $Y = \{p,q\}$, relácie P a Q majú tvar

$$P = \left\{ (1,q),(2,p),(3,q) \right\}$$

$$Q = \left\{ (1,q),(2,p),(3,p) \right\}$$

Zjednotenie a prienik týchto relácií sú

$$P \cup Q = \{(1,q),(2,p),(3,p),(3,q)\}$$
$$P \cap Q = \{(1,q),(2,p)\}$$

Inverzné relácie sú špecifikované

$$P^{-1} = \{(q,1),(p,2),(q,3)\}$$
$$Q^{-1} = \{(q,1),(p,2),(p,3)\}$$

Doplnky k reláciám sú

$$\bar{P} = \{(1,p),(2,q),(3,p)\}$$
$$\bar{Q} = \{(1,p),(2,q),(3,q)\}$$

Tieto relácie sú znázornené na obr. 3.2.

Alternatívny spôsob špecifikácie relácie je pomocou binárnej matice[1] (obsahujúcej len binárne elementy 0 a 1). Nech $X = \{x_1, x_2, ..., x_m\}$ a $Y = \{y_1, y_2, ..., y_n\}$ sú dve množiny s mohutnosťami $|X| = m$ resp. $|Y| = n$. Relácia R špecifikovaná nad týmito množinami má tvar

$$R = \{(x_i, y_j); \mu_R(x_i, y_j) = 1\}$$

Definícia 3.4. Hovoríme, že binárna matica $\boldsymbol{A}$, ktorá má m riadkov a n stĺpcov, ***reprezentuje reláciu*** R (alebo je ***maticou relácie*** R) vtedy a len vtedy, ak jej maticové elementy sú špecifikované formulou

$$A_{ij} = \mu_R(x_i, y_j) = \begin{cases} 1 & \left(dvojica\,(x_i, y_j) \in R\right) \\ 0 & \left(dvojica\,(x_i, y_j) \notin R\right) \end{cases} \tag{3.7}$$

Príklad 3.2. Maticová reprezentácia relácií P a Q z príkladu 3.1 má tvar

$$\boldsymbol{A}_P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Kompozícia relácií

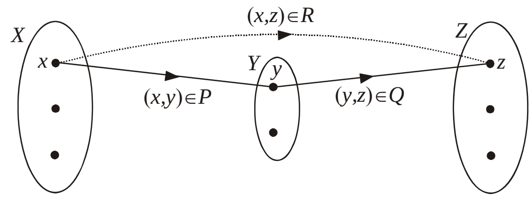
Definícia 3.5. Nech $P = \{(x,y); \mu_P(x,y) = 1\} \subseteq X \times Y$ a $Q = \{(y,z); \mu_Q(y,z) = 1\} \subseteq Y \times Z$ sú dve relácie, reláciu $R = P \circ Q = \{(x,z); \mu_R(x,z) = 1\}$ nazývame ***kompozíciou relácií*** P a Q vtedy a len vtedy, ak jej charakteristická funkcia je určená vzťahom

$$\mu_R(x,z) = \max_y \{min\{\mu_P(x,y), \mu_Q(y,z)\}\} \tag{3.8}$$

Kompozícia relácií P a Q je alternatívne vyjadrená takto

$$R = P \circ Q = \{(x,z); x \in X \wedge z \in Z \wedge \exists y \in Y : (x,y) \in P \wedge (y,z) \in Q\} \tag{3.9}$$

[1] Pojem binárnej matice je presne špecifikovaný v kapitole 8. V tejto etape si môžeme pod binárnou maticou predstaviť charakteristickú funkciu relácie usporiadanú do tvaru tabuľky.



Obrázok 3.3. Znázornenie kompozície dvoch relácií P a Q, výsledná relácia R obsahuje dvojicu (x,z) vtedy a len vtedy, ak existuje taký element $y \in Y$, že platí $(x,y) \in P$ a $(y,z) \in Q$.

To znamená, že v kompozícii R dva elementy $x \in X$ a $z \in Z$ tvoria usporiadanú dvojicu $(x,z) \in R$ vtedy a len vtedy, ak existuje taký „medzielement“ $y \in Y$, pre ktorý platí, že $(x,y) \in P$ a $(y,z) \in Q$, pozri obr. 3.3.

Veta 3.1. Nech P, Q a R sú relácie definované nad takými množinami, aby nasledujúce operácie boli prípustné, potom platí

$$(P \circ Q)^{-1} = Q^{-1} \circ P^{-1} \tag{3.10a}$$

$$(P \circ Q) \circ R = P \circ (Q \circ R) \tag{3.10b}$$

$$P \circ (Q \cup R) = (P \circ Q) \cup (P \circ R) \tag{3.10c}$$

$$(Q \cup R) \circ P = (Q \circ P) \cup (R \circ P) \tag{3.10d}$$

$$P \circ (Q \cap R) = (P \circ Q) \cap (P \circ R) \tag{3.10e}$$

$$(Q \cap R) \circ P = (Q \circ P) \cap (R \circ P) \tag{3.10f}$$

Dôkaz prvej vlastnosti (3.10a) priamo vyplýva z definícií kompozície a inverznej relácie. Nech $P \subseteq X \times Y$ a $Q \subseteq Y \times Z$, potom $(P \circ Q)^{-1} \subseteq Z \times X$ a pre každé $(z,x) \in Z \times X$ platí

$$\mu_{(P \circ Q)^{-1}}(z,x) = \mu_{P \circ Q}(x,z) = \max_{y \in Y}\left\{ \min\left\{ \mu_P(x,y), \mu_Q(y,z) \right\}\right\}$$

$$= \max_{y \in Y}\left\{ \min\left\{ \mu_{P^{-1}}(y,x), \mu_{Q^{-1}}(z,y) \right\}\right\} = \mu_{Q^{-1} \circ P^{-1}}(z,x)$$

kde poradie jednotlivých členov vo vnútorných zložených zátvorkách vyplýva z definície (3.8) kompozície dvoch relácií. Dôkaz asociatívnosti (3.10b) vyplýva priamo z asociatívnosti operácie *max min*. Vzťah distributívnosti (3.10c) dokážeme takto

$$\mu_{P \circ (Q \cup R)}(x,z) = \max_{y \in Y}\left\{ \min\left\{ \mu_P(x,y), \mu_{Q \cup R}(y,z) \right\}\right\}$$

$$= \max_{y \in Y}\left\{ \min\left\{ \mu_P(x,y), \max\left\{ \mu_Q(y,z), \mu_R(y,z) \right\}\right\}\right\}$$

$$= \max_{y \in Y}\left\{ \max\left\{ \min\left\{ \mu_P(x,y), \mu_Q(y,z) \right\}, \min\left\{ \mu_P(x,y), \mu_R(y,z) \right\}\right\}\right\}$$

$$= max\left\{\max_{y\in Y}\left\{min\left\{\mu_P(x,y),\mu_Q(y,z)\right\},min\left\{\mu_P(x,y),\mu_R(y,z)\right\}\right\}\right\}$$

$$= max\left\{\underbrace{\max_{y\in Y}\left\{min\left\{\mu_P(x,y),\mu_Q(y,z)\right\}\right\}}_{\mu_{P\circ Q}(x,z)},\underbrace{\max_{y\in Y}\left\{min\left\{\mu_P(x,y),\mu_R(y,z)\right\}\right\}}_{\mu_{P\circ R}(x,z)}\right\}$$

$$= max\left\{\mu_{P\circ Q}(x,z),\mu_{P\circ R}(x,z)\right\} = \mu_{(P\circ Q)\cup(P\circ R)}(x,z)$$

Pri dôkaze tejto distributívnej formuly sme použili identitu

$$min\left\{a,max\left\{b,c\right\}\right\} = max\left\{min\left\{a,b\right\},min\left\{a,c\right\}\right\}$$

ktorá sa jednoducho dokáže metódou vymenovania možností (pozri príklad 1.13) tak, že ju overíme pre všetkých šesť možností vzájomnej usporiadanosti navzájom rôznych čísel a, b a c.

