3. prednáška

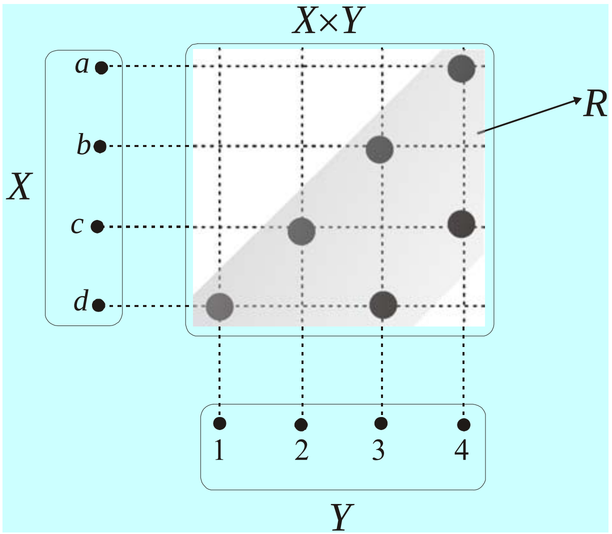
Teória množín II

- **relácie**
  - **operácie nad reláciami**
  - **rovnosť**
  - **usporiadanosť**
- **funkcie**
  - **zložená funkcia**
  - **inverzná funkcia.**

Relácie

Definícia. Nech X a Y sú dve množiny, ***relácia*** R je definovaná podmnožina karteziánskeho súčinu týchto množín

$$R \subseteq X \times Y$$



Znázornenie relácie R ako podmnožiny karteziánskeho súčinu (vytieňovaná oblasť) dvoch množín X a Y, $R = \{(d,1),(c,2),(b,3),(d,3),(a,4),(c,4)\}$.

Relácia R môže byť alternatívne zadaná pomocou charakteristickej funkcie

$$R = \{(x,y);\ \mu_R(x,y) = 1\}$$

$$\mu_R(x,y) = \begin{cases} 1 & (ak\ (x,y) \in R) \\ 0 & (ak\ (x,y) \notin R) \end{cases}$$

Hovoríme o ***binárnej relácii***, každý element $(x,y) \in R$ je ohodnotený binárnym číslom $\mu_R(x,y) \in \{0,1\}$.

Definícia 3.2. ***Inverzná relácia*** R^{-1} (k relácii $R \subseteq X \times Y$) je určená pomocou usporiadaných dvojíc $(y,x) \in X \times Y$, ktorých inverzia patrí do relácie $(x,y) \in R$

$$R^{-1} = \{(y,x);(x,y) \in R\}$$

Nech $P,Q \subseteq X \times Y$, ktoré sú špecifikované pomocou charakteristických funkcií

$$P = \{(x,y);\, \mu_P(x,y) = 1\} \text{ a } Q = \{(x,y);\, \mu_Q(x,y) = 1\}$$

Definícia. Relácia $R = P \cup Q$ sa nazýva ***zjednotenie relácií*** P a Q vtedy a len vtedy, ak platí

$$P \cup Q = \{(x,y);\, \mu_{P\cup Q}(x,y) = 1\}$$

$$\mu_{P\cup Q}(x,y) = max\{\mu_P(x,y), \mu_Q(x,y)\}$$

Relácia $R = P \cap Q$ sa nazýva ***prienik relácií*** P a Q vtedy a len vtedy, ak platí

$$P \cap Q = \{(x,y);\, \mu_{P\cap Q}(x,y) = 1\}$$

$$\mu_{P\cap Q}(x,y) = min\{\mu_P(x,y), \mu_Q(x,y)\}$$

Relácia $R = \overline{P}$ sa nazýva ***doplnok relácie*** P vtedy a len vtedy, ak

$$\overline{P} = \{(x,y);\, \mu_{\overline{P}}(x,y) = 1\}$$

$$\mu_{\overline{P}}(x,y) = 1 - \mu_P(x,y)$$

Príklad

Nech $X = \{1,2,3\}$ a $Y = \{p,q\}$, relácie P a Q majú tvar

$$P = \{(1,q),(2,p),(3,q)\} \quad \text{a} \quad Q = \{(1,q),(2,p),(3,p)\}$$

Zjednotenie a prienik týchto relácií sú

$$P \cup Q = \{(1,q),(2,p),(3,p),(3,q)\} \quad \text{a} \quad P \cap Q = \{(1,q),(2,p)\}$$

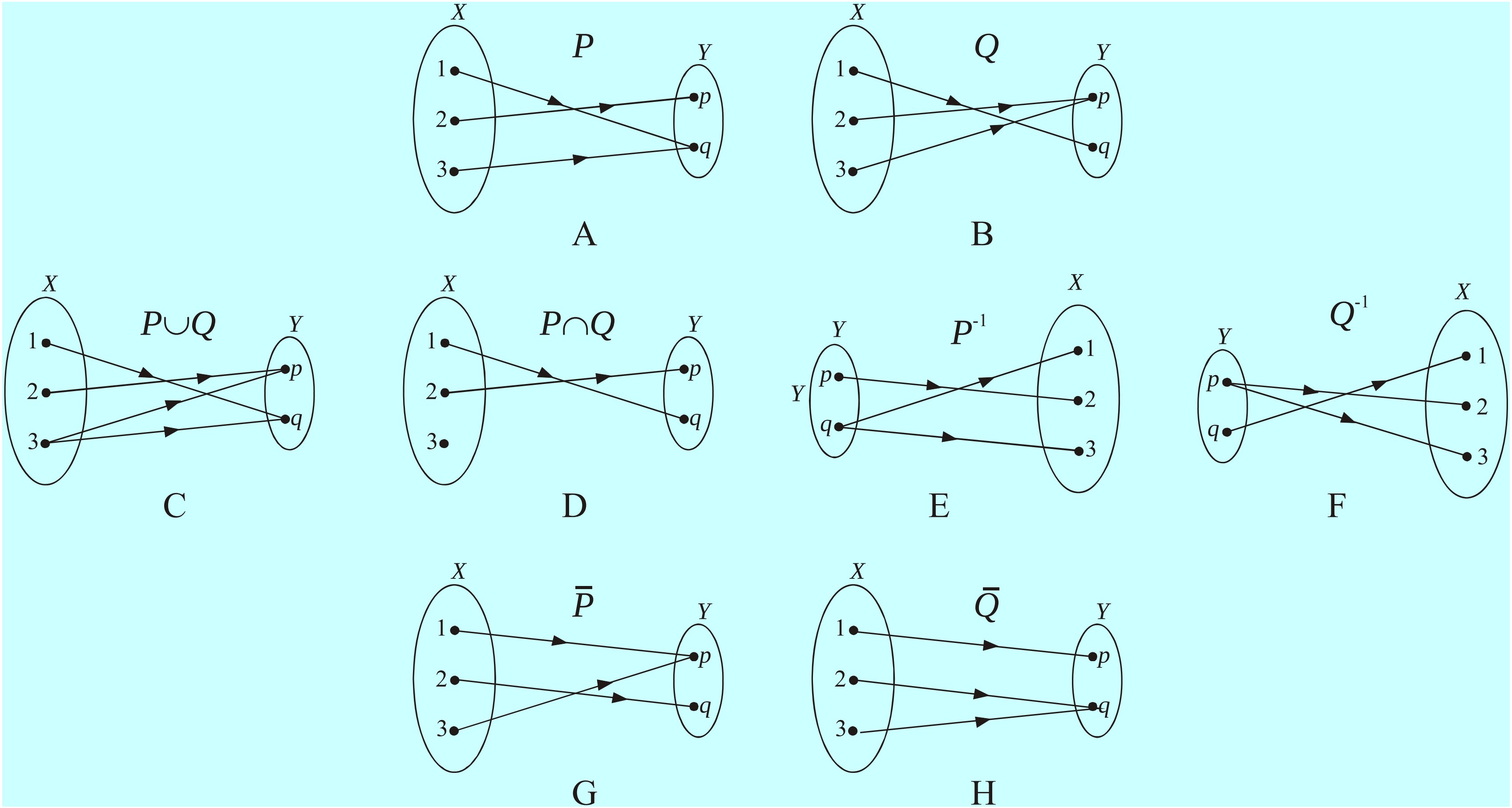
Inverzné relácie sú špecifikované

$$P^{-1} = \{(q,1),(p,2),(q,3)\} \quad \text{a} \quad Q^{-1} = \{(q,1),(p,2),(p,3)\}$$

Doplnky k reláciám sú

$$\overline{P} = \{(1,p),(2,q),(3,p)\} \quad \text{a} \quad \overline{Q} = \{(1,p),(2,q),(3,q)\}$$

