# 4. kapitola

## Kombinatorika I – binomické koeficienty, permutácie a kombinácie

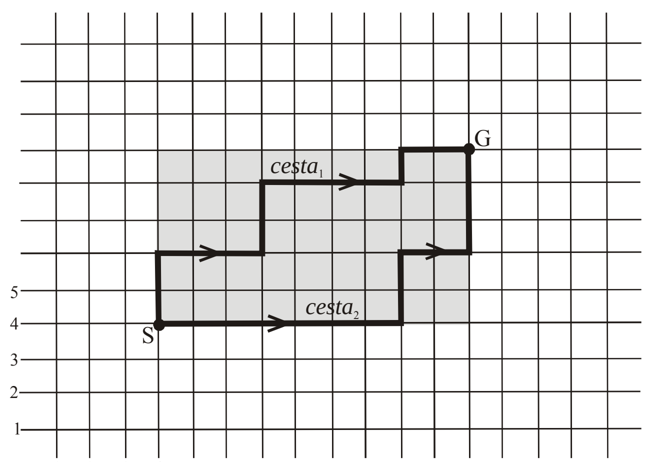
### 4.1 Binomické koeficienty a Pascalov trojuholník

Budeme študovať svet na ortogonálnej mriežke, na tejto mriežke máme umiestnené dva body S a G, našou úlohou je určiť počet všetkých možných optimálnych ciest z bodu S do bodu G po hranách mriežky (pozri obr. 4.1). Nech súradnice bodov S a G sú $(i,j)$ resp. $(k,l)$, kde $i$, $j$, $k$ a $l$ sú kladné celé čísla (celočíselné súradnice) potom vzdialenosť medzi bodmi S a G je určená vzťahom

$$d\left(S,G\right)=\left|i-k\right|+\left|j-l\right| \tag{4.1}$$

Pomocou tejto metriky[1] môžeme definovať aj pojem ***optimálna*** (alebo ***minimálna***) ***cesta***, ktorá spája body S a G: je to taká cesta, ktorej dĺžka (počet hrán ortogonálnej mriežky) je určená vzťahom (4.1). Z obr. 4.1 vyplýva, že daná cesta je pre $i\leq k$ a $j\leq l$ optimálna vtedy a len vtedy, ak je neklesajúca, t. j. neobsahuje úsek v ktorom by hodnoty buď prvej alebo druhej súradnice klesali.

**Príklad 4.1.** Zistite, koľkými optimálnymi cestami sú spojené dva body S a G na ortogonálnej mriežke znázornenej na obr. 4.1.



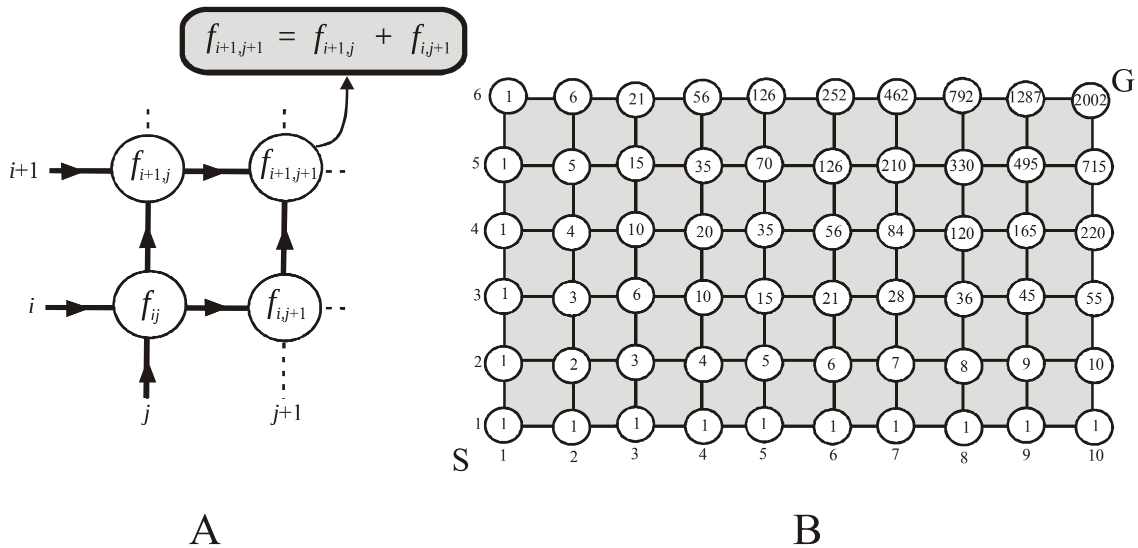

**Obrázok 4.1.** Svet na ortogonálnej mriežke, na ktorej sú umiestnené dva body S a G. Našim cieľom je zistiť, koľko existuje optimálnych (minimálnych) ciest, ktoré spájajú tieto dva body. Horizontálne a vertikálne čiary sú indexované kladnými celými číslami, ktoré špecifikujú polohu uzlov mriežky pomocou usporiadaných dvojíc kladných celých čísel, tak napr. bod S má súradnice (4,4).

[1] V matematike je *metrika* taká funkcia $d(x,y)$, ktorá je (1) pozitívne definitná, $d(x,y)\geq 0$, pričom rovnosť platí len pre $x = y$, (2) symetrická, $d(x,y) = d(y,x)$, a (3) spĺňajúca „trojuholníkovú“ nerovnosť, $d(x,y)+ d(y,z) \geq d(x,z)$.

Na obr. 4.2 je znázornený výsek ortogonálneho sveta z obr. 4.1. Budeme postupne počítať počty minimálnych ciest medzi východzím bodom S a bodmi, ktoré ležia medzi týmto bodom a koncovým bodom G. Ohodnotenie vrcholu s dvojicou indexov ($i$,$j$) je označené $f_{ij}$. Postupujeme tak, že predpokladáme, že máme už ohodnotené vrcholy, ktoré sú vzdialené od vrcholu S o $d$ hrán, v nasledujúcom kroku budeme ohodnocovať vrcholy so vzdialenosťou $d$+1 použitím formule

$$f_{i+1,j+1} = f_{i,j+1} + f_{i+1,j} \tag{4.2}$$

Tento postup opakujeme tak dlho, až sa dostaneme do koncového bodu G. Výsledok tohto procesu je znázornený na diagrame B obr. 4.2. Koncový vrchol G je ohodnotený číslom 2002, to znamená, že z vrcholu S do vrcholu G existuje 2002 rôznych ciest.