Príklad 3.3. Uvažujme množiny $X=\{x_1,x_2,x_3,x_4\}$, $Y=\{y_1,y_2,y_3\}$ a $Z=\{z_1,z_2,z_3\}$, definujme nad týmito množinami relácie $P\subseteq X\times Y$ a $Q\subseteq Y\times Z$, ktorých binárne matice sú

$$A_P=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&0&1\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\quad A_Q=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}$$

Potom relácie P a Q majú tvar

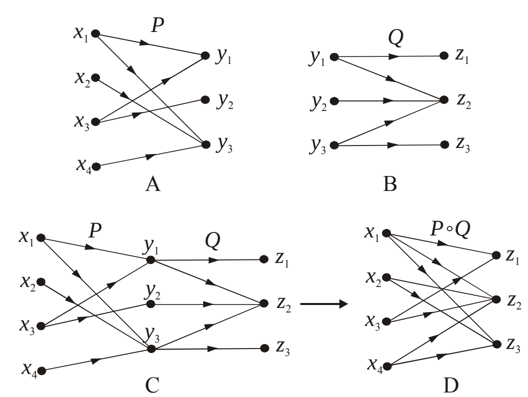
$$P=\left\{(x_1,y_1),(x_1,y_3),(x_2,y_3),(x_3,y_1),(x_3,y_2),(x_4,y_3)\right\}$$

$$Q=\left\{(y_1,z_1),(y_1,z_2),(y_2,z_2),(y_3,z_2),(y_3,z_3)\right\}$$

Kompozícia týchto dvoch relácií má tvar

$$P\circ Q=\left\{(x_1,z_1),(x_1,z_2),(x_1,z_3),(x_2,z_2),(x_2,z_3),(x_3,z_1),(x_3,z_2),(x_4,z_2),(x_4,z_3)\right\}$$

Grafická interpretácia týchto relácií je znázornená na obr. 3.4.



Obrázok 3.4. Diagramy A a B znázorňujú relácie P a Q z príkladu 3.3, ich kompozícia $P\circ Q$ je vytvorená pomocou diagramu C, ktorý znázorňuje spojenie relácií P a Q prostredníctvom vrcholov y_i. Ak z vrcholu x_i existuje orientovaná cesta do vrcholu z_j, potom graf reprezentujúci kompozíciu $P\circ Q$ obsahuje hranu z x_i do z_j.

Vlastnosti relácií

V tomto odseku budeme študovať relácie $P\subseteq X\times X$, ktoré sú definované ako podmnožina karteziánskeho súčinu $X\times X$.

Definícia 3.6. Reláciu $R \subseteq X \times X$ nazývame:

(1) ***reflexívnou*** vtedy a len vtedy, ak $\forall(x \in X)((x,x) \in R)$,

(2) ***symetrickou*** vtedy a len vtedy, ak $\forall(x,y \in X)((x,y) \in R \Rightarrow (y,x) \in R)$,

(3) ***antisymetrickou*** vtedy a len vtedy, ak $\forall(x,y \in X)((x,y) \in R \wedge (y,x) \in R \Rightarrow x = y)$ a

(4) ***tranzitívnou*** vtedy a len vtedy, ak $\forall(x,y,z \in X)((x,y) \in R \wedge (y,z) \in R \Rightarrow (x,z) \in R)$.

Z definície 3.6 vyplýva, že pre antisymetrickú reláciu platí, že ak elementy $x,y \in X$ sú rôzne, $x \neq y$, potom platí implikácia $(x,y) \in R \Rightarrow (y,x) \notin R$, t. j. nemôžu súčasne existovať dvojice relácie $(x,y) \in R$ a $(y,x) \in R$. Dôsledkom tejto vlastnosti je, že ak v nejakej relácii R existujú také dva rôzne elementy $x,y \in X$, pre ktoré platí $((x,y) \in R)$ a $((y,x) \in R)$, potom táto relácia nie je antisymetrická (t. j. podmienka antisymetričnosti je falzifikovaná).

Existujú relácie súčasne symetrické aj antisymetrické (napr. rovnosť), ani symetrické ani antisymetrické (napr. deliteľnosť), symetrické a nie antisymetrické (kongruencia modulo *n*, teda zvyšky po delení prirodzeným číslom *n* sú rovnaké) a nesymetrické a antisymetrické (menšie alebo rovné, pozri príklad 3.4).

Príklad 3.4. Nech $X = \mathbb{R}$ je množina reálnych čísel a relácia $P \subseteq X \times X$ má interpretáciu

$$((x,y) \in P) =_{def} (x \leq y)$$

Takto definovaná relácia *P* vyhovuje týmto podmienkam:

(a) relácia *P* je reflexívna, pre každé reálne číslo $x \in X$ platí $x \leq x$, t. j. $(x,x) \in P$,

(b) relácia *P* nie je symetrická, pretože $x \leq y$ neimplikuje $y \leq x$,

(c) relácia *P* je antisymetrická, pretože $x < y$ implikuje $\neg(y < x)$,

(d) relácia *P* je tranzitívna, pretože $x < y$ a $y < z$ implikuje $x < z$.

Príklad 3.5. Nech $X = \{a,b,c,d\}$, relácia $P \subseteq X \times X$ je špecifikovaná množinou

$$P = \{(a,a),(a,b),(a,c),(b,a),(b,c),(b,d),(d,d)\}$$

Táto relácia nespĺňa žiadnu vlastnosť z definície 3.6:

(a) relácia *P* nie je reflexívna, $(b,b) \notin P$,

(b) relácia *P* nie je symetrická, implikácia $(a,c) \in P \Rightarrow (c,a) \in P$ nie je pravdivá,

(c) relácia *P* nie je antisymetrická, relácia obsahuje súčasne dvojice $(a,b),(b,a)$,

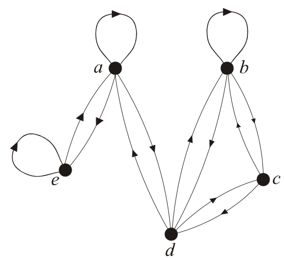
(d) relácia *P* nie je tranzitívna, implikácia $(a,b),(b,d) \in P \Rightarrow (a,d) \in P$ nie je pravdivá.

Relácia $P \subseteq X \times X$ má diagramatickú interpretáciu pomocou orientovaného grafu. V tomto prípade elementy množiny X sú vrcholy a usporiadané dvojice $(x,y) \in P$ sú orientované hrany, ktoré začínajú v *x* a končia v *y*. Vlastnosti z definície 3.6 majú v rámci tohto pohľadu na reláciu jednoduchú interpretáciu:

(a) Relácia *P* je reflexívna, potom každý vrchol $x \in X$ má slučku – orientovanú hranu, ktorá začína a končí v tom istom vrchole.

(b) Relácia *P* je symetrická, ak vrcholy $x,y \in X$ sú spojené hranou $(x,y) \in P$, potom existuje aj opačná hrana $(y,x) \in P$. V tomto prípade symetrickej relácie, jej grafická interpretácia obsahuje hrany medzi vrcholmi *x* a *y* vždy po dvojiciach, t. j. existencia hrany (*x*,*y*) implikuje existenciu hrany (*y*,*x*), a naopak.
(c) Relácia *P* je antisymetrická, medzi dvoma rôznymi vrcholmi $x \neq y$ nemôže existovať dvojica hrán (*x*,*y*) a (*y*,*x*). V prípade, že by existovala, potom z podmienky antisymetričnosti vyplýva, že $x = y$, čo je v spore s pôvodným predpokladom.
(d) Relácia *P* je tranzitívna, z existencie hrán (x,y) a (y,z), ktoré majú spoločný vrchol *y*, vyplýva existencia hrany (x,z).

