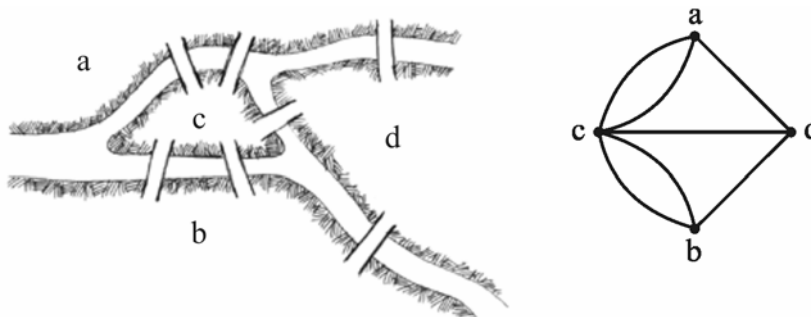


# 10. kapitola

## Teória grafov I – definícia grafu, základné pojmy, podgraf, cesty a kružnice v grafe, orientované grafy, eulerovský ťah, hamiltonovská kružnica

### 10.1 Úvodné poznámky

Teória grafov ako matematická disciplína vznikla v 18. storočí hlavne zásluhou švajčiarskeho matematika Leonarda Eulera<sup>1</sup>. Ako jeden prvý príklad aplikácie teórie grafov ukážeme jeho riešenie slávneho problému mostov v Královci (vtedy Königsberg v Prusku, teraz Kaliningrad v Rusku). Toto mesto malo 7 mostov, ktoré spájali brehy rieky a 2 ostrovy. Niektorých obyvateľov mesta zaujal problém, či existuje taká prechádzka mestom, aby každý most prešli práve raz a vrátili sa domov. *Leonhard Euler* riešil problém nahradením brehov a ostrovov (spojitých území) vrcholmi a mostov hranami, čím vytvoril graf s násobnými hranami. Úlohou teraz bolo nájsť taký uzavretý ťah v grafe, aby obsahoval každú hranu práve raz. Euler dokázal, že pre danú úlohu je tento problém neriešiteľný (príslušnú vetu uvedieme neskôr).



**Obrázok 10.1.** Mosty v Královci a ich reprezentácia pomocou grafu. Úloha je prejsť po všetkých mostoch práve raz a vrátiť sa domov. Tento problém nemá riešenie – ak z nejakého vrcholu chceme vyjsť a aj sa doňho vrátiť vždy inou hranou a pritom použiť všetky hrany, musí vrchol byť spojený s párnym počtom hrán. To musí platiť pre všetky vrcholy.

---

<sup>1</sup> Leonhard Euler (1707-1783) bol synom kalvínskeho kňaza v Bazileji vo Švajčiarsku. V 13. rokoch na želanie svojho otca tam začal študovať na univerzite teológiu. Pod vplyvom učiteľa matematiky Bernoulliho zo slávnej rodiny matematikov začal aj Euler študovať matematiku, a vo svojich 16 rokoch úspešne ukončil univerzitné vzdelanie. Na pozvanie Petra Veľkého pracoval 14 rokov v Akadémii v Petrohrade, potom bol 25 rokov v Berlínskej Akadémii, aby sa na koniec života vrátil do Petrohradu. Euler bol neuveriteľne tvorivý vo všetkých oblastiach matematiky, najmä teórii čísel, kombinatorike a analýze, rovnako ako v jej aplikáciách, napr. v hudbe a stavbe lodí. Napísal 1100 publikácií, trvalo ešte 47 rokov po jeho smrti, kým ich všetky uverejnili. Mal 13 detí, dokázal pracovať a súčasne húpať deti na kolenách. Posledných 17 rokov života bol slepý, ale vďaka fantastickej pamäti to nespomalilo jeho prácu, svoje výsledky diktoval. Publikácia jeho súhrnného diela má viac ako 75 zväzkov.

Okrem uvedeného „zábavného problému“ existujú aj veľmi užitočné aplikácie grafov – napr. pomocou teórie grafov sa dá rozhodnúť, či obvod môže byť vyrobený ako plošný tlačný spoj. V chémii chemické molekuly reprezentované grafmi, pomocou nich sa dajú odlišiť tzv. izoméry, t. j. molekuly, ktoré majú rovnaké chemické zloženie, ale odlišujú sa svojou priestorovou štruktúrou. Grafmi sa reprezentujú aj počítačové alebo transportné siete, kde sa grafovo-teoretické algoritmy využívajú na nájdenie najkratšej cesty.

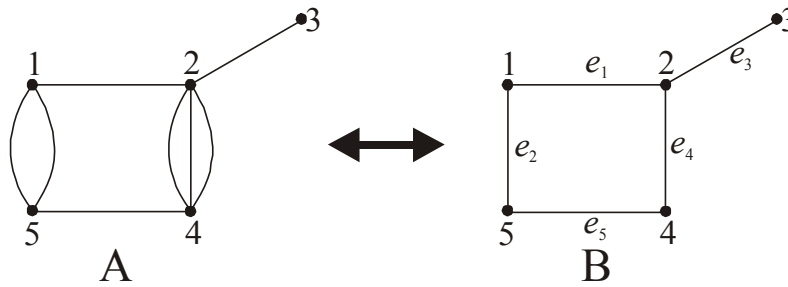
Grafy pozostávajú z vrcholov (alebo, inak povedané, uzlov) a hrán spájajúcich tieto vrcholy. Podľa druhov hrán, ktoré môžu dvojice vrcholov spájať (inak povedané, sú s nimi incidentné), sa rozlišujú *orientované*, *neorientované* a *zmiešané grafy* (obsahujú iba hrany so šípkami, neobsahujú hrany so šípkami, obsahujú tak hrany so šípkami ako aj bez nich) alebo *multigrafy* (obsahujúce násobné hrany, reprezentujúce napr. násobné väzby v molekulách). Šípkou sa pritom označuje smer hrany, teda z ktorého vrcholu vychádza (počiatočný vrchol) a do ktorého vrcholu vchádza (koncový vrchol). Taký graf napríklad môže byť použitý na zobrazenie výsledkov športového turnaja, kde vrcholy sú súťažiaci a kde šípka je orientovaná od porazeného k víťazovi (alebo naopak), a hrana bez šípky označuje remízu. Pod grafom bez prívlastku bežne chápeme neorientovaný graf. Budeme sa ďalej zaoberať iba konečnými grafmi, ktoré majú konečný počet vrcholov a hrán.

**Definícia 10.1.** *Neorientovaný graf*  $G=(V,E)$  je definovaný pomocou neprázdnej množiny vrcholov  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  a množiny  $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$  neorientovaných hrán, pričom každá hrana  $e \in E$  je reprezentovaná neusporiadanou dvojicou vrcholov z  $V$ ,  $e = \{v, v'\} \subseteq V$ .

Neorientovaný graf napr. môže popisovať železničnú alebo telefónnu sieť.

**Definícia 10.2.** *Orientovaný graf*  $G=(V,E)$  je definovaný pomocou množiny vrcholov  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  a množiny  $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\} \subseteq V \times V$  hrán, pričom každá hrana  $e \in E$  je reprezentovaná usporiadanou dvojicou  $e = (v, v') \in V \times V$ . Hovoríme, že hrana  $e = (v, v')$  je orientovaná z vrcholu  $v$  do vrcholu  $v'$ .

Hrany v grafe môžu byť špecifikované ako *násobné hrany*. Budeme predpokladať, že definícia grafu je rozšírená o ohodnotenie hrán kladným celým číslom,  $f : E \rightarrow \{1, 2, \dots\}$ . Potom, ak  $f(e) = 1$ , hovoríme, že hrana  $e$  je jednoduchá, v opačnom prípade, ak  $f(e) \geq 2$ , hovoríme, že hrana  $e$  je násobná, jej *multiplicita* je špecifikovaná číslom  $f(e)$ , pozri obr. 10.2. Možnosť zavedenia násobných hrán približuje matematickú koncepciu grafu k niektorým prírodovedným aplikáciám. Napríklad, matematické modelovanie štruktúrneho vzorca v chémii vyžaduje použitie grafu s násobnými hranami (pripomeňme, že chemická štruktúrna formula obsahuje aj násobné väzby – dvojné a trojné, ktoré sú dobre formalizovateľné pomocou násobných hrán grafu).



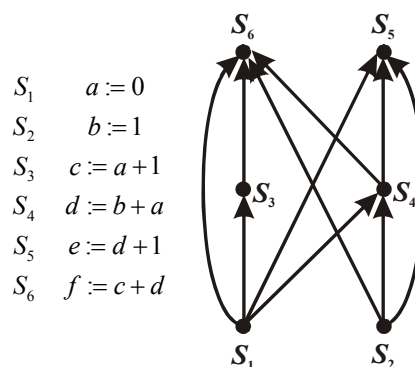
**Obrázok 10.2.** Diagram A znázorňuje graf s násobnými hranami  $\{1,5\}$  a  $\{2,4\}$ , diagram B znázorňuje graf s množinou hrán  $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ , kde zobrazenie  $f$  je špecifikované takto:  $f(e_1) = 1$ ,  $f(e_2) = 2$ ,  $f(e_3) = 1$ ,  $f(e_4) = 3$ ,  $f(e_5) = 1$ .

**Pseudograf** je taký graf, ktorý neobsahuje orientované hrany, ale ktorý môže obsahovať násobné hrany alebo slučky (slučka je hrana, ktorá je vychádzajúca a vchádzajúca do rovnakého vrcholu). Aj keď terminológia nie je ustálená, väčšinou sa používa rozdelenie podľa tabuľky 10.1

**Tabuľka 10.1.** Názvy grafov podľa typu hrán

Typ	Hrany	Násobné hrany povolené	Slučky povolené
obyčajný graf	neorientované	nie	nie
multigraf	neorientované	áno	nie
pseudograf	neorientované	áno	áno
orientovaný graf	orientované	nie	áno
orientovaný multigraf	orientované	áno	áno

Grafy sa využívajú v najrôznejších oblastiach vedy a techniky. V ekológii napríklad orientované hrany môžu predstavovať, ktorý druh je potravou iného druhu. Ako už bolo uvedené vyššie, chemická štruktúrna formula je formálne reprezentovaná neorientovaným grafom s násobnými hranami. V psychológii sa grafy využívajú na znázornenie, kto je koho priateľom, alebo na znázornenie dominancie, v antropológii na znázornenie príbuzenských vzťahov, v súťažiach na výsledky turnajov a napr. pri počítačoch na znázornenie časového poradia úloh alebo toho, ktoré úlohy môžu byť spustené súčasne.



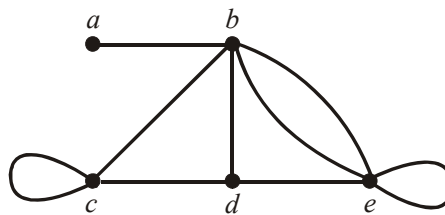
**Obrázok 10.3.** Príklad grafu plánovania udalostí. Graf ukazuje, že príkaz  $S_5$  nemôže byť vykonaný pred príkazmi  $S_1$ ,  $S_2$ , a  $S_4$ .

Počítačové programy môžu byť rýchlejšie spracované pri súčasnom spracovaní niektorých príkazov. Je dôležité nevykonať príkaz, ktorý vyžaduje výsledky ešte nevykonaných príkazov. Závislosť príkazov na predchádzajúcich príkazoch môže byť reprezentovaná orientovaným grafom. Každý príkaz je reprezentovaný vrcholom, a z jedného vrcholu do druhého ide hrana, keď príkaz reprezentovaný druhým vrcholom nemôže byť

spracovaný pred príkazom reprezentovaným prvým vrcholom. Budeme tiež požadovať, že premenná sa nemôže zároveň meniť a byť používaná v inom príkaze. Taký graf voláme *graf plánovania udalostí* (precedence graph), príklad grafu pre počítačový program je na obr. 10.3. Ukazuje, že príkaz  $S_5$  nemôže byť vykonaný pred príkazmi  $S_1$ ,  $S_2$ , a  $S_4$ .