Grafická repreztentácia relácií a operácií nad reláciami



Maticová reprezentácia relácie

Nech $X=\{x_1,x_2,...,x_m\}$ a $Y=\{y_1,y_2,...,y_n\}$ sú dve množiny s mohutnosťami $|X|=m$ resp. $|Y|=n$. Relácia R špecifikovaná nad týmito množinami má tvar

$$R=\{(x_i,y_j);\mu_R(x_i,y_j)=1\}$$

Definícia. Matica ***A*** reprezentuje reláciu R má m riadkov a n stĺpcov, jej maticové elementy sú špecifikované formulou

$$A_{ij}=\mu_R(x_i,y_j)=\begin{cases}1 & (pre\,(x_i,y_j)\in R)\\ 0 & (pre\,(x_i,y_j)\notin R)\end{cases}$$

Príklad

Maticová reprezentácia relácií P a Q z predchádzajúceho príkladu má tvar

$$P = \{(1,q),(2,p),(3,q)\} \subseteq X \times Y \quad \text{a} \quad Q = \{(1,q),(2,p),(3,p)\} \subseteq X \times Y$$

$$\boldsymbol{A}_P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{A}_Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Kompozícia relácií

Definícia. Kompozícia dvoch relácií $P=\{(x,y);\mu_P(x,y)=1\}\subseteq X\times Y$ a $Q=\{(y,z);\mu_Q(y,z)=1\}\subseteq Y\times Z$, označená $R=P\circ Q=\{(x,z);\mu_R(x,z)=1\}$, je definovaná pomocou charakteristickej funkcie

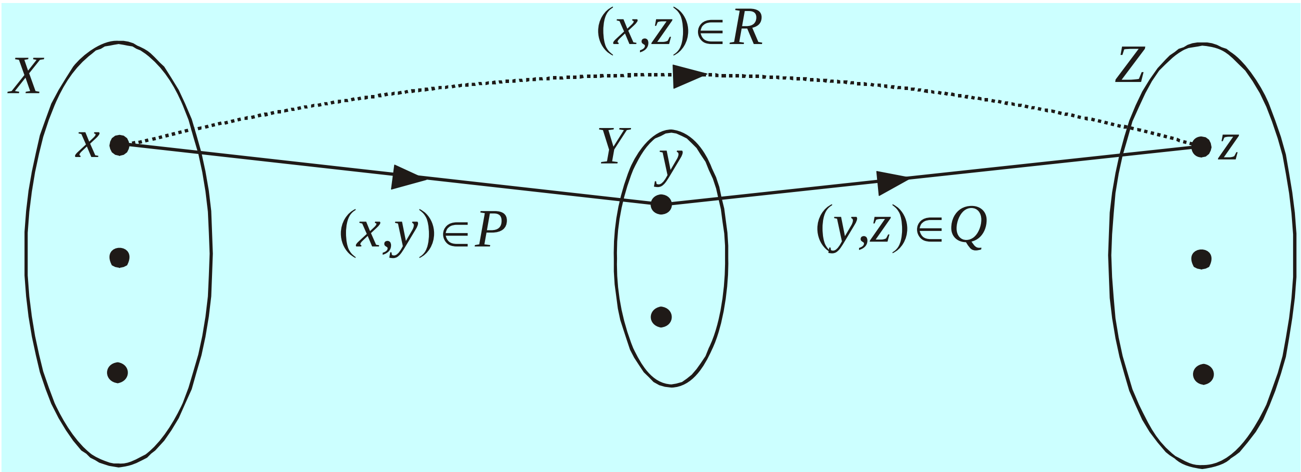
$$\mu_R(x,z)=\max_y min\{\mu_P(x,y),\mu_Q(y,z)\}$$

Alternatívne vyjadrenie kompozície dvoch relácií *P* a *Q*

$$R=P\circ Q=\{(x,z);x\in X\wedge z\in Z\wedge \exists y\in Y:(x,y)\in P\wedge(y,z)\in Q\}$$

V kompozícii *R* dva elementy $x\in X$ a $z\in Z$ tvoria usporiadanú dvojicu $(x,z)\in R$ vtedy a len vtedy, ak existuje taký „medzielement“ $y\in Y$, pre ktorý platí, že $(x,y)\in P$ a $(y,z)\in Q$.

Znázornenie kompozície dvoch relácií P a Q, výsledná relácia R obsahuje dvojicu (x,z) vtedy a len vtedy, ak existuje taký element $y \in Y$, že platí $(x,y) \in P$ a $(y,z) \in Q$.



Veta 3.1. Nech P, Q a R sú relácie definované nad takými množinami, aby nasledujúce operácie boli prípustné, potom platí

$$\left(P \circ Q\right)^{-1} = Q^{-1} \circ P^{-1}$$

$$\left(P \circ Q\right) \circ R = P \circ \left(Q \circ R\right)$$

$$P \circ \left(Q \cup R\right) = \left(P \circ Q\right) \cup \left(P \circ R\right)$$

$$\left(Q \cup R\right) \circ P = \left(Q \circ P\right) \cup \left(R \circ P\right)$$

$$P \circ \left(Q \cap R\right) = \left(P \circ Q\right) \cap \left(P \circ R\right)$$

$$\left(Q \cap R\right) \circ P = \left(Q \circ P\right) \cap \left(R \circ P\right)$$

Príklad

$X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, $Y = \{y_1, y_2, y_3\}$, $Z = \{z_1, z_2, z_3\}$

$P \subseteq X \times Y$, $Q \subseteq Y \times Z$

$$A_P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ A_Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Potom relácie P a Q majú tvar

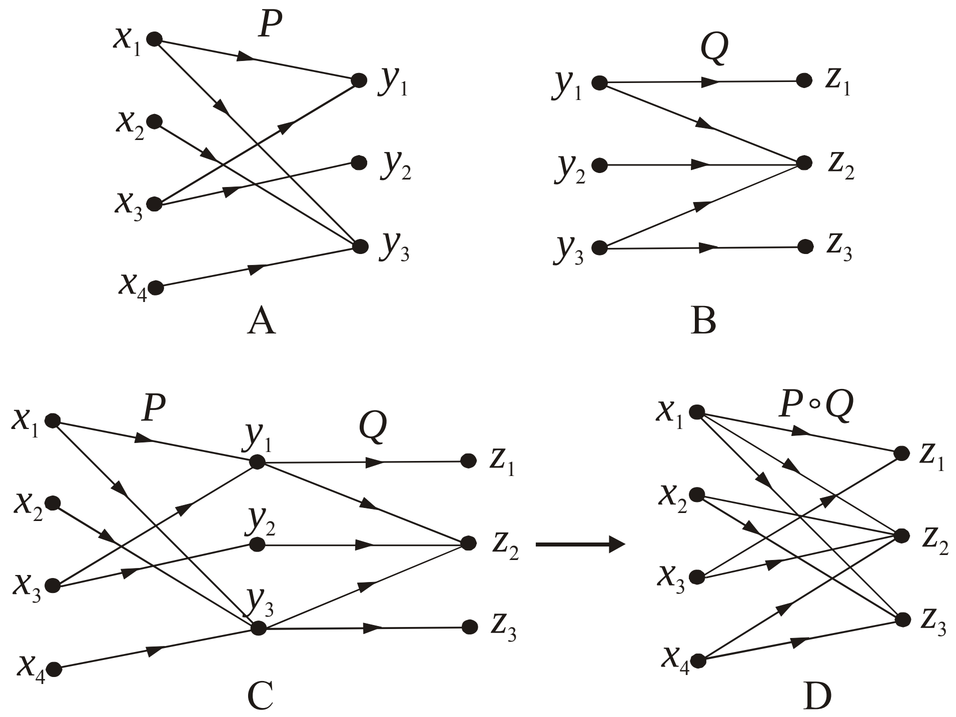
$$P = \{(x_1, y_1), (x_1, y_3), (x_2, y_3), (x_3, y_1), (x_3, y_2), (x_4, y_3),\}$$

$$Q = \{(y_1, z_1), (y_1, z_2), (y_2, z_2), (y_3, z_2), (y_3, z_3)\}$$

Kompozícia týchto relácií má tvar

$$P \circ Q = \{(x_1, z_1), (x_1, z_2), (x_1, z_3), (x_2, z_2), (x_2, z_3), (x_3, z_1), (x_3, z_2), (x_4, z_2), (x_4, z_3)\}$$

Grafická interpretácia týchto relácií je znázornená na obrázku



Vlastnosti relácií

V tomto odseku budeme študovať ***relácie*** $P \subseteq X \times X$, ktoré sú definované ako podmnožina karteziánskeho súčinu $X \times X$.

Definícia 3.6. Diagonálna relácia sa nazýva:

(1) ***reflexívna***, $\forall(x \in X)((x,x) \in R)$,

(2) ***symetrická***, $\forall(x,y \in X)((x,y) \in R \Rightarrow (y,x) \in R)$,

(3) ***antisymetrická***, $\forall(x,y \in X)((x,y) \in R \wedge (y,x) \in R \Rightarrow x = y)$,

(4) ***tranzitívna***, $\forall(x,y,z \in X)((x,y) \in R \wedge (y,z) \in R \Rightarrow (x,z) \in R)$.