Príklad 3.6. Nech $X = \{a,b,c,d,e\}$, relácia definovaná nad touto množinou je určená grafom na obr. 3.5.



Obrázok 3.5. Grafická interpretácia relácie *P* nad množinou $X = \{a,b,c,d,e\}$

Z obrázku 3.5 vidíme, že
(1) relácia *P* nie je reflexívna, potrebné slučky neexistujú na vrcholoch *c* a *d*,
(2) relácia *P* je symetrická, ak medzi vrcholmi *x* a *y* existuje hrana (*x*,*y*), potom existuje aj opačná hrana (*y*,*x*),
(3) relácia *P* nie je antisymetrická, z existencie dvojíc opačne orientovaných hrán na rôznych vrcholoch nevyplýva rovnosť týchto dvoch vrcholov.
(4) relácia *P* nie je tranzitívna, pretože existencia hrán (*e*,*a*) a (*a*,*d*) neimplikuje existenciu hrany (*e*,*d*).

Relácia ekvivalencie

Definícia 3.7. Relácia $P \subseteq X \times X$ sa nazýva ***relácia ekvivalencie*** vtedy a len vtedy, ak je reflexívna, symetrická a tranzitívna.

Reláciu ekvivalencie *P* budeme označovať symbolom ´~´, t. j.

$$\forall (x,y \in X)\left((x \sim y) =_{def} ((x,y) \in P)\right)$$

Pomocou relácie ekvivalentnosti môžeme konečnú množinu *X* rozdeliť na *n* disjunktných podmnožín $X_1, X_2, ..., X_n \subset X$, kde $X = X_1 \cup X_2 \cup ... \cup X_n$ a $X_i \cap X_j = \emptyset$, pre $i \neq j$

$$x,y \in X_i \Rightarrow x \sim y \quad (i = 1,2,...,n) \tag{3.11a}$$

$$(x \in X_i) \wedge (y \in X_j) \Rightarrow (x \nsim y) \quad (i \neq j) \tag{3.11b}$$

kde $(x \nsim y) =_{def} \neg(x \sim y)$. Vlastnosť (3.11a) vyplýva priamo z definície ekvivalentnosti, vlastnosť (3.11b) sa dokáže jednoducho sporom.

Príklad 3.7. Nech $X = \mathbb{R}$ je množina reálnych čísel, relácia $P \subseteq X \times X$ je definovaná takto:

$$\left((x,y) \in P\right) \equiv \left(x^2 = y^2\right)$$

(1) Relácia P je reflexívna, pretože $x^2 = x^2$, pre každé $x \in \mathbb{R}$,
(2) relácia P symetrická, pretože $x^2 = y^2$ implikuje $y^2 = x^2$,
(3) relácia P je tranzitívna, pretože $x^2 = y^2$ a $y^2 = z^2$ implikuje $x^2 = z^2$.
Z tohto vyplýva, že P je relácia ekvivalencie.

Definícia 3.8. Nech P je relácia ekvivalencie nad množinou X a nech $x \in X$. Množina $[x] \subseteq X$, ktorá je priradená elementu $x \in X$, sa nazýva ***triedou ekvivalencie*** vtedy a len vtedy, ak obsahuje všetky možné elementy X, ktoré sú ekvivalentné danému elementu x

$$[x] = \{y \in X ; (x,y) \in P\} \qquad (3.12)$$

Veta 3.2. Nech $P \subseteq X \times X$ je relácia ekvivalencie a nech $x, y \in X$. Potom podmienka $[x] = [y]$ je splnená vtedy a len vtedy, ak $(x,y) \in P$.

(1) Predpokladajme, že P je relácia ekvivalencie, dokážeme implikáciu

$$(x,y) \in P \Rightarrow ([x] = [y])$$

Nech $z \in [x]$, potom na základe definície (3.12) $(x,z) \in P$. Pretože P je symetrická relácia, z predpokladu $(x,y) \in P$ vyplýva, že taktiež $(y,x) \in P$. Relácia P je aj tranzitívna, z predpokladov $(x,z) \in P$ a $(y,x) \in P$ vyplýva, že $(y,z) \in P$, čiže aj $z \in [y]$. Týmto sme dokázali, že $[x] \subseteq [y]$. Analogicky dokážeme aj $[y] \subseteq [x]$, tým sme dokázali, že $[x] = [y]$.
(2) Budeme dokazovať implikáciu

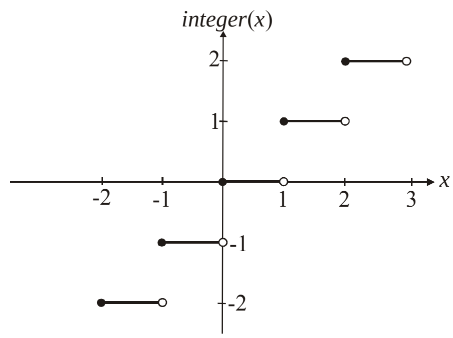
$$([x] = [y]) \Rightarrow (x,y) \in P$$

Táto implikácia je priamy dôsledok definície (3.12).

Veta 3.3. Nech $P \subseteq X \times X$ je relácia ekvivalencie, potom množina X má disjunktný rozklad pomocou všetkých rôznych tried ekvivalentnosti

$$X = [x] \cup [y] \cup ... \cup [z] \qquad (3.13)$$

Dôkaz tejto vety rozdelíme na dva kroky: v prvom kroku dokážeme, že každý element $x \in X$ patrí do nejakej triedy ekvivalentnosti. P je reflexívna relácia, preto pre každé $x \in X$ dvojica $(x,x) \in P$, čiže $\forall x (x \in [x])$.V druhom kroku dokážeme, že množina pre dva neekvivalentné elementy x a y, $(x,y) \notin P$, príslušné triedy ekvivalentnosti sú disjunktné, $[x] \cap [y] = \emptyset$. Nech $z \in [x] \cap [y]$, potom $z \in [x]$ a $z \in [y]$, potom $(z,x) \in P$ a $(z,y) \in P$. Použitím tranzitivity a symetričnosti P dostaneme $(x,y) \in P$, z čoho plynie $[x] = [y]$. To znamená, že z predpokladu neprázdnosti prieniku tried ekvivalentnosti $[x] \cap [y]$ dostaneme, že triedy sú totožné, čo je v spore s predpokladom, že elementy x a y sú neekvivalentné. Týmto sme nepriamo dokázali, že $[x]\cap[y]=\emptyset$. Spojením vlastností z prvého a druhého kroku dokážeme vetu 3.3, t. j. pre každý element $x\in X$ existuje trieda ekvivalentnosti, do ktorej tento element patrí, pričom triedy ekvivalentnosti sú navzájom disjunktné.



Obrázok 3.6. Znázornenie funkcie *integer*(*x*).

Príklad 3.8. Nech $X=\mathbb{R}$ je množina reálnych čísel, relácia $P\subseteq X\times X$ je definovaná

$$\left((x,y)\in P\right)\equiv\left(integer(x)=integer(y)\right)$$

kde funkcia *integer*(*x*) je definovaná ako maximálne celé číslo, ktoré je menšie alebo rovné reálnemu číslu *x* (pozri obr. 3.6). Ľahko sa presvedčíme, že takto definovaná relácia *P* je relácia ekvivalentnosti nad množinou $\mathbb{R}$ reálnych čísel. Ako ilustračný príklad študujme $1/2\in\mathbb{R}$, kde $integer(1/2)=0$, trieda ekvivalentnosti je $[0]=\{x;\,0\le x<1\}$. Pre ďalšie reálne číslo $3/2\in R$, $integer(3/2)=1$, dostaneme triedu ekvivalentnosti $[1]=\{x;1\le x<2\}$: Množinu reálnych čísel $\mathbb{R}$ môžeme vyjadriť ako zjednotenie týchto tried ekvivalentnosti charakterizovanými celými číslami

$$\mathbb{R}=\bigcup_{i\in\mathbb{Z}}[i]=...[-2]\cup[-1]\cup[0]\cup[1]\cup[2]...$$

kde $\mathbb{Z}$ je množina celých čísel.