## 10.2 Niektoré základné definície

Dva vrcholy  $u$  a  $v$  v neorientovanom grafe  $G$  sa volajú **susedné** (adjacent, neighbours) v  $G$ , keď  $\{u,v\}$  je hrana grafu  $G$ . Keď  $e=\{u,v\}$ , o hrane  $e$  sa hovorí, že je **incidentná** (incident) s vrcholmi  $u$  a  $v$ . O hrane  $e$  sa tiež hovorí, že **spája** vrcholy  $u$  a  $v$ . **Stupeň vrcholu** v neorientovanom grafe je rovný počtu hrán s ním incidentných, s výnimkou faktu, že slučka na vrchole prispieva dvakrát k stupňu vrcholu. Stupeň vrcholu  $v$  sa označuje  $deg(v)$ . Stupne vrcholov sú ilustrované na obr. 10.4.



**Obrázok 10.4.** Stupne vrcholov grafu na tomto obrázku sú nasledujúce:  $deg(a)=1$ ,  $deg(b)=5$ ,  $deg(c)=4$ ,  $deg(d)=3$ ,  $deg(e)=5$

Vrchol stupňa 0 sa volá **izolovaný**; taký vrchol nie je spojený zo žiadnym iným vrcholom. Keď sčítame stupne všetkých vrcholov grafu, každá hrana grafu prispieva k súčtu dvojkou. Súčet stupňov vrcholov je teda dvojnásobkom počtu hrán. Pre neorientovaný graf (môže mať aj násobné hrany a slučky) s  $|E|$  hranami teda platí

$$2|E| = \sum_{v \in V} deg(v) \quad (10.1)$$

**Veta 10.1.** Neorientovaný graf má párny počet vrcholov nepárneho stupňa.

Dôkaz: Nech  $V_1$  a  $V_2$  sú množiny vrcholov párneho, resp. nepárneho stupňa neorientovaného grafu  $G=(V,E)$ . Potom

$$2|E| = \sum_{v \in V} deg(v) = \sum_{v \in V_1} deg(v) + \sum_{v \in V_2} deg(v) \quad (10.2)$$

Pretože  $deg(v)$  je párne pre  $v \in V_1$ , prvý člen na pravej strane je párny. Súčet na pravej strane musí byť tiež párna, pretože ľavá strana je párna. Preto aj druhý člen na pravej strane musí byť párny. Pretože všetky sčítance tejto sumy sú nepárne, aby vytvorili párne číslo, musí ich byť párny počet. ■

Orientované hrany sa vyjadrujú pomocou usporiadanej dvojice vrcholov, napr.  $(u,v)$  pre orientovanú hranu smerujúcu z vrcholu  $u$  (začiatočného vrcholu) do vrcholu  $v$  (koncového vrcholu). V grafe s orientovanými hranami pomenujeme **vstupný stupeň vrcholu**  $v$  počet hrán, ktoré majú vrchol  $v$  ako koncový vrchol. Túto hodnotu označujeme  $deg^-(v)$ . Ako **výstupný stupeň vrcholu**,  $deg^+(v)$ , označíme počet hrán, ktoré z vrcholu  $v$  vychádzajú, teda ho majú ako začiatočný vrchol.

**Veta 10.2.** Nech  $G=(V,E)$  je graf s orientovanými hranami. Potom

$$|E| = \sum_{v \in V} \text{deg}^+(v) = \sum_{v \in V} \text{deg}^-(v) \quad (10.3)$$

Dôkaz: Pretože každá orientovaná hrana má svoj vstupný a výstupný vrchol, prispieva rovnako jednotkou k sumám vstupných a výstupných stupňov vrcholov, ktoré sa potom rovnajú počtu orientovaných hrán. ■

Pre daný graf nie je zložitá nájsť postupnosť stupňov vrcholov. Naopak, keď je daná konečná postupnosť celých nezáporných čísel  $s_1, s_2, \dots, s_n$ , je otázka, či môžeme zostrojiť graf s vrcholmi, ktoré majú po poriadku stupne rovné týmto číslam. Ak áno, postupnosť voláme *grafová postupnosť*. Aby postupnosť bola grafová, musí pre každý index  $i$  platiť  $s_i \leq n-1$  a samozrejme aj  $\sum_{i=1}^n s_i$  je párne číslo. Nutná a postačujúca podmienka je vyjadrená v Havlovej vete (tiež sa niekedy volá Hakimiho veta, podľa autora, ktorý prišiel na rovnaký výsledok nezávisle o 7 rokov neskôr)

**Veta 10.3.** Nech je daná nerastúca postupnosť nezáporných celých čísel pre  $n \geq 3$

$$s_1, s_2, \dots, s_n, \quad (10.4)$$

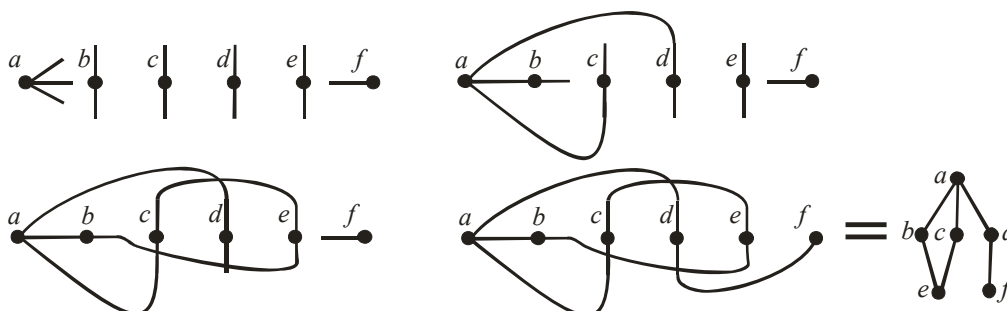
kde  $1 \leq s_1 \leq n-1$ . Postupnosť (10.4) je grafová práve vtedy, keď je grafová tiež postupnosť

$$s_2 - 1, s_3 - 1, \dots, s_{s_1+1} - 1, s_{s_1+2}, \dots, s_n \quad (10.5)$$

Vetu nebudeme dokazovať. Táto veta môže byť použitá rekurzívne k zisteniu, či dlhšia postupnosť je grafová. Základný prípad je, že postupnosť 0 je grafová. Keď v akomkoľvek štádiu rekurzie je ľubovoľný prvok novej postupnosti záporný, ani pôvodná postupnosť nie je grafová. Poznamenajme, že skrátené postupnosti môžu vyžadovať preusporiadanie podľa veľkosti, kým sa na ne veta znova použije. Veta sa dá použiť aj pre konštrukciu grafu pre množinu vrcholov s danými stupňami. Keď je postupnosť grafová, zoberieme prvý vrchol o stupni  $s_1$  a spojíme ho hranami s  $s_1$  ďalšími vrcholmi. Podobne postupujeme s ďalšími vrcholmi. Touto konštrukciou vytvorený graf nemusí byť jediný pre množinu vrcholov s danými stupňami, postupnosť môže odpovedať aj veľa iným neizomorfným grafom.

Ako príklad kontroly, či je postupnosť grafová, si môžeme uviesť postupnosť 3,2,2,2,2,1. Tú zmeníme odobratím prvého čísla - trojky a odpočítaním jednotiek od nasledujúcich troch čísel na postupnosť 1,1,1,2,1, tú usporiadame, dostaneme 2,1,1,1,1, odobratím prvého čísla - dvojky a odpočítaním dvoch jednotiek dostávame 0,0,1,1, tú usporiadame, dostaneme 1,1,0,0, odobratím prvého čísla - jednotky a odpočítaním jednotky od ďalšieho čísla dostávame 0,0,0,0. Teda postupnosť je grafová.

Graf odpovedajúci tejto postupnosti zostavíme ako na obr. 10.5.

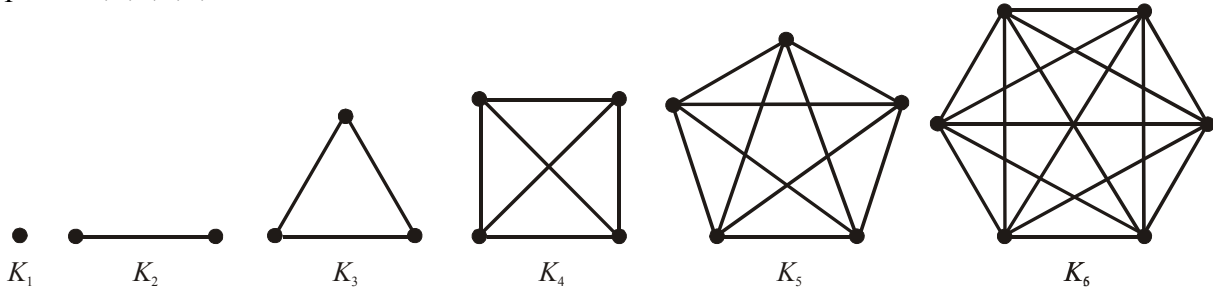


**Obrázok 10.5.** Konštrukcia grafu odpovedajúcej grafovej postupnosti 3,2,2,2,2,1.

### 10.2.1. Niektoré špeciálne typy grafov

#### Kompletný graf

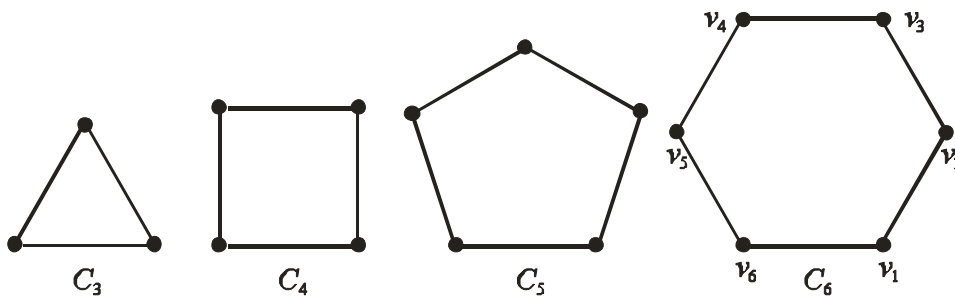
**Kompletný graf** (alternatívne volaný aj úplný graf) o  $n$  vrcholoch, označovaný ako  $K_n$ , je taký graf, ktorý obsahuje práve jednu hranu medzi každou dvojicou rôznych vrcholov. Grafy  $K_n$  pre  $n=1,2,3,4,5,6$  sú zobrazené na obr. 10.6.



Obrázok 10.6. Kompletné grafy

#### Kružnice

**Kružnica** dĺžky  $n$ , alebo  **$n$ -uholník**  $C_n$ ,  $n \geq 3$ , pozostáva z vrcholov  $v_1, v_2, \dots, v_n$  a hrán  $\{v_1, v_2\}$ ,  $\{v_2, v_3\}, \dots, \{v_{n-1}, v_n\}$ , a  $\{v_n, v_1\}$ . Na obr. 10.7 sú  $n$ -uholníky  $C_3, C_4, C_5$  a  $C_6$ .



Obrázok 10.7. Kružnice

#### Bipartitné grafy

Graf, ktorý má vlastnosť, že jeho vrcholová množina môže byť rozdelená na dve disjunktné podmnožiny  $V_1$  a  $V_2$  tak, že každá hrana spája vrchol z jednej z týchto podmnožín s vrcholom z druhej z týchto podmnožín, sa volá **bipartitný graf**. Ako príklad môžeme uviesť graf existujúcich a minulých manželstiev na dedine, kde hrana spája vždy manžela s manželkou. Taký graf sa dá rozdeliť na množinu manželov na jednej strane a množinu manželiek na strane druhej. Niektorí z páru môžu byť spojení s viacerými vrcholmi druhej podmnožiny, keď boli viackrát ženatí/vydaté za rozdielnych partnerov, ale aspoň na Slovensku sa zatiaľ nenájde pár zosobášených mužov či žien.

**Príklad 10.1.** Sú grafy  $C_6$  alebo  $K_6$  bipartitné?

Graf  $C_6$  z obr. 10.7. je bipartitný,  $V_1 = \{v_1, v_3, v_5\}$ ,  $V_2 = \{v_2, v_4, v_6\}$ . Graf  $K_6$  z obr. 10.6. nie je bipartitný, pri každom možnom rozložení na dve vrcholové podmnožiny jedna z podmnožín musí obsahovať aspoň 2 vrcholy, ktoré podľa definície kompletného grafu musia byť spojené hranou. V skutočnosti, žiadny graf o viac ako dvoch vrcholoch nie je kompletný a súčasne bipartitný. Ďalej zmieňovaný "kompletný bipartitný" graf je špeciálny typ grafu, ktorý nie je kompletný ako taký, teda ľubovoľná dvojica vrcholov v ňom nie je spojená hranou.

