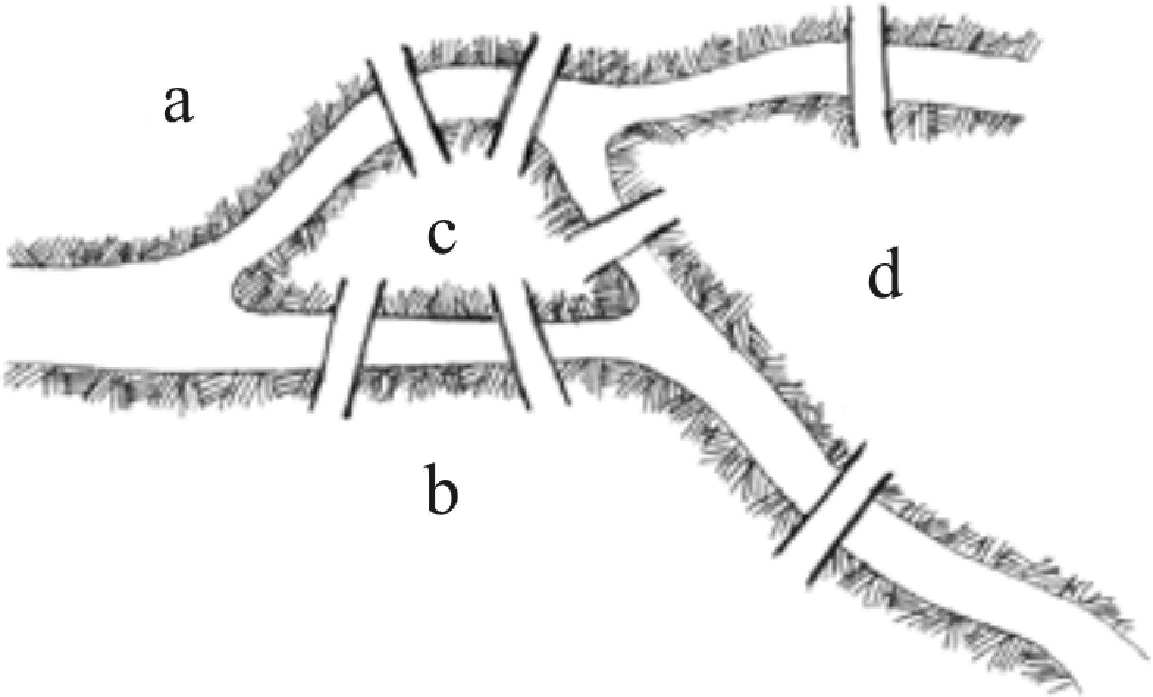
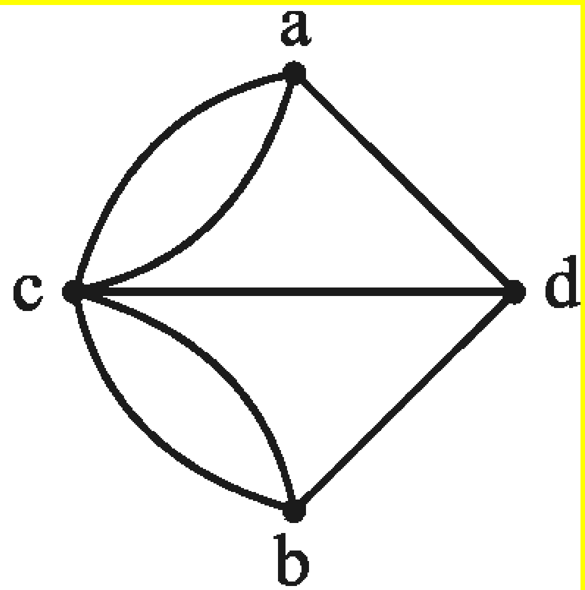
Teória grafov I

- základné pojmy
- multigraf, pseudograf, orientovaný graf
- špeciálne typy grafov, podgrafy
- reprezentácia a izomorfizmus
- cesty a cykly v grafe
- eulerovský ťah
- hamiltonovská kružnica