**Obrázok 4.2.** (A) Diagram znázorňuje určenie počtu optimálnych ciest, ktoré končia vo vrchole ($i$+1,$j$+1), ktorý je jednoducho určený súčtom počtov optimálnych ciest do vrcholov ($i$,$j$+1) ($i$+1,$j$). (B) Znázornenie konštrukcie celového počtu ciest z vrcholu S do vrcholu G na výseku sveta ortogonálnej mriežky z obr. 4.1. Číslo uvedené v pravom hornom vrchole, 2002, je celkový počet optimálnych ciest z S do G.

Schéma výpočtu koeficientov $f_{ij}$ v idealizovanej podobe je znázornená na obr. 4.2, diagram A, celý výpočet je znázornený na diagrame B.

**Definícia 4.1.** Binomický koeficient pre $i \geq j \geq 0$ je definovaný ako podiel

$$\binom{i}{j} = \frac{i!}{j!(i-j)!} \tag{4.3}$$

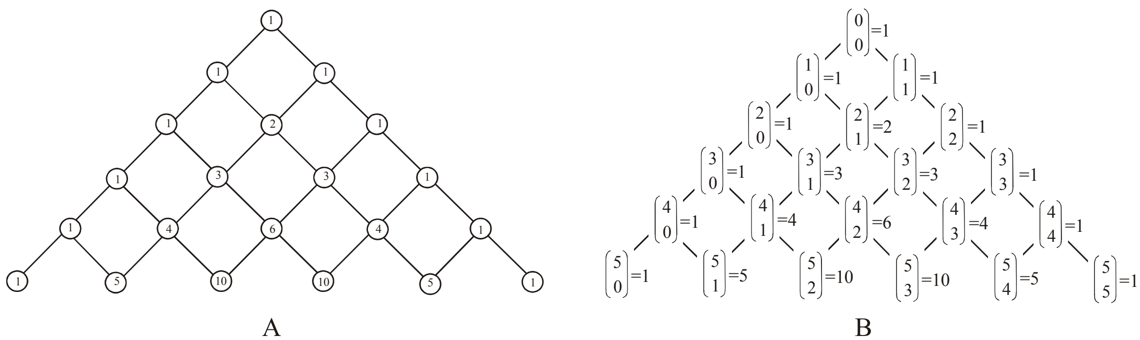
Binomické koeficienty sú jednoduchým spôsobom reprezentované pomocou Pascalovho[2] trojuholníka, pozri obr. 4.3. Tento diagram je založený na postupnej realizácii formuly (4.2). Jedná sa vlastne o pootočenie (v smere hodinových ručičiek) diagramu A na obr. 4.2, okolo

[2] Blaise Pascal (1623-1662) , francúzsky matematik, fyzik a filozof, je pokladaný za zakladateľa modernej teórie pravdepodobnosti (v rámci ktorej objavil aj „Pascalov“ trojuholník), vo fyzike formuloval zákon, ktorý je v súčasnosti známy ako „Pascalov“ zákon tlaku a ktorý tvorí jeden zo základov hydrauliky. Ako 19 ročný mladík zostrojil jednu z prvých fungujúcich mechanických kalkulačiek. Vo filozofii sa venoval náboženskej tematike.

vrcholu S o uhol $3\pi/4$. Vyjadrenie koeficientov $f_{ij}$ pomocou binomických koeficientov je založené na identite (pozri obr. 4.3, diagram B)

$$f_{ij} = \binom{i+j-2}{j-1} \tag{4.4}$$

pričom indexy $i$ a $j$ sú ohraničené podmienkou $i, j \geq 1$. Koeficienty $f_{ij}$ , ktoré nevyhovujú tejto podmienke, sú pre konštrukciu Pascalovho trojuholníka nepodstatné, pretože, obrazne povedané, Pascalov trojuholník je zostrojený z vrcholu pyramídy smerom dole.




**Obrázok 4.3.** (A) Pascalov trojuholník, ktorého jednotlivé členy sú zostrojené tak, že pre danú polohu získame aktuálny člen tak, že sčítame dva susedné vyššie členy. (B) Pascalov trojuholník vyjadrený pomocou binomických koeficientov.

Porovnaním diagramov A a B na obr. 4.3 zistíme, že binomické koeficienty vyhovujú podmienkam z tejto vety

**Veta 4.1.** Binomické koeficienty spĺňajú podmienky

$$\binom{k}{0} = \binom{k}{k} = 1 \tag{4.5a}$$

$$\binom{k}{1} = \binom{k}{k-1} = k \tag{4.5b}$$

$$\binom{k}{i} = \binom{k}{k-i} \quad \text{(pre i=0,1,...,k)} \tag{4.5c}$$

$$\binom{k}{i} + \binom{k}{i+1} = \binom{k+1}{i+1} \tag{4.5d}$$

Dôkaz týchto vlastností priamo plynie z definície (4.3) binomických koeficientov. Dokážeme (4.5d) (ktorá sa nazýva Pascalova identita a je prepisom formúl (4.2) a (4.4))

$$\binom{k+1}{i+1} = \frac{(k+1)!}{(k-i)!(i+1)!} = \frac{k!(k+1)}{(k-i)!i!(i+1)} = \frac{k!}{(k-i)!i!}\frac{(k+1)}{(i+1)} =$$

$$\frac{k!}{(k-i)!i!}\frac{(i+1)+(k-i)}{(i+1)} = \frac{k!}{(k-i)!i!}\left(1+\frac{k-i}{i+1}\right) = \binom{k}{i} + \binom{k}{i+1}$$

Binomické koeficienty sú významné v algebre, kde umožňujú v kompaktnom tvare vyjadriť *n*-tú mocninu súčtu $(x + y)$.

**Veta 4.2 (binomická veta)**. Nech $x$ a $y$ sú ľubovoľné reálne čísla a $n$ je kladné celé číslo, potom

$$\left(x+y\right)^n=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}x^{n-j}y^j \tag{4.6}$$

Dôkaz tejto vety možno vykonať pomocou indukcie. Zvolíme podstatne jednoduchší postup, ako dokázať binomickú formulu, ktorá je veľmi blízko spätá s úlohou nájsť počet optimálnych ciest, ktoré spájajú dva vrcholy na ortogonálnej mriežke. Položme si otázku, koľkými spôsobmi môže byť realizovaný súčin $x^i y^j$ z mocniny $\left(x+y\right)^n$. Tento súčin môže byť vytvorený dvoma elementárnymi operáciami z čiastočných výsledkov $x^{i-1}y^j$ a $x^i y^{j-1}$ násobením premennou $x$ resp. premennou $y$

$$x^{i-1}y^j\cdot x+x^i y^{j-1}\cdot y\rightarrow x^i y^j$$

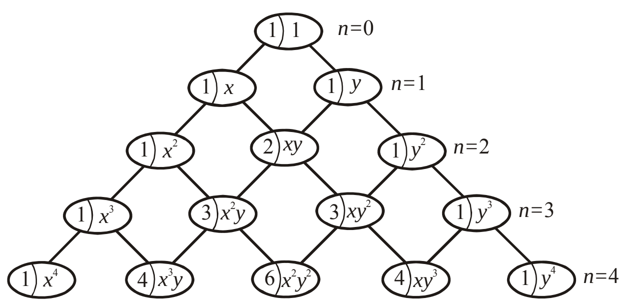
Tento jednoduchý výsledok môžeme použiť aj na výpočet počtu spôsobov konštrukcie súčinu $x^i y^j$, pozri obr. 4.4. Nech symbol $N\left(x^i y^j\right)$ označuje počet spôsobov konštrukcie súčinu $x^i y^j$, potom platí (porovnaj s formulou (4.2))

$$N\left(x^i y^j\right)=N\left(x^{i-1}y^j\right)+N\left(x^i y^{j-1}\right) \tag{4.7}$$