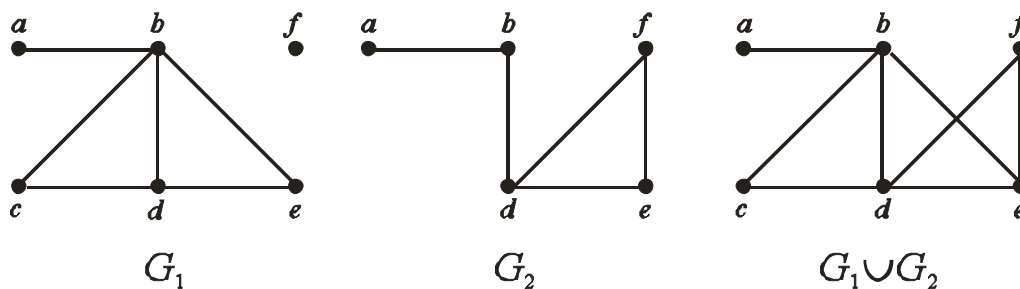
Ako možné aplikácie špeciálnych typov grafov si môžeme uviesť lokálnu sieť počítačov. Takáto sieť môže mať typicky jednu z dvoch topológií. Prvou typickou topológiou je hviezdicová, kde všetky zariadenia sú prepojené s centrálnym riadiacim zariadením. Táto topológia môže byť reprezentovaná ako *kompletný bipartitný graf*, ktorý značíme  $K_{1,n}$ , kde množinu  $V_1$  tvorí jeden vrchol, množinu  $V_2$  tvorí  $n$  vrcholov, a slovo kompletný tu znamená, že všetky vrcholy z jednej množiny sú prepojené so všetkými vrcholmi z druhej množiny.

Druhou typickou topológiou je kruhová topológia, kde každé zariadenie je spojené presne s dvoma ďalšími. Takéto topológie sa modelujú pomocou  $n$ -uholníkov  $C_n$ , ako na obr. 10.7. Samozrejme existujú aj ich rôzne kombinácie.

Keď chceme modelovať iba podproblém väčšieho problému (napr. dopravného), môžeme z grafu odstrániť uzly (mestá), ktoré nás nezaujímajú, a všetky hrany s nimi spojené. Tak dostávame z pôvodného grafu dopravnej siete jeho podgraf.

### Podgraf a zjednotenie

Podgraf grafu  $G=(V,E)$  je graf  $H=(W,F)$ , kde  $W \subseteq V$  a  $F \subseteq E$ . Zjednotenie dvoch grafov  $G_1=(V_1,E_1)$  a  $G_2=(V_2,E_2)$  je graf s vrcholovou množinou  $V_1 \cup V_2$  a hranovou množinou  $E_1 \cup E_2$ . Zjednotenie týchto grafov sa značí  $G_1 \cup G_2$ . Príklad je uvedený na obr. 10.8.

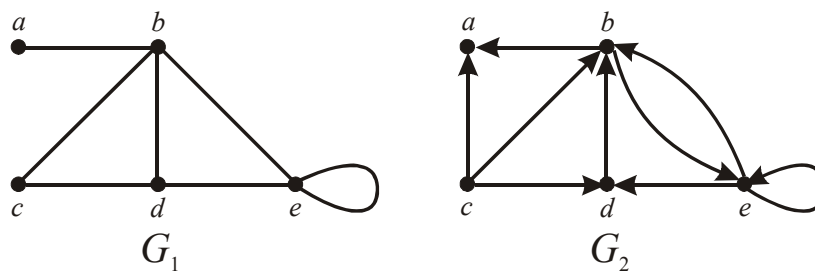


**Obrázok 10.8.** Príklad zjednotenia dvoch grafov. Grafy  $G_1$  a  $G_2$  sú súčasne podgrafmi zjednoteného grafu  $G_1 \cup G_2$

## 10.3 Reprezentácia grafov a izomorfizmus grafov

Niekedy dva grafy sú rovnaké v tom zmysle, že keď vhodne posunieme vrcholy jedného grafu nad druhý tak, aby sa pokrývali, aj všetky hrany sa budú pokrývať. Túto voľne povedanú definíciu môžeme preformulovať tak, že existuje medzi grafmi priradenie 1-1 vrcholov, ktoré zachováva hrany. V tom prípade hovoríme, že grafy sú *izomorfné*. Určiť, či sú grafy izomorfné, býva niekedy veľmi zložitý problém. Aby sa grafy dali počítačovo spracovať, potrebujeme ich reprezentovať aj inak ako grafickým obrázkom.

Jednou z možností reprezentácie obyčajného grafu je vypísať všetky vrcholy a hrany tohto grafu. Inou možnosťou zápisu je zoznam susedov (adjacency list), ktorý špecifikuje susedné vrcholy pre každý vrchol grafu. U orientovaného grafu sa tak dajú pre každý vrchol pripísať všetky koncové vrcholy hrán začínajúcich u daného vrcholu grafu (obr. 10.9 a tab. 10.2).



Obrázok 10.9. Pseudograf a orientovaný graf na ukážku reprezentácie grafu.

Tabuľka 10.2. Zoznam susedov pre grafy z obr. 10.9

Vrchol grafu $G_1$	Susedné vrcholy	Vrchol grafu $G_2$	Susedné vrcholy
$a$	$b$	$a$	
$b$	$a, c, d, e$	$b$	$a, e$
$c$	$b, d$	$c$	$a, b, d$
$d$	$b, c, e$	$d$	$b$
$e$	$b, d, e$	$e$	$b, e, d$

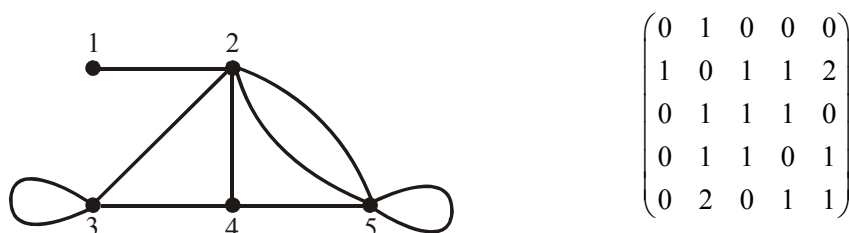
### Matica susednosti (adjacency matrix)

Predpokladajme, že  $G=(V,E)$  je obyčajný graf, kde  $|V|=n$ . Predpokladajme, že vrcholy  $G$  sú zoradené náhodne ako  $v_1, v_2, \dots, v_n$ . **Matica susednosti**  $A$  grafu  $G$  vzhľadom k danému zoradeniu vrcholov, je  $n \times n$  matica obsahujúca iba nuly a jednotky, s prvkom  $a_{ij}$  rovným 1 vtedy, keď sú vrcholy  $v_i, v_j$  susedné, a rovným 0, keď nie sú spojené hranou. Teda  $A = (a_{ij})$ , kde

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{pre } \{v_i, v_j\} \in E \text{ grafu } G \\ 0 & \text{ináč} \end{cases}$$

Vzhľadom k tomu, že matica susednosti je založená na zoradení (očíslovaní) vrcholov, pre graf o  $n$  vrcholoch môže existovať až  $n!$  rôznych matíc susednosti. Matica susednosti pre obyčajný graf je symetrická, teda  $a_{ij}=a_{ji}$  pre  $\forall i, j$ . Ďalej, keďže obyčajný graf nemá žiadne slučky, prvky  $a_{ii}$  na hlavnej diagonále sú rovné 0.

Takáto matica sa dá zovšeobecniť ako **matica susednosti pre násobné hrany a slučky**, kde namiesto 1 ako vstupu  $a_{ij}$  pre vrcholy  $v_i, v_j$  spojené hranou sa môže nachádzať násobnosť hrany, a na diagonále sa môže nachádzať 1, keď má vrchol slučku (pozri obr. 10.10).



Obrázok 10.10. Graf a jeho matica susednosti.

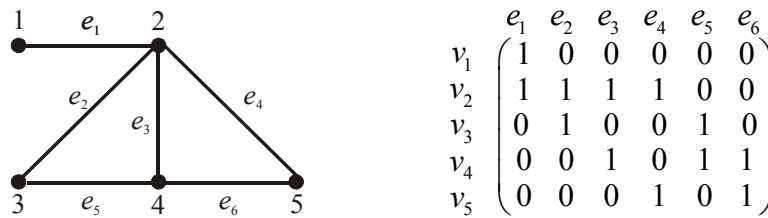
Matica susednosti sa rovnako dá zovšeobecniť pre orientovaný multigraf, kde nenulový vstup  $a_{ij}$  pre vrcholy  $v_i, v_j$  spojené hranou označuje násobnosť orientovanej hrany vychádzajúcej z vrcholu  $v_i$  a vchádzajúcej do vrcholu  $v_j$ . Pre grafy obsahujúce orientované hrany matica nemusí byť symetrická.

Pre obyčajné grafy sa tiež používa **incidenčná matica** (pozri obr. 10.11). Pre neorientovaný graf  $G=(V,E)$  s  $n$  vrcholmi a  $m$  hranami je incidenčná matica pre dané indexovanie hrán a vrcholov vyjadrená ako  $n \times m$  matica  $M = (m_{ij})$ , kde



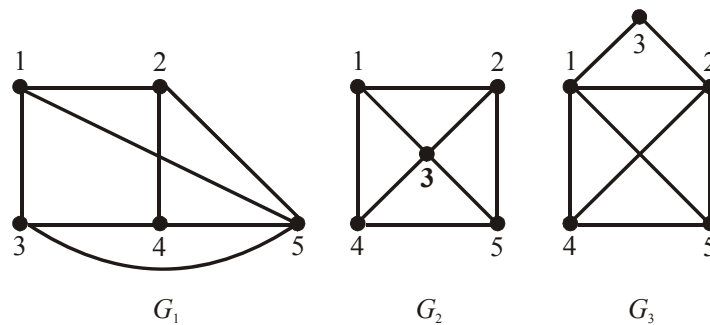
$$m_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{keď hrana } e_j \text{ je incidentná s vrcholom } v_i, \\ 0 & \text{inak} \end{cases}$$

Incidenčná matica môže byť tiež použitá na reprezentovanie násobných hrán alebo slučiek.



Obrázok 10.11. Graf a jeho incidenčná matica

Pre zistenie, či sú dva grafy izomorfné, musíme nájsť takú bijekciu medzi ich vrcholmi, ktorá zachováva hrany (aj ich multiplicitu). V opačnom prípade, ak chceme dokázať, že dva grafy nie sú izomorfné, stačí často ukázať, že sa líšia v nejakej vlastnosti, ktorú musia izomorfné grafy mať rovnakú. Taká vlastnosť sa volá *invariant* vzhľadom na izomorfizmus obyčajných grafov. Izomorfné grafy musia mať rovnaký počet vrcholov, hrán, multimnožinu stupňov vrcholov.