Poznámka. Pre antisymetrickú reláciu platí, že ak elementy $x \neq y$, potom platí implikácia: $(x,y) \in R \Rightarrow (y,x) \notin R$. Dôsledkom tejto vlastnosti je, že ak $(x,y),(y,x) \in R$ pre $x \neq y$, potom relácia R nie je antisymetrická.

Príklad

Nech $X = \mathbb{R}$ je množina reálnych čísel a diagonálna relácia $P \subseteq X \times X$ má interpretáciu

$$\big((x,y) \in P\big) \equiv (x \leq y)$$

Takto definovaná relácia P vyhovuje týmto podmienkam:

(a) relácia P je reflexívna, pre každé reálne číslo $x \in X$ platí $x \leq x$, t. j. $(x,x) \in P$,

(b) relácie P nie je symetrická, pretože pre $x \leq y$ neimplikuje $y \leq x$,

(c) relácia P je antisymetrická, z platnosti $x \leq y$ a $y \leq x$ plynie $x = y$, a naopak,

(d) relácia P je tranzitívna, z platnosti $x \leq y$ a $y \leq z$ plynie $x \leq z$.

Príklad

Nech $X = \{a,b,c,d\}$, diagonálne relácia $P \subseteq X \times X$ je špecifikovaná množinou

$$P = \{(a,a),(a,b),(a,c),(b,a),(b,c),(b,d),(d,d)\}$$

Táto relácia nesplĺňa žiadnu vlastnosť z definície 3.6:

(a) relácia P nie je reflexívna, $(b,b) \notin P$,

(b) relácia P nie je symetrická, implikácia $(a,c) \in P \Rightarrow (c,a) \in P$ nie je pravdivá,

(c) relácia P nie je antisymetrická, implikácia $(a,b),(b,a) \in P \Rightarrow (a,a) \in P$ nie je pravdivá,

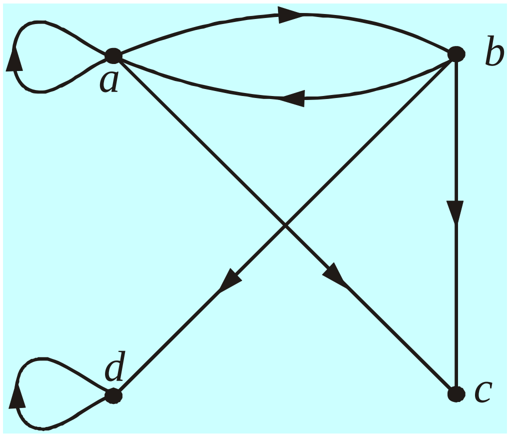
(d) relácia P nie je tranzitívna, implikácia $(a,b),(b,d) \in P \Rightarrow (a,d) \in P$ nie je pravdivá.

Interpretácia relácie pomocou orientovaného grafu

Relácia $P \subseteq X \times X$ má diagramatickú interpretáciu pomocou orientovaného grafu, V tomto prípade elementy množiny X sú vrcholy a usporiadané dvojice $(x,y) \in P$ sú orientované hrany, ktoré začínajú v x a končia v y. Vlastnosti diagonálnych relácií majú potom jednoduchú interpretáciu.

Nech $X = \{a,b,c,d\}$, diagonálne relácia $P \subseteq X \times X$ je špecifikovaná množinou

$$P = \{(a,a),(a,b),(a,c),(b,a),(b,c),(b,d),(d,d)\}$$



(a) Relácia P je ***reflexívna***, potom každý vrchol $x \in X$ má slučku – orientovanú hranu, ktorá začína a končí v tom istom vrchole.

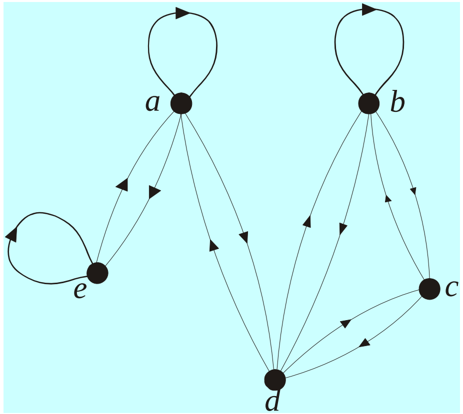
(b) Relácia P je ***symetrická***, ak vrcholy $x, y \in X$ sú spojené hranou $(x, y) \in P$, potom existuje aj opačná hrana $(y, x) \in P$. V tomto prípade symetrickej relácie, jej grafická interpretácia obsahuje hrany medzi vrcholmi x a y vždy po dvojiciach, t. j. existencia hrany (x,y) implikuje existenciu hrany (y,x), a naopak.

(c) Relácia P je ***antisymetrická***, medzi dvoma rôznymi vrcholmi $x \neq y$ nemôže existovať dvojica hrán (x,y) a (y,x). V prípade, že by existovala, potom z podmienky antisymtričnosti vyplýva, že $x = y$, čo je v spore s pôvodným predpokladom.

(d) Relácia P je ***tranzitívna***, z existencie hrán (x, y) a (y, z), ktoré majú spoločný vrchol y a $x \neq z$, vyplýva existencia hrany (x, z)

Príklad

Nech $X = \{a, b, c, d, e\}$, diagonálna relácia definovaná nad touto množinou je určená grafom



(1) relácia nie je reflexívna, potrebné slučky neexistujú na vrcholoch *c* a *d*,

(2) relácia je symetrická, ak medzi vrcholmi *x* a *y* existuje hrana (*x*,*y*), potom existuje aj opačná hrana (*y*,*x*),

(3) relácia nie je antisymetrická, z existencie dvojíc opačne orientovaných hrán na rôznych vrcholoch, nevyplýva rovnosť týchto dvoch vrcholov.

(4) relácia nie je tranzitívna, pretože existencia hrán (*e*,*a*) a (*a*,*d*) neimplikuje existenciu hrany (*e*,*d*).

Relácia ekvivalentnosti

Definícia. Relácia $P \subseteq X \times X$ sa nazýva ***relácia ekvivalentnosti*** vtedy a len vtedy, ak je reflexívna, symetrická a tranzitívna.

Reláciu ekvivalentnosti P budeme označovať symbolom ´~´, t. j.

$$\forall\left(x, y \in X\right)\left(\left(x \sim y\right) =_{def} \left(x, y\right) \in P\right)$$

Pomocou relácie ekvivalentnosti môžeme množinu X rozdeliť na dve disjunktívne podmnožiny $X_1, X_2 \subset X$, kde $X = X_1 \cup X_2$ a $X_1 \cap X_2 = \emptyset$

$$x, y \in X_1 \Rightarrow x \sim y$$
$$x, y \in X_2 \Rightarrow x \sim y$$
$$\left(x \in X_1\right) \wedge \left(y \in X_2\right) \Rightarrow \left(x \nsim y\right)$$

Príklad

Nech $X = \mathbb{R}$ je množina reálnych čísel, relácia $P \subseteq X \times X$ je definovaná takto:

$$\big((x,y) \in P\big) \equiv \left(x^2 = y^2\right)$$

(1) Relácia P je reflexívna, pretože $x^2 = x^2$, pre každé $x \in \mathbb{R}$,
(2) relácia P symetrická, pretože $x^2 = y^2$ implikuje $y^2 = x^2$,
(3) relácia P je tranzitívna, pretože $x^2 = y^2$ a $y^2 = z^2$ implikuje $x^2 = z^2$.

Z tohto vyplýva, že P je relácia ekvivalentnosti.

Definícia. Nech P je relácia ekvivalentnosti nad množinou X a nech $x \in X$. Trieda ekvivalentnosti $[x]$, priradená elementu x, je množina všetkých možných elementov X, ktoré sú ekvivalentné danému elementu x

$$[x] = \{y; x \sim y\}$$

Veta. Nech $P \subseteq X \times X$ je relácia ekvivalentnosti a nech $x, y \in X$. Potom podmienka $[x] = [y]$ je splnená vtedy a len vtedy, ak $x \sim y$.

