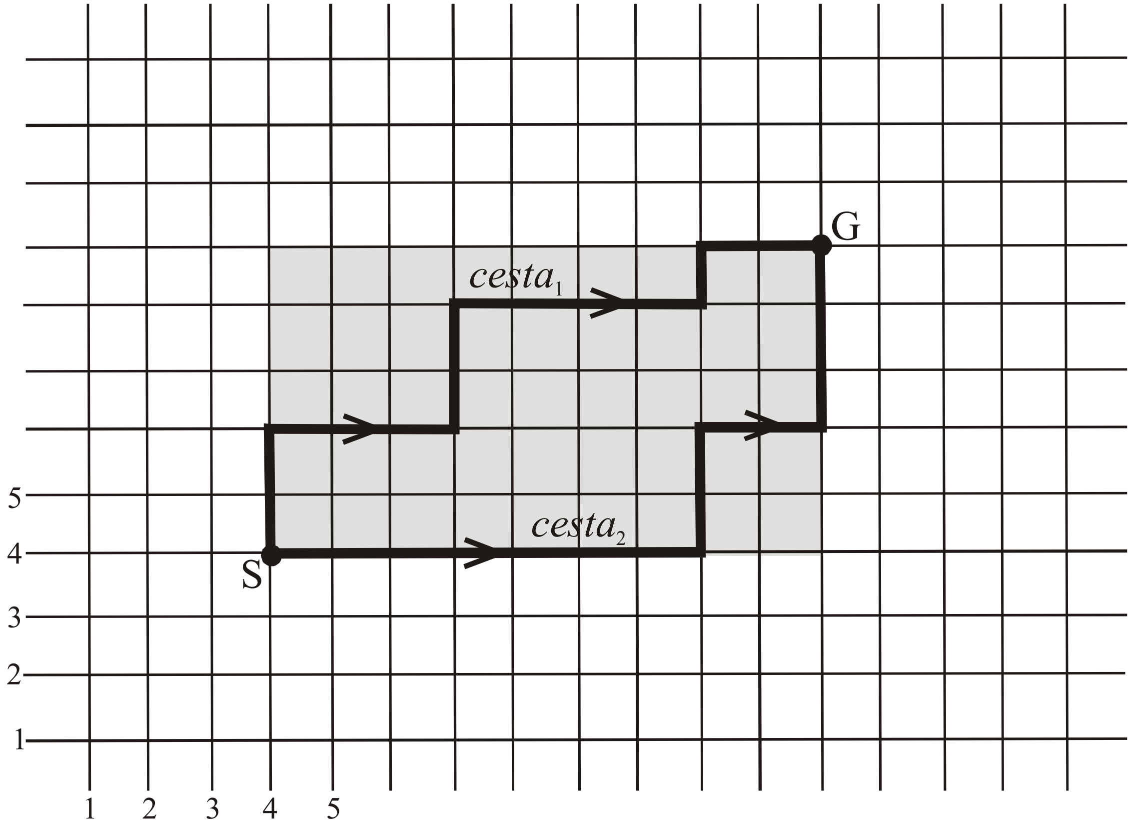
Kombinatorika I

- binomické koeficienty
- permutácie
- kombinácie
- princíp inklúzie a exklúzie

Binomické koeficienty a Pascalov trojuholník

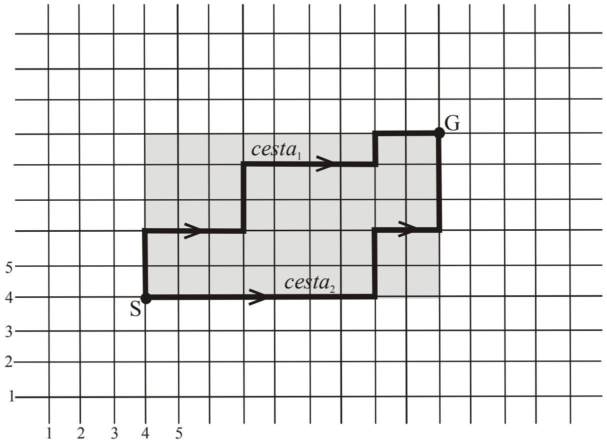
Svet na ortogonálnej mriežke
Manhattan Island in NY

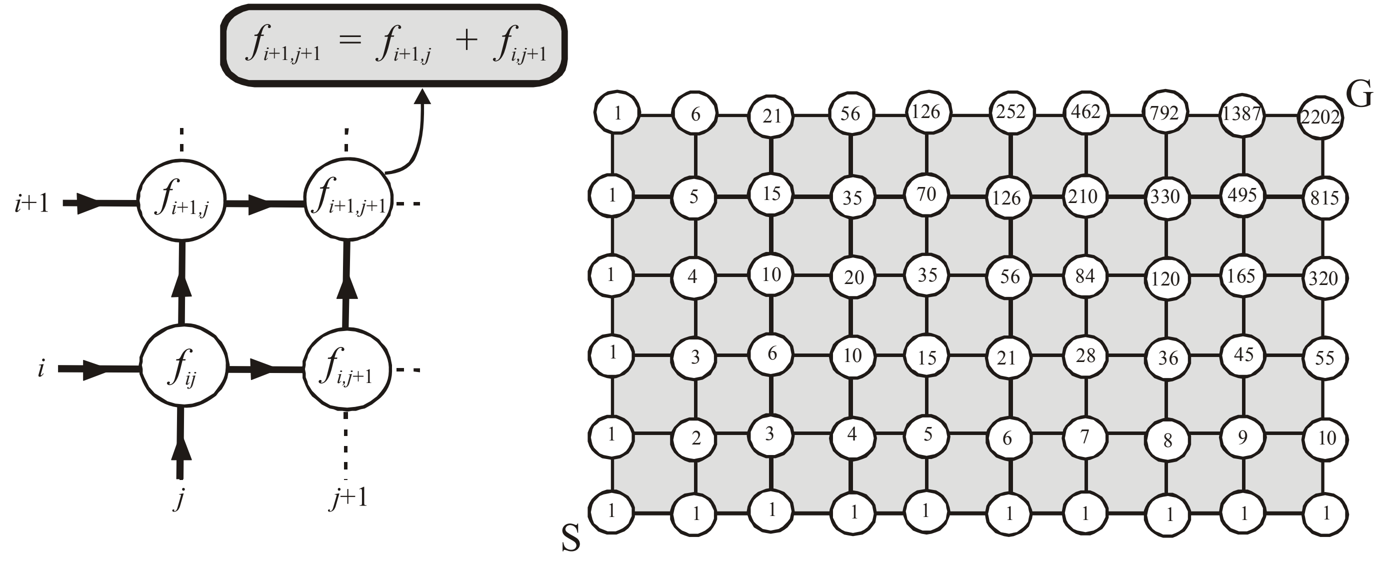


Nech súradnice bodov S a G sú (i,j) resp. (k,l), kde i, j, k a l sú nezáporné celé čísla celočíselné súradnie potom vzdialenosť medzi bodmi S a G je určená vzťahom

$$d\left(S,G\right)=\left|i-k\right|+\left|j-l\right|$$

Pomocou tejto metriky môžeme definovať aj pojem ***optimálna*** (alebo ***minimálna***) ***cesta***, ktorá spája body S a G: je to taká cesta, ktorej dĺžka (počet hrán ortogonálnej mriežky) je určená vzťahom (4.1). Cesta je optimálna vtedy a len vtedy, ak je neklesajúca, t. j. neobsahuje úseky v ktorom by hodnoty buď prvej alebo druhej súradnice klesali.