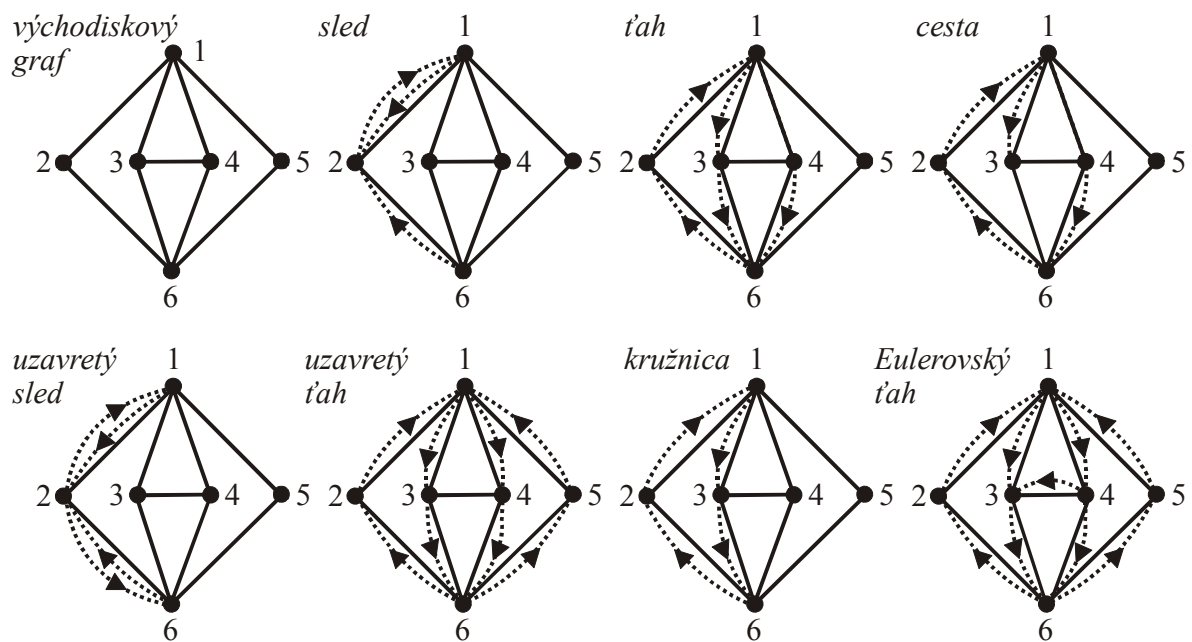
Obrázok 10.12. Ktoré dvojice grafov sú navzájom izomorfné? (Pozor, keď sa hrany krížia, neznamená to, že je tam automaticky vrchol!)

**Príklad 10.2.** Zistite, ktoré z grafov na obr. 10.12. sú navzájom izomorfné. Graf  $G_1$  je izomorfný s grafom  $G_2$ , pretože existuje funkcia  $f$  mapujúca vrcholy grafu  $G_1$  na vrcholy grafu  $G_2$ , ktorá zachováva hrany. Keď označíme vrcholy grafu  $G_1$  ako  $v_i$  a vrcholy grafu  $G_2$  ako  $w_i$ , kde  $f(v_1)=w_1, f(v_2)=w_2, f(v_3)=w_4, f(v_4)=w_5, f(v_5)=w_3$ , pre ktorúkoľvek dvojicu vrcholov  $v_i, v_j$ , ktorá bola (nebola) spojená hranou, platí, že je spojená (nie je spojená) hranou aj odpovedajúca dvojica  $w_k, w_l$ , kde  $f(v_i)=w_k, f(v_j)=w_l$ . Graf  $G_3$  nie je izomorfný s grafmi  $G_1$  a  $G_2$ , pretože mu odpovedajúce vrcholy majú stupne 2,3,3,4,4, zatiaľ čo stupne vrcholov grafov  $G_1$  a  $G_2$  sú 3,3,3,3,4. Takéto a iné pomôcky a heuristiky sa využívajú pri zisťovaní izomorfizmu. Aj keď má algoritmus na zistenie izomorfizmu dvoch grafov v najhoršom prípade stále exponenciálnu zložitosť, existujú algoritmy, ako napr. NAUTY, ktoré zvládnu úlohu pre 100 vrcholové grafy bežne riešiť za menej ako 1 sekundu.

## 10.4 Súvislosť v neorientovaných grafoch a eulerovské ťahy

Nech  $G=(V,E)$  je graf. Postupnosť  $(v_0, e_1, v_1, e_2, \dots, e_k, v_k)$  nazývame **sled**, ak  $v_0, v_1, \dots, v_k \in V, e_1, \dots, e_k \in E$ , a  $e_i = \{v_{i-1}, v_i\}$  pre každé  $i=1, \dots, k$ . Sled, v ktorom sú všetky hrany navzájom rôzne nazývame **ťah** a sled, v ktorom sú aj všetky vrcholy navzájom rôzne nazývame **cesta**. **Uzavretý sled** je taký sled, v ktorom je prvý vrchol zhodný s posledným. **Uzavretý ťah** je taký

ťah, v ktorom je prvý vrchol zhodný s posledným. **Kružnica** je uzavretý ťah, v ktorom sú všetky vrcholy navzájom rôzne, s výnimkou prvého a posledného, ktoré sú zhodné. Ťah je **eulerovský ťah**, keď obsahuje každú hranu (príklady pozri na obr. 10.13)<sup>2</sup>.



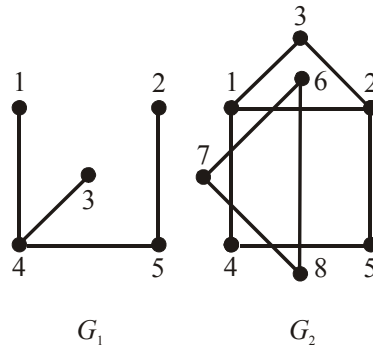
**Obrázok 10.13.** Postupnosti vrcholov východiskového grafu: Sled (6,2,1,2) – opakujú sa vrcholy aj hrany, ťah (4,6,2,1,3,6) – neopakujú sa hrany, cesta (4,6,2,1,3) – neopakujú sa vrcholy ani hrany, uzavretý sled (6,2,1,2,6) – posledný vrchol totožný s prvým, uzavretý ťah (4,6,2,1,3,6,5,1,4) – posledný vrchol totožný s prvým, kružnica (6,2,1,3,6) – ťah, posledný vrchol totožný s prvým, inak sa neopakujú, eulerovský ťah (4,6,2,1,3,6,5,1,4,3) – prejde cez všetky hrany

Neorientovaný graf sa volá **súvislý**, pokiaľ existuje cesta medzi každou dvojicou rozdielnych vrcholov grafu (pozri napr. obr. 10.14). Napríklad v počítačovej sieti môžu ľubovoľné dva počítače vzájomne komunikovať práve vtedy, keď je graf siete súvislý.

Graf, ktorý nie je súvislý, je zjednotením dvoch alebo viacerých súvislých grafov, z ktorých žiaden pár nemá spoločný vrchol. Tieto súvislé podgrafy (ktoré sú maximálne v tom zmysle, že neexistuje žiaden ďalší vrchol, ktorý by bol spojený s ich vrcholmi hranou v pôvodnom grafu a každá ich dvojica vrcholov musí byť v podgrafe spojená hranou, pokiaľ bola spojená v pôvodnom grafu) sa volajú **komponenty** grafu.

Niekedy odstránením hrany alebo vrcholu z grafu sa graf rozpadne na viac komponentov. Takú hranu voláme **most** a vrchol voláme **artikulácia**. Napr. v obr. 10.14 u grafu  $G_1$  sú artikuláciami vrcholy  $v_4$  a  $v_5$  a mostmi sú všetky hrany, zatiaľ čo u grafu  $G_2$  neexistujú ani artikulácie, ani mosty.

<sup>2</sup> Možno zaviesť aj zodpovedajúce pojmy pre orientované grafy, kedy máme tieto dvojice: sled – spojenie, ťah – trať, cesta – orientovaná cesta (dráha), kružnica ( $n$ -uholník) – okruh



**Obrázok 10.14.** Príklad súvislého a nesúvislého grafu (graf  $G_2$  je nesúvislý, má dva komponenty s vrcholovými množinami  $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$  a  $\{v_6, v_7, v_8\}$ , medzi dvojicami vrcholov z rôznych množín neexistuje cesta).

*Uzavretý eulerovský ťah* je taký eulerovský ťah, kde posledný vrchol je totožný s prvým. Eulerova veta, prvá veta teórie grafov z r. 1736, ktorá rieši problém z obr. 10.1.:

**Veta 10.4.** Súvislý graf má uzavretý eulerovský ťah práve vtedy, keď má všetky vrcholy párneho stupňa.

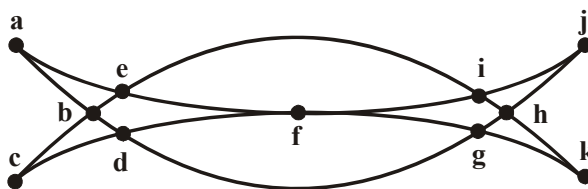
K dôkazu tejto vety si najprv dokážeme pomocnú vetu:

**Veta 10.5.** Každý vrchol grafu  $G$  s uzavretým eulerovským ťahom je incidentný s hranou aspoň jednej kružnice tohto grafu.

Dôkaz vety 10.5. Nech  $x$  je ľubovoľný vrchol a  $xy$  hrana s ním incidentná. Hrana  $xy$  nemôže byť mostom grafu  $G$ , pretože po jej odstránení by sme dostali nesúvislý graf a komponent s uzlom  $x$  by mal 1 vrchol nepárneho stupňa, čo odporuje Vete 10.1. Existuje teda kružnica prechádzajúca hranou  $xy$  a teda tiež vrcholom  $x$ . ■

Dôkaz vety 10.4 vychádza z predpokladu, že keď sa graf  $G$  dá zostrojiť jedným uzavretým ťahom, je súvislý. V grafe nemôže existovať vrchol  $v$  nepárneho stupňa, pretože ťahom do  $v$  práve toľkokrát vstupujeme, koľkokrát z neho vystupujeme. Predpokladajme súvislý graf s vrcholmi párneho stupňa. Zvoľme ľubovoľný vrchol  $w$ . Podľa vety 10.5 existuje v našom grafe kružnica, ktorá obsahuje vrchol  $w$ , táto kružnica nám určuje uzavretý ťah začínajúci a končiaci vo  $w$  (presnejšie, v závislosti od smeru, ktorým sa po kružnici pohybujeme, môžeme vybrať z 2 takých ťahov). Zo všetkých ťahov začínajúcich a končiacich uzlom  $w$  si zoberme ťah  $T_{max}$  s najväčšou dĺžkou. Ukážeme si, že to je náš želaný uzavretý eulerovský ťah. Predpokladajme, že by niektorá hrana grafu nepatriala do  $T_{max}$ . Zostrojme podgraf  $G_1$  grafu  $G$ , do ktorého dáme všetky hrany grafu  $G$  nepatriace do  $T_{max}$  a vrcholy s nimi incidentné. Je vidno, že  $G_1$  je graf so všetkými vrcholmi párneho stupňa, ktorý sa dá rozložiť na súvislé podgrafy. Teda aj  $G_1$  obsahuje aspoň jeden uzavretý ťah (dôvod je podobný ako v **dôkazu** vety 10.5). Teraz ale jednoducho zostrojíme z  $T_{max}$  nový ťah tým, že doňho „vnoríme“ uzavretý ťah grafu  $G_1$ . Tento nový ťah má ale dĺžku väčšiu, ako bola dĺžka  $T_{max}$ , čím dochádzame ku sporu. Preto  $T_{max}$  obsahuje každú hranu grafu  $G$  a tým je veta dokázaná. ■

**Príklad 10.3.** Môže byť tzv. Mohamedova šabl'a, ukázaná na obr. 10.15, nakreslená jedným ťahom, ktorý začína a končí v rovnakom bode (a žiadna čiara nie je zdvojená)?



Obrázok 10.15. Graf nazývaný Mohamedova šabl'a.

Všetky vrcholy grafu  $G$  na obrázku 10.15. sú párneho stupňa, teda graf má uzavretý eulerovský ťah. Použijeme na jeho konštrukciu konštruktívny postup z dôkazu vety 10.5. Najprv zostrojíme ľubovoľný uzavretý ťah v grafe, napr. ťah  $T: a, b, d, c, b, e, i, f, e, a$ . Keďže sme takto nenašli želaný uzavretý eulerovský ťah, zostrojíme podgraf  $G_1$  grafu  $G$ , do ktorého dáme všetky hrany grafu  $G$  nepatriace do  $T$  a vrcholy s nimi incidentné. Potom v  $G_1$  vytvoríme ťah  $d, g, h, j, i, h, k, g, f, d$ , ktorý prechádza cez všetky hrany grafu  $G_1$ . Vnorením tohto ťahu do prvého ťahu na vhodnom mieste dostávame ťah  $a, b, d, g, h, j, i, h, k, g, f, d, c, b, e, i, f, e, a$ , ktorý prechádza cez všetky hrany.