Veta. Nech $P \subseteq X \times X$ je relácia ekvivalentnosti, potom množina X má disjunktný rozklad pomocou všetkých rôznych tried ekvivalentnosti

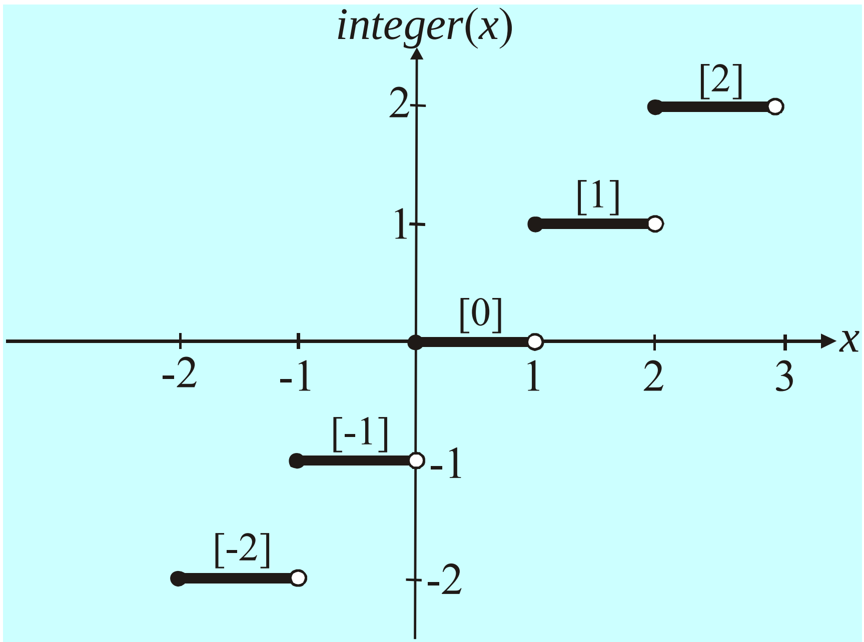
$$X = [x] \cup [y] \cup \ldots \cup [z]$$

Príklad

Nech $X = \mathbb{R}$ je množina reálnych čísel, relácia $P \subseteq X \times X$ je definovaná

$$\left((x,y) \in P \right) \equiv \left(integer(x) = integer(y) \right)$$

kde funkcia *integer*(x) je definovaná ako maximálne celé číslo, ktoré je menšie alebo rovné reálnemu číslu x



$$\mathbb{R} = \bigcup_i [i] = \ldots[-2] \cup [-1] \cup [0] \cup [1] \cup [2] \ldots$$

Relácia čiastočného usporiadania

Pre mnohé množiny je možné definovať reláciu usporiadania jej elementov. Tak napríklad, množina reálnych čísel $\mathbb{R}$ majú prirodzené usporiadanie svojich elementov pomocou relácie ´$\leq$´ (pozri príklad 3.4). Táto relácia je reflexívna, antisymetrická a tranzitívna.

Definícia. Relácia $P \subseteq X \times X$ sa nazýva ***čiastočné usporiadanie*** vtedy a len vtedy, ak je reflexívna, antisymetrická a tranzitívna. Množina X spolu s touto reláciou sa nazýva ***čiastočne usporiadaná množina*** (***poset***).

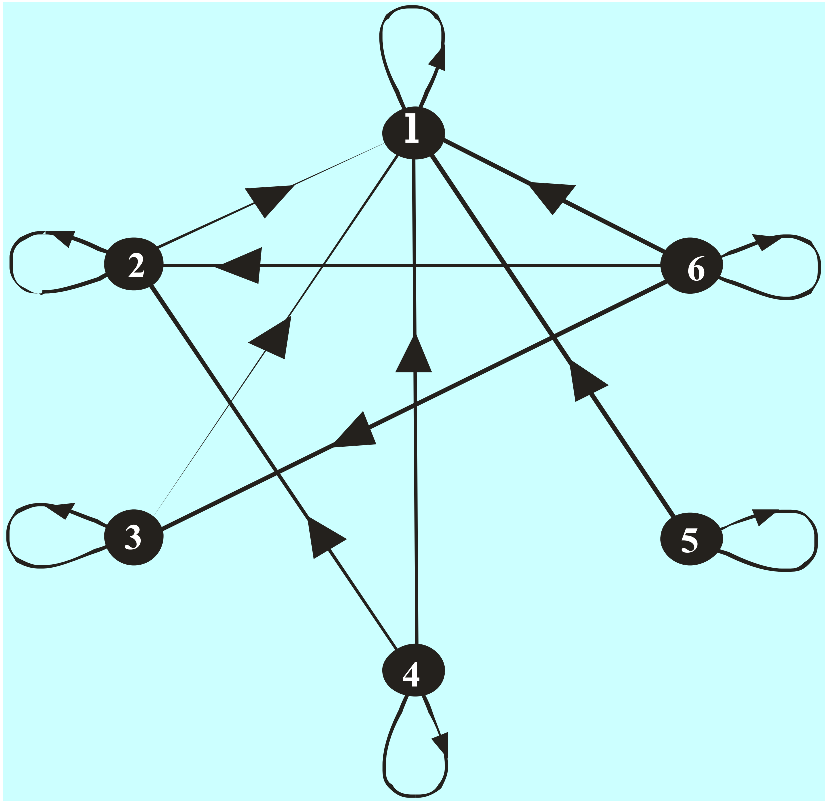
Príklad

(1) Nech $F = \mathcal{P}(A)$ je potenčná množina vzhľadom k množine A. Pomocou množinovej relácie $'\subseteq'$ môžeme nad touto množinou F definovať reláciu P tak, že $\left((X,Y) \in P\right) =_{def} \left(X \subseteq Y\right)$. Ľahko sa presvedčíme, že táto relácia je čiastočne usporiadanie, je reflexívna, antisymetrická a tranzitívna.

(2) Nech $X = \mathbb{N} = \{1,2,3,4,...\}$ je množina prirodzených čísel. Definujme nad touto množinou reláciu $P \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ pomocou pojmu deliteľnosti; $\left((m,n) \in P\right) =_{def} \left(m \text{ je deliteľné } n\right)$. Tak napríklad, pre $X = \{1,2,3,4,5,6\}$ relácia P obsahuje dvojice

$$P=\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6),(2,1),(3,1),(4,1),(4,2),(5,1),(6,1),(6,2),(6,3)\}$$

Táto relácia je čiastočné usporiadanie, pretože je reflexívna, antisymetrická a tranzitívna.



Maximálny a minimálny element

Definícia. Nech $P \subseteq X \times X$ je čiastočné usporiadanie. ***Maximálny element*** (ak existuje) $x_{max} \in X$ je určený podmienkou

$$\forall (x \in X)\left(\left(x_{max}, x\right) \in P \Rightarrow \left(x_{max} = x\right)\right)$$

Minimálny element (ak existuje) $x_{min} \in X$ je určený podmienkou

$$\forall (x \in X)\left(\left(x, x_{min}\right) \in P \Rightarrow \left(x_{min} = x\right)\right)$$

Táto definícia maximálneho elementu $x_{max} \in X$ je založená na podmienke, že neexistuje taký element $x \in X$, ktorý by bol „väčší“ ako element x_{max}. Podobne, pre minimálny element $x_{min} \in X$ neexistuje taký element $x \in X$, ktorý by bol menší ako x_{min}.

Príklad

Študujme množinu $X = \{1,2,3\}$, jej potenčná množina $\mathcal{P}(X)$ obsahuje všetky možné podmnožiny X

$$\mathcal{P}(X) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$$

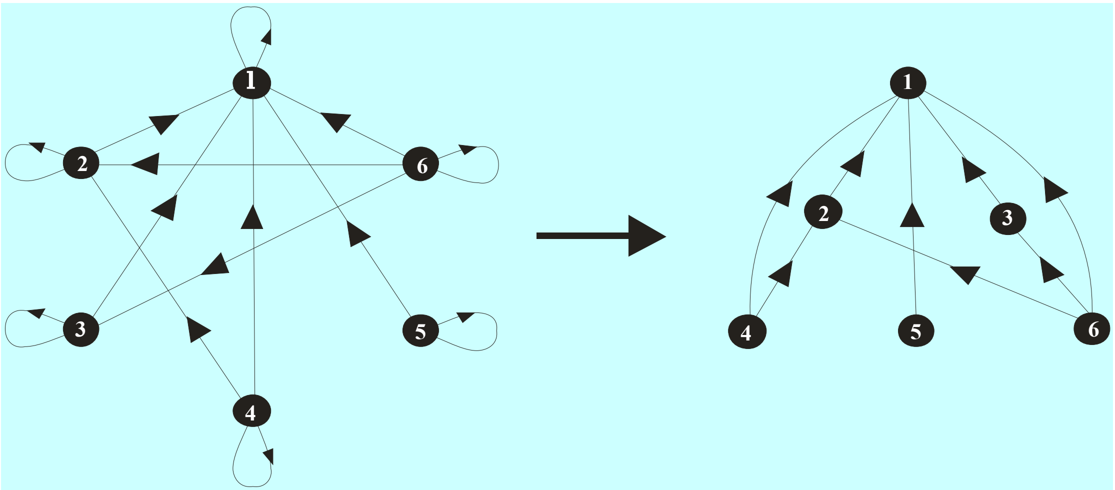
Čiastočne usporiadanie nad touto potenčnou množinou je relácia $'\subseteq'$, potom maximálny (minimálny) element je $\{1,2,3\}$ ($\emptyset$).