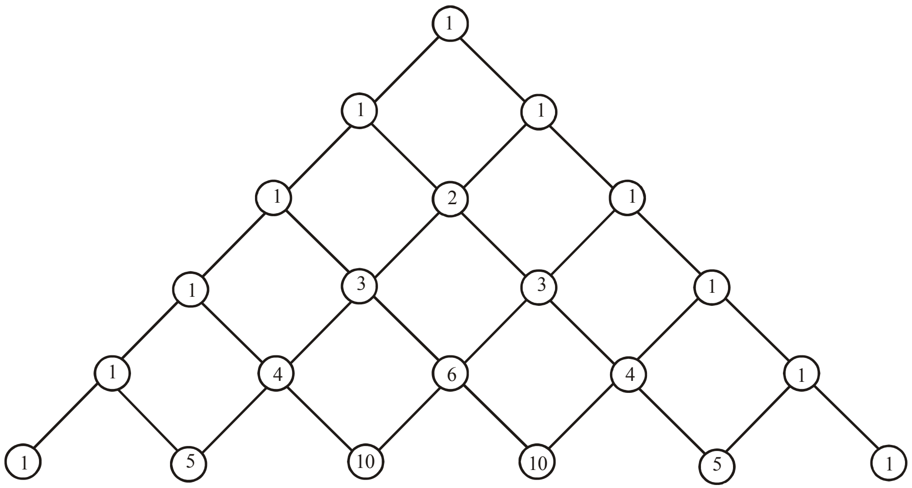
A B

Budeme postupne počítať počty minimálnych ciest medzí východzím bodom S a bodmi, ktoré ležia medzi týmto bodom a koncovým bodom G. Koncový vrchol G je ohodnotený číslom 2202, to znamená, že z vrcholu S do vrcholu G existuje 2202 rôznych ciest.

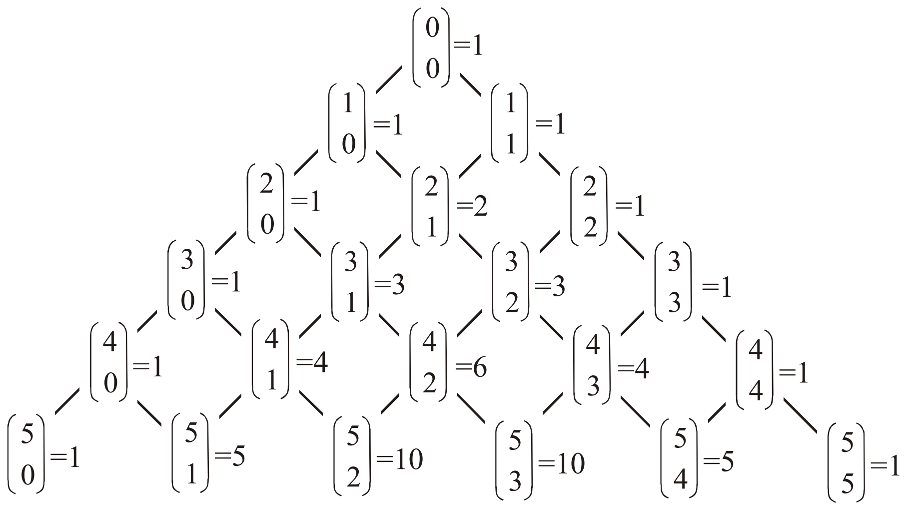
Definícia 4.1. ***Binomický koeficient*** pre $i \geq j \geq 0$ je definovaný ako podiel

$$\binom{i}{j} = \frac{i!}{j!(i-j)!}$$

Binomické koeficienty sú jednoduchým spôsobom reprezentované pomocou Pascalovho trojuholníka



A



B

Koeficient f_{ij} pomocou binomických koeficientov je založené na identite

$$f_{ij} = \binom{j}{i-1}$$

pričom indexy i a j sú ohraničené podmienkou $j \geq i - 1 \geq 0$.

Veta. Binomické koeficienty spĺňajú podmienky

$$\binom{k}{0} = \binom{k}{k} = 1$$

$$\binom{k}{1} = \binom{k}{k-1} = k$$

$$\binom{k}{i} = \binom{k}{k-i} \quad \text{(pre } i=0,1,\ldots,k\text{)}$$

$$\binom{k}{i} + \binom{k}{i+1} = \binom{k+1}{i+1}$$

Dôkaz týchto vlastností priamo plynie z definície

$$\binom{k+1}{i+1}=\frac{(k+1)!}{(k-i)!(i+1)!}=\frac{k!(k+1)}{(k-i)!i!(i+1)}=\frac{k!}{(k-i)!i!}\frac{(k+1)}{(i+1)}=$$