**Veta 10.6.** Súvislý graf má neuzavretý eulerovský ťah práve vtedy, keď má dva vrcholy nepárneho stupňa.

Dôkaz: Keď má súvislý graf neuzavretý eulerovský ťah, zrejme má 2 vrcholy nepárneho stupňa. Opačne, keď máme graf s dvoma vrcholmi nepárneho stupňa, stačí ich spojiť s novým vrcholom  $x$  a všetky vrcholy majú párny stupeň a existuje uzavretý eulerovský ťah. Po odstránení vrcholu  $x$  a s ním incidentných hrán dostávame otvorený eulerovský ťah. ■

**Príklad 10.4.** Dajú sa grafy na obr. 10.8 nakresliť jedným ťahom? Keďže grafy  $G_1, G_2$  na obr. 10.8 obsahujú dva vrcholy nepárneho stupňa, uzavretý eulerovský ťah v nich neexistuje. Existuje v nich ale otvorený eulerovský ťah, ktorý existuje v súvislom grafe práve vtedy, keď má práve dva vrcholy nepárneho stupňa.

Aplikácie eulerovských ťahov a uzavretých ťahov sa dajú nájsť v plánovaní rozloženia obvodov, v posielaní paketov po sieti, alebo aj v molekulárnej biológii, kde sa eulerovské cesty používajú pri sekvenovaní DNA.

**Príklad 10.5.** Použitím techniky spätného prehľadávania navrhnete algoritmus pre konštrukciu uzavretého eulerovského ťahu.

Použijeme algoritmus z kapitoly 4.2, kde bola metóda spätného prehľadávania použitá pre konštrukciu permutácií  $n$  objektov. Jeho jednoduchou modifikáciou dostaneme algoritmus pre konštrukciu uzavretého eulerovského ťahu (ak existuje)

```

U1 := ∅; w1 := 1; U2 := Γ(1); d := 2; m := počet hrán;
while d > 1 do
  if Ud ≠ ∅ then
    begin wd := get_element(Ud); Ud := Ud - {wd};
      if d ≤ m then
        begin d := d + 1;
          Ud := Γ(wd-1);
          Z množiny Ud odstránime tie vrcholy i ∈ Γ(wd-1),
            ktorých hrany {i, wd-1} sa vyskytujú v aktuálnom
            ťahu (w1, w2, ..., wd-1);

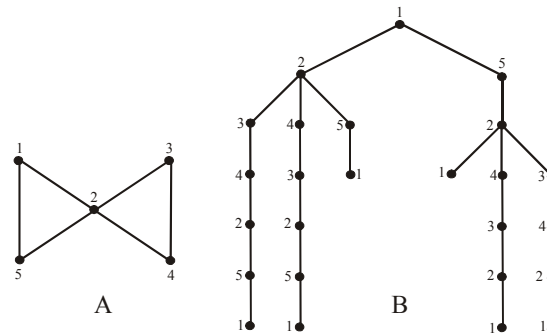
```

```

end else
  if  $w_1=w_d$  then
    begin print( $w_1, w_2, \dots, w_{m+1}$ );
            $d:=d-1$ ;
    end;
end else  $d:=d-1$ ;

```

Algoritmus je inicializovaný tým, že za prvý vrchol je vybraný vrchol indexovaný 1. Pokiaľ uzavretý eulerovský ťah existuje, potom je jedno, ktorý vrchol bol zvolený za východzí. Symbol  $\Gamma(i)$  reprezentuje množinu vrcholov, ktoré sú susedné s vrcholom  $i$ . Pri predlžovaní ťahu (vnútorný blok začínajúci príkazom  $d:=d+1$ ), z množiny kandidátov  $U_d$  musíme odstrániť tie vrcholy, ktoré tvoria hrany vyskytujúce sa v predchádzajúcej časti ťahu. Algoritmus je ilustrovaný jednoduchým príkladom z obr. 10.16.



Obrázok 10.16. Strom riešení (diagram B) pre uzavretý eulerovský ťah zostrojený algoritmom spätného prehľadávania z príkladu 10.5 pre obyčajný graf (diagram A).

**Príklad 10.6.** Použitím techniky spätného prehľadávania navrhnete algoritmus pre konštrukciu otvoreného eulerovského ťahu.

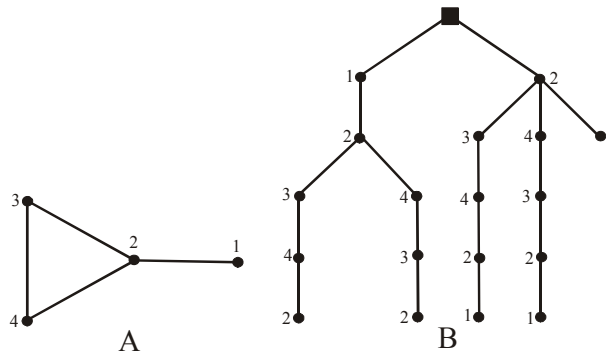
Tento algoritmus vznikne jednoduchou modifikáciou algoritmu z príkladu 10.5.

```

 $U_1 := \{\text{vrcholy s nepárnym stupňom}\}$ ;  $d:=1$ ;  $m=\text{počet hrán}$ ;
while  $d>0$  do
  if  $U_d \neq \emptyset$  then
    begin  $w_d := \text{zober\_prvok}(U_d)$ ;  $U_d := U_d - \{w_d\}$ ;
           if  $d \leq m$  then
             begin  $d:=d+1$ ;
                     $U_d := \Gamma(w_{d-1})$ ;
                    Z množiny  $U_d$  odstránime tie vrcholy  $i \in \Gamma(w_{d-1})$ ,
                    ktorých hrany  $\{i, w_{d-1}\}$  sa vyskytujú v aktuálnom
                    ťahu  $(w_1, w_2, \dots, w_{d-1})$ ;
             end else
             begin print( $w_1, w_2, \dots, w_{m+1}$ );
                     $d:=d-1$ ;
             end;
    end else  $d:=d-1$ ;

```

V tomto prípade algoritmus už musí byť inicializovaný množinou  $U_1$ , ktorá obsahuje obidva vrcholy grafu s nepárnym stupňom. Algoritmus je ilustrovaný na obr. 10.17.



**Obrázok 10.17.** Strom riešení (diagram B) pre otvorený eulerovský ťah zostrojený algoritmom spätného prehľadávania z príkladu 10.6 pre obyčajný graf (diagram A).

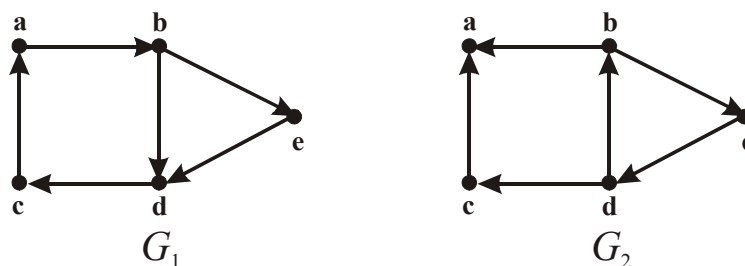
**Orientovaná cesta** (dráha) z  $a$  do  $b$  v orientovanom grafe  $G$  je sekvencia jednej alebo viac hrán  $(x_0, x_1), (x_1, x_2), (x_2, x_3), \dots, (x_{n-1}, x_n)$  v  $G$ , kde  $x_0 = a$  a  $x_n = b$ , teda koncový vrchol jednej hrany je počiatočným vrcholom nasledujúcej hrany. Takáto cesta je označená  $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n$  a má dĺžku  $n$ . Orientovaná cesta, ktorá začína a končí v rovnakom vrchole, sa volá **okruh**. U okruhov môžeme rozlišovať, v ktorom vrchole začínajú a v ktorom končia, a aj ktorým smerom idú, potom také okruhy považujeme za navzájom rôzne. Keď všetky hrany považujeme za neorientované, pre obyčajný graf vrcholy a hrany každého z týchto okruhov tvoria ale ten istý podgraf daného grafu - kružnicu.

Pre orientované grafy je situácia zo súvislosťou zložitejšia, môžeme si definovať, že graf je **silno súvislý**, keď pre ľubovoľné dva vrcholy  $a, b$  grafu existuje tak orientovaná cesta z  $a$  do  $b$ , ako aj cesta z  $b$  do  $a$ .

Orientovaný graf je **slabo súvislý**, keď existuje cesta medzi ľubovoľnými dvoma vrcholmi v neorientovanom grafe, vzniknutom z orientovaného grafu odstránením orientácie hrán.

**Príklad 10.7.** Sú grafy na obr. 10.18. silno alebo slabo súvislé?

Graf  $G_1$  je silno **súvislý**, pretože existuje cesta medzi ľubovoľnými dvoma vrcholmi v tomto orientovanom grafe. Preto je tento graf súčasne aj slabo súvislý. Graf  $G_2$  je slabo súvislý, neexistuje cesta z vrcholu  $a$  na vrchol  $b$ .



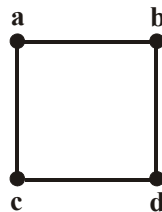
**Obrázok 10.18.** Príklad silno súvislého grafu  $G_1$  a slabo súvislého grafu  $G_2$ .

Počet ciest medzi dvoma vrcholmi v grafe môže byť určený pomocou jeho matice susednosti.

**Veta 10.7.** Nech  $G$  je graf s maticou susednosti  $A$  vzhľadom na usporiadanie vrcholov  $v_1, v_2, \dots, v_n$  (s orientovanými alebo neorientovanými hranami a povolenými slučkami a násobnými hranami). Počet rozdielnych sledov dĺžky  $r$  z vrcholu  $v_i$  do vrcholu  $v_j$ , kde  $r$  je kladné celé číslo, sa rovná prvku  $a_{ij}$  matice  $A^r$ .

Dôkaz: Nech  $G$  je graf s maticou susednosti  $A$  vzhľadom na usporiadanie vrcholov  $v_1, v_2, \dots, v_n$ . Počet ciest dĺžky 1 vrcholu  $v_i$  do vrcholu  $v_j$  sa rovná prvku  $a_{ij}$  matice  $A$ , čo je počet hrán z vrcholu  $v_i$  do vrcholu  $v_j$ . Použijeme indukciu. Predpokladajme, že prvok  $a_{ij}$  matice  $A^r$  sa rovná počtu rôznych sledov dĺžky  $r$  z vrcholu  $v_i$  do vrcholu  $v_j$ . Pretože  $A^{r+1} = A^r A$ , prvok  $a_{ij}$  matice  $A^{r+1}$  sa rovná  $b_{i1} a_{1j} + b_{i2} a_{2j} + \dots + b_{in} a_{nj}$ , kde  $b_{ik}$  je  $(i,k)$  prvok matice  $A^r$ . Podľa indukčnej hypotézy,  $b_{ik}$  je počet rozdielnych sledov dĺžky  $r$  z vrcholu  $v_i$  do vrcholu  $v_k$ .

Sled dĺžky  $r+1$  z vrcholu  $v_i$  do vrcholu  $v_j$  sa vytvorí zo sledu dĺžky  $r$  z vrcholu  $v_i$  do nejakého vrcholu  $v_k$  a z hrany z vrcholu  $v_k$  do vrcholu  $v_j$ . Počet takýchto sledov je násobok počtu sledov dĺžky  $r$  z vrcholu  $v_i$  do vrcholu  $v_k$ , teda  $b_{ik}$ , a počtu hrán z vrcholu  $v_k$  do vrcholu  $v_j$ , teda  $a_{kj}$ . Keď sa tieto násobky sčítajú cez všetky možné vrcholy  $v_k$ , dostávame želaný výsledok odpovedajúci výslednému prvku matice vzniknutej násobením matic  $A^r A$ . ■



Obrázok 10.19. Graf k príkladu 10.8.

**Príklad 10.8.** Koľko sledov dĺžky 4 z vrcholu  $a$  do vrcholu  $d$  existuje pre graf z obr. 10.19? Matica susednosti a jej štvrtá mocnina vyzerajú nasledovne

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad A^4 = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 8 & 8 & 0 \\ 0 & 8 & 8 & 0 \\ 8 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

a počet sledov o dĺžke 4 od vrcholu  $a$  do vrcholu  $d$  sa rovná prvku  $a_{14}$  matice  $A^4$ , teda 8. Konkrétne ide o sledy  $a,b,a,b,d$ ;  $a,b,a,c,d$ ;  $a,b,d,b,d$ ;  $a,b,d,c,d$ ;  $a,c,a,b,d$ ;  $a,c,a,c,d$ ;  $a,c,d,b,d$ ; a  $a,c,d,c,d$ .