3.2 Relácia čiastočného usporiadania

Pre mnohé množiny je možné definovať reláciu usporiadania jej elementov. Tak napríklad, množina reálnych čísel $\mathbb{R}$ má prirodzené usporiadanie svojich elementov pomocou relácie ´≤´ (pozri príklad 3.4). Táto relácia je reflexívna, antisymetrická a tranzitívna.

Definícia 3.9. Relácia $P\subseteq X\times X$ sa nazýva ***čiastočné usporiadanie*** vtedy a len vtedy, ak je reflexívna, antisymetrická a tranzitívna. Množina *X* spolu s touto reláciou sa nazýva ***čiastočne usporiadaná množina*** (***poset***).

Príklad 3.9.
(1) Relácia čiastočného usporiadania $P \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ môže byť jednoducho uskutočnená pomocou známej relácie ´≤´, ktorá sa interpretuje ako „menší alebo rovný“ (pozri príklad 3.4).
(2) Ak by sme chceli reláciu *P* interpretovať pomocou relácie ´<´, potom *P* nie je čiastočné usporiadanie, pretože *P* nie je reflexívna (t. j. neplatí $x < x$).
(3) Nech *F* je systém podmnožín univerza *U*, $F = \{X ; X \in \mathcal{P}(U)\}$. Pomocou množinovej relácie ´⊆´ môžeme nad týmto systémom *F* definovať reláciu *P* tak, že $((X,Y) \in P) =_{def} (X \subseteq Y)$. Ľahko sa presvedčíme, že táto relácia je čiastočne usporiadanie, je reflexívna, antisymetrická a tranzitívna.
(4) Nech $X = \mathbb{N} = \{1,2,3,4,...\}$ je množina kladných celých čísel. Definujme nad touto množinou reláciu $P \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ pomocou pojmu deliteľnosti; $((m,n) \in P) =_{def} (m \text{ je deliteľné } n)$. Tak napríklad, pre $X = \{1,2,3,4,5,6\}$ relácia *P* obsahuje dvojice

$$P = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6),(2,1),(3,1),(4,1),(4,2),(5,1),(6,1),(6,2),(6,3)\}$$

Táto relácia je čiastočné usporiadanie, pretože je reflexívna, antisymetrická a tranzitívna.

Maximálny a minimálny element

Definícia 3.10. Nech $P \subseteq X \times X$ je čiastočné usporiadanie. ***Maximálny element*** (ak existuje) $x_{max} \in X$ je určený podmienkou

$$\forall (x \in X)\left(\left((x_{max},x) \in P\right) \Rightarrow (x = x_{max})\right) \tag{3.14}$$

Minimálny element (ak existuje) $x_{min} \in X$ je určený podmienkou

$$\forall (x \in X)\left(\left((x,x_{min}) \in P\right) \Rightarrow (x = x_{min})\right) \tag{3.15}$$

Táto definícia maximálneho elementu $x_{max} \in X$ je založená na podmienke, že ak postulujeme existenciu takého elementu $x \in X$ pre ktorý platí $(x_{max},x) \in P$, potom nutne $x = x_{max}$, t. j. neexistuje taký element $x \in X$, ktorý by bol „väčší“ ako element x_{max}. Podobne, pre minimálny element $x_{min} \in X$ neexistuje taký element $x \in X$, ktorý by bol menší ako x_{min}.

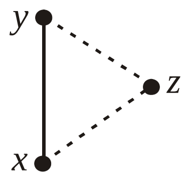
Príklad 3.10. Študujme množinu $X = \{1,2,3\}$, jej potenčná množina $\mathcal{P}(X)$ obsahuje všetky možné podmnožiny *X*

$$\mathcal{P}(X) = \{\emptyset,\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{1,2,3\}\}$$

Ak čiastočné usporiadanie nad touto potenčnou množinou je relácia ´⊆´, potom maximálny (minimálny) element je {1,2,3} (∅). Definujme podmnožinu *Q* potenčnej množiny $\mathcal{P}(X)$ $Q = \{\emptyset,\{1\},\{2\},\{1,2\},\{2,3\}\}$. Táto množina má dva maximálne elementy {1,2} a {2,3} a jeden minimálny element ∅.

Hasseho diagramy

Nech X je čiastočne usporiadaná množina s reláciou $P \subseteq X \times X$. Hovoríme, že element y je pokrytý elementom x vtedy, ak $(x,y) \in P$ a neexistuje taký element z, pre ktorý súčasne platí $(x,z) \in P$ a $(z,y) \in P$, pozri obr. 3.7.

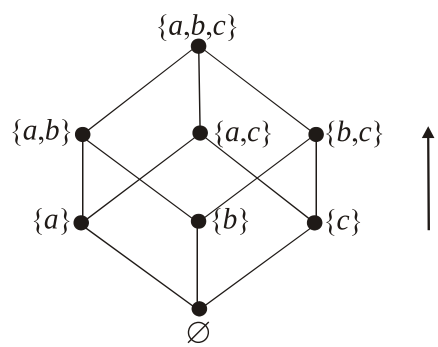


Obrázok 3.7. Znázornenie pojmu „element *y* je ***pokrytý*** elementom *x*“ , neexistuje taký element z, pre ktorý by platilo „element z je pokrytý *x*“ a „element *y* je pokrytý *z*“.

Hasseho diagram priradený konečnej množine X s reláciou $P \subseteq X \times X$ čiastočného usporiadania obsahuje vrcholy, ktoré sú stotožnené s elementami z X; pričom dva vrcholy x a y sú spojené hranou, ak element y je pokrytý elementom x.

Hasseho diagram konečnej čiastočne usporiadanej množiny X s reláciou čiastočného usporiadania $P \subseteq X \times X$ zostrojíme jednoducho tak, že v prvom kroku zostrojíme graf relácie (pozri text za príkladom 3.5), z tohto grafu vynecháme slučky (dôsledok reflexivity relácie) a tie hrany, ktoré sú dôsledkom tranzitivity relácie. Graf usporiadame tak, aby bol dobre zorientovaný zhora nadol vzhľadom k pokrytiu.

Príklad 3.11. Hasseho diagram pre množinu $X = \mathcal{P}(\{a,b,c\})$, ktorá je čiastočne usporiadaná pomocou relácie $'\subseteq'$, je znázornený na obr. 3.8.



Obrázok 3.8. Znázornenie Hasseho diagramu pre $X = \mathcal{P}(\{a,b,c\})$, ktorá je čiastočne usporiadaná reláciou $'\subseteq'$. Šípka v pravo znázorňuje orientáciu čiar, ktoré sú orientované zdola nahor.

Príklad 3.12. Relácia P čiastočného usporiadania je špecifikovaná Hasseho diagramom znázorneným na obr. 3.9. Našou úlohou je vydedukovať dvojice, ktoré obsahuje táto relácia:

(1) Množina nad ktorou je definovaná relácia má tvar $X = \{a,b,r,s,t,x,y,z\}$.