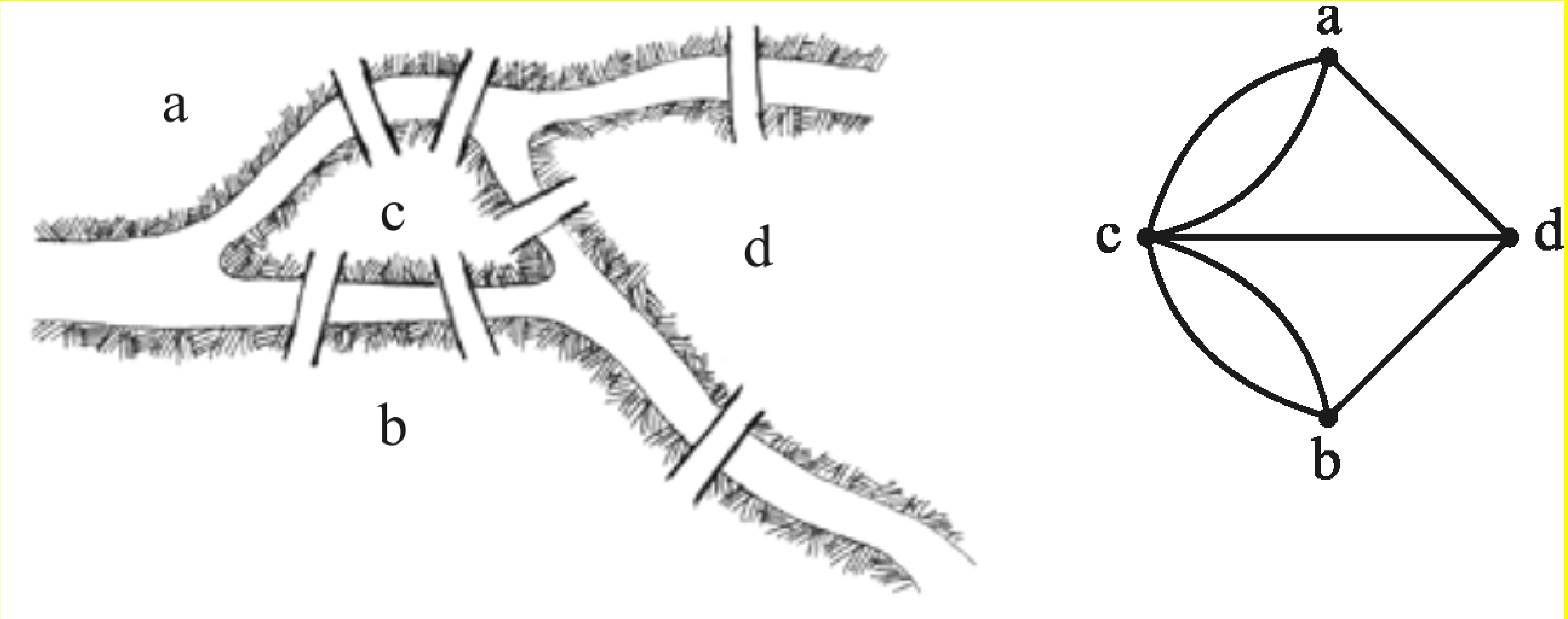
Teória grafov zavedená v 18. storočí Eulerom

Prvým problém: Ako prejsť po všetkých mostoch Královca práve raz a vrátiť sa domov? (Königsberg v Prusku, teraz Kaliningrad v Rusku)





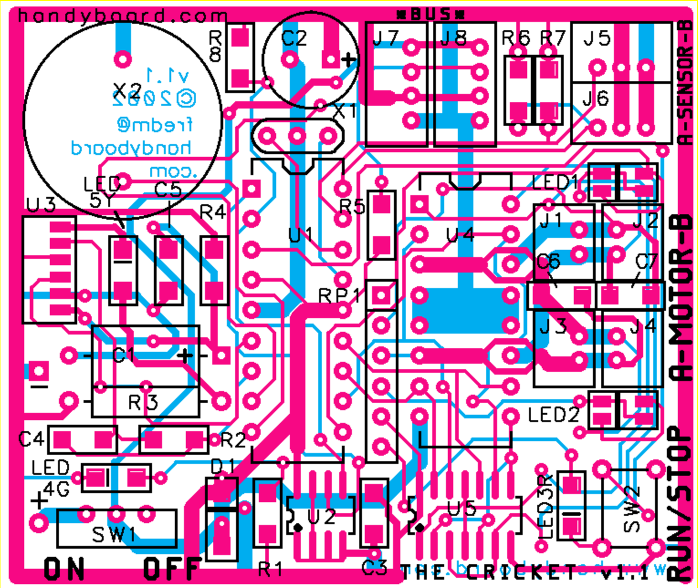
Prvým problém: Ako prejsť po všetkých mostoch Královca práve raz a vrátiť sa domov? (Königsberg v Prusku, teraz Kaliningrad v Rusku)



Nedá sa – ak z nejakého vrcholu chceme vyjsť a aj sa doňho vrátiť vždy inou hranou a využiť takto všetky hrany, musí vrchol byť spojený s párnym počtom hrán. To musí platiť pre všetky vrcholy.