Príklad

Nech pre $X = \{1,2,3,4,5,6\}$ relácia P „deliteľnosti“ obsahuje dvojice $\big((m,n) \in P\big) \equiv (m \text{ je deliteľné } n)$, potom

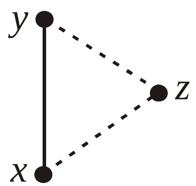
$$P = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6),(2,1),(3,1),(4,1),(4,2),(5,1),(6,1),(6,2),(6,3)\}$$

Táto relácia je čiastočné usporiadanie, maximálny prvok je 1 a minimálne prvky sú 4, 5 a 6.



Hasseho diagramy

Nech P je čiastočne usporiadaná množina s reláciou $P \subseteq X \times X$. Hovoríme, že element y je pokrytý elementom x vtedy, ak $(x, y) \in P$ a neexistuje taký element z, pre ktorý súčasne platí $(x, z) \in P$ a $(z, y) \in P$



Hasseho diagram relácie čiastočného usporiadania $P \subseteq X \times X$ obsahuje vrcholy, ktoré sú stotožnené s elementmi z X; pričom dva vrcholy $x, y \in X$ sú spojené hranou $(x, y) \in P$ vtedy a len vtedy, ak element y pokrýva element x.

Poznámka: Hasseho diagram relácie čiastočného usporiadanie ***neobsahuje hrany***, ***ktoré sú dôsledkom tranzitívnosti relácie***.

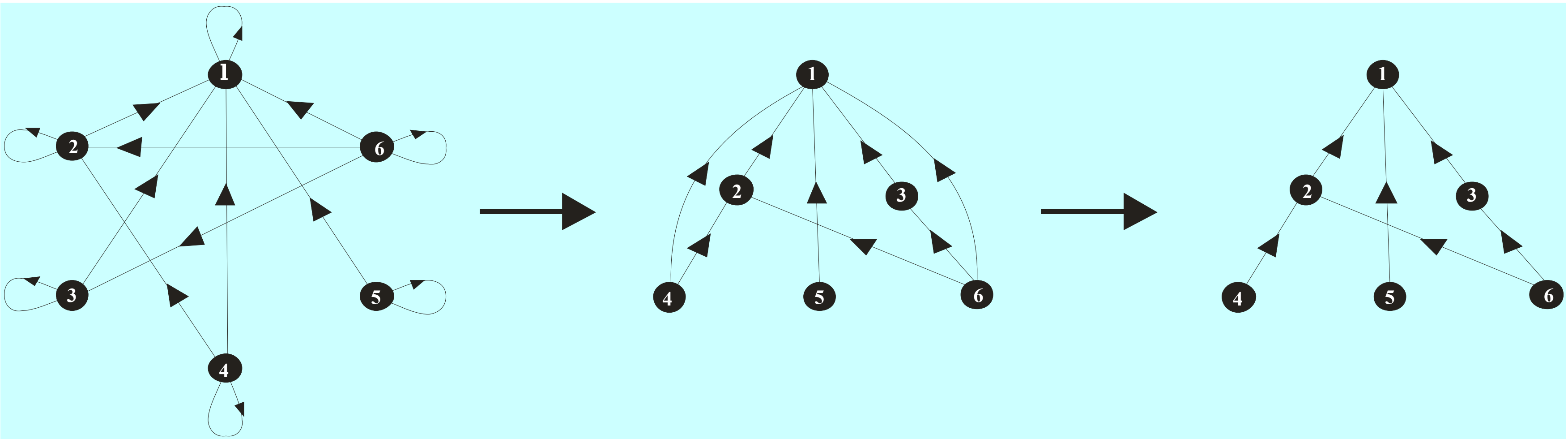
Príklad

Nakreslite Hasseho diagram relácie čiastočného usporiadania P „deliteľnosti“ $X=\{1,2,3,4,5,6\}$, relácia obsahuje dvojice

$$\left((m,n)\in P\right)\equiv\left(m \text{ je deliteľné } n\right)$$

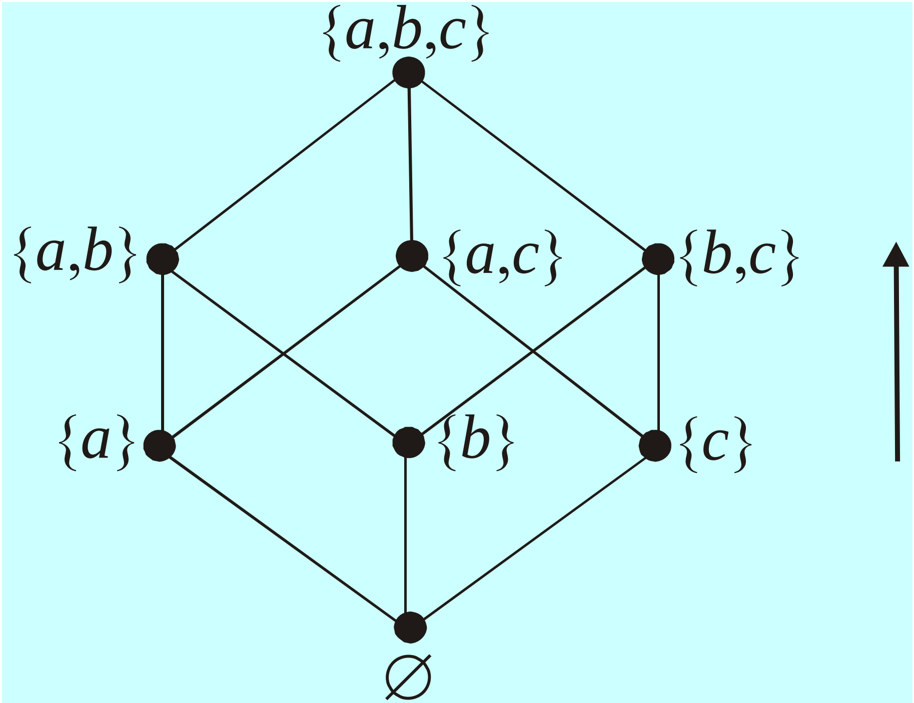
potom

$P=\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6),(2,1),(3,1),(4,1),(4,2),(5,1),(6,1),(6,2),(6,3)\}$



Príklad

Hasseho diagram pre množiny $X = \mathcal{P}(\{a,b,c\})$, ktorá je čiastočne usporiadaná pomocou relácie $'\subseteq'$ je znázornený na obrázku



Hasseho diagram pre reláciu čiastočného usporiadania P nad konečnou množinou X ukazuje jasne maximálne a minimálne prvky.

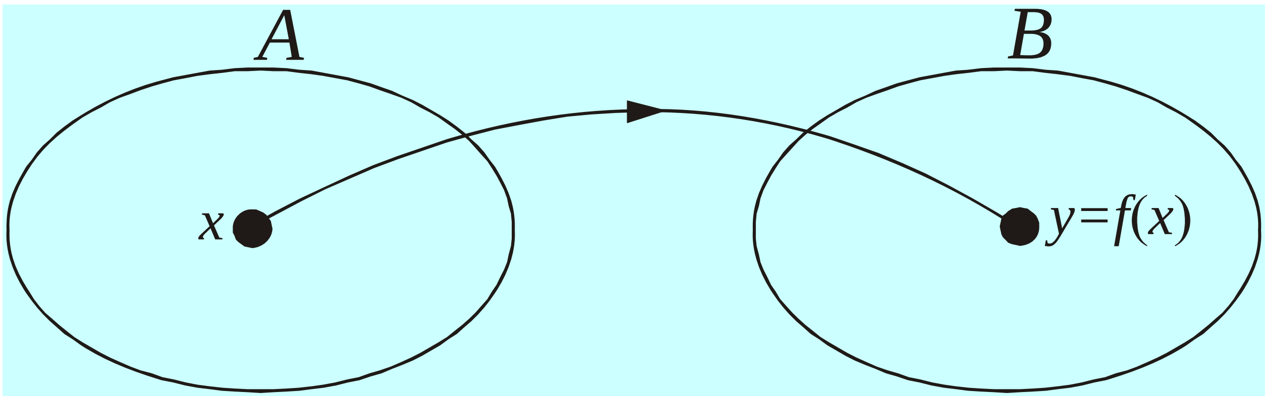
Veta. Každá relácia čiastočného usporiadania $P \subseteq X \times X$ obsahuje aspoň jeden minimálny element a aspoň jeden maximálny element.

Nech $a_1 \in X$, ak je tento element minimálny, dôkaz je dokončený. V opačnom prípade existuje $a_2 \in X$ taký, že $(a_2, a_1) \in P$. Element a_2 je buď minimálny alebo ak nie, potom existuje taký element $a_3 \in X$, že $(a_3, a_2) \in P$. Pretože množina X má konečný počet elementov, tento proces predlžovania smerom dole, musí byť v nejakom momente ukončený elementom, ktorý je minimálny. Podobným spôsobom môžeme zostrojiť element, ktorý je maximálny.