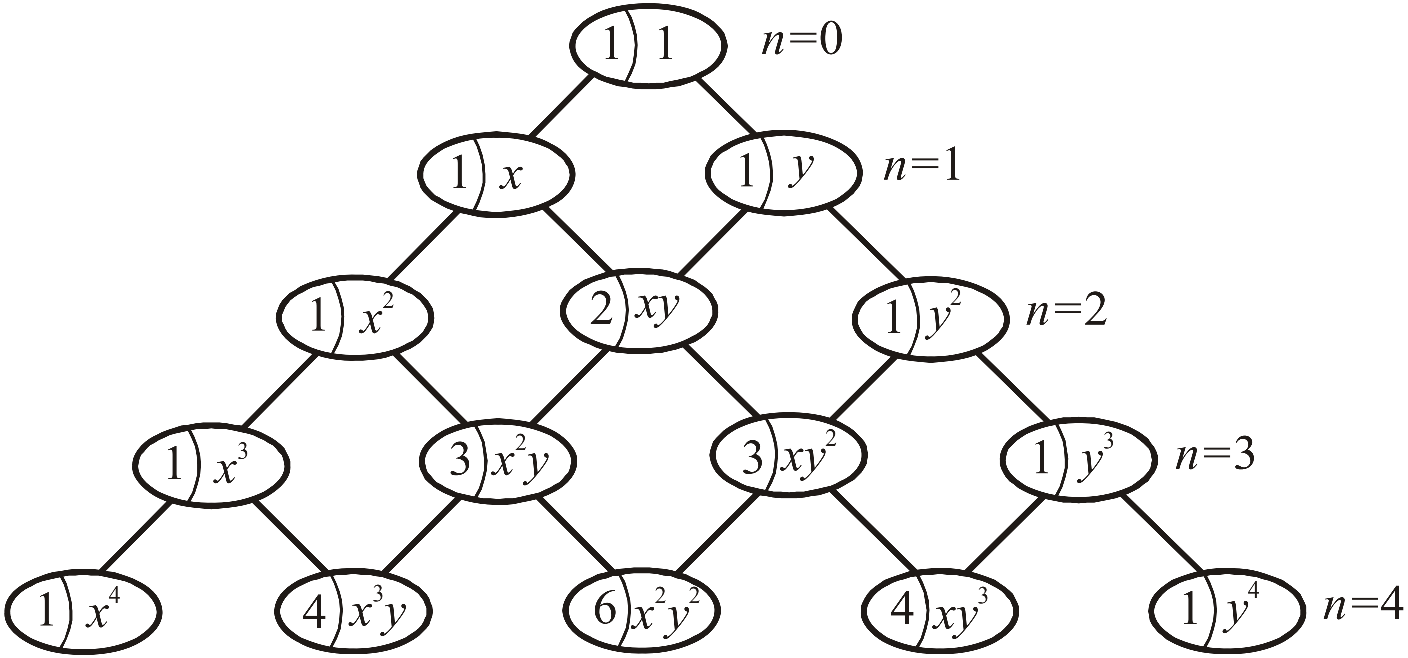
$$\frac{k!}{(k-i)!i!}\frac{(i+1)+(k-i)}{(i+1)}=\frac{k!}{(k-i)!i!}\left(1+\frac{k-i}{i+1}\right)=\binom{k}{i}+\binom{k}{i+1}$$

Binomické koeficienty sú významné v algebre, kde umožňujú v kompaktnom tvare vyjadriť n-tú mocninu súčtu $(x + y)$.

Veta (binomická veta). Nech x a y sú reálne premenné a n je kladné celé číslo, potom

$$(x+y)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x^{n-j} y^j$$

Dôkaz tejto vety možno vykonať pomocou indukcie.
Zvolíme podstatne jednoduchší postup, ako dokázať binomickú formulu, ktorá je veľmi blízko spätá s úlohou nájsť počet optimálnych ciest, ktoré spájajú dva vrcholy na ortogonálnej mriežke.
Položme si otázku, koľkými spôsobmi môže byť realizovaný súčin $x^i y^j$ z mocniny $(x+y)^n$ Tento súčin môže byť vytvorený dvoma elementárnymi operáciami z medzivýsledkov $x^{i-1} y^j$ a $x^i y^{j-1}$ násobenim premennou x resp. premennou y



Verzia Pascalovho trojuholníka pre výpočet spôsobov konštrukcie súčinov $x^i y^j$. Šikmé čiary idúce z pravej do ľavej strany (z ľavej do pravej strany) vyjadrujú súčin premennou x (y). Čísla uvedené v ľavej strane oválov sú rovné, podobne ako v Pascalovom trojuholníku, binomickým koeficientom (i/j).

Príklad

Zostrojte rozvoj $(x+y)^4$. Použitím binomickej vety dostaneme

$$(x+y)^4 = \sum_{j=0}^{4}\binom{4}{j}x^{4-j}y^j = \binom{4}{0}x^4 + \binom{4}{1}x^3y + \binom{4}{2}x^2y^2 + \binom{4}{3}x^1y^3 + \binom{4}{4}y^4$$

$$= x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$$

Príklad

Aký je koeficient $x^{12}y^{13}$ v rozvoji $(x+y)^{25}$? Z binomickej vety dostaneme, že tento koeficient je určený

$$\binom{25}{13} = \frac{25!}{13!12!} = 5\,200\,300$$

Príklad

Aký je koeficient $x^{12}y^{13}$ v rozvoji $(2x-3y)^{25}$? Použitím binomickej vety dostaneme

$$\left(2x+(-3y)\right)^{25}=\sum_{j=0}^{25}\binom{25}{j}(2x)^{25-j}(-3y)^{j}$$

Potom koeficient stojací pri člene $x^{12}y^{13}$ je

$$\binom{25}{13}2^{12}(-3)^{13}=-\frac{25!}{13!12!}2^{12}3^{13}=\text{-}33959763545702400$$

Veta. Nech n je nezáporné celé číslo, potom

$$\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}=2^{n}$$

Táto formula je jednoduchým dôsledkom binomickej vety, keď položíme $x=y=1$. Takto môžeme zostrojiť množstvo analogických formúl, tak napríklad, ak položíme $x = 1$ a $y = 2$, potom

$$\left(1+2\right)^{n}=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}2^{j}=3^{n}$$

Ak položíme $x = 1$ a $y = -1$, potom

$$\left(1-1\right)^{n}=\sum_{j=0}^{n}\left(-1\right)^{j}\binom{n}{j}=0\Rightarrow\sum_{j=0}^{\lceil n/2\rceil}\binom{n}{2j}=\sum_{j=0}^{\lceil n/2\rceil}\binom{n}{2j+1}$$

Veta 4.5. Binomické koeficienty spĺňajú rekuretné vzťahy

$$\binom{i}{j+1}=\frac{i-j}{j+1}\binom{i}{j}$$

$$\binom{i+1}{j}=\frac{i+1}{i-j+1}\binom{i}{j}$$

Tieto rovnosti môžu byť jednoducho odvodené priamo z definície binomických koeficientov

$$\binom{i+1}{j}=\frac{(i+1)!}{j!(i+1-j)!}=\frac{i!}{j!(i-j)!}\frac{i+1}{i-j+1}=\frac{i+1}{i-j+1}\binom{i}{j}$$

Príklad

Ukážeme jednoduchý ilustračný príklad použitia vzťahov pre jednoduchý rekurentný výpočet binomických koeficientov. Ako ilustráciu uvedieme výpočet koeficientov $\left(5/j\right)$, pričom bude vychádzať zo známej hodnoty koeficienta $\left(5/0\right)=1$.