Môžeme teda uzavrieť, že Pascalov trojuholník a trojuholník na obr. 4.4 sú ekvivalentné, čiže porovnaním obr. 4.4 s obr. 4.3, diagram B, dostávame, že počet možných konštrukcií člena $x^{n-j}y^j$ je určený binomickým koeficientom $\left(n/j\right)$, alebo

$$\left(x+y\right)^n=\underbrace{\left(x+y\right)\ldots\left(x+y\right)}_{n-krát}=\binom{n}{0}x^n+\binom{n}{1}x^{n-1}y+\binom{n}{2}x^{n-2}y^2+\ldots+\binom{n}{n}y^n=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}x^{n-j}y^j$$

Týmto sme dokázali formulu (4.6).




**Obrázok 4.4.** Verzia Pascalovho trojuholníka pre výpočet spôsobov konštrukcie súčinov $x^i y^j$. Šikmé čiary idúce z pravej do ľavej strany (z ľavej do pravej strany) vyjadrujú súčin premennou $x$ ($y$). Čísla uvedené v ľavej strane oválov sú rovné, podobne ako v Pascalovom trojuholníku, binomickým koeficientom $\binom{i}{j}$.

**Príklad 4.2.** Zostrojte rozvoj $\left(x+y\right)^4$.

Použitím binomickej vety dostaneme

$$\left(x+y\right)^4=\sum_{j=0}^{4}\binom{4}{j}x^{4-j}y^j=\binom{4}{0}x^4+\binom{4}{1}x^3y+\binom{4}{2}x^2y^2+\binom{4}{3}x\,y^3+\binom{4}{4}y^4$$
$$=x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+y^4$$

**Príklad 4.3.** Aký je koeficient $x^{12}y^{13}$ v rozvoji $(x+y)^{25}$?
Z binomickej vety dostaneme, že tento koeficient je určený

$$\binom{25}{13} = \frac{25!}{13!12!} = 5\,200\,300$$

**Príklad 4.4.** Aký je koeficient $x^{12}y^{13}$ v rozvoji $(2x-3y)^{25}$?
Použitím binomickej vety dostaneme

$$\left(2x+(-3y)\right)^{25} = \sum_{j=0}^{25}\binom{25}{j}(2x)^{25-j}(-3y)^{j}$$

Potom koeficient, ktorý sa nachádza pri člene $x^{12}y^{13}$, je

$$\binom{25}{13}2^{12}(-3)^{13} = -\frac{25!}{13!12!}2^{12}3^{13} = -174493112729600$$

**Veta 4.3.** Nech *n* je nezáporné celé číslo, potom

$$\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j} = 2^{n} \tag{4.8}$$

Táto formula je jednoduchým dôsledkom binomickej vety (4.6), keď položíme $x = y = 1$. Takto môžeme zostrojiť množstvo analogických formúl, tak napríklad, ak položíme $x = 1$ a $y = 2$ , potom

$$(1+2)^{n} = \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}2^{j} = 3^{n} \tag{4.9}$$

Alebo, ak položíme $x = 1$ a $y = -1$, potom

$$(1-1)^{n} = \sum_{j=0}^{n}(-1)^{j}\binom{n}{j} = 0 \Rightarrow \sum_{j=0}^{\lceil n/2\rceil}\binom{n}{2j} = \sum_{j=0}^{\lceil n/2\rceil}\binom{n}{2j+1} \tag{4.10a}$$

alebo

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{2}+\binom{n}{4}+\ldots = \binom{n}{1}+\binom{n}{3}+\binom{n}{5}+\ldots \tag{4.10b}$$

Kde $\lceil x\rceil$ je horná celá časť reálneho čísla *x*.

**Veta 4.4**. Binomické koeficienty spĺňajú rekurentné vzťahy

$$\binom{i}{j+1} = \frac{i-j}{j+1}\binom{i}{j} \tag{4.11a}$$

$$\binom{i+1}{j} = \frac{i+1}{i-j+1}\binom{i}{j} \tag{4.11b}$$

Tieto rovnosti môžu byť jednoducho odvodené priamo z definície binomických koeficientov

$$\binom{i+1}{j} = \frac{(i+1)!}{j!(i+1-j)!} = \frac{i!}{j!(i-j)!}\frac{i+1}{i-j+1} = \frac{i+1}{i-j+1}\binom{i}{j}$$

**Príklad 4.5.** Ukážeme jednoduchý ilustračný príklad použitia vzťahov (4.11) pre jednoduchý rekurentný výpočet binomických koeficientov. Ako ilustráciu uvedieme výpočet koeficientov $\binom{5}{j}$, pričom bude vychádzať zo známej hodnoty koeficienta $\binom{5}{0}=1$.

1. krok:

$$\binom{5}{1}=\binom{5}{0+1}=\frac{5}{1}\binom{5}{0}=5$$

2. krok:

$$\binom{5}{2}=\binom{5}{1+1}=\frac{4}{2}\binom{5}{1}=10$$

3. krok:

$$\binom{5}{3}=\binom{5}{2+1}=\frac{3}{3}\binom{5}{2}=10$$

4. krok:

$$\binom{5}{4}=\binom{5}{3+1}=\frac{2}{4}\binom{5}{3}=5$$

5. krok:

$$\binom{5}{5}=\binom{5}{4+1}=\frac{1}{5}\binom{5}{4}=1$$

6. krok:

$$\binom{5}{6}=\binom{5}{5+1}=\frac{0}{6}\binom{5}{5}=0$$

Formula (4.11a) poskytuje nulové binomické koeficienty $\binom{i}{j}$, pre $i < j$. Tento spôsob výpočtu binomických koeficientov môžeme charakterizovať tak, že sme počítali koeficienty v 5. riadku Pascalovho trojuholníka. Alternatívna formula (4.11b) umožňuje prechod medzi dvoma susednými riadkami v Pascalovom trojuholníku. Tak napríklad zo známeho koeficienta $\binom{5}{1}$ spočítame koeficient $\binom{6}{1}$