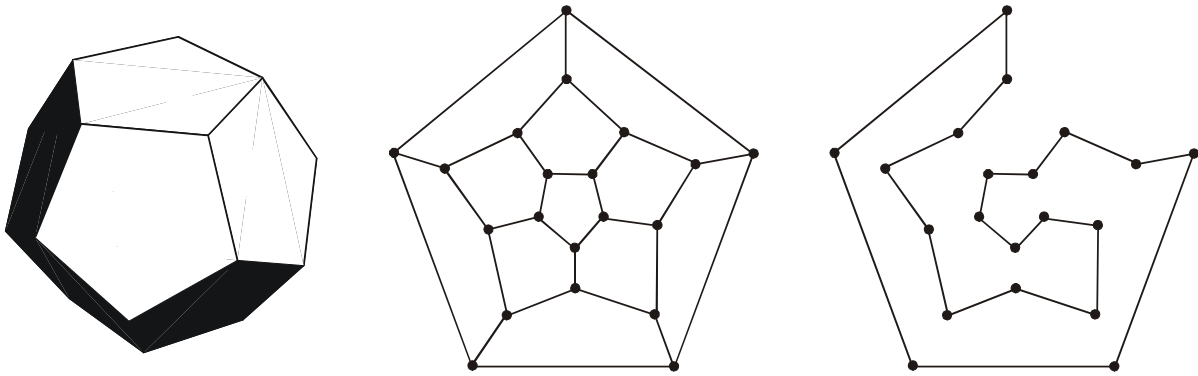
Veta 10.7. môže byť použitá na nájdenie dĺžky najkratšej cesty a tiež na zistenie, či je graf súvislý.

## 10.5 Hamiltonovské cesty a kružnice

V prvom probléme teórie grafov bolo skúmané, či sa dá v multigrafe prejsť práve raz cez všetky hrany a prípadne sa aj vrátiť na východzí vrchol. Tento problém bol elegantne vyriešený. Existuje aj podobný problém pre vrcholy grafov: dá sa po hranách v grafe prejsť práve raz cez všetky vrcholy a prípadne sa aj vrátiť na východzí vrchol? Takýto problém už žiaľ nie je jednoducho riešiteľný.



Problém bol prvý krát presne definovaný v roku 1857, kedy írsky matematik Sir *William Rowan Hamilton*<sup>3</sup> navrhol hru zvanú "cesta okolo sveta". Bolo treba nájsť cestu po hranách dodekaédra (pravidelného dvanásťstenu) všetkými vrcholmi predstavujúcimi mestá vo svete tak aby sa prešlo cez všetky mestá až do východzieho po najmenšom počte hrán (pozri obr. 10.20.). Keď má taká cesta mať minimálny počet hrán, vrcholy sa v nej nesmú opakovať, s výnimkou prvého, ku ktorému sa dôjde na konci. Takýchto ciest je pre dodekaédr samozrejme viac.



**Obrázok 10.20.** Dodekahedron v priestore a ako graf, spolu s hamiltonovskou kružnicou

Formálne sa dá definovať analogicky k eulerovskému ťahu a k eulerovskému uzavretému ťahu aj hamiltonovská cesta a kružnica: Cesta  $v_1, \dots, v_n$  v grafe  $G = (V, E)$  o  $n$  vrcholoch sa volá **hamiltonovská cesta**, keď  $v_i \neq v_j$  pre  $1 \leq i < j \leq n$ . Kružnica  $v_1, v_2, \dots, v_n, v_1$  ( $n > 2$ ) v grafe  $G = (V, E)$  sa volá **hamiltonovská kružnica**.

Nie sú žiaľ známe žiadne nutné a zároveň postačujúce kritéria pre existenciu hamiltonovskej kružnice. Avšak existuje dostatok viet, ktoré stanovujú postačujúce podmienky pre existenciu hamiltonovskej kružnice, a niektoré vlastnosti nám zasa určujú, že graf nemôže mať hamiltonovskú kružnicu. Napríklad graf s vrcholom stupňa 1 nemôže mať hamiltonovskú kružnicu, v kružnici musí byť každý vrchol incidentný s dvoma hranami. Naopak, obidve hrany u vrcholu stupňa dva musia byť súčasťou každej hamiltonovskej kružnice, pokiaľ nejaká v grafe existuje.

Vo všeobecnosti, čím viac hrán má graf, tým pravdepodobnejšie je, že bude mať hamiltonovskú kružnicu.

**Príklad 10.9.** Ukážte, že  $K_n$  má hamiltonovskú kružnicu pre  $n > 3$ .

Hamiltonovskú kružnicu môžeme začať v ľubovoľnom vrchole. Takáto kružnica môže byť skonštruovaná, keď ideme po vrcholoch v ľubovoľnom poradí, pokiaľ skončíme v rovnakom vrchole ako sme začali a vnútri cesty navštívime každý vrchol práve raz. To je možné preto, že v  $K_n$  existuje hrana medzi ľubovoľnými dvoma vrcholmi.

<sup>3</sup> William Rowan Hamilton (1805-1865) sa narodil v Dubline v rodine právnikovi. Už ako 3-ročný vedel výborne čítať a zvládol pokročilú aritmetiku. Preto ho poslali bývať s jeho strýkom, vynikajúcim lingvistom. V 8 rokoch Hamilton vedel po latinsky, grécky a hebrejsky. Ďalej zvládol taliančinu, francúzštinu a orientálne jazyky, pýšil sa tým, že pozná toľko jazykov, koľko má rokov. V 17 rokoch sa ale zamerával na matematickú astronómiu. Do vstupu na vysokú školu Trinity College v 18 rokoch Hamilton nechodil do žiadnej školy, vzdelávali ho súkromní tútori. Po škole bol menovaný Kráľovským astronómom, a v tejto funkcii zotrval celý život. Najvýznamnejšie objavy urobil, keď mal 20 rokov, predovšetkým v optike, abstraktnej algebre (vynašiel objekty zvané quarternióny). Ku koncu života trpel alkoholizmom, žil odlúčene a ostali po ňom stohy nepublikovaných prác, premiešané s taniermi so zvyškami jedla.



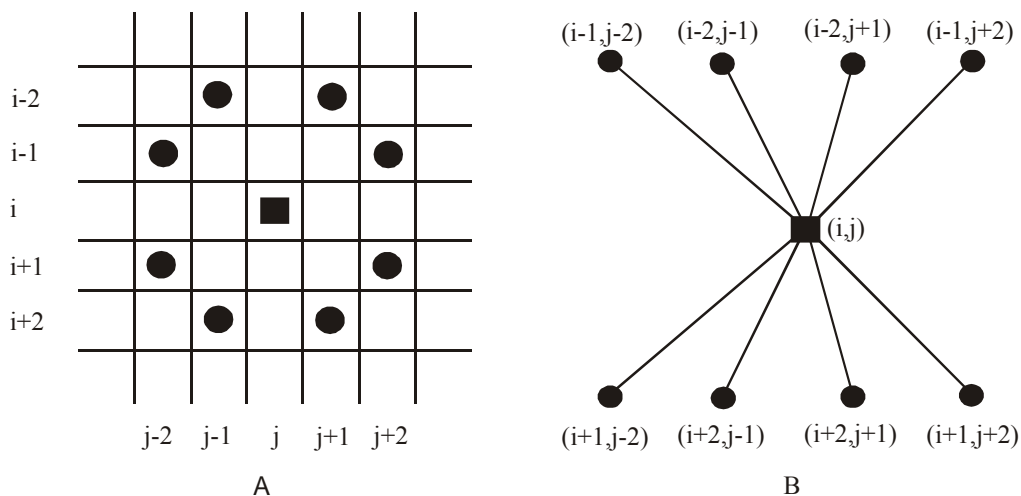
**Veta 10.8.** (Diracova teoréma) Keď  $G$  je obyčajný graf s  $n$  vrcholmi pre  $n \geq 3$  taký, že stupeň každého vrcholu  $v \in G$  je aspoň  $n/2$ , potom má graf  $G$  hamiltonovskú kružnicu.<sup>4</sup>

**Veta 10.9.** (Oreho teoréma) Keď  $G$  je obyčajný graf s  $n$  vrcholmi pre  $n \geq 3$  taký, že  $\deg(u) + \deg(v) \geq n$  pre každú dvojicu nesusedných vrcholov  $u$  a  $v \in G$ , potom má graf  $G$  hamiltonovskú kružnicu.

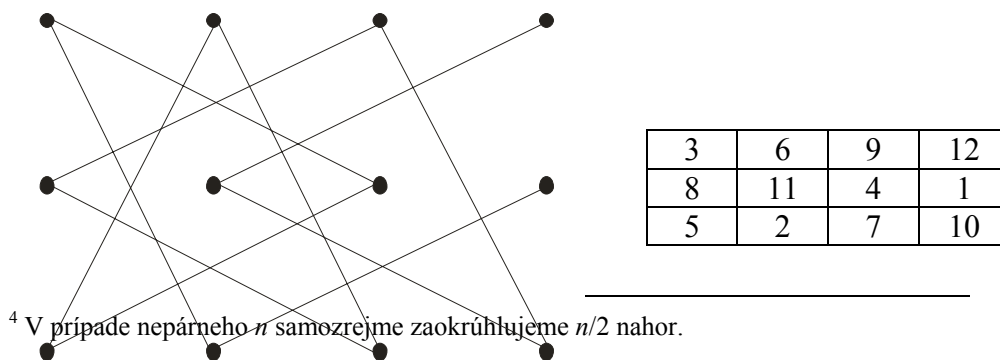
Tieto teorémy ale nepodávajú nutné podmienky pre výskyt hamiltonovskej kružnice, napríklad podmienky z viet 10.8 a 10.9 neplatia pre  $C_5$ , ktorý hamiltonovskú kružnicu celkom isto má. Teorémy nebudeme dokazovať.

**Príklad 10.10.** Nakreslite graf, ktorý reprezentuje hamiltonovskú cestu koňom na šachovnici  $3 \times 4$ .

Kôň je šachová figúrka, ktorá môže ťahať alebo dve políčka vodorovne a jedno zvisle, alebo dve políčka zvisle a jedno vodorovne. Teda, kôň na políčku  $(x,y)$  môže ťahať na políčka  $(x \pm 1, y \pm 2)$  a  $(x \pm 2, y \pm 1)$ , pokiaľ nie sú tieto políčka za okrajom šachovnice. Cesta koňom je postupnosť legálnych ťahov, ktorá navštívi každé políčko práve raz. Keď sa dá legálnym ťahom dostať z posledného políčka tejto cesty na prvé, hovoríme o uzavretej ceste koňom. Cestu koňom môžeme modelovať grafom, kedy pre každé políčko na šachovnici odpovedá vrcholu a hrana spája tieto vrcholy, pokiaľ existuje povolený ťah koňom medzi odpovedajúcimi pozíciami. Uzavretá cesta koňom tak zodpovedá hamiltonovskej kružnici a otvorená cesta koňom hamiltonovskej ceste. Napríklad graf, ktorý reprezentuje cestu koňom (hamiltonovskú cestu) na šachovnici  $3 \times 4$  je na obr. 10.22.



**Obrázok 10.21.** (A) Prípustné ťahy koňom na šachovnici a (B) odpovedajúci graf (východzí vrchol je označený štvorcom)

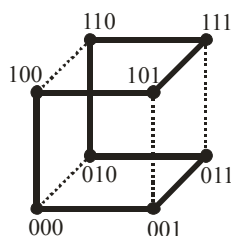


<sup>4</sup> V prípade nepárneho  $n$  samozrejme zaokrúhľujeme  $n/2$  nahor.