1. krok:

$$\binom{5}{1}=\binom{5}{0+1}=\frac{5}{1}\binom{5}{0}=5$$

2. krok:

$$\binom{5}{2}=\binom{5}{1+1}=\frac{4}{2}\binom{5}{1}=10$$

3. krok:

$$\binom{5}{3} = \binom{5}{2+1} = \frac{4}{2}\binom{5}{2} = 10$$

4. krok:

$$\binom{5}{4} = \binom{5}{3+1} = \frac{2}{4}\binom{5}{3} = 5$$

5. krok:

$$\binom{5}{5} = \binom{5}{4+1} = \frac{1}{5}\binom{5}{4} = 1$$

6. krok:

$$\binom{5}{6} = \binom{5}{5+1} = \frac{0}{5}\binom{5}{5} = 0$$

Význam ***rekurentného spôsobu*** výpočtu binomických koeficientov spočíva v tom, že ak potrebujeme poznať napr. koeficient $(100/3)$, jeho priamy výpočet z definície naráža na seriózne problémy s presnosťou aritmetiky v počítačoch. Preto je výhodné vychádzať zo známeho koeficienta $(100/0)=1$, použitím (4.11a) postupne vypočítame koeficienty $(100/1)=100$, $(100/2)=450$, $(100/3)=14700$,....

Priamy výpočet v počítači podľa vzorca $(100/3)=100!/(97!\cdot 3!)$je v rámci štandardnej aritmetiky počítača nerealizovateľný.

Veta (Vandermondeova identita).

$$\binom{m+n}{r}=\sum_{i=0}^{r}\binom{m}{r-i}\binom{n}{i}$$

Dôkaz tejto vety vykonáme pomocou binomickej vety, študujme výraz

$$(1+x)^m(1+x)^n=(1+x)^{m+n}$$

$$(1+x)^m(1+x)^n=\sum_{j=0}^{m}\binom{m}{j}x^j\sum_{i=0}^{m}\binom{n}{i}x^i=\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}\binom{m}{j}\binom{n}{i}x^{i+j}=\sum_{r=0}^{m+n}\left(\sum_{i=0}^{r}\binom{m}{r-i}\binom{n}{i}\right)x^r$$

$$(1+x)^{m+n}=\sum_{r=0}^{m+n}\binom{m+n}{r}x^r$$

Veta (multinomická veta). Nech n je kladné prirodzené číslo, potom pre ľubovoľné $x_1, x_2, \dots, x_p$ platí

$$\left(x_1 + x_2 + \dots + x_p\right)^n = \sum \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_p!} x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots x_p^{n_p}$$

kde suma ide cez všetky nezáporné indexy n_1, n_2, ..., n_p, ktoré vyhovujú podmienke $n_1 + n_2 + \dots n_p = n$.

Dôkaz tejto vety vykonáme matematickou indukciou

Indukčný predpoklad: $\left(x_1 + x_2\right)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x_1^{n-j} x_2^{\,j} = \sum_{n_1, n_2} \frac{n!}{n_1! n_2!} x_1^{n_1} x_2^{n_2}$

Túto formulu, ktorá je formálnym prepisom binomickej formule, rozšírime pre tri premenné pomocou substitúcie $x_2 \to \left(x_2 + x_3\right)$

$$\left(x_1+\left(x_2+x_3\right)\right)^n=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}x_1^{\,n-j}\left(x_2+x_3\right)^j=\sum_{n_1,n_2}\frac{n!}{n_1!n_2!}x_1^{n_1}\left(x_2+x_3\right)^{n_2}$$

$$=\sum_{n_1,n_2}\frac{n!}{n_1!n_2!}x_1^{n_1}\sum_{m_2,m_3}\frac{n_2!}{m_2!m_3!}x_2^{m_2}x_3^{m_3}=\sum_{n_1,m_2,m_3,}\frac{n!}{n_1!n_2!}\frac{n_2!}{m_2!m_3!}x_1^{n_1}x_2^{m_2}x_3^{m_3}$$

$$=\sum_{n_1,n_2,n_3,}\frac{n!}{n_1!n_2!n_3!}x_1^{n_1}x_2^{n_2}x_3^{n_3}$$

Tento postup môžeme opakovať tak dlho, až získame formulu (4.13) pre dané *n*.

Príklad

Zostrojte koeficient pri x^4 vo výraze $\left(1-x+2x^2\right)^5$.

$$\begin{aligned}\left(1-x+2x^2\right)^5 &= \sum_{n_1,n_2,n_3\geq 0}\frac{5!}{n_1!n_2!n_3!}(1)^{n_1}(-x)^{n_2}+\left(2x^2\right)^{n_3} \\ &= 5!\sum_{n_1,n_2,n_3\geq 0}\frac{(-1)^{n_2}2^{n_3}}{n_1!n_2!n_3!}x^{n_2+2n_3}\end{aligned} \qquad (\clubsuit)$$

pričom sumačné indexy vyhovujú podmienke $n_1+n_2+n_3=5$.

Pretože nás zaujíma koeficient stojáci pri x^4, sumačné indexy musia vyhovovať ďalšej podmienke $n_2+2n_3=4$, potom prípustné hodnoty sumačných indexov sú: (3,0,2), (2,2,1) a (1,4,0). Dosadením týchto prípustných indexov do formuly (♣) dostaneme explicitný výraz pre koeficient stojací pri x^4 v rozvoji $\left(1-x+2x^2\right)^5$

$$5!\left(\frac{2^2}{3!0!2!}+\frac{2^1}{2!2!1!}+\frac{2^0}{1!4!0!}\right)=105$$

Permutácie a kombinácie

Definícia. ***Permutácia*** množiny n rôznych objektov, $A=\{o_1,o_2,...,o_n\}$ je usporiadaná n-tica objektov z tejto množiny, $P=\left(o_{p_1},o_{p_2},...,o_{p_n}\right)$. Usporiadaná r-tica (kde $1\le r\le n$) objektov z množiny A sa nazýva **r-permutácia**.