(2) Relácia P je reflexívna, t. j. obsahuje všetky možné dvojice (u,u), pre každé $u \in X$,

$$P^{(1)} = \{(a,a),(b,b),(r,r),(s,s),(t,t),(x,x),(y,y),(z,z)\}$$

(3) Relácia P obsahuje všetky hrany z Hasseho diagramu na obr. 3.9, pričom hrany sú orientované zdola nahor,

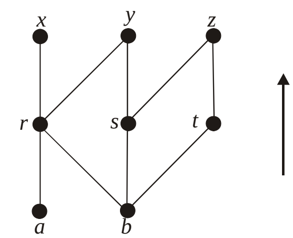
$$P^{(2)} = P^{(1)} \cup \{(a,r),(b,r),(b,s),(b,t),(r,x),(r,y),(s,y),(s,z),(t,z)\}$$

(4) Relácia P je tranzitívna, čiže, ak napr. obsahuje dvojice (a,r) a (r,x), potom musí obsahovať aj dvojicu (a,x),

$$P^{(3)} = P^{(2)} \cup \{(a,x),(a,y),(b,x),(b,y),(b,z)\}$$

Zjednotením týchto troch parciálnych výsledkov dostaneme konečný tvar relácie P

$$P = \left\{ \begin{matrix} (a,a),(b,b),(r,r),(s,s),(t,t),(x,x),(y,y),(z,z), \\ (a,r),(b,r),(b,s),(b,t),(r,x),(r,y),(s,y),(s,z), \\ (t,z),(a,x),(a,y),(b,x),(b,y),(b,z) \end{matrix} \right\}$$



Obrázok 3.9. Hasseho diagram pre hypotetickú reláciu čiastočného usporiadania nad množinou $X = \{a,b,r,s,t,x,y,z\}$. Šípka vpravo znázorňuje orientáciu čiar zdola nahor.

Hasseho diagram pre reláciu čiastočného usporiadania P nad konečnou množinou X ukazuje jasne maximálne a minimálne prvky. Minimálne prvky sú také, ktoré sú reprezentované vrcholmi, z ktorých hrany len vychádzajú, podobne, maximálne prvky sú také, ktoré sú reprezentované vrcholmi, do ktorých hrany len vchádzajú. Relácia čiastočného usporiadania P, ktorá je reprezentovaná Hasseho diagramom na obr. 3.9 má dva minimálne prvky a a b, tri maximálne prvky x, y a z.

Veta 3.4. Každá relácia čiastočného usporiadania $P \subseteq X \times X$, kde X je konečná množina, obsahuje aspoň jeden minimálny element a aspoň jeden maximálny element.

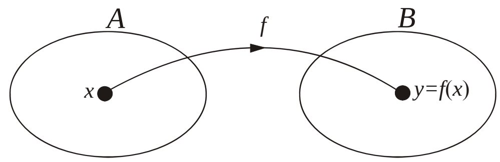
Nech $a_1 \in X$, ak je tento element minimálny, dôkaz je dokončený. V opačnom prípade existuje $a_2 \in X$ taký, že $(a_2,a_1) \in P$. Element a_2 je buď minimálny alebo ak nie, potom existuje taký element $a_3 \in X$, že $(a_3,a_2) \in P$. Pretože množina X má konečný počet elementov, tento proces predlžovania smerom dole musí byť v nejakom momente ukončený elementom, ktorý je minimálny. Podobným spôsobom môžeme zostrojiť element, ktorý je maximálny.

3.3 Funkcie

Pojem funkcie (alebo zobrazenia) patrí medzi základné pojmy matematiky. V matematike pod funkciou f rozumieme jednoznačný predpis, pomocou ktorého každému argumentu x z množiny A priradíme práve jednu funkčnú hodnotu označenú $y = f(x)$ z množiny B. Túto špecifikáciu funkcie zapisujeme takto:

$$f : A \to B \tag{3.16a}$$

pozri obr. 3.10.



Obrázok 3.10. Schematické znázornenie zobrazenia $f: A \to B$.

Alternatívna forma definície funkcie (3.16a) je pomocou množiny obsahujúcej usporiadané dvojice

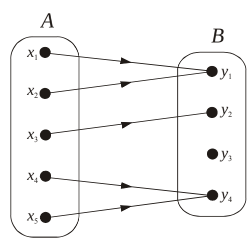
$$f = \{(x, f(x)); x \in A\} \tag{3.16b}$$

Definícia 3.11. Relácia $f \subseteq A \times B$ sa nazýva ***funkcia*** vtedy a len vtedy, ak pre každé $x \in A$ existuje práve jedno $y \in B$ také, že $(x,y) \in f$

$$\forall (x \in A)\, \exists! (y \in B) \left((x,y) \in f\right) \tag{3.17}$$

kde symbol $\exists!$ značí, že existuje práve jeden element. Množina *A* sa nazýva ***obor definície*** (alebo len ***obor***) funkcie *f*, $D_f = A$, a množina *B* sa nazýva ***koobor. Obor funkčných hodnôt*** funkcie *f* je množina $H_f = \{f(x); x \in A\} = f(A)$. Ak $(x,y) \in f$, potom *x* sa nazýva ***argument*** a *y* sa nazýva ***funkčná hodnota*** (***obraz***). Funkcia *f* sa taktiež nazýva ***zobrazenie.*** Špeciálny prípad funkcie je ***transformácia***, kde musí platiť $A = B$.

Funkcia je špeciálny prípad relácie, ktorá vyhovuje podmienke jednoznačnosti (3.17), pozri obr. 3.11.

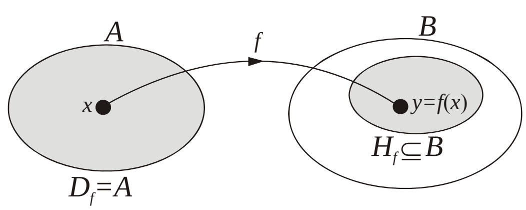


Obrázok 3.11. Znázornenie funkcie $f \subseteq A \times B$, pre každé $x \in A$ existuje práve jedno $y \in B$ také, že $(x,y) \in f$. Funkcia *f* má tvar relácie $f = \{(x_1,y_1),(x_2,y_1),(x_3,y_2),(x_4,y_4),(x_5,y_4)\}$

Z obrázku 3.11 vyplýva, že definícia 3.11 nám nezabezpečuje, aby množina funkčných hodnôt $\{f(x); x \in A\}$ bola totožná s množinou *B*, vo všeobecnosti platí len

$$B' = f(A) = \{f(x); x \in A\} \subseteq B \tag{3.18}$$

pozri obr. 3.12.



Obrázok 3.12. Znázornenie skutočnosti, že pre funkciu $f: A \to B$, obor funkčných hodnôt $H_f = f(A)$ je vo všeobecnosti len podmnožinou *B*.

Definícia 3.12. Hovoríme, že dve funkcie $f: A \rightarrow B$ a $g: A' \rightarrow B'$ sa ***rovnajú*** vtedy a len vtedy, ak súčasne platí
(1) $A = A'$,
(2) $\forall(x \in A)(f(x) = g(x))$.

Táto definícia rovnosti dvoch funkcií má praktický význam, často intuitívne hovoríme že dve funkcie sa rovnajú, táto definícia nám presne špecifikuje, čo musí byť splnené, aby táto podmienka bola splnená.

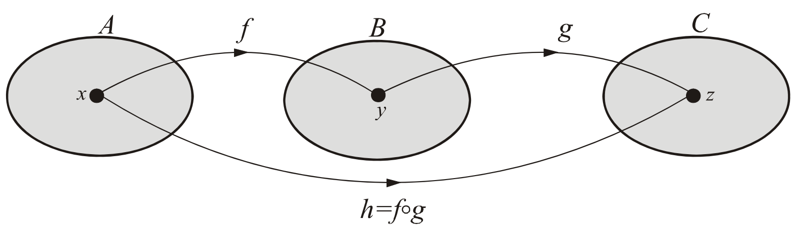
Špeciálnym prípadom funkcie je ***jednotková funkcia*** $i_A: A \rightarrow A$, pre ktorú platí

$$\forall(x \in A)(i_A(x) = x) \tag{3.19}$$

Jej obor a obor funkčných hodnôt sú si rovné, $D_{i_A} = H_{i_A} = A$.

Zložená funkcia

V kapitole 3.1 bola definovaná kompozícia $P \circ Q$ dvoch relácií P a Q. Podobný postup môže byť použitý aj pre kompozíciu funkcií, ktorej výsledok nazývame zložená funkcia. Majme dve funkcie $f: A \rightarrow B$ a $g: B \rightarrow C$, kompozíciou týchto dvoch funkcií (pozri obr. 3.13) vytvoríme novú funkciu $h = f \circ g: A \rightarrow C$, ktorá sa nazýva zložená funkcia.