**Obrázok 10.22.** Ťah koňom na šachovnici 3×4 a odpovedajúca tabuľka postupnosti ťahov

**Príklad 10.11.** Ako súvisí Grayov kód s hamiltonovskou kružnicou?

Grayov kód pozostáva z  $n$  binárnych reťazcov pre všetky možné kombinácie bitov, kedy reťazce sú usporiadané po rade tak, že sa líšia vždy o 1 bit, napr. 000,001,011,010,110,111,101,100, a prvý sa tiež líši od posledného o 1 bit. Grayov kód bol pomenovaný po Frankovi Grayovi, ktorý ho vymyslel v 40tych rokoch 20 storočia v AT&T Bell laboratóriách, aby minimalizoval chyby v prenose signálu. Hodnoty bitov v reťazcoch môžu definovať hodnoty súradníc, a tak sa dá postupnosti vrcholov definujúcej hamiltonovskú kružnicu na každej  $n$ -rozmernej hyperkocke priradiť Grayov kód. Dôvodom je, že u susedných vrcholov hyperkocky sa súradnice vždy líšia iba v jednej hodnote, teda o 1 bit (pozri obr. 10.23).



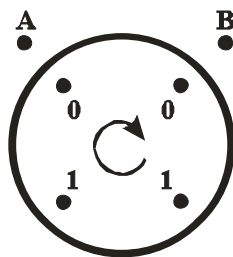
$Q_3$

**Obrázok 10.23.** Hamiltonovská kružnica pre  $Q_3$ .

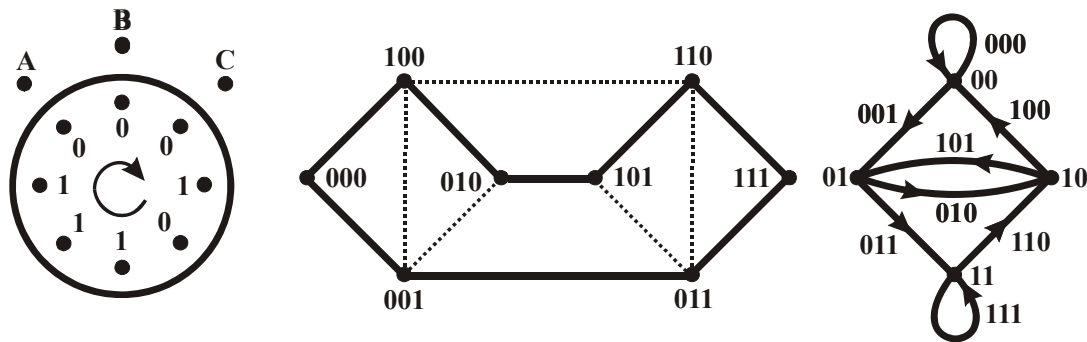
**Príklad 10.12.** Automatická práčka a eulerovská a hamiltonovská kružnica

Na obr. 10.24 je znázornená schéma na nastavenie jedného zo štyroch programov automatickej práčky. Program je určený zapojením/nezapojením dvoch kontaktov  $A$  a  $B$ . Otáčaním gombíka sa prepoja (označené 1) alebo neprepoja (označené 0) kontakty, pre ktoré máme štyri kombinácie: 00,01,10,11. Na rozdielne zopnutie kontaktov všetkých možných kombinácií  $A$ ,  $B$  ale netreba  $2 \times 4 = 8$  miest, ale stačia iba 4 miesta. Keď si totiž zoberieme cyklickú postupnosť 0011, ak berieme vždy dve susedné číslice, a posúvame sa o jedno miesto, vytvoríme pod  $BA$  dvojice 00, 01, 11, 10 (pozri obr. 10.24).

Treba zostrojiť analogickú schému pre osem programov.



**Obrázok 10.24.** Nastavenie 4 možných programov práčky



**Obrázok 10.25.** Nastavenie 8 možných programov práčky, nájdenie reťazca pomocou hamiltonovskej kružnice a pomocou uzavretého eulerovského ťahu

Analogické riešenie k riešeniu na obr. 10.24 je na obr. 10.25, kde je použitá cyklická postupnosť 00011101 a berú sa vždy tri susedné číslice; keď sa posúvame o jedno miesto, vytvoríme pod CBA trojice 000, 001, 011, 111, 110, 101, 010, 100. Cyklickú postupnosť možno získať pomocou hamiltonovskej kružnice v prvom grafe obr. 10.25, kde sú spojené binárne reťazce, ktoré dostaneme jeden z druhého pridaním číslice dopredu a odobratím poslednej číslice, alebo naopak, pridaním číslice dozadu a odobratím prednej číslice. Pridaná číslica môže byť 0 alebo 1. Rovnaké riešenie môžeme získať z druhého grafu, kde vrcholy tvoria spoločné podreťazce binárnych reťazcov a hrany tvoria prekryv binárnych reťazcov vrcholov. V takom grafe nám stačí nájsť uzavretý eulerovský ťah, aby sme dostali cyklickú postupnosť.

**Príklad 10.13.** Použitím techniky spätného prehľadávania navrhnete algoritmus pre konštrukciu všetkých možných hamiltonovských ciest.

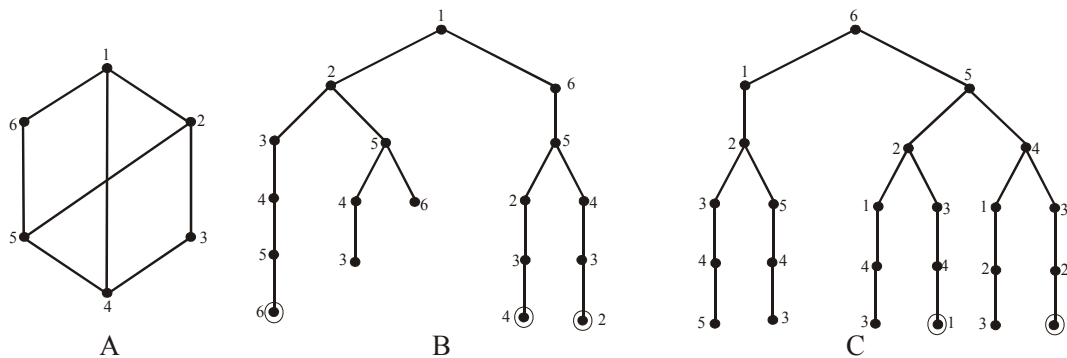
Podobne ako v príkladoch 10.5 a 10.6 použijeme metódu spätného prehľadávania. Jednoduchou modifikáciou týchto algoritmov dostaneme algoritmus pre konštrukciu hamiltonovskej cesty. Poznamenajme, že v operačnom výskume (vedný odbor zaoberajúci sa matematickými metódami ekonómie) sa podobný problém nazýva *problém obchodného cestujúceho*, kde je potrebné navrhnuť takú cestu, aby obchodný cestujúci navštívil každé mesto práve raz, na záver cesty sa vrátil do východzieho mesta a celková dĺžka cesty bola minimálna. Podmienka uzavretosti znamená, že konštruovaná cesta je hamiltonovská kružnica.

```

n=počet vrcholov; U1:={1,2,...,n}; d:=1;
while d>0 do
  if Ud ≠ ∅ then
    begin wd:=get_element(Ud); Ud:=Ud-{wd};
      if d<n then
        begin d:=d+1;
          Ud:=Γ(wd-1);
          Ud:=Ud-{w1,w2,...,wd-1};
        end else
          if w1=wd then
            begin print(w1,w2,...,wn);
              d:=d-1;
            end;
          end else d:=d-1;
    end
  end
end

```

Algoritmus je inicializovaný tým, že množina  $U_1$  obsahuje všetky možné vrcholy grafu. Pri predlžovaní cesty (vnútorný blok začínajúci príkazom  $d := d+1$ ), z množiny kandidátov  $U_d$  musíme odstrániť tie vrcholy, ktoré tvoria hrany vyskytujúce sa v predchádzajúcej časti cesty. Algoritmus je ilustrovaný jednoduchým príkladom z obr. 10.26.



**Obrázok 10.26.** Dva stromy riešení (diagramy B a C) pre hamiltonovskú cestu zostrojený algoritmom spätného prehľadávania z príkladu 10.13 pre obyčajný graf (diagram A). Cesty, ktoré končia vrcholom v krúžku sú uzavreté (hamiltonovská kružnica).

**Cvičenie:**

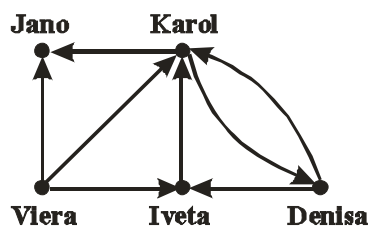
10.1. Prienikový graf (intersection graph) súboru množín  $A_1, A_2, \dots, A_n$  je graf, ktorého vrcholy reprezentujú tieto množiny a hrana spája tieto vrcholy, keď im odpovedajúce množiny majú neprázdny prienik. Skonstruujte prienikové grafy pre nasledujúce súbory množín.

(a)  $A_1 = \{0, 2, 4, 6, 8\}$ ,  $A_2 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ ,  $A_3 = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ ,  $A_4 = \{5, 6, 7, 8, 9\}$ ,  $A_5 = \{0, 1, 8, 9\}$

(b)  $A_1 = \{\dots, -4, -3, -2, -1, 0\}$ ,  $A_2 = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ ,  $A_3 = \{\dots, -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, \dots\}$ ,  
 $A_4 = \{\dots, -5, -3, -1, 1, 3, 5, \dots\}$ ,  $A_5 = \{\dots, -6, -3, 0, 3, 6, \dots\}$

(c)  $A_1 = \{x \mid x < 0\}$ ,  $A_2 = \{x \mid -1 < x < 0\}$ ,  $A_3 = \{x \mid 0 < x < 1\}$ ,  $A_4 = \{x \mid -1 < x < 1\}$ ,  
 $A_5 = \{x \mid x > -1\}$ ,  $A_6 = \mathbf{R}$

10.2. Koho v nasledujúcom grafe vplyvu na obr. 10.27. ovplyvňuje Karol a kto vplýva na Karola?



Obrázok 10.27. Graf ovplyvňovania, využívaný v psychológii.

10.3. Skonstruujte graf plánovania udalostí pre nasledujúci program:

$S_1: x := 0$

$S_2: x := x + 1$

$S_3: y := 2$

$S_4: z := y$

$S_5: x := x + 2$

$S_6: y := x + z$

10.4. Môže existovať obyčajný graf s 15 vrcholmi, pričom každý z nich má stupeň 5?

10.5. Keď pre každého člena spoločnosti spočítame, s koľkými ľuďmi si potriasol rukou, a tieto počty sčítame, ukážte, že súčet je páry. Predpokladajte, že nikto si nepotriasol rukou sám zo sebou.

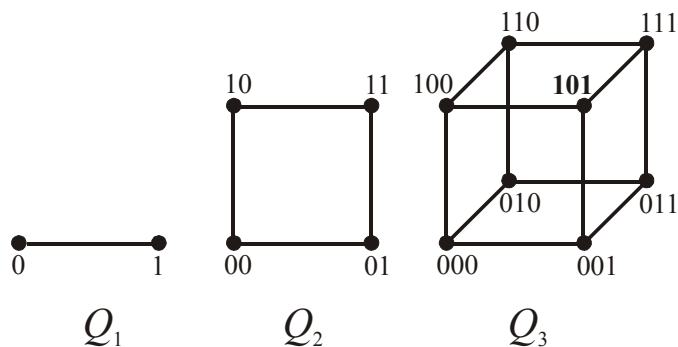
10.6. Pre ktoré hodnoty  $n$  sú nasledujúce grafy bipartitné?

a)  $K_n$

b)  $C_n$

c)  $W_n$ , čo je označenie tzv. kolesa, čo je hviezda so stredovým vrcholom, kde obvodové vrcholy sú prepojené kruhom ako u  $C_n$

d)  $Q_n$ , tzv.  $n$ -kocky (alebo  $n$ -rozmerná kocka,  $n$ -cube), kde vrcholy reprezentujú binárne reťazce dĺžky  $n$ . Vrcholy sú spojené hranou vtedy, ak sa im odpovedajúce bitové reťazce líšia práve v jednej pozícii, pozri obr. 10.28.