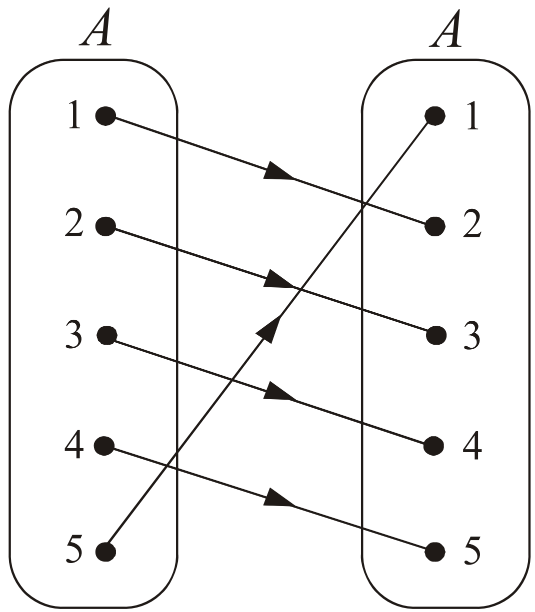
Zápis permutácie

$$P=\begin{pmatrix} 1 & 2 & ... & n \\ p_1 & p_2 & ... & p_n \end{pmatrix}$$

alebo v zjednodušenom tvare

$$P=\left(p_1,p_2,...,p_n\right)$$

Permutáciu môžeme interpretovať ako 1-1-značné zobrazenie množiny $A=\{1,2,\ldots,n\}$ na seba, $P:A\rightarrow A$



Príklad

Navrhnite algoritmus pre náhodnú generáciu permutácie n objektov. Podmienka „náhodnosti" generovanej permutácie spočíva v tom, že ak by sme algoritmus použili M-krát, $M \to \infty$, potom pravdepodobnosť, že v pozícii i bude kladné celé číslo $1 \leq k \leq n$, $p_i = k$, má asymptotickú hodnotu rovnakú pre každé i

$$\forall i \forall k \left(\lim_{M \to \infty} prob(k, i) = \frac{1}{n} \right)$$

Táto podmienka je pomerne tvrdá pre návrh algoritmu schopného úplne náhodne generovať permutáciu.

```
for i:=1 to n do e_i:=i;
for i:=1 to n do
begin k:=random(n-i+1)+1;
      p_i:=e_k;
      for j:=k to n-i+1 do e_j:=e_{j+1};
end;
```

	p				*e*			
i=1	2				1	2	3	4
i=2	2	4			1	3	4	
i=3	2	4	1		1	3		
i=4	2	4	1	3	3			

Príklad

Navrhnite algoritmus pre systematické generovanie všetkých permutácií n objektov.

Naivný algoritmus

Hamba!

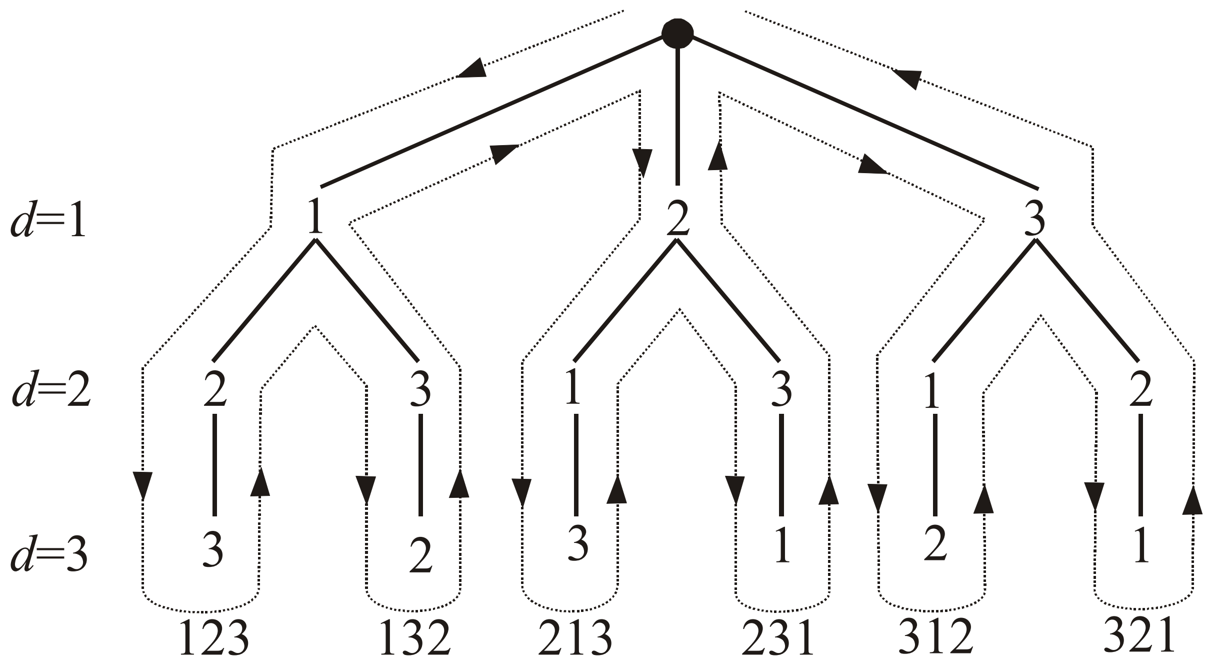
```
count:=0;
for i:=1 to 4 do
for j:=1 to 4 do
for k:=1 to 4 do
for l:=1 to 4 do
if (i≠j≠k≠l)then
begin count:=count+1;
      print(count,i,j,k,l)
end;
```

Algoritmus spätného prehľadávania (back-track algorithm)

Fí – ha !!!

```
U_1:={1,2,...,n}; d:=1;
if U_d≠{} then
begin p_d:=get_element(U_d); U_d:=U_d-{p_d};
      if d<n then
      begin d:=d+1;
            U_d:={1,2,...,n}-{ p_1,p_2,...,p_(d-1)};
      end else print(p_1,p_2,...,p_n);
end else d:=d-1;
```

Beh algoritmu pre n=3 je znázornený stromom riešení pre danú úlohu a prerušovanou orientovanou čiarou je znázornený pohyb algoritmu po celom strome.