Obrázok 3.13. Znázornenie tvorby zloženej funkcie h z funkcií f a g. Táto zložená funkcia existuje len vtedy, keď prienik oboru funkčných hodnôt H_f funkcie f a definičného oboru D_g funkcie g je neprázdny, $H_f \cap D_g \neq \emptyset$.

Definícia 3.13. Hovoríme, že kompozíciou funkcií $f: A \rightarrow B$ a $g: B \rightarrow C$ vznikne ***zložená funkcia*** $h = f \circ g: A \rightarrow C$ vtedy a len vtedy, ak

$$h = f \circ g = \{(x,z) \in A \times C; \exists(y \in B)((x,y) \in f) \wedge ((y,z) \in g)\} \tag{3.20}$$

Z tejto definície priamo plynie, že zložená funkcia $h = f \circ g$ existuje len vtedy, ak pre danú dvojicu $(x,z) \in A \times C$ existuje taký element $y \in B$, pre ktorý súčasne platí $(x,y) \in f$ a $(y,z) \in g$. Ináč povedané, musí existovať neprázdny prienik medzi oborom funkčných hodnôt H_f funkcie f a definičným oborom D_g funkcie g, $H_f \cap D_g \neq \emptyset$.

Ako zostrojiť zloženú funkciu? Z obr. 3.13 aplikáciou funkcie f na argument y dostaneme obraz $x = f(y)$, podobne, aplikáciou funkcie g na argument z dostaneme obraz y,

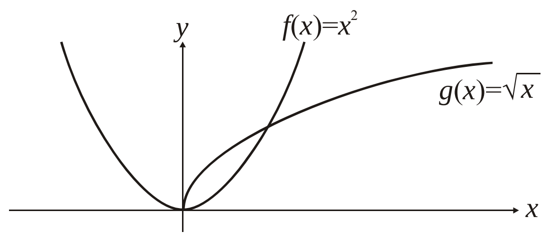
$y = g(z)$; ak do tohto výsledku dosadíme za y predchádzajúci výsledok $x = f(y)$, získame konečný tvar zloženej funkcie

$$f\left(\underbrace{g(z)}_{y}\right) = f(y) = z = f\left[g(z)\right] = x \qquad (3.21)$$

Príklad 3.13. Študujme dve funkcie
(1) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ktorej analytický tvar je $f(x) = x^2$, jej definičný obor $D_f = \mathbb{R} = (-\infty,\infty)$ je množina všetkých reálnych čísel (reálna os) a obor funkčných hodnôt je $H_f = [0,\infty)$ množina nezáporných reálnych čísel.
(2) $g: [0,\infty) \to [0,\infty)$, ktorej analytický tvar je $g(x) = \sqrt{x}$, kde obor definičný a obor funkčných hodnôt sú rovnaké, $D_f = H_f = [0,\infty)$.
Prvá zložená funkcia má tvar $h(x) = g(f(x)) = \sqrt{x^2} = |x|$, jej obor definície je $D_h = \mathbb{R} = (-\infty,\infty)$ a obor funkčných hodnôt je $H_f = [0,\infty)$, t. j. zobrazuje množinu reálnych čísel $\mathbb{R}$ na množinu nezáporných reálnych čísel $[0,\infty)$. Priebeh funkcie $h(x) = |x|$ je znázornený na obr. 3.15, diagram A.

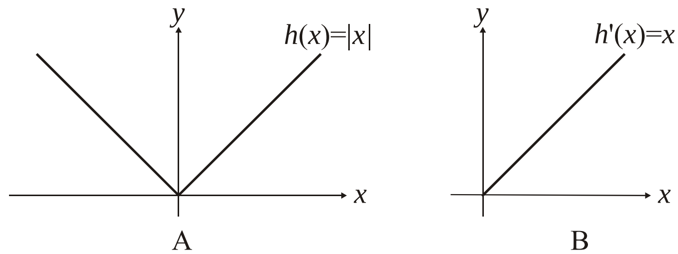
Druhá zložená funkcia má tvar $h'(x) = f(g(x)) = \left(\sqrt{x}\right)^2 = x$, táto funkcia má rovnaký obor a obor hodnôt, $D_{h'} = H_{h'} = [0,\infty)$, t. j. zobrazuje „lineárne" množinu nezáporných reálnych čísel na tú istú podmnožinu. Priebeh funkcie $h'(x) = x$ je znázornený na obr. 3.15, diagram B.

Grafy funkcií f a g sú znázornené na obr. 3.14.



Obrázok 3.14. Grafy funkcií $f(x)$ a $g(x)$ z príkladu 3.13.

Môžeme si položiť otázku či sa zložené funkcie $h(x)$ a $h'(x)$ rovnajú alebo nie. Podľa definície 3.12, dve funkcie sú si rovné vtedy a len vtedy, ak majú rovnaké obory, obory hodnôt a predpisy (analytické tvary), ak je porušená jedna z týchto troch podmienok, potom funkcie sú rôzne. V našom prípade $D_h \neq D_{h'}$, čiže zložené funkcie sú rôzne.



Obrázok 3.15. Diagram A znázorňuje graf zloženej funkcie $h(x) = g\left(f(x)\right) = |x|$, diagram B znázorňuje graf zloženej funkcie $h'(x) = f\left(g(x)\right) = x$.

Inverzná funkcia

Podľa definície 3.2 je inverzná relácia P^{-1} určená jednoducho inverziou usporiadaných dvojíc z relácie P (pozri obr. 3.2). Žiaľ, tento jednoduchý postup je neaplikovateľný pre konštrukciu inverznej funkcie, pretože vzniknutá relácia už nemusí spĺňať podmienku jednoznačnosti (pozri definíciu 3.11). Preto musíme zaviesť ešte dodatočné predpoklady na reláciu, aby bola nielen funkciou, ale existovala k nej aj inverzná funkcia.

Definícia 3.14. Funkcia $f : A \to B$ sa nazýva ***injekcia*** (***jedno-jednoznačná***) vtedy a len vtedy, ak vyhovuje podmienke

$$\forall\left(x,x' \in A\right)\left(x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')\right) \tag{3.22}$$

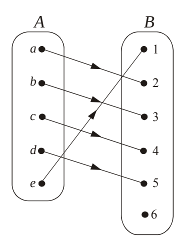
Pôvodnú podmienku jednoznačnosti z definície 3.11 môžeme vyjadriť takto

$$\forall\left(x,x' \in A\right)\left(f(x) \neq f(x') \Rightarrow x \neq x'\right) \tag{3.23}$$

Spojením týchto dvoch podmienok dostaneme, že injekcia vyhovuje podmienke

$$\forall\left(x,x' \in A\right)\left(\left(x \neq x'\right) \equiv \left(f(x) \neq f(x')\right)\right) \tag{3.24}$$

To znamená, že pre injekciu podmienka rôznosti argumentov je ekvivalentná podmienke rôznosti im odpovedajúcich funkčných hodnôt.



Obrázok 3.16. Schematické znázornenie injekcie $f : A \to B$, kde každému argumentu je priradená práve jedna funkčná hodnota, a taktiež aj naopak, ku každej funkčnej hodnote existuje práve jeden argument. Musíme však poznamenať, že množina B obsahuje elementy, ktoré nie sú funkčné hodnoty f. Tak napríklad k elementu $y_0 \in B$ označenému číslom 6 neexistuje taký argument $x_0 \in A$, aby platilo $y_0 = f(x_0)$. Pomocou tohto jednoduchého ilustračného príkladu sme ukázali, že k funkcii $f : A \to B$ neexistuje inverzná funkcia $f^{-1} : B \to A$, aj keď táto funkcia je injekcia.