$$\binom{6}{1}=\binom{5+1}{1}=\frac{6}{5}\binom{5}{1}=6$$

Význam tohto rekurentného spôsobu výpočtu binomických koeficientov spočíva v tom, že ak potrebujeme poznať napr. koeficient $\binom{100}{3}$, jeho priamy výpočet z definície (4.3) naráža na veľké problémy s presnosťou aritmetiky v počítačoch. Preto je výhodné vychádzať zo známeho koeficienta $\binom{100}{0}=1$, použitím (4.11a) postupne vypočítame koeficienty $\binom{100}{1}=100$, $\binom{100}{2}=4950$, $\binom{100}{3}=161700$. Priamy výpočet v počítači podľa vzorca $\binom{100}{3}=100!/(97!\cdot 3!)$ je v rámci štandardnej aritmetiky počítača nerealizovateľný.

**Veta 4.5. (Vandermondeova[3] identita)**

$$\binom{m+n}{r}=\sum_{i=0}^{r}\binom{m}{r-i}\binom{n}{i} \tag{4.12}$$

Dôkaz tejto vety vykonáme pomocou binomickej vety 4.2, uvažujme výraz

$$(1+x)^m(1+x)^n=(1+x)^{m+n}$$

Na obidve strany aplikujeme formulu (4.6)

$$(1+x)^m(1+x)^n=\sum_{j=0}^{m}\binom{m}{j}x^j\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}x^i=\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}\binom{m}{j}\binom{n}{i}x^{i+j}=\sum_{r=0}^{m+n}\left(\sum_{i=0}^{r}\binom{m}{r-i}\binom{n}{i}\right)x^r$$

$$(1+x)^{m+n}=\sum_{r=0}^{m+n}\binom{m+n}{r}x^r$$

Porovnaním pravých strán týchto výrazov dostaneme formulu (4.12)

Ak položíme v (4.12) $m=n$ a $r=n$, potom dostaneme novú identitu pre binomické koeficienty

$$\binom{2n}{n}=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{n-i}\binom{n}{i}=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}^2$$

**Veta 4.6.** Nech $n\geq r$ sú nezáporné celé čísla, potom

$$\binom{n+1}{r+1}=\sum_{j=r}^{n}\binom{j}{r} \tag{4.13}$$

Vetu dokážeme opakovaním použitím Pascalovej identity (4.5d)

$$\binom{n+1}{r+1}=\binom{n}{r}+\binom{n}{r+1}$$

$$\binom{n}{r+1}=\binom{n-1}{r}+\binom{n-1}{r+1}$$

$$\binom{n-1}{r+1}=\binom{n-2}{r}+\binom{n-2}{r+1}$$

.......................................

Potom platí

$$\binom{n+1}{r+1}=\binom{n}{r}+\binom{n-1}{r}+\binom{n-2}{r}+\ldots+\binom{r}{r}=\sum_{j=r}^{n}\binom{j}{r}$$

**Veta 4.7 (Multinomická veta)**. Nech $n$ je kladné prirodzené číslo, potom pre ľubovoľné reálne $x_1,x_2,\ldots,x_p$ platí

$$\left(x_1+x_2+\ldots+x_p\right)^n=\sum\frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_p!}x_1^{n_1}x_2^{n_2}\ldots x_p^{n_p} \tag{4.14}$$

---

[3] Alexandre Théophile Vandermonde (1735-1796) francúzsky matematik, fyzik, technológ a politik. V priebehu rokov 1771 – 1772 publikoval tri práce, v ktorých sa zaoberal teóriou koreňov algebraických rovníc. Na záver svojho života bol aktívnym politikom Francúzskej revolúcie, zastával významné funkcie vo vláde.

kde suma ide cez všetky nezáporné indexy $n_1$, $n_2$, ..., $n_p$, ktoré vyhovujú podmienke $n_1 + n_2 + ... n_p = n$.

Dôkaz tejto vety vykonáme tak, že binomickú formulu (4.6) prepíšeme do iného tvaru, ktorý budeme pokladať za indukčnú hypotézu.

$$\left(x_1 + x_2\right)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x_1^{\,n-j} x_2^{\,j} = \sum_{n_1, n_2} \frac{n!}{n_1!n_2!} x_1^{n_1} x_2^{n_2} \qquad (\spadesuit)$$

kde sumácia ide cez nezáporné indexy, ktoré vyhovujú podmienke $n_1 + n_2 = n$. Túto formulu, ktorá je formálnym prepisom binomickej formuly, aplikujeme pre rozklad $n$ = 3, pričom použijeme substitúciu $x_2 \rightarrow \left(x_2 + x_3\right)$. Dvojnásobným použitím hypotézy (♠) dostaneme

$$\begin{aligned}
\left(x_1 + \left(x_2 + x_3\right)\right)^n &= \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x_1^{\,n-j} \left(x_2 + x_3\right)^j = \sum_{n_1, n_2} \frac{n!}{n_1!n_2!} x_1^{n_1} \left(x_2 + x_3\right)^{n_2} \\
&= \sum_{n_1, n_2} \frac{n!}{n_1!n_2!} x_1^{n_1} \sum_{m_2, m_3} \frac{n_2!}{m_2!m_3!} x_2^{m_2} x_3^{m_3} = \sum_{n_1, m_2, m_3,} \frac{n!}{n_1!n_2!} \frac{n_2!}{m_2!m_3!} x_1^{n_1} x_2^{m_2} x_3^{m_3} \\
&= \sum_{n_1, n_2, n_3,} \frac{n!}{n_1!n_2!n_3!} x_1^{n_1} x_2^{n_2} x_3^{n_3}
\end{aligned}$$

Tento postup môžeme opakovať tak dlho, až získame formulu (4.14) pre dané $n$.