Funkcie

Pojem funkcie (alebo zobrazenia) patrí medzi základné pojmy matematiky. V matematike pod funkciou f rozumieme jednoznačný predpis pomocou ktorého každému argumentu x z množiny A priradíme práve jednu funkčnú hodnotu označenú $f(x)$ z množiny B

$$f : A \to B$$



$$f = \{(x, f(x)); x \in A\}$$

Definícia 3.11. Relácia $f \subset A \times B$ sa nazýva ***funkcia*** vtedy a len vtedy, ak pre každé $x \in A$ existuje práve jedno $y \in B$ také, že $(x, y) \in f$ (podmienka jednoznačnosti)

$$\forall x \; \exists! y \; (x, y) \in f$$

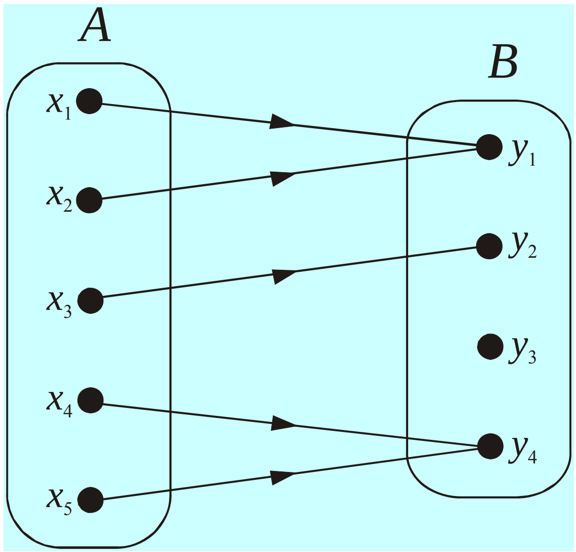
Množina A sa nazýva ***obor definície*** (alebo len ***obor***) funkcie f, $D_f = A$, množina B sa nazýva ***koobor*** funkcie f. ***Obor funkčných hodnôt*** funkcie f je množina $H_f = \{f(x); x \in A\} = f(A)$. Ak $(x, y) \in F$, potom x sa nazýva ***argument*** a y sa nazýva ***funkčná hodnota*** (***obraz***). Funkcia sa taktiež nazýva ***zobrazenie***.

Podmienku jednoznačnosti funkcie môžeme vyjadriť pomocou implikácie

$$f(x_1) \neq f(x_2) \Rightarrow x_1 \neq x_2$$

Znázornenie funkcie $f \subset A \times B$, pre každé $x \in A$ existuje práve jedno $y \in B$ také,

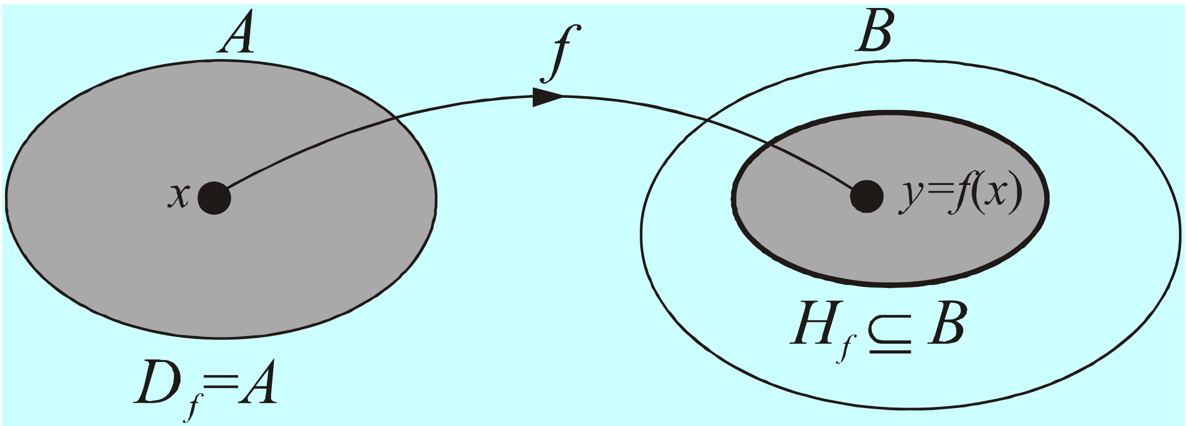
že $(x, y) \in f$, $f = \{(x_1, y_1), (x_2, y_1), (x_3, y_2), (x_4, y_4), (x_5, y_4)\}$



(znázornenie podmienky jednoznačnosti)

Definícia funkcie nezabezpečuje, aby množina funkčných hodnôt $\{f(x); x \in A\}$ bola totožná s množinou B, vo všeobecnosti platí len

$$B' = f(A) = \{f(x); x \in A\} \subseteq B$$



Definícia. Hovoríme, že dve funkcie $f : A \to B$ a $g : A' \to B'$ sa ***rovnajú*** vtedy a len vtedy, ak súčasne platí

(1) $A = A'$ a $B = B'$,

(2) $\forall(x \in A)\big(f(x) = g(x)\big)$.

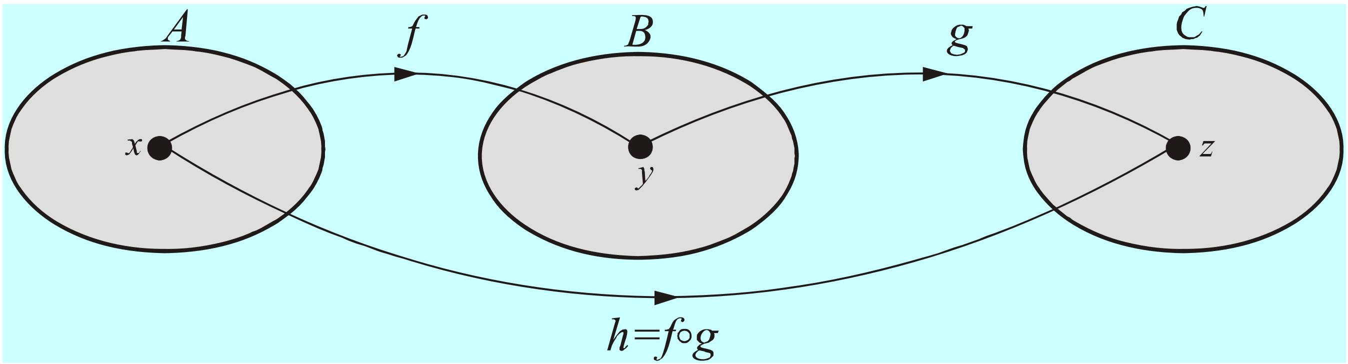
Definícia. Hovoríme, že funkcia $i_A : A \to A$ je ***jednotková*** vtedy a len vtedy, ak

$$\forall(x \in A)\big(i_A(x) = x\big)$$

Obor a obor funkčných hodnôt sú si rovné, $D_{i_A} = H_{i_A} = A$

Zložená funkcia

Majme dve funkcie $f : A \Rightarrow B$ a $g : B \Rightarrow C$, kompozíciou týchto dvoch funkcií vytvoríme novú funkciu $h = f \circ g : A \Rightarrow C$, ktorá sa nazýva zložená funkcia.



Zložená funkcia existuje len vtedy, keď prienik oboru funkčných hodnôt H_f funkcie f a definičného oboru funkcie g je neprázdny, $H_f \cap D_g \neq \emptyset$.

Definícia. Hovoríme, že kompozíciou funkcií $f : A \to B$ a $g : B \to C$ vznikne ***zložená funkcia*** $h = f \circ g : A \to C$, vtedy a len vtedy, ak

$$h = f \circ g = \left\{ \left(x,z \right) \in A \times C ; \exists \left(y \in B \right) \left(\left(x,y \right) \in f \right) \wedge \left(\left(y,z \right) \in g \right) \right\}$$

Z tejto definície priamo plynie, že zložená funkcia $h = f \circ g$ existuje len vtedy, ak pre danú dvojicu $\left(x,z \right) \in A \times C$ existuje taký element $y \in B$, pre ktorý súčasne platí $\left(x,y \right) \in f$ a $\left(y,z \right) \in g$, alebo $H_f \cap D_g \neq \emptyset$.