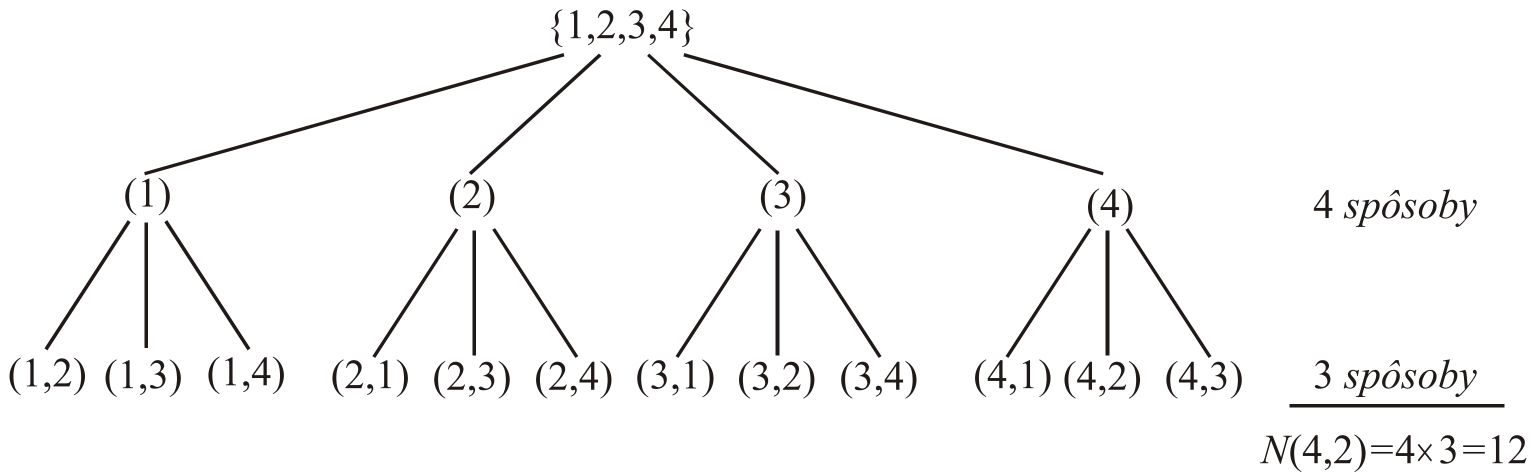


Veta. Počet *r*-permutácií množiny *n* objektov je

$$N(n,r) = n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Dôkaz

- Prvý element permutácie môže byť vybraný z množiny *A* *n* spôsobmi.
- Potom nám zostáva *n*-1 spôsobov výberu druhého elementu, atď.



Príklad

Koľkými možnými spôsobmi možno vybrať prvých troch víťazov súťaže, do ktorej sa prihlásilo 100 účastníkov?

Pretože je podstatné, ktorá osoba bude odmenená prvou, druhou alebo treťou cenou, počet spôsobov výbery prvých troch odmenených je špecifikovaný počtom 3-permutácií zo 100 objektov

$$N\left(100,3\right)=100\cdot 99\cdot 98=970\,200$$

Príklad

Na športovom podujatí sa zúčastnilo 8 pretekárov. Víťaz bude odmenený zlatou medailou, pretekár, ktorý skončí na druhom mieste bude odmenený striebornou medailou a pretekár, ktorý skončí na tretom mieste bude odmenený bronzovou medailou. Koľkými rôznymi spôsobmi môžu byť odmenený pretekári troma medailami?

Celkový počet troch pretekárov, ktorí sú odmenení medailou sa rovná počtu 3-permutácií z 8 objektov

$$N\left(8,3\right)=8\cdot 7\cdot 6=336.$$

Definícia. ***r-kombinácia elementov*** množiny $A=\{o_1,o_2,...,o_n\}$ je podmnožina, ktorá obsahuje r elementov, $A'=\{o_{p_1},o_{p_2},...,o_{p_r}\}\subseteq A=\{o_1,o_2,...,o_n\}$. Počet r-kombinácií z množiny obsahujúcej n elementov je označený veličinou $C(n,r)$.

Pre $A=\{1,2,3,4,5,6\}$ je podmnožina $A'=\{2,4,6\}$ 3-kombinácia z A.

Príklad

Vytvorte všetky možné 2-kombinácie elementov z množiny $A=\{a,b,c,d\}$. Potom existuje $C(4,2)$ = 6 2-kombinácií, ktoré sú reprezentované podmnožinami

$\{a,b\}$, $\{a,c\}$, $\{a,d\}$, $\{b,c\}$, $\{b,d\}$ a $\{c,d\}$.

Veta. Počet *r*-kombinácií z množiny *n* objektov je

$$C(n,r)=\binom{n}{r}=\frac{n!}{(n-r)!r!}$$

Dôkaz tejto formuly je jednoduchý a je založený na tom, že podľa vety 4.8 poznáme počet *r*-permutácií $N(n,r)$, pretože permutácie sú závislé na poradí *r* elementov, musíme číslo $N(n,r)$ podeliť $N(r,r) = r!$

$$C(n,r)=\frac{N(n,r)}{N(r,r)}=\frac{n!/(n-r)!}{r!/(r-r)!}=\frac{n!}{r!(n-r)!}=\binom{n}{r}.$$

Kombinatorický dôkaz

- Jeden z fundamentálnych pojmov kombinatoriky, je to taký dôkaz, ktorý minimalizuje použitie algebraických metód (napr. formúl špecifikujúcich vlastnosti binomických koeficientov), je založený na elementárnych pojmoch kombinatoriky, akými sú permutácie a kombinácie.

- Nie vždy je tento postup použiteľný alebo konceptuálne jasný, preto aj v kombinatorike sa v mnohých prípadoch obraciame na štandardné algebraické metódy založené na úprave formúl a úplnej indukcii.

Príklad

Gymnázium X sa dohodlo s partnerským gymnáziom Y, že usporiadajú spoločný tenisový turnaj, na ktorom sa z každého gymnázia zúčastní päť študentov. Nech gymnázium X (Y) má k dispozícii 10 (15) hráčov, koľko rôznych spôsobov obsadenia turnaja môžu gymnázia zostaviť?

Gymnázium X môže zostaviť $C(10,5)$ rôznych tímov a gymnázium Y môže zostaviť $C(15,5)$ rôznych tímov, súčin týchto čísel nám poskytuje počet rôznych spôsobov obsadenia turnaje

$$C(10,5)\times C(15,5)=10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\times 15\cdot 14\cdot 13\cdot 12\cdot 11=10897286400$$

t. j. môžu zostaviť približne 10^{10} spôsobov obsadenia tenisového turnaja.

Príklad

Majme reťazec 6 znakov AABBCC, máme vypočítať všetky možné a neekvivalentné reťazce, ktoré môžu byť zostrojené z tohto reťazca permutáciami jeho elementov.

Prvá intuitívne riešenie tohto problému je, že existuje 6! Rôznych reťazcov, ktoré môžu byť zostrojené permutáciami pôvodného reťazca AABBCC. Táto odpoveď nie je správna, pretože ignoruje skutočnosť, že reťaze obsahuje tri dvojice (AA, BB a CC) rovnakých znakov, ktoré nie sú medzi sebou rozlíšiteľné.

Preto musíme pôvodný výsledok opraviť tak, aby obsahoval aj možnosť opakovania týchto symbolov, potom celkový počet neekvivalentných reťazcov je

$$6!/(2!\cdot 2!\cdot 2!) = (2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6)/(2\cdot 2\cdot 2) = 90$$

Permutácia s opakovaním je také usporiadanie usporiadaných n-tíc z objektov množiny A, ktoré sú rôzne, čiže opakovanie n-tíc v dôsledku opakovania elementov v A je vylúčené.