**Príklad 4.6.** Zostrojte koeficient pri $x^4$ vo výraze $\left(1 - x + 2x^2\right)^5$.

Použijeme formulu (4.14)

$$\begin{aligned}
\left(1 - x + 2x^2\right)^5 &= \sum_{n_1, n_2, n_3 \geq 0} \frac{5!}{n_1!n_2!n_3!} (1)^{n_1} (-x)^{n_2} \left(2x^2\right)^{n_3} \\
&= 5! \sum_{n_1, n_2, n_3 \geq 0} \frac{(-1)^{n_2} 2^{n_3}}{n_1!n_2!n_3!} x^{n_2 + 2n_3}
\end{aligned} \qquad (\clubsuit)$$

pričom sumačné indexy vyhovujú podmienke $n_1 + n_2 + n_3 = 5$. Pretože nás zaujíma koeficient pri $x^4$, sumačné indexy musia vyhovovať ďalšej podmienke $n_2 + 2n_3 = 4$, potom prípustné hodnoty sumačných indexov sú: (3,0,2), (2,2,1) a (1,4,0). Dosadením týchto prípustných indexov do formuly (♣) dostaneme explicitný výraz pre koeficient stojací pri $x^4$ v rozvoji $\left(1 - x + 2x^2\right)^5$

$$5!\left(\frac{2^2}{3!0!2!} + \frac{2^1}{2!2!1!} + \frac{2^0}{1!4!0!}\right) = 105$$

## 4.2 Permutácie a kombinácie

**Definícia 4.2.** ***Permutácia*** množiny $A = \{o_1, o_2, ..., o_n\}$ obsahujúca $n$ rôznych objektov, je usporiadaná $n$-tica objektov z tejto množiny, $P = \left(o_{p_1}, o_{p_2}, ..., o_{p_n}\right)$. Usporiadaná $r$-tica (kde $1 \leq r \leq n$) objektov z množiny $A$ sa nazýva $r$-permutácia.

Permutácia $P$ býva v mnohých prípadoch stotožňovaná priamo s indexmi $p_i$ , preto budeme permutáciu aj označovať takto

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ p_1 & p_2 & \ldots & p_n \end{pmatrix} \tag{4.15a}$$

alebo v zjednodušenom tvare

$$P = \left( p_1, p_2, \ldots, p_n \right) \tag{4.15b}$$

Permutáciu v tvare (4.15) môžeme taktiež interpretovať ako injektívne zobrazenie množiny $A = \{1,2,\ldots,n\}$ na seba, $P : A \to A$, pozri obr. 3.16.

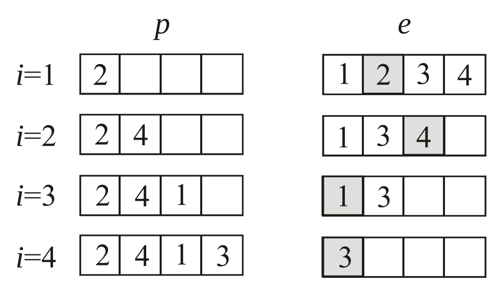
**Príklad 4.7.** Navrhnite algoritmus pre náhodnú generáciu permutácie $n$ objektov. Podmienka „náhodnosti" generovanej permutácie spočíva v tom, že ak by sme algoritmus použili $M$-krát, $M \to \infty$, potom pravdepodobnosť $prob\left(p_i = k\right)$, že v pozícii $i$ bude kladné celé číslo $1 \le k \le n$ , $p_i = k$, má asymptotickú hodnotu rovnakú pre každé $i$

$$\forall i \forall k \left( \lim_{M \to \infty} prob\left(p_i = k\right) = \frac{1}{n} \right)$$

Túto podmienku nie je ľahké dodržať pri návrhu algoritmu schopného úplne náhodne generovať permutáciu. Jednu z možných implementácií takého algoritmu uvádzame v Pascale

```
for i:=1 to n do e_i:=i;
for i:=1 to n do
begin k:=random(n-i+1)+1;
      p_i:=e_k;
      for j:=k to n-i+1 do e_j:=e_j+1;
end;
```

Algoritmus je inicializovaný vytvorením postupnosti `e=(1,2,...,n).` Potom pre `i=1,2,...,n` vygenerujeme náhodné číslo `k` z intervalu <`1,i`>, položíme $p_i$`:=`$e_k$, pričom časť postupnosti s indexmi z intervalu <`k+1,i`> sa posunie o jeden člen vľavo (zaplní sa prázdne miesto po použitom $e_k$).




**Obrázok 4.5.** Príklad náhodného generovania permutácie 4 objektov. Z pomocnej postupnosti $e$ v každom kroku $i$ vyberieme náhodne element (vysvietené okienko) a použijeme ho do tvorby permutácie $p$.

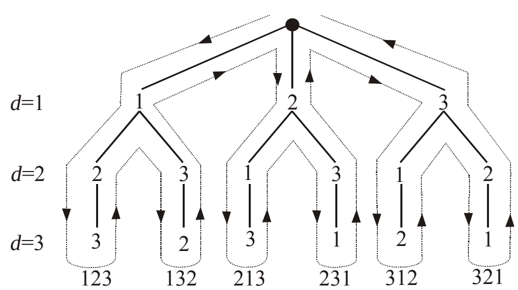
**Príklad 4.8.** Navrhnite algoritmus pre systematické generovanie všetkých permutácií $n$ objektov.

Naivné riešenie tejto úlohy spočíva v prístupe, že sa napíše $n$ do seba vnorených cyklov premenných $p_1$, $p_2$, ..., $p_n$, testovaním zostrojíme takú postupnosť týchto premenných, že ich číselné hodnoty sú rôzne (t. j. neexistujú také $i \neq j$, aby $p_i = p_j$). Tento algoritmus musí zostrojiť $n^n$ postupností, aby z nich testovaním vybral $n!$ korektných postupností reprezentujúcich permutácie. Naviac, štruktúra algoritmu sa mení s dimenziou úlohy $n$;

napríklad, ak zväčšíme $n$ na $n$+1, potom musíme pridať ďalší vnorený cyklus pre premennú $p_{n+1}$. Na prekonanie týchto algoritmických problémov s konštrukciou všetkých permutácií použijeme metódu spätného prehľadávania do hĺbky, ktorá sa systematickým spôsobom pohybuje po strome riešení, pričom na konci každej vetvy stromu riešení máme zostrojenú postupnosť čísel $p_1$, $p_2$, ..., $p_n$, ktorá reprezentuje novú permutáciu. Použitý algoritmus je univerzálne platný pre každé kladné $n$.

```
 U1:={1,2,...,n}; d:=1;
while d>0 do
if Ud≠{} then
begin pd:=get_element(Ud); Ud:=Ud-{pd};
      if d<n then
      begin d:=d+1;
            Ud:={1,2,...,n}-{ p1,p2,...,pd-1};
      end else print(p1,p2,...,pn);
end else d:=d-1;
```

Premenná `d` určuje hĺbku prehľadávania. Pre každú hĺbku prehľadávania `d` sa definuje nová množina indexov $U_d$, z ktorej sa vyberajú kandidáti na predĺženie postupnosti o jeden člen. Množina $U_d$ sa zostrojuje tak, aby neobsahovala indexy z aktuálnej postupnosti indexov, takže nemusíme neustále testovať, či nový pridaný index sa rovná niektorému predchádzajúcemu indexu z postupnosti. Algoritmus končí, keď množiny kandidátov $U_1, U_2, ..., U_n$ sú prázdne. Aktiváciou procedúry - funkcie `get_element(A)` dostaneme element neprázdnej množiny A. Beh algoritmu pre $n$=3 je znázornený na obr. 4.6, kde je uvedený strom riešení pre danú úlohu a prerušovanou orientovanou čiarou je znázornený pohyb algoritmu po celom strome.