Leonhard Euler (1707-1783) bol synom kalvínskeho kňaza z okolia Bazileja vo Švajčiarsku. V 13 rokoch tam začal študovať na univerzite teológiu na želanie svojho otca. Pod vplyvom učiteľa matematiky Bernoulliho zo slávnej rodiny matematikov začal aj Euler študovať matematiku, a vo svojich 16 rokoch úspešne ukončil univerzitné vzdelanie. Na pozvanie Petra Veľkého pracoval 14 rokov v Akadémii v Petrohrade, potom bol 25 rokov v Berlínskej Akadémii, aby sa na koniec života vrátil do Petrohradu. Euler bol neuveriteľne tvorivý vo všetkých oblastiach matematiky, najmä teórii čísel, kombinatorike a analýze, rovnako ako v jej aplikáciách, napr. v hudbe a stavbe lodí. Napísal 1100 publikácií, trvalo ešte 47 rokov po jeho smrti, kým ich všetky uverejnili. Mal 13 detí, dokázal pracovať a súčasne húpať deti na kolenách. Posledných 17 rokov života bol slepý, ale vďaka fantastickej pamäti to nespomalilo jeho prácu, svoje výsledky diktoval. Publikácia jeho súhrnného diela má viac ako 75 zväzkov.

Aplikácie:

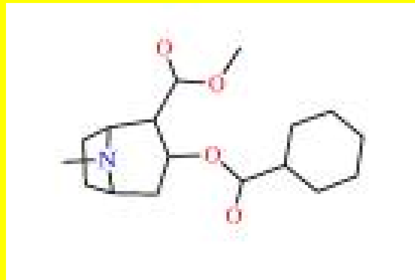


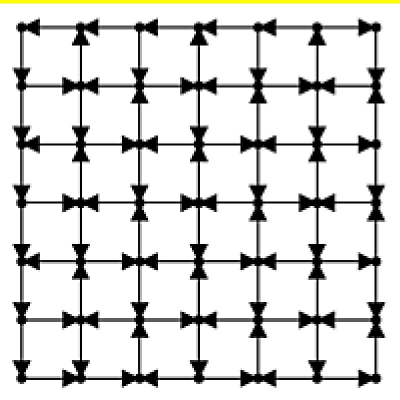
Môže byť obvod vyrobený ako plošný tlačený spoj?

Grafy chemických zlúčenín – sú rovnaké? Ako ich hľadať v databázi?

LSD

Kokain





Počítačové alebo transportné siete - najkratšia cesta?

Vzťahy medzi výrokmi:

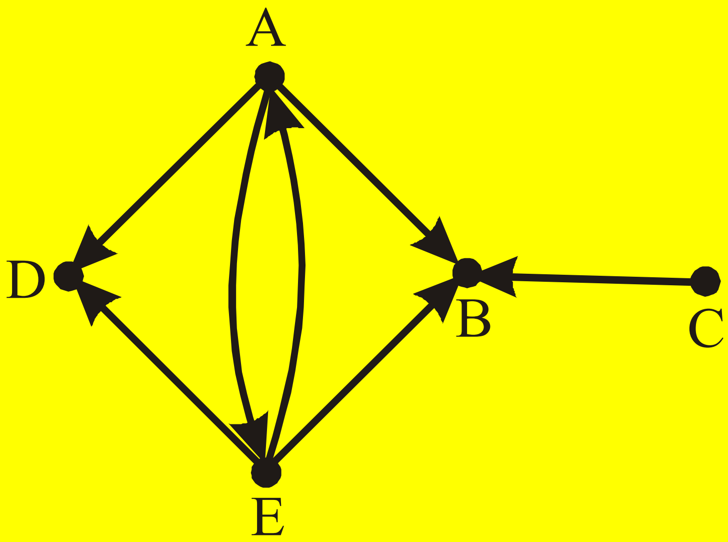
A. Dnes je sobota

B. Zajtra bude nedeľa alebo pondelok

C. Pozajtra bude utorok

D. Včera nebola sobota

E. Včera bol piatok



Graf sa skladá z vrcholov (uzlov) a hrán (so šípkami sú orientované)