Veta 4.10. Počet permutácií ***s opakovaním*** n objektov, medzi ktorými je n_1 nerozlíšiteľných objektov prvého typu, n_2 nerozlíšiteľných objektov druhého typu,..., a n_p nerozlíšiteľných objektov p-teho typu, pričom $n_1+n_2+...+n_p=n$, je určený

$$\frac{n!}{n_1!n_2!...!n_p}$$

Multimnožina

- Z definície množiny vyplýva, že každý element sa v množine vyskytuje práve jedenkrát. Nech $a \in A$, potom $a \notin \left(A - \{a\}\right)$.
- Avšak pri špecifikácii r-permutácií s opakovaním pripúšťame možnosť, že niektoré elementy sa vyskytujú v množine aspoň dvakrát.
- Táto konceptuálna nekonzistentnosť zavedenia r-permutácie je formálne odstránená postulátom, že množina A je multimnožina, v ktorej je prípustné opakovanie niektorých elementov.
- $A = \{a, a, b\}$ je multimnožina, ktorá obsahuje element a dvakrát. Multimnožina môže byť formálne chápaná ako obyčajná množina, keď zavedieme indexovanie elementov, ktoré sa opakujú, napr. $A = \{a_1, a_2, b\}$; týmto indexovaním sú elementy dobre navzájom odlíšené.

Poznámka

Problém určenia počtu r-permutácií s opakovaním nie je vo všeobecnosti riešiteľný analyticky pomocou formúl, preto, ak chceme riešiť nejaký konkrétny príklad zistenia počtu r-permutácií s opakovaním, musíme použiť počítačovú enumeráciu týchto permutácií.

Zjednodušený prípad *r*-permutácií s opakovaním

Chceme zostrojiť usporiadanú r-ticu, $(\alpha_1\alpha_2...\alpha_r)$, kde jej zložky α_i sú brané z množiny obsahujúcej k znakov, $B=\{\omega_1,\omega_2,...,\omega_k\}$.

Veta. Celkový počet r-permutácií obsahujúcej k znakov je

$$k^r$$

Príklad

Vytvorme 2-permutácie s opakovaním nad množinou znakov $B=\{a,b\}$, touto množinou.

$$P_1^{(2)}=(aa), P_2^{(2)}=(ab), P_3^{(2)}=(ba), P_4^{(2)}=(bb)$$

Použitím formuly k^r dostaneme počet 2-permutácií

$$2^2=4$$

Kombinácia s opakovaním v zjednodušenom prístupe, môže byť chápaná, ako vytváranie množiny, ktorá obsahuje n elementov, pričom elementy sú odlíšiteľné podľa k druhov. Pre ilustráciu tohto pojmu pokúsme sa vytvoriť množinu, ktorá obsahuje $n = 3$ prvkov, pričom tieto prvky sú troch druhov, označené napr. a, b a c. Takto špecifikované množinu sú

$$S_1 = \{a,a,a\},\ S_2 = \{a,a,b\},\ S_3 = \{a,a,c\},\ S_4 = \{b,b,b\},\ S_5 = \{a,b,b\},$$
$$S_6 = \{b,b,c\},\ S_7 = \{c,c,c\},\ S_8 = \{a,c,c\},\ S_9 = \{b,c,c\},\ S_{10} = \{a,b,c\}$$

Veta 4.12. Celkový počet r-kombinácií z k znakov prvkov je

$$\binom{r+k-1}{k-1}$$

Príklad

Koľko je usporiadaných rozkladov čísla 10 na 4 nenulové sčítance?

Predstavme si číslo 10 ako rad 10 jednotiek, medzi ktoré umiestnime 3 separátory, počet jednotiek medzi dvoma separátormi určuje jednotlivé sčítance. Stojíme však pred problémom, ako zabezpečiť, aby každý sčítanec bol nenulový, alebo, aby dva separátory nestáli bezprostredne vedľa seba. Toto zabezpečíme tak, že z 10 jednotiek odoberieme 4 jednotky a rozdelíme ich medzi jednotlivé sčítance. Tým máme zaručenú nenulovosť každého sčítanca, riešenie úlohy potom už musíme len rozdeliť medzi 10 – 4 = 6 tri separátory, čo je určené binomickým koeficientom

$$\binom{6+4-1}{4-1} = 84$$

Princíp inklúzie a exklúzie

V teórii množín bola diskutované formula pre mohutnosť množiny špecifikovanej ako zjednotenie podmnožín $A_1, A_2, \ldots, A_n$, uvedieme je spolu s jej duálnou formou

$$\left|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n\right| = \sum_{i=1}^{n}\left|A_i\right| - \sum_{\substack{i,j=1\\(i<j)}}^{n}\left|A_i \cap A_j\right| + \sum_{\substack{i,j,k=1\\(i<j<k)}}^{n}\left|A_i \cap A_j \cap A_k\right| + \ldots$$
$$(-1)^{n+1}\left|A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n\right|$$

$$\left|\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \ldots \cap \overline{A}_n\right| = \left|\overline{A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n}\right| = \left|U\right| - \left|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n\right|$$
$$\left|U\right| - \sum_{i=1}^{n}\left|A_i\right| + \sum_{\substack{i,j=1\\(i<j)}}^{n}\left|A_i \cap A_j\right| - \sum_{\substack{i,j,k=1\\(i<j<k)}}^{n}\left|A_i \cap A_j \cap A_k\right| + \ldots$$
$$(-1)^{n}\left|A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n\right|$$

Postulujme pre elementy univerza U vlastnosti $p_1, p_2, ..., p_n$, potom vzhľadom k týmto vlastnostiam definujme n množín $A_1, A_2, ..., A_n \subset U$ tak, že elementy množiny A_i majú vlastnosť p_i (pre i = 1, 2, ..., n)

$$A_i = \{x \in U; vlastnosť(x) = p_i\}$$

- $A_i \cup A_j$ obsahuje elementy, ktoré majú vlastnosť p_i ***alebo*** vlastnosť p_j.
- $A_i \cap A_j$ obsahuje elementy, ktoré majú súčasne vlastnosť p_i ***a*** vlastnosť p_j.
- $\overline{A}_i = \{x \in U; vlastnosť(x) = \overline{p}_i\}$ obsahuje elementy, ktoré *nemajú* vlastnosť p_i.
- $\overline{A}_i \cup \overline{A}_j$ obsahuje elementy, ktoré nemajú vlastnosť p_i ***alebo*** p_j.
- $\overline{A}_i \cap \overline{A}_j$ obsahuje elementy, ktoré nemajú súčasne vlastnosť p_i ***a*** vlastnosť p_j.