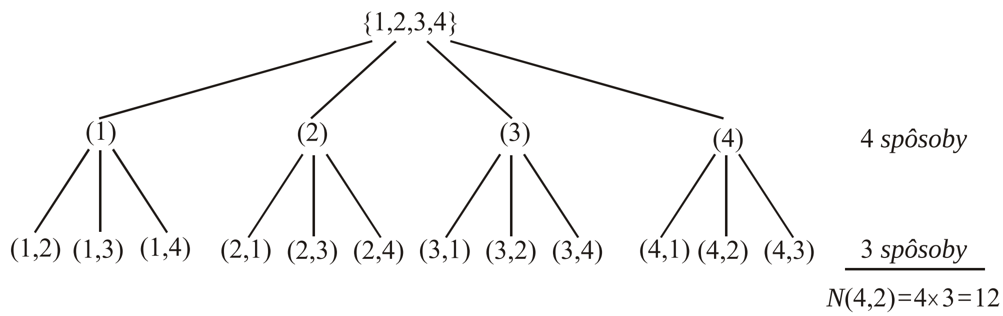



**Obrázok 4.6.** Strom riešení konštrukcie všetkých permutácií pre $n$=3 metódou spätného prehľadávania.

**Veta 4.8.** Počet $r$-permutácií množiny $n$ objektov je

$$N(n,r) = n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!} \tag{4.16}$$

Dôkaz tejto vety je jednoduchý. Prvý element permutácie môže byť vybraný z množiny $A$ $n$ spôsobmi. Potom nám zostáva $n$-1 spôsobov výberu druhého elementu, atď., pozri obr. 4.7.




**Obrázok 4.7**. Znázornenie tvorby 2-permutácií z množiny 4 objektov.

**Príklad 4.9.** Koľkými možnými spôsobmi možno vybrať prvých troch víťazov súťaže, do ktorej sa prihlásilo 100 účastníkov?
Pretože je podstatné, ktorá osoba bude odmenená prvou, druhou alebo treťou cenou, počet spôsobov výbery prvých troch odmenených je špecifikovaný počtom 3-permutácií zo 100 objektov

$$N(100,3) = 100 \cdot 99 \cdot 98 = 970\,200$$

**Príklad 4.10.** Nech na športovom podujatí sa zúčastňuje 8 pretekárov. Víťaz bude odmenený zlatou medailou, pretekár, ktorý skončí na druhom mieste bude odmenený striebornou medailou a pretekár, ktorý skončí na tretom mieste bude odmenený bronzovou medailou. Koľkými rôznymi spôsobmi môžu byť odmenení pretekári troma medailami?
Celkový počet troch pretekárov, ktorí sú odmenení medailou sa rovná počtu 3-permutácií z 8 objektov, $N(8,3) = 8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$.

**Definícia 4.3.** ***r*-kombinácia elementov** množiny $A = \{o_1, o_2, ..., o_n\}$ je podmnožina, ktorá obsahuje *r* elementov, $A' = \{o_{p_1}, o_{p_2}, ..., o_{p_r}\} \subseteq A = \{o_1, o_2, ..., o_n\}$.

Tak napríklad, pre $A = \{1,2,3,4,5,6\}$ je podmnožina $A' = \{2,4,6\}$ 3-kombináciou z *A*. Počet *r*-kombinácií z množiny obsahujúcej *n* elementov je označený veličinou $C(n,r)$.

**Príklad 4.11.** Vytvorte všetky možné 2-kombinácie elementov z množiny $A = \{a,b,c,d\}$. Potom existuje $C(4,2) = 6$ 2-kombinácií, ktoré sú reprezentované podmnožinami $\{a,b\}$, $\{a,c\}$, $\{a,d\}$, $\{b,c\}$, $\{b,d\}$ a $\{c,d\}$.

**Veta 4.9.** Počet *r*-kombinácií z množiny *n* objektov je

$$C(n,r) = \binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!\,r!} \tag{4.17}$$

Dôkaz tejto formuly je jednoduchý a je založený na tom, že podľa vety 4.8 poznáme počet *r*-permutácií $N(n,r)$, pretože permutácie sú závislé na poradí *r* elementov, musíme číslo $N(n,r)$ podeliť $N(r,r) = r!$

$$C(n,r)=\frac{N(n,r)}{N(r,r)}=\frac{n!/(n-r)!}{r!/(r-r)!}=\frac{n!}{r!(n-r)!}=\binom{n}{r}.$$

Týmto sme dokázali, že počet $r$-kombinácií nad množinou, ktorá obsahuje $n$ elementov, je určený binomickým koeficientom $\binom{n}{r}$.

Jeden z fundamentálnych pojmov kombinatoriky je „***kombinatorický dôkaz***“, je to taký dôkaz, ktorý minimalizuje použitie algebraických metód (napr. formúl špecifikujúcich vlastnosti binomických koeficientov), ale skôr je založený na argumentoch „spočítania“ a „zahrnutia“ elementov, pričom sa vychádza z elementárnych pojmov kombinatoriky, akými sú permutácie a kombinácie. Nie vždy je tento postup použiteľný alebo konceptuálne jasný, preto aj v kombinatorike sa v mnohých prípadoch obraciame na štandardné algebraické metódy založené na úprave formúl a úplnej indukcii.

**Príklad 4.12.** Gymnázium $X$ sa dohodlo s partnerským gymnáziom $Y$, že usporiadajú spoločný tenisový turnaj, na ktorom sa z každého gymnázia zúčastní päť študentov. Nech gymnázium $X$ ($Y$) má k dispozícii 10 (15) hráčov, koľko rôznych spôsobov obsadenia turnaja môžu gymnázia zostaviť?
Gymnázium X môže zostaviť $C(10,5)$ rôznych tímov a gymnázium $Y$ môže zostaviť $C(15,5)$ rôznych tímov, súčin týchto čísel nám poskytuje počet rôznych spôsobov obsadenia turnaje

$$C(10,5)\times C(15,5)=\binom{10}{5}\binom{15}{5}=756756$$

t. j. môžu zostaviť 756756 spôsobov obsadenia tenisového turnaja.