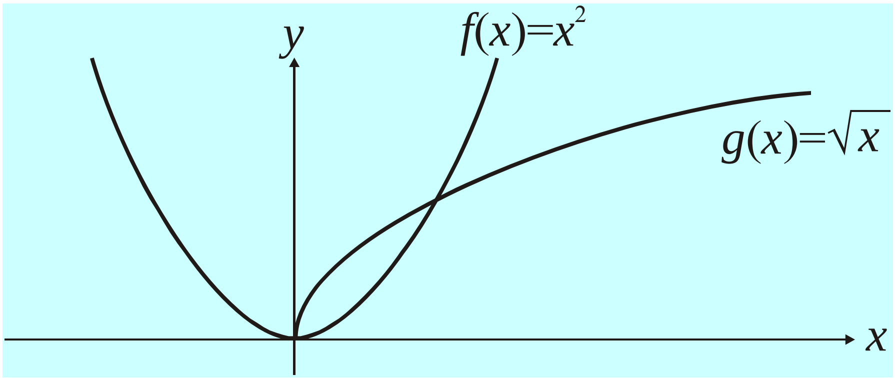
$$f \left(\underbrace{g\left(z \right)}_{y} \right) = f\left(y \right) = z = f\left[g\left(z \right) \right] = x$$

Príklad

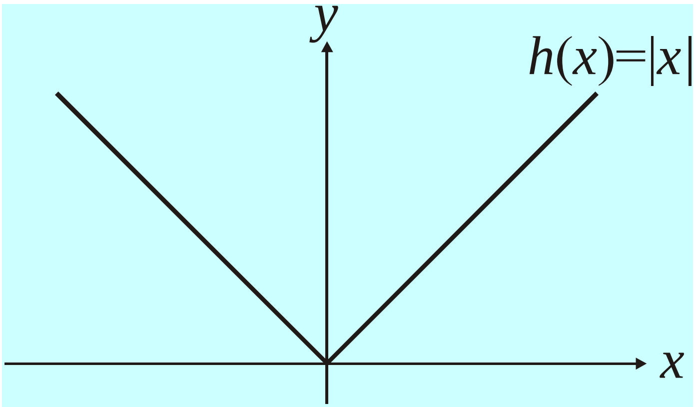
Študujme dve funkcie

(1) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, ktorej analytický tvar je $f\left(x\right)=x^2$, jej obor je $D_f=\mathbb{R}$ množina reálnych čísel a obor funkčných hodnôt je $H_f=\left\langle 0,\infty\right)$ množina nezáporných reálnych čísel.

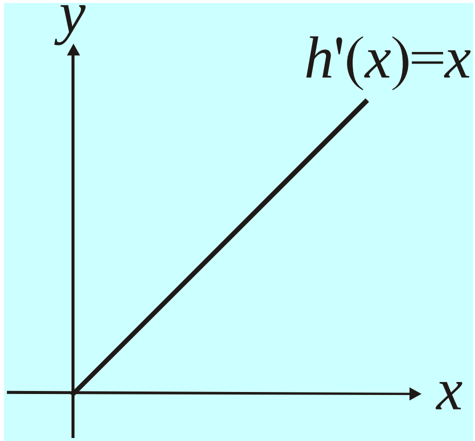
(2) $g:\left\langle 0,\infty\right)\to\left\langle 0,\infty\right)$, ktorej analytický tvar je $g\left(x\right)=\sqrt{x}$, táto má rovnaký obor definície a obor funkčných hodnôt, $D_f=H_f=\left\langle 0,\infty\right)$..



Prvá zložená funkcia má tvar $h(x)=g\left(f(x)\right)=\sqrt{x^2}=|x|$, jej obor definície je $D_h=\mathbb{R}$ a a obor funkčných hodnôt je $H_h=\langle 0,\infty)$, t. j. zobrazuje množinu reálnych čísel $\mathbb{R}$ na množinu nazáporných reálnych. Priebeh funkcie $h(x)=|x|$ je znázornený na obrázku



Druhá zložená funkcia má tvar $h'(x) = f(g(x)) = \left(\sqrt{x}\right)^2 = x$, táto funkcia má rovnaký definičný obor a obor funkčných hodnôt, $D_{h'} = H_{h'} = \langle 0, \infty)$, t. j. zobrazuje „lineárne“ množinu nezáporných reálnych čísel na tú istú podmnožinu. Priebeh funkcie $h'(x) = x$ je znázornený na obrázku



Zložené funkcie $h(x)$ a $h'(x)$ sa nerovnajú.

Inverzná funkcia

Definícia. Funkcia $f : A \to B$ sa nazýva ***injekcia*** (jedno-jednoznačná) vtedy a len vtedy, ak vyhovuje podmienke

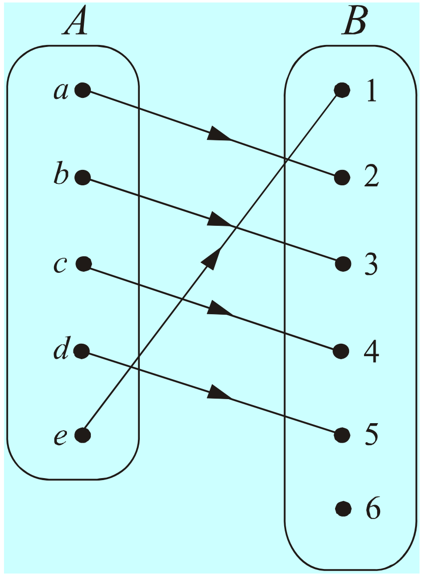
$$\forall\left(x, x' \in A\right)\left(x \neq x' \Rightarrow f\left(x\right) \neq f\left(x'\right)\right)$$

Injekciu f môžeme vyjadriť silnejšou podmienkou, pretože z definície funkcie vyplýva jej jednoznačnosť ($f\left(x\right) \neq f\left(x'\right) \Rightarrow x \neq x'$), t. j. pre injektívne funkcie platí ekvivalencia

$$\forall\left(x, x' \in A\right)\left(\left(x \neq x'\right) \equiv \left(f\left(x\right) \neq f\left(x'\right)\right)\right)$$

To znamená, že podmienka rôznosti argumentov pre injektívne funkcie je ekvivalentná podmienke rôznosti ich funkčných hodnôt.

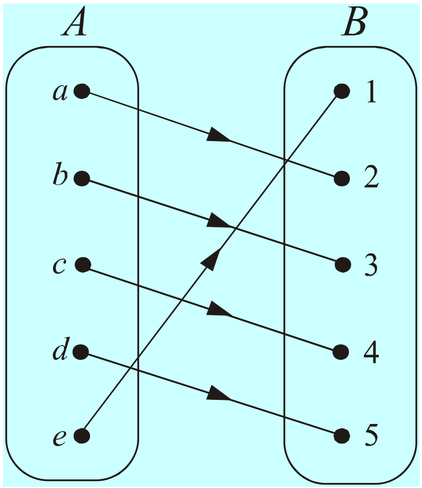
Schématické znázornenie injekcie $f : A \to B$



Ku každému argumentu je priradená práve jedna funkčná hodnota, a taktiež aj naopak, ku každej funkčnej hodnote existuje práve jeden argument. Musíme však poznamenať, že množina B môže obsahovať prvky, ktoré nie sú funkčné hodnoty f.

Definícia. Injekcia $f: A \to B$ sa nazýva ***bijekcia*** vtedy a len vtedy, ak pre každý element $y \in B$ existuje taký element $x \in A$, že $y = f(x)$.

Pre bijektívne zobrazenie $f: A \to B$, kde A a B sú konečné množiny platí, že tieto množiny majú rovnakú mohutnosť, $|A| = |B|$.



Definícia. Nech funkcia $f : A \to B$ je bijekcia. Hovoríme, že funkcia $f^{-1} : B \to A$ je ***inverzná*** k funkcii *f* vtedy a len vtedy, ak platí

$$f\left(f^{-1}(x)\right) = i_B(x)$$

$$f^{-1}\left(f(x)\right) = i_A(x)$$

kde i_X je jednotková funkcia nad doménou *X*.