$N\left(p_{i_1}, p_{i_2}, \dots, p_{i_k}\right)$ počet elementov, ktoré majú súčasne vlastnosti $p_{i_1}, p_{i_2}, \dots, p_{i_k}$

$$N\left(p_{i_1}, p_{i_2}, \dots, p_{i_k}\right) = \left|A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}\right|$$

Duálny tvar tejto formuly dostaneme zámenou p_i za $\overline{p}_i$

$$N\left(\overline{p}_{i_1}, \overline{p}_{i_2}, \dots, \overline{p}_{i_k}\right) = \left|\overline{A}_{i_1} \cap \overline{A}_{i_2} \cap \dots \cap \overline{A}_{i_k}\right| = |U| - \left|A_{i_1} \cup A_{i_2} \cup \dots \cup A_{i_k}\right|$$

Veta (princíp inklúzie a exklúzie).

$$N\left(\overline{p}_1, \overline{p}_2, \dots, \overline{p}_n\right) = |U| - \sum_{i=1}^{n} N\left(p_i\right) + \sum_{\substack{i,j=1 \\ (i<j)}}^{n} N\left(p_i, p_j\right) - \sum_{\substack{i,j,k=1 \\ (i<j<k)}}^{n} N\left(p_i, p_j, p_k\right) + \dots$$

$$(-1)^n N\left(p_1, p_2, \dots, p_n\right)$$

Eratosthenove sito

Koľko existuje prvočísiel, ktorých hodnota nie je väčšia ako M.

Pripomeňme, že každé celé číslo c, ktoré nie je prvočíslo a ktoré nie je väčšie ako M, je vyjadriteľné ako súčin prvočísiel, ktorých kvadrát je menší ako M

$$c = p_1^{k_1} p_2^{k_2} p_3^{k_3} \ldots . \leq M \Rightarrow \forall i \left(p_i^2 \leq M \right)$$

kde p_i je i-té prvočíslo a exponent k_i je nezáporné celé číslo.

Nech prvočísla, ktoré vyhovujú podmienke $p_i^2 \leq M$ tvoria množinu, obsahujúcu prvých q prvočísiel, $\{p_1, p_2, ..., p_k\}$. Množinu prvých M kladných celých čísel označíme $C = \{2,3,...,M\}$, kde sme zámerne vynechali 1, pretože 1 priamo z definície nie je prvočíslo. Metódu Eratosthenovho sita vyjadríme pomocou kódu v psudoPascale.

```
C:={2,3,...,M};
for i:=1 to q do
begin for c∈C do
      if (mod(c,pi)=0)∧(c≠pi)then C:=C-{c}
end;
```

Metóda Eratosthenovho sýta

	2_1	3_2	4	5_3	6	7_4	8	9	10
11_5	12	13_6	14	15	16	17_7	18	19_8	20
21	22	23_9	24	25	26	27	28	29_{10}	30
31_{11}	32	33	34	35	36	37_{12}	38	39	40
41_{13}	42	43_{14}	44	45	46	47_{15}	48	49	50
51	52	53_{16}	54	55	56	57	58	59_{17}	60
61_{18}	62	63	64	65	66	67_{19}	68	69	70
71_{20}	72	73_{21}	74	75	76	77	78	79_{22}	80
81	82	83_{23}	84	85	86	87	88	89_{24}	90
91	92	93	94	95	96	97_{25}	98	99	100

Príklad

Koľko prvočísiel nie je väčších ako 100?

Použijeme princíp inklúzie a exklúzie. Postulujme štyri vlastnosti:

$$P_1 = \left(\check{c}\acute{\imath}slo\ \ je\ delite\text{ľ}n\acute{e}\ \ p_1 = 2\right)$$
$$P_2 = \left(\check{c}\acute{\imath}slo\ \ je\ delite\text{ľ}n\acute{e}\ \ p_2 = 3\right)$$
$$P_3 = \left(\check{c}\acute{\imath}slo\ \ je\ delite\text{ľ}n\acute{e}\ \ p_3 = 5\right)$$
$$P_4 = \left(\check{c}\acute{\imath}slo\ \ je\ delite\text{ľ}n\acute{e}\ \ p_4 = 7\right)$$

Potom počet prvočísiel, ktoré nie sú väčšie ako M = 100 je špecifikovaný výrazom

$$4 + N\left(\overline{P}_1, \overline{P}_2, \overline{P}_3, \overline{P}_4\right)$$

$$N\left(\overline{P}_1,\overline{P}_2,\overline{P}_3,\overline{P}_4\right)=99-N\left(P_1\right)-N\left(P_2\right)-N\left(P_3\right)-N\left(P_4\right)+N\left(P_1,P_2\right)+N\left(P_1,P_3\right)$$
$$+N\left(P_1,P_4\right)+N\left(P_2,P_3\right)+N\left(P_2,P_4\right)+N\left(P_3,P_4\right)-N\left(P_1,P_2,P_3\right)$$
$$-N\left(P_1,P_2,P_4\right)-N\left(P_1,P_3,P_4\right)-N\left(P_2,P_3,P_4\right)+N\left(P_1,P_2,P_3,P_4\right)$$

Veličiny $N(\cdot)$ môžeme jednoducho vyjadriť takto: počet celých čísiel, ktoré nie sú väčšie ako M a ktoré sú deliteľné podmnožinou prvočísel $\{2,3,5,7\}$ je $\lceil 100/x \rceil$, t. j. celou časťou podielu $100/x$, kde x je súčin prvočísiel z danej podmnožiny. Potom

$$N\left(\overline{P}_1,\overline{P}_2,\overline{P}_3,\overline{P}_4\right)=99-\left\lceil\frac{100}{2}\right\rceil-\left\lceil\frac{100}{3}\right\rceil-\left\lceil\frac{100}{5}\right\rceil-\left\lceil\frac{100}{7}\right\rceil+\left\lceil\frac{100}{2\cdot 3}\right\rceil+\left\lceil\frac{100}{2\cdot 5}\right\rceil$$
$$+\left\lceil\frac{100}{2\cdot 7}\right\rceil+\left\lceil\frac{100}{3\cdot 5}\right\rceil+\left\lceil\frac{100}{3\cdot 7}\right\rceil+\left\lceil\frac{100}{5\cdot 7}\right\rceil-\left\lceil\frac{100}{2\cdot 3\cdot 5}\right\rceil-\left\lceil\frac{100}{2\cdot 3\cdot 7}\right\rceil$$
$$-\left\lceil\frac{100}{2\cdot 5\cdot 7}\right\rceil-\left\lceil\frac{100}{3\cdot 5\cdot 7}\right\rceil+\left\lceil\frac{100}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 7}\right\rceil$$
$$=99-50-33-20-14+16+10+7+6+4+2-3-2-1-0+0$$
$$=21$$

To znamená, že existuje 4+21=25 prvočísiel, ktoré nie sú väčšie ako 100.

The End

Prvé znázornenie metafory multiagentové systému holandským maliarom Pieter Bruegel Sr. (1525-1569) olejomaľbou „*Batle between Lent and Carnival* “