V mnohých prípadoch máme riešiť kombinatorické problémy, kde je povolené opakovanie určitých elementov. Ako príklad môžeme uviesť reťazec 6 znakov AABBCC, stojíme pred úlohou vypočítať všetky možné a neekvivalentné reťazce, ktoré môžu byť zostrojené z tohto reťazca permutáciami jeho elementov. Prvé intuitívne riešenie tohto problému je, že existuje 6! rôznych reťazcov, ktoré môžu byť zostrojené permutáciami pôvodného reťazca AABBCC. Táto odpoveď nie je správna, pretože ignoruje skutočnosť, že reťazce obsahuje tri dvojice (AA, BB a CC) rovnakých znakov, ktoré nie sú medzi sebou rozlíšiteľné. Preto musíme pôvodný výsledok opraviť tak, aby obsahoval aj možnosť opakovania týchto symbolov, potom celkový počet neekvivalentných reťazcov je

$$6!/(2!\cdot 2!\cdot 2!)=(2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6)/(2\cdot 2\cdot 2)=90$$

Pod permutáciou s opakovaním budeme rozumieť len vytváranie takých usporiadaných $n$-tíc z objektov množiny $A$, ktoré sú rôzne, čiže opakovanie $n$-tíc v dôsledku prehodenia poradia rovnakých elementov v $A$ je vylúčené.

**Veta 4.10.** Počet permutácií ***s opakovaním*** $n$ objektov, medzi ktorými je $n_1$ nerozlíšiteľných objektov prvého typu, $n_2$ nerozlíšiteľných objektov druhého typu,..., a $n_p$ nerozlíšiteľných objektov $p$-teho typu, pričom $n_1+n_2+...+n_p=n$, je určený

$$\frac{n!}{n_1!n_2!...n_p!} \tag{4.18}$$

Kombinatorický dôkaz je pomerne ľahký, je založený na skutočnosti, že celkový počet permutácií $n$ objektov, ktorý je rovný $n!$, je podelený počtami permutácií 1. typu, 2. typu, ... , týmto sa implementuje skutočnosť, že objekty rovnakého typu nie sú odlíšiteľné. Náznaky nekombinatorického dôkazu (4.18) boli použité pri dôkaze vety 4.7.

Problém zavedenia *r*-permutácií s opakovaním vyžaduje tento komentár: Z definície množiny vyplýva, že každý element sa v množine vyskytuje práve jedenkrát. Nech $a \in A$, potom $a \notin \left(A-\{a\}\right)$. Avšak pri špecifikácii *r*-permutácií s opakovaním pripúšťame možnosť, že niektoré elementy sa vyskytujú v množine aspoň dvakrát. Táto konceptuálna nekonzistentnosť zavedenia *r*-permutácie je formálne odstránená postulátom, že množina *A* je multimnožina, v ktorej je prípustné opakovanie niektorých elementov. Tak napr. $A=\{a,a,b\}$ je multimnožina, ktorá obsahuje element *a* dvakrát. Multimnožina môže byť formálne chápaná ako obyčajná množina, keď zavedieme indexovanie elementov, ktoré sa opakujú, napr. $A=\{a_1,a_2,b\}$; týmto indexovaním sú elementy dobre navzájom odlíšené. Obvykle sa v literatúre tento problém s opakovaním nespomína, je však dobré, aby každý vedel, o čo sa jedná a ako sa to dá riešiť na formálnej úrovni tak, aby použité formulácie boli korektné.

Problém určenia počtu *r*-permutácií s opakovaním nie je vo všeobecnosti riešiteľný analyticky pomocou formúl, ako je tomu napríklad pri určení počtu permutácií *n* objektov s opakovaním pomocou formule (4.18). Preto, ak chceme riešiť nejaký konkrétny príklad zistenia počtu *r*-permutácií s opakovaním, musíme použiť počítačovú enumeráciu týchto permutácií.

Uvažujme tento zjednodušený prípad *r*-permutácií s opakovaním. Chceme zostrojiť usporiadanú *r*-ticu, $(\alpha_1\alpha_2...\alpha_r)$, kde jej zložky $\alpha_i$ sú brané z množiny obsahujúcej *k* znakov, $B=\{\omega_1,\omega_2,...,\omega_k\}$.

**Veta 4.11**. Celkový počet *r*-permutácií obsahujúcej *k* znakov je

$$k^r \tag{4.19}$$

**Príklad 4.13**. Vytvorme 2-permutácie s opakovaním nad množinou znakov $B=\{a,b\}$, touto množinou.

$$P_1^{(2)}=(aa),P_2^{(2)}=(ab),P_3^{(2)}=(ba),P_4^{(2)}=(bb)$$

Použitím formuly (4.18) dostaneme počet 2-permutácií

$$2^2=4$$

Kombinácia s opakovaním v zjednodušenom prístupe môže byť chápaná ako vytváranie množiny, ktorá obsahuje *n* elementov, pričom elementy sú odlíšiteľné podľa *k* druhov. Pre ilustráciu tohto pojmu pokúsme sa vytvoriť množinu, ktorá obsahuje *n* = 3 prvkov, pričom tieto prvky sú troch druhov, označené napr. *a*, *b* a *c*. Takto špecifikované množinu sú

$$S_1=\{a,a,a\},\ S_2=\{a,a,b\},\ S_3=\{a,a,c\},\ S_4=\{b,b,b\},\ S_5=\{a,b,b\},$$
$$S_6=\{b,b,c\},\ S_7=\{c,c,c\},\ S_8=\{a,c,c\},\ S_9=\{b,c,c\},\ S_{10}=\{a,b,c\}$$

**Veta 4.12.** Celkový počet *r*-kombinácií z *k* znakov je

$$\binom{r+k-1}{k-1} \tag{4.20}$$

Kombinatorický dôkaz tejto vety spočíva v predstave, že prvky množiny $r$-kombinácie z $k$ znakov sú usporiadané lineárne tak, že najprv idú prvé znaky, potom druhé znaky, atď. Skupiny rovnakých znakov v tomto lineárnom útvare sú oddelené „separátormi“, ktorých je $k-1$. Tak napríklad, množiny z vyššie uvedeného ilustračného príkladu môžeme upraviť pomocou separátorov

$$S_1 = \{a,a,a||\},\ S_2 = \{a,a,|b|\},\ S_3 = \{a,a,||c\},\ S_4 = \{|b,b,b|\},\ S_5 = \{a,|b,b|\},$$

$$S_6 = \{|b,b|,c\},\ S_7 = \{||c,c,c\},\ S_8 = \{a||,c,c\},\ S_9 = \{|b,|c,c\},\ S_{10} = \{a|,b,|c\}$$

Teraz je už zrejmé, že počet $r$-kombinácií z $k$ znakov sa rovná počtu umiestnení $k$-1 separátorov na $r + k - 1$ miest, tento počet je určený binomickým koeficientom (4.20).