Problémy s konštrukciou inverznej funkcie pre injekciu sú ilustrované na obr. 3.16. Je ukázané, že aj keď je funkcia $f : A \to B$ jedno-jednoznačná (t. j. injekcia), inverzná funkcia $f^{-1} : B \to A$ k nej neexistuje, množina B obsahuje také elementy $y \in B$ ku ktorým neexistujú argumenty $x \in A$, aby $y = f(x)$. Z tohto dôvodu musíme definíciu injekcie rozšíriť o ďalšiu podmienku.

Definícia 3.15. Injekcia funkcia $f : A \to B$ sa nazýva ***bijekcia*** vtedy a len vtedy, ak pre každý element $y \in B$ existuje v množine *A* taký element *x*, že $y = f(x)$.

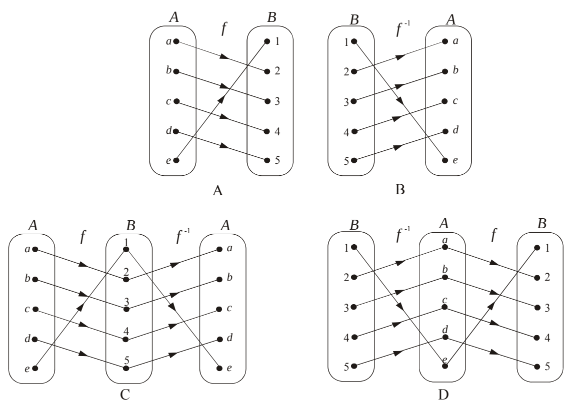
Definícia 3.16. Nech funkcia $f : A \to B$ je bijekcia. Hovoríme, že funkcia $f^{-1} : B \to A$ je inverzná k funkcii *f* vtedy a len vtedy, ak vyhovuje týmto dvom podmienkam

$$f\left(f^{-1}(x)\right) = i_B(x) \tag{3.25a}$$

$$f^{-1}\left(f(x)\right) = i_A(x) \tag{3.25b}$$

kde i_X je jednotková funkcia definovaná nad množinou *X*.

Definícia 3.16 je ilustrovaná obrázkom 3.17, kde v obidvoch prípadoch dostávame jednotkovú funkciu definovanú nad oborom *A* resp. oborom *B*.



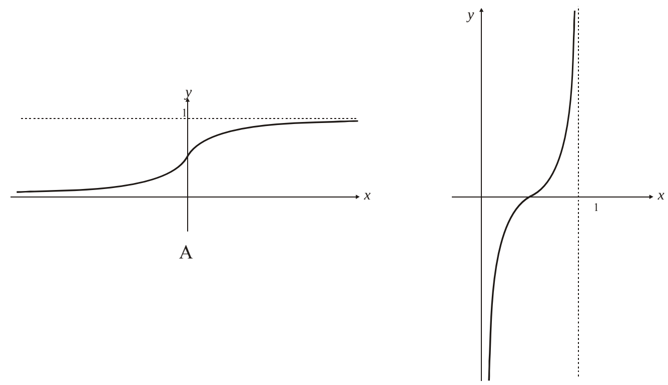
Obrázok 3.17. Diagramy A a B znázorňujú zobrazenia f a f^{-1} prevzaté z obr. 3.16. Diagram C znázorňuje zloženú funkciu $h = f^{-1} \circ f = i_A : A \to A$, diagram D znázorňuje zloženú funkciu $h' = f \circ f^{-1} = i_B : B \to B$.

Príklad 3.14. Zostrojte inverznú funkciu k funkcii $f(x) = \dfrac{1}{1+e^{-x}}$

Graf funkcie *f*(*x*) je znázornený na obr. 3.18. Táto funkcia[2] zobrazuje obor definície $D_f = \mathbb{R}$ na obor hodnôt $H_f = (0,1)$. Funkcia je monotónne rastúca a vyhovuje asymptotickým podmienkam $f(\infty) = 1$ a $f(-\infty) = 0$. Z monotónnosti vyplýva, že funkcia je injekcia a že ku každej funkčnej hodnote $y \in (0,1)$ existuje taký argument $x \in (-\infty, \infty)$, že $y = f(x)$, t. j. funkcia *f* je bijektívna, čiže k nej existuje inverzná funkcia (pozri obr. 3.18)

$$f^{-1}(x) = ln\frac{x}{1-x}$$

[2] V teórii neurónových sietí je táto funkcia známa ako sigmoidová prechodová (alebo aktivačná) funkcia, ktorá „stlačí“ celú reálnu os na otvorenú úsečku (0,1).



Obrázok 3.18. Priebehy funkcií (A) $f(x)=1/(1+e^{-x})$ a (B) $f^{-1}(x)=ln(x/(1-x))$

Zostrojíme zložené funkcie $f(f^{-1}(x))$ a $f^{-1}(f(x))$.

$$f(f^{-1}(x))=\frac{1}{1+exp(-f^{-1}(x))}=\frac{1}{1+exp(-ln\,x/(1-x))}=\frac{1}{1+\frac{1-x}{x}}=x=i_{(0,1)}(x)$$

$$f^{-1}(f(x))=ln\frac{f(x)}{1-f(x)}=ln\frac{\frac{1}{1+e^{-x}}}{1-\frac{1}{1+e^{-x}}}=ln\frac{\frac{1}{1+e^{-x}}}{\frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}}=ln\,e^{x}=x=i_{(-\infty,\infty)}(x)$$

Aj keď výsledok vyzerá rovnaký, vlastné zložené (jednotkové) funkcie majú rozdielne definičné obory.

Cvičenia

Cvičenie 3.1. Zostrojte množinu usporiadaných dvojíc pre reláciu $R\subseteq A\times A$, $A=\{0,1,2,3,4\}$, kde $(x,y)\in R$ vtedy a len vtedy, ak

(a) $x = y$,
(b) $x + y = 4$,
(c) $x > y$,
(d) x je deliteľné y.

Cvičenie 3.2.
(a) Zostrojte množinu usporiadaných dvojíc pre reláciu $R=\{(x,y);\, x$ je deliteľné $y\}$ pre $X=\{1,2,3,4,5,6\}$,
(b) znázornite túto reláciu diagramaticky tak, ako je to vykonané na obr. 3.1,
(c) znázornite túto reláciu grafom tak, ako je to vykonané na obr. 3.2,
(d) reprezentujte reláciu pomocou binárnej matice ***A*** z definície 3.4.

Cvičenie 3.3. Pre každú z nasledujúcich relácií R nad množinou $\{1,2,3,4\}$ zistite, či je reflexívna, symetrická, antisymetrická, alebo tranzitívna.
(a) $\{(2,2),(2,3),(2,4),(3,2),(3,3),(3,4)\}$

(b) $\{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,3),(4,4)\}$
(c) $\{(2,4),(4,2)\}$
(d) $\{(1,2),(2,3),(3,4)\}$
(e) $\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4)\}$
(f) $\{(1,3),(1,4),(2,3),(2,4),(3,1),(3,4)\}$

Cvičenie 3.4. Zistite, či relácia R nad množinou všetkých ľudí je reflexívna, symetrická, antisymetrická, alebo tranzitívna, pričom $(x,y)\in R$ vtedy a len vtedy, ak

(a) x je menší ako y,
(b) x a y sa narodili v rovnakom dni,
(c) x má rovnaké krstné meno ako y,
(d) x a y majú aspoň jednu dvojicu rovnakých starých rodičov.

Cvičenie 3.5. Zistite, či relácia R nad množinou všetkých www stránok je reflexívna, symetrická, antisymetrická, alebo tranzitívna, pričom $(x,y)\in R$ vtedy a len vtedy, ak

(a) každý, kto navštívil túto stránku x, navštívil aj stránku y,
(b) neexistuje priame prepojenie medzi stránkami x a y,
(c) existuje aspoň jedno prepojenie medzi stránkami x a y,
(d) existuje stránka, ktorá obsahuje prepojenia tak na stránku x ako aj na stránku y.