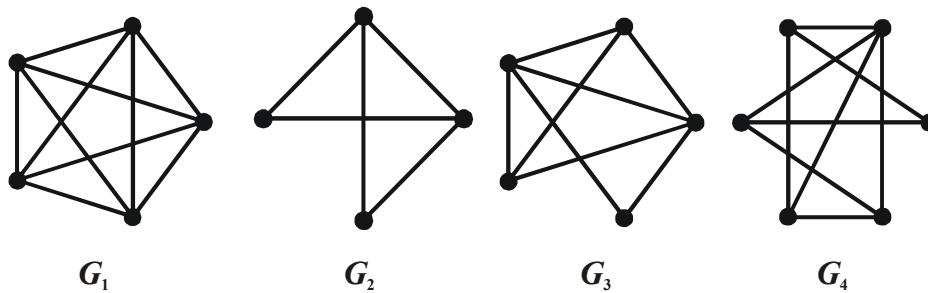
Obrázok 10.28. Prvé tri  $n$ -rozmerné kocky (pre  $n = 1, 2$  a  $3$ ).

- 10.7. Koľko hrán má graf, keď má vrcholy stupňa 4,3,3,2,2? Nakreslite taký graf.
- 10.8. Existuje obyčajný graf o piatich vrcholoch nasledujúcich stupňov? Keď áno, nakreslite ich.
- 3,3,3,3,2
  - 1,2,3,4,5
  - 1,2,3,4,4
  - 3,4,3,4,3
  - 0,1,2,2,3
  - 1,1,1,1,1
- 10.9. Koľko podgrafov o aspoň jednej hrane majú grafy  $K_2$ ,  $K_3$  a  $W_3$ ?
- 10.10. Nech  $G$  je graf o  $|V|$  vrcholoch a  $|E|$  hranách. Nech  $M$  je maximálny stupeň vrcholov z  $G$  a nech  $m$  je minimálny stupeň vrcholov z  $G$ . Ukážte, že  $2|E|/|V| \geq m$  a  $2|E|/|V| \leq M$ .
- 10.11. Obyčajný graf sa volá *pravidelný* (regular), keď každý z jeho vrcholov má rovnaký stupeň. Koľko vrcholov stupňa 4 má regulárny graf o 10 hranách?
- 10.12. *Doplnkový* (príp. komplementárny, complementary) graf  $\bar{G}$  ku grafu  $G$  má rovnakú vrcholovú množinu ako  $G$ . Dva vrcholy sú spojené hranou v  $\bar{G}$  vtedy, keď nie sú spojené v  $G$ . Nájdite
- $\bar{K}_n$
  - $\bar{K}_{m,n}$
  - $\bar{C}_n$
  - $\bar{Q}_n$
- 10.13. Keď je  $G$  obyčajný graf o 15 hranách a  $\bar{G}$  má 13 hrán, koľko vrcholov má graf  $G$ ?
- 10.14. Keď je  $G$  obyčajný graf o  $|V|$  vrcholoch a  $|E|$  hranách, koľko hrán má graf  $\bar{G}$ ?
- 10.15. Ukážte, že keď je  $G$  obyčajný bipartitný graf o  $|V|$  vrcholoch a  $|E|$  hranách, potom  $|E| \leq |V|^2/4$ .
- 10.16. Nájdite incidenčné matice pre
- $K_n$

- b)  $C_n$
- c)  $W_n$ , čo je označenie tzv. kolesa, čo je hviezda so stredovým vrcholom, kde obvodové vrcholy sú prepojené kruhom ako u  $C_n$
- d)  $K_{m,n}$

- 10.17. Predpokladajme, že  $G$  a  $H$  sú obyčajné izomorfné grafy. Ukážte, že ich komplementárne grafy  $\bar{G}$  a  $\bar{H}$  sú tiež izomorfné.
- 10.18. Ukážte, že vrcholy bipartitného grafu s dvoma alebo viac vrcholmi môžu byť indexované tak, že ich matica susednosti má tvar  $\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{A} \\ \mathbf{B} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$ , kde štyri vstupy sú obdĺžnikové bloky.
- 10.19. Obyčajný graf sa volá samokomplementárny (selfcomplementary), keď grafy  $G$  a  $\bar{G}$  sú izomorfné. Ukážte, že cesta na štyroch vrchoch je samokomplementárna.
- 10.20. Ukážte, že keď je  $G$  samokomplementárny obyčajný graf s  $|V|$  vrcholmi, potom  $|V|$  modulo 4=0 alebo 1.
- 10.21. Pre ktoré celé čísla je  $C_n$  samokomplementárny?
- 10.22. Koľko neizomorfných obyčajných grafov s  $n$  vrcholmi existuje pre  $n$  rovné
- a) 2
  - b) 3
  - c) 4
- 10.23. Koľko neizomorfných obyčajných orientovaných grafov s  $n$  vrcholmi existuje pre  $n$  rovné 2?
- 10.24. Keď vynásobíme maticu susednosti pre neorientovaný graf s maticou  $k$  nej transponovanou, čo je výsledkom vynásobenia?
- 10.25. Zistite, či grafy zadané maticou susednosti sú izomorfné
- $$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$
- 10.26. Definujte izomorfizmus pre orientované grafy.
- 10.27. Koľko pamäti je potrebné na reprezentáciu obyčajného súvislého grafu o  $|V|$  vrchoch a  $|E|$  hranách, keď použijeme
- a) zoznam dvojíc vrcholov
  - b) maticu susednosti
  - c) incidenčnú maticu
- 10.28. Nájdite dvojicu obyčajných grafov s rovnakou multimnožinou stupňov vrcholov, ktoré ale nie sú izomorfné.

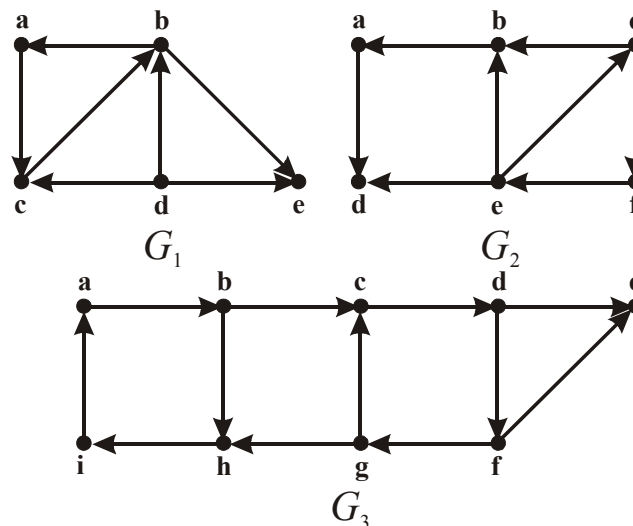
10.29. Ktorý z grafov na obr. 10.29 sa dá nakresliť jedným ťahom?



Obrázok 10.29. Sú to jednot'ažky?

10.30. Pomocou algoritmu z príkladu 10.5 nájdite uzavreté a otvorené eulerovské ťahy pre prvé tri grafy z obr. 10.29 cvičenia 10.29.

10.31. Nájdite také najväčšie silno súvislé podgrafy (také, ku ktorým sa nedá pridať vrchol, aby neprestali byť silno súvislé), ktoré zároveň majú spomedzi najväčších silno súvislých podgrafov aj najviac vrcholov, pre grafy z obr. 10.30.



Obrázok 10.30. Nájdite najväčšie silno súvislé podgrafy

10.32. Nájdite počet ťahov dĺžky  $n$  medzi dvoma rôznymi vrcholmi u  $K_{3,3}$  pre  $n$  rovné

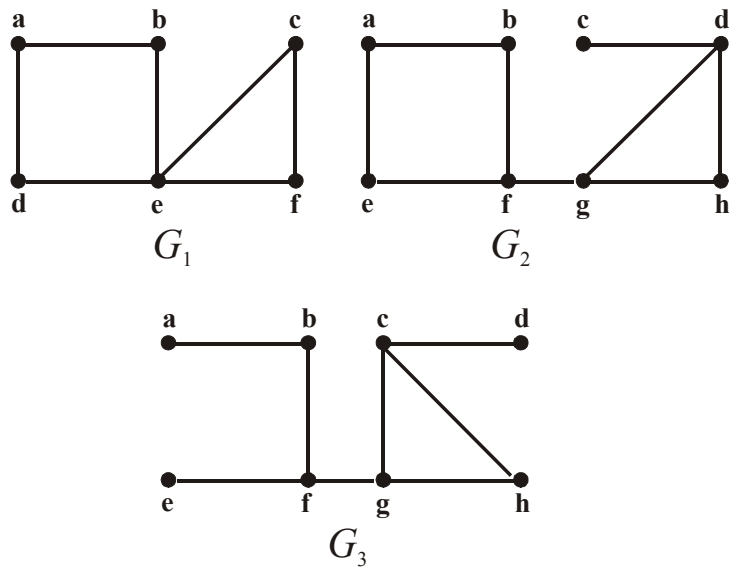
- (a) 2, ak sú oba vrcholy v jednej množine bipartície  $K_{3,3}$
- (b) 3, ak sú oba vrcholy v rôznych množinách bipartície  $K_{3,3}$
- (c) 4, ak sú oba vrcholy v jednej množine bipartície  $K_{3,3}$
- (d) 5, ak sú oba vrcholy v rôznych množinách bipartície  $K_{3,3}$

10.33. Nájdite počet sledov dĺžky  $n$  medzi dvoma rôznymi vrcholmi u  $K_4$  pre rovnaké hodnoty  $n$  ako v predchádzajúcom prípade

10.34. Ukážte že v akomkoľvek obyčajnom grafe existuje cesta z ľubovoľného vrcholu nepárneho stupňa do nejakého iného vrcholu nepárneho stupňa.



10.35. Nájdite všetky artikulácie grafov z obr. 10.20.

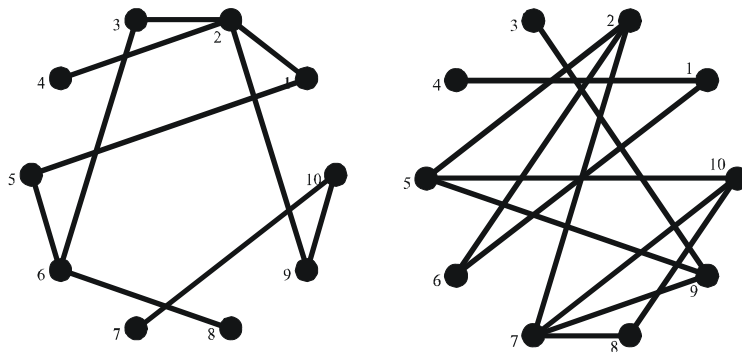


Obrázok 10.31. Nájdite artikulácie

10.36. Nájdite všetky mosty u grafov z obr. 10.31.

10.37. Dokážte, že každý vrchol mostu obyčajného grafu je artikuláciou, pokiaľ má stupeň väčší ako 1.

10.38. Komunikačná linka v komunikačnej sieti by mala byť zdvojená, keď jej nefunkčnosť znemožňuje prenosu signál medzi nejakou dvojicou vrcholov. Ktoré spoje by mali byť spojené v grafoch na obr. 10.32?



Obrázok 10.32. Ktoré hrany by mali byť zdvojené pre dvojité zabezpečenie súvislosti komunikačnej siete?

10.39. Ukážte, že obyčajný graf o  $n$  vrcholoch je súvislý, pokiaľ obsahuje viac ako  $(n-1)(n-2)/2$  hrán.

10.40. Ukážte, ako sa dá Veta 10.7. využiť na nájdenie dĺžky najkratšej cesty medzi dvoma vrcholmi.

10.41. Ukážte, ako sa dá Veta 10.7. využiť na zistenie, či je graf súvislý.

- 10.42. Ukážte, že obyčajný graf je bipartitný práve vtedy, keď nemá žiadne kružnice nepárnej dĺžky.
- 10.43. Ukážte, že graf reprezentujúci prípustné ťahy koňom na šachovnici  $m \times n$  (kde  $m, n$  sú kladné celé čísla, je bipartitný graf.
- 10.44. Ukážte, že neexistuje uzavretá cesta koňom pre šachovnicu  $m \times n$ , kde  $m, n$  sú nepárne čísla.
- 10.45. Ukážte, že existuje Grayov kód dĺžky  $n$  bitov pre akékoľvek pozitívne číslo  $n$ , alebo, ekvivalentne, ukážte, pomocou matematickej indukcie, že  $n$ -kocka  $Q_n$  má vždy hamiltonovskú kružnicu.