**Príklad 4.14**. Koľko je usporiadaných rozkladov čísla 10 na 4 kladné sčítance?
Predstavme si číslo 10 ako rad 10 jednotiek, medzi ktoré umiestnime 3 separátory, počet jednotiek medzi dvoma separátormi určuje jednotlivé sčítance. Stojíme však pred problémom, ako zabezpečiť, aby každý sčítanec bol nenulový, alebo, aby dva separátory nestáli bezprostredne vedľa seba. Toto zabezpečíme tak, že z 10 jednotiek odoberieme 4 jednotky a rozdelíme ich medzi jednotlivé sčítance. Tým máme zaručenú nenulovosť každého sčítanca, riešenie úlohy potom už musíme len rozdeliť pomocou troch separátorov 10 – 4 = 6 jednotiek, čo je určené binomickým koeficientom

$$\binom{6+4-1}{4-1} = 84$$

## Cvičenia

**Cvičenie 4.1.** Nájdite rozvoj $(x+y)^5$ pomocou kombinatorických úvah, koľkými spôsobmi vznikajú súčiny $x^iy^j$ pri rozvoji $(x+y)^5 = (x+y)(x+y)(x+y)(x+y)(x+y)$, výsledky porovnajte s príkladom 4.1.

**Cvičenie 4.2.** Nájdite koeficient $x^8y^9$ v rozvoji $(3x+2y)^{17}$.

**Cvičenie 4.3.** Nech riadok v Pascalovom trojuholníku obsahuje binomické koeficienty $(10/k)$, pre $0 \le k \le 10$ má tieto členy: 1, 10, 45, 120, 210, 252, 210, 120, 45, 10, 1. Použitím Pascalovej identity (4.5d) zostrojte nasledujúci riadok.

**Cvičenie 4.4.** John býva v New Yorku na Manhattane na rohu 5th Avenue a 5th Street. Akú minimálnu vzdialenosť prejde do práce ráno, ak jeho úrad sídli na rohu 8th Avenue a 12th Street? Koľko rôznych ciest má túto minimálnu vzdialenosť?

**Cvičenie 4.5.** Dokážte platnosť identity $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$.

**Cvičenie 4.6.** Dokážte platnosť identity $\binom{n}{r}\binom{r}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{r-k}$.

**Cvičenie 4.7.** Použitím identity (4.11a) spočítajte postupne binomický koeficient $(15/4)$, pričom výpočet je inicializovaný „počiatočnou hodnotou“ binomického koeficienta $(15/0)=1$.

**Cvičenie 4.8.** Postup výpočtu binomického koeficientu z cvičenia 4.7 zovšeobecnite do tvaru algoritmu špecifikovaného napr. v PseudoPascale pre výpočet binomického koeficientu $(i/j)$, kde $i \geq j \geq 0$. Diskutujte význam tohto algoritmu vzhľadom k algoritmu, ktorý počíta binomické koeficienty pomocou ich definície, $(i/j) = i!/(j!(i-j)!)$.

**Cvičenie 4.9.** V Pascalovom trojuholníku je pre *n*-tý riadok určená počiatočná časť členov, zostrojte nasledujúci člen tejto postupnosti: 1, 9, 36, 84.

**Cvičenie 4.10.** Zostrojte koeficient člena $x^3y^2z^5$ z rozvoja $(x+y+z)^{10}$.

**Cvičenie 4.11**. Nech $A=\{a,b,c,d\}$, vytvorte

(a) všetky permutácie vzhľadom k tejto množine,

(b) všetky permutácie, ktoré končia znakom *a*,

(c) všetky permutácie, ktoré majú znak *a* práve raz.

**Cvičenie 4.12.** Aký je počet 5-permutácií nad množinou *A*, ktorá obsahuje 8 elementov, |A| = 8 ?

**Cvičenie 4.13.** Koľko možností existuje pre prvé tri pozície v konských dostihoch pre 12 koňov?

**Cvičenie 4.14.** Koľko existuje binárnych reťazcov dĺžky 10, ktoré

(a) obsahujú práve jednu jednotku,

(b) maximálne tri jednotky,

(c) minimálne tri jednotky,

(d) rovnaký počet jednotiek a núl.

**Cvičenie 4.15.** Koľko existuje permutácií nad reťazcom ABCDEFG, ktoré

(a) obsahujú podreťazec BCD,

(b) obsahujú podreťazec CFGA,

(c) dva podreťazce BA a GF,

(d) dva podreťazce ABC a DE,

(e) dva podreťazce DEF a ABG.

**Cvičenie 4.16.** Koľkými spôsobmi môžeme usporiadať 8 mužov a 5 žien tak, aby dve ženy nestáli vedľa seba?

**Cvičenie 4.17.** Na skúške z diskrétnej matematiky bolo nutné vyhodnotiť 40 jednoduchých otázok tak, že musia byť označené ako pravdivé alebo nepravdivé, pričom 17 otázok je nepravdivých. Koľkými rôznymi spôsobmi môžu byť označené jednotlivé príklady za pravdivé a nepravdivé?

**Cvičenie 4.18.** Na Ústave kognitívnej vedy našej fakulty je zamestnaných sedem žien a deväť mužov.
(a) Koľkými spôsobmi môžem vytvoriť štátnicovú komisiu, ktorá má šesť členov tak, aby mala rovnaký počet mužov a žien?
(b) Koľkými spôsobmi môžeme zostaviť päťčlennú vedeckú radu ústavu, tak, aby obsahovala aspoň jedného muža a jednu ženu?

**Cvičenie 4.19.** Anglická abeceda má 21 spoluhlások a 5 samohlások. Koľko reťazcov dĺžky 6 môžeme zostaviť nad touto abecedou tak, aby
(a) obsahovali práve jednu samohlásku?
(b) obsahovali práve dve samohlásky?
(c) obsahovali maximálne jednu samohlásku?
(d) obsahovali maximálne dve samohlásky?

**Cvičenie 4.20.** Koľkými spôsobmi môžeme vytvoriť postupnosť piatich znakov nad množinou, ktorá obsahuje tri elementy, ak opakovanie je povolené?

**Cvičenie 4.21.** Koľkými spôsobmi môžeme vybrať päť elementov do postupnosti z množiny obsahujúcich päť elementov, pričom opakovanie je povolené?

**Cvičenie 4.22.** Koľko reťazcov obsahujúcich šesť rôznych písmen môže byť vytvorených?

**Cvičenie 4.23.** Koľkými spôsobmi môžeme vybrať 8 mincí z detskej sporiteľničky (prasiatka), ktorá obsahuje 100 jednokorunových mincí a 50 dvojkorunových mincí?