Cvičenie 3.6. Zistite, či relácia R nad množinou reálnych čísel je reflexívna, symetrická, antisymetrická, alebo tranzitívna, pričom $(x,y)\in R$ vtedy a len vtedy, ak

(a) $x + y = 0$,
(b) $x = \pm y$,
(c) $x - y$ je racionálne číslo,
(d) $x = 2y$,
(e) $xy \geq 0$,
(f) $xy = 0$,
(g) $x = 1$,
(h) $x = 1$ alebo $y = 1$.

Cvičenie 3.7. Zostrojte inverznú reláciu $R^{-1}\subseteq Y\times X$ pre relácie $R\subseteq X\times Y$, ktoré sú špecifikované

(a) $R=\{(x,y);x<y\}$ nad množinou celých čísel,
(b) $R=\{(x,y);x \text{ je deliteľné } y\}$ nad množinou kladných celých čísel,
(c) R je relácia nad všetkými európskymi štátmi, ktorá obsahuje dvojicu (x,y) vtedy a len vtedy, ak štát x susedí so štátom y.

Cvičenie 3.8.
Nech $P=\{(1,2),(2,3),(3,4)\}$ a $Q=\{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3),(3,4)\}$, $P,Q\subseteq X\times X$ sú relácie nad $X=\{1,2,3,4\}$. Nájdite

(a) $P\cup Q$, $P\cap Q$,
(b) $P-Q$, $Q-P$,

(c) $\overline{P}$, $\overline{Q}$,
(d) P^{-1}, Q^{-1},
(e) $P \circ Q$, $Q \circ P$,
(f) $\left(P \circ Q\right)^{-1}$, $\left(Q \circ P\right)^{-1}$,
(g) $P^{-1} \circ Q^{-1}$, $Q^{-1} \circ P^{-1}$.

Cvičenie 3.9. Nájdite chybu v dôkaze tejto vety:
Ak relácia $R \subseteq X \times X$ je symetrická a tranzitívna, potom je aj reflexívna.
Dôkaz: Nech $x \in X$, zoberte taký element $y \in X$ pre ktorý $\left(x,y\right) \in R$. Pretože R je symetrická relácia, potom taktiež $\left(y,x\right) \in R$. Použitím vlastnosti tranzitívnosti relácie R dostaneme $\left(x,x\right) \in R$, pretože $\left(x,y\right),\left(y,x\right) \in R$.

Cvičenie 3.10. Nech $R,S \subseteq X \times X$ sú reflexívne relácie. Dokážte alebo vyvráťte tieto tvrdenia:
(a) $R \cup S$ je reflexívna relácia,
(b) $R \cap S$ je reflexívna relácia,
(c) $R - S$ je reflexívna relácia,
(d) $R \circ S$ je reflexívna relácia.

Cvičenie 3.11. Dokážte tieto tvrdenia:
(a) Relácia $R \subseteq X \times X$ je symetrická vtedy a len vtedy, ak $R = R^{-1}$,
(b) Relácia $R \subseteq X \times X$ je antisymetrická vtedy a len vtedy, ak $R \cap R^{-1}$ je podmnožinou „diagonálnej“ relácie $\Delta = \left\{\left(x,x\right); x \in X\right\}$,
(c) Relácia $R \subseteq X \times X$ je reflexívna vtedy a len vtedy, ak R^{-1} je reflexívna relácia,
(d) Ak je relácia $R \subseteq X \times X$ reflexívna a tranzitívna, potom existuje také $n > 0$, že $R^n = R$, kde $R^n = \underbrace{R \circ R \circ ... \circ R}_{n-krát}$.

Cvičenie 3.12. Rozhodnite, či $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ak
(a) $f\left(x\right) = 1/x$,
(b) $f\left(x\right) = \sqrt{x}$,
(c) $f\left(x\right) = \sqrt{1+x^2}$.

Cvičenie 3.13. Nájdite definičný obor a obor hodnôt funkcií:
(a) funkcia priradí každému bitovému reťazcu rozdiel medzi počtom jednotiek a počtom núl v reťazci,
(b) funkcia priradí každému bitovému reťazcu dvojnásobok počtu núl v reťazci,
(c) funkcia priradí (štandardným spôsobom) každému bitovému reťazcu dekadické číslo.

Cvičenie 3.14. Zistite, či funkcie $f : A \to A$, kde $A = \left\{a,b,c,d\right\}$, sú injektívne a nakreslite diagram zobrazenia podľa obr. 3.11.:
(a) $f\left(a\right) = b, f\left(b\right) = a, f\left(c\right) = c, f\left(d\right) = d$,

(b) $f(a)=b, f(b)=b, f(c)=d, f(d)=c$,

(c) $f(a)=d, f(b)=b, f(c)=c, f(d)=d$,

Cvičenie 3.15. Zistite, či funkcie $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$, kde $\mathbb{N}=\{1,2,3,...\}$ je množina prirodzených čísel, môžu byť definované nasledujúcim spôsobom:

(a) $f(n)=n-1$,

(b) $f(n)=n^2$,

(c) $f(n)=1+integer(n/2)$, kde *integer*(*x*) je celá časť reálneho čísla,

(d) $f(n)=n^3$.

Cvičenie 3.16. Nech $f:A\to B$, zostrojte obor hodnôt $f(A)\subseteq B$ kde $A=\{-1,0,2,4,7\}$, pre

(a) $f(x)=1$,

(b) $f(x)=2x+1$,

(c) $f(x)=integer(x/5)$,

(d) $f(x)=integer\left((1+x^2)/3\right)$.

Cvičenie 3.17. Nech $f(x)=2x$, zostrojte:

(a) $f(A)$, kde A je množina celých čísel,

(b) $f(A)$, kde A je množina kladných celých čísel,

(c) $f(\mathbb{R})$, kde $\mathbb{R}$ je množina reálnych čísel.

Cvičenie 3.18. Nech $f:A\to B$ a $g:B\to C$, dokážte, že ak funkcie f a g sú injektívne, potom aj ich kompozícia $g\circ f:A\to C$ je injektívna funkcia.

Cvičenie 3.19. Zostrojte zložené funkcie $f(g(x))$ a $g(f(x))$, kde $f(x)=1+x^2$ a $g(x)=x+2$ sú funkcie s oborom reálnych čísel.

Cvičenie 3.20. Nech $f(x)=ax+b$ a $g(x)=cx+d$, kde a, b, c a d sú konštanty, zistite, za akých podmienok platí $f(g(x))=g(f(x))$.

Cvičenie 3.21. Za ktorých podmienok existuje k funkcii $f(x)=ax+b$ funkcia inverzná $f^{-1}(x)$.

Cvičenie 3.22. Nech $f:A\to B$ a nech $A',A''\subseteq A$. Dokážte platnosť týchto formúl:

(a) $f(A'\cup A'')=f(A')\cup f(A'')$,

(b) $f(A'\cap A'')\subseteq f(A')\cap f(A'')$.

Cvičenie 3.23. Nech $f(x)=x^2$ je funkcia s oborom nezáporných reálnych čísel. Nájdite

(a) $f^{-1}(1)$,

(b) $f^{-1}(\{x; 0 < x < 1\})$

(c) $f^{-1}(\{x; x > 4\})$.

Cvičenie 3.24. Nech $f : A \to B$ a nech $B', B'' \subseteq B$. Dokážte platnosť týchto formúl:

(a) $f^{-1}(B' \cap B'') = f^{-1}(B') \cap f^{-1}(B'')$,

(b) $f^{-1}(B' \cup B'') = f^{-1}(B') \cup f^{-1}(B'')$.

Cvičenie 3.25. Nech $f : A \to B$ a nech $B' \subseteq B$. Dokážte platnosť formuly $f^{-1}(\overline{B'}) = \overline{f^{-1}(B')}$.