Orientované – len s orientovanými hranami

Neorientované - bez orientovaných hrán

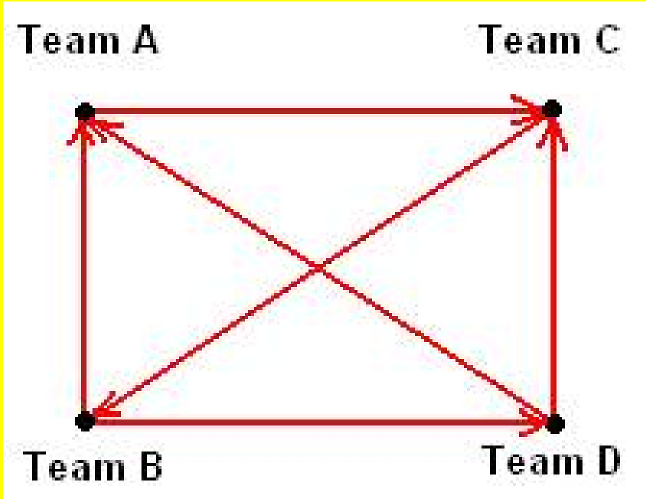
Zmiešané grafy – aj s orientovanými aj s neorientovanými hranami

zobrazenie turnaja

vzťahy v ekológii = kto koho žerie

psychológii = kto má nad kým vrch, známosť

antropológii = príbuzenský vzťah



Graf $G=(V,E)$ je definovaný pomocou množiny vrcholov V a množiny E hrán – neusporiadaných dvojíc $e=\{u,v\}$ vrcholov z V.

Orientovaný graf $G=(V,E)$ je definovaný pomocou množiny vrcholov V a množiny E hrán – usporiadaných dvojíc $e=(u,v)$ vrcholov z V.

Multigrafy - obsahujú násobné hrany, reprezentujúce napr. násobné väzby u chemických zlúčenín

násobné hrany: definícia grafu je rozšírená o ohodnotenie hrán kladným celým číslom, $f : E \to \{1,2,...\}$.

$f(e) = 1$ hrana e je jednoduchá,

$f(e) \geq 2$, hrana e je násobná, $f(e)$ je jej ***multiplicita***

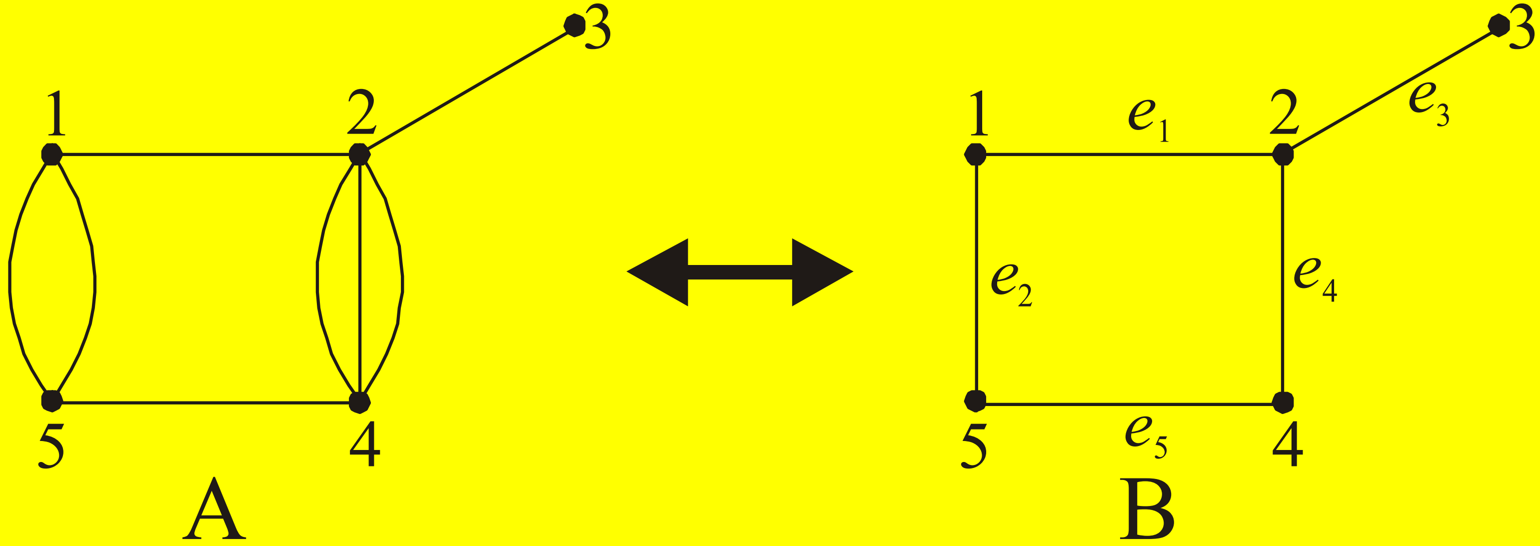