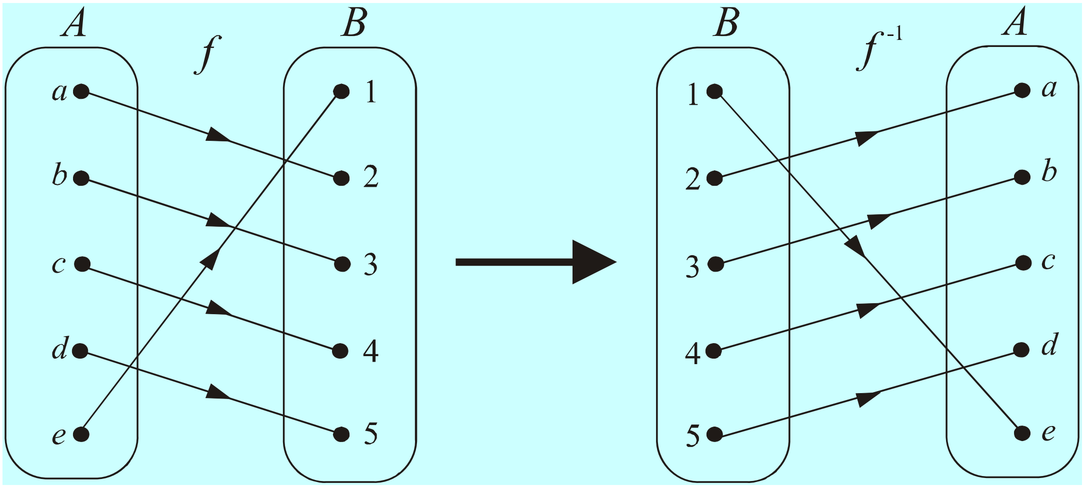
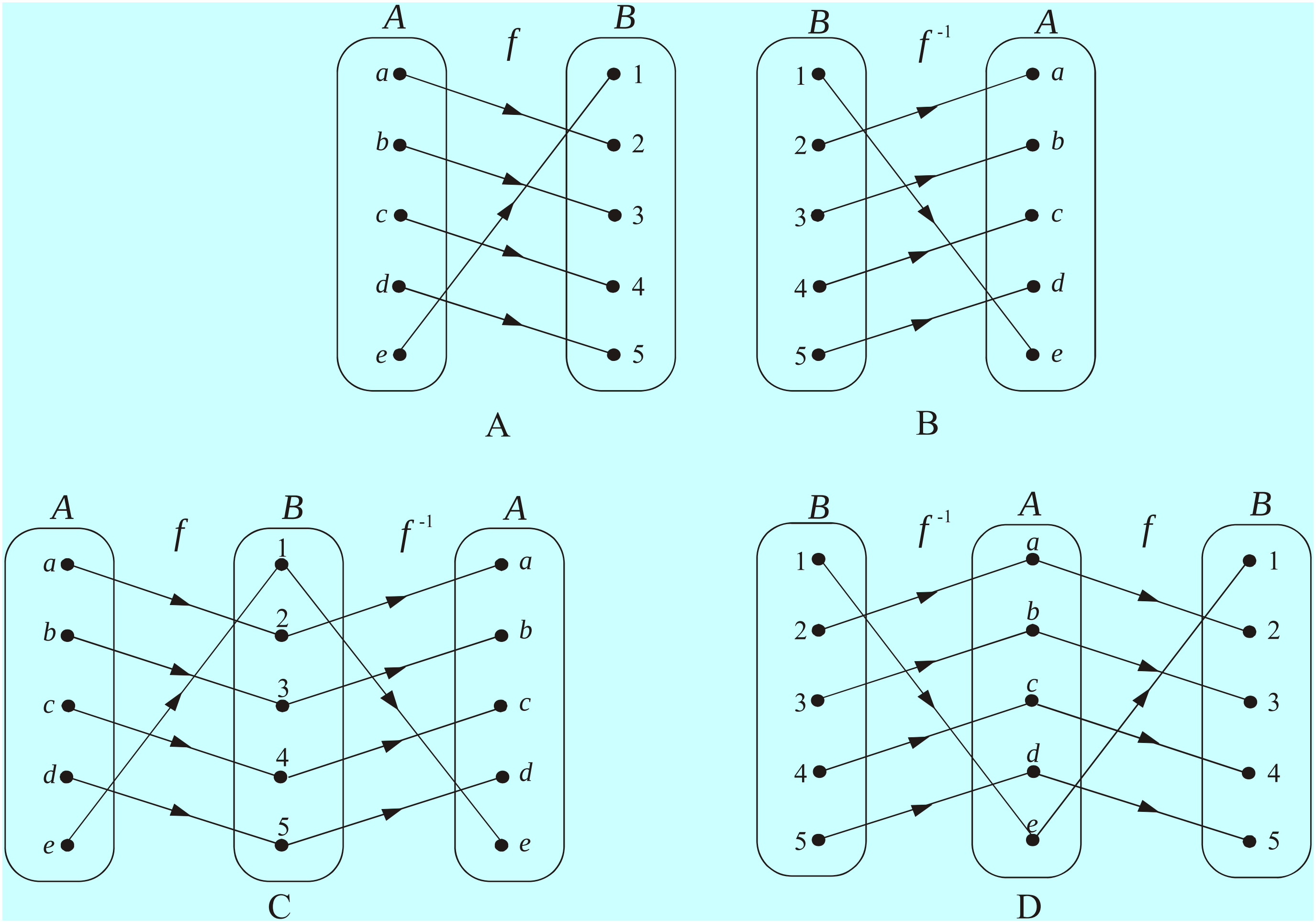


Diagram C znázorňuje zloženú funkciu $h = f^{-1} \circ f = i_A : A \to A$, diagram D znázorňuje zloženú funkciu $h' = f \circ f^{-1} = i_B : B \to B$.


A
f
B
a
b
c
d
e
1
2
3
4
5
A
B
f -1
A
B
C
D

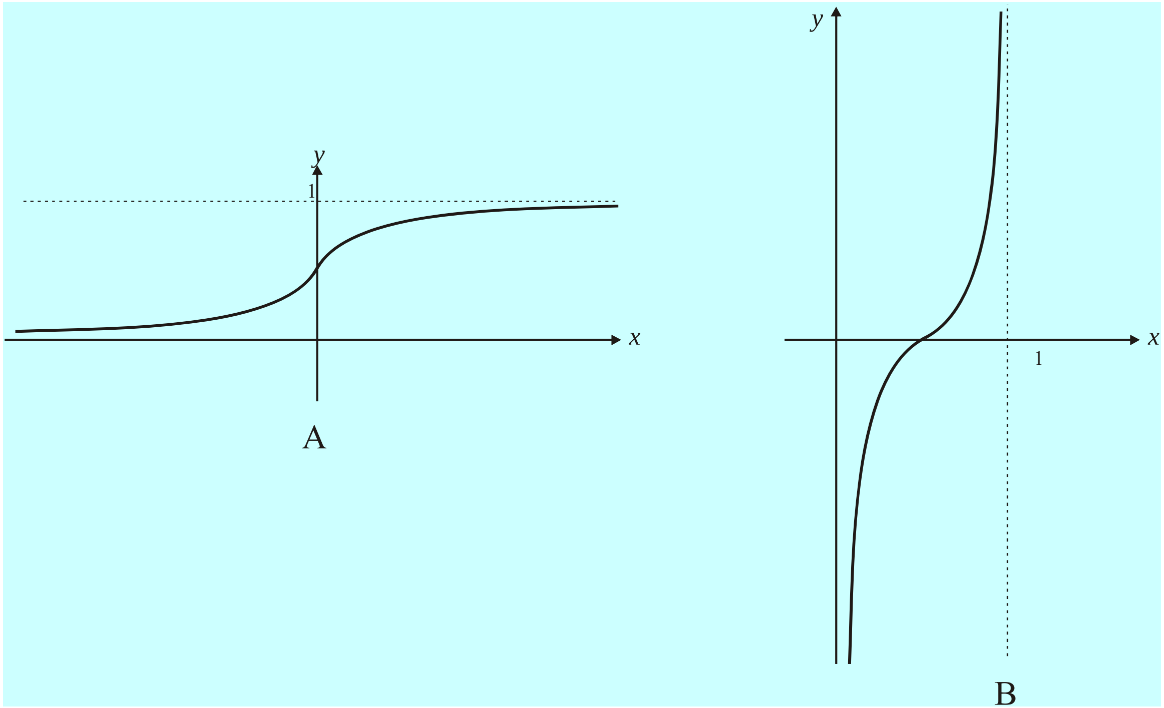
Príklad

Zostrojte inverznú funkciu k funkcii $f\left(x\right)=\dfrac{1}{1+e^{-x}}$

Táto funkcia zobrazuje obor definície doménu $D_f = \mathbb{R}$ na obor funkčných hodnôt $H_f = \left(0,1\right)$. Funkcia je monotónne rastúca a vyhovuje asymptotickým podmienkam $f\left(\infty\right)=1$ a $f\left(-\infty\right)=0$. Z monotónnosti vyplýva, že funkcia je bijekcia, čiže k nej existuje inverzná funkcia,

$$f^{-1}\left(x\right)=ln\frac{x}{1-x}$$

Priebehy funkcií (A) $f(x) = 1/(1+e^{-x})$ a (B) $f^{-1}(x) = ln\,x/(1-x)$



Na záver budeme počítať zložené funkcie

$$f\left(f^{-1}(x)\right)=\frac{1}{1+exp\left(-f^{-1}(x)\right)}=\frac{1}{1+exp\left(-ln\,x/(1-x)\right)}=\frac{1}{1+\dfrac{1-x}{x}}=x=i_{(0,1)}(x)$$

$$f^{-1}\left(f(x)\right)=ln\frac{f(x)}{1-f(x)}=ln\frac{\dfrac{1}{1+e^{-x}}}{1-\dfrac{1}{1+e^{-x}}}=ln\frac{\dfrac{1}{1+e^{-x}}}{\dfrac{e^{-x}}{1+e^{-x}}}=ln\,e^{x}=x=i_{(-\infty,\infty)}(x)$$

The End

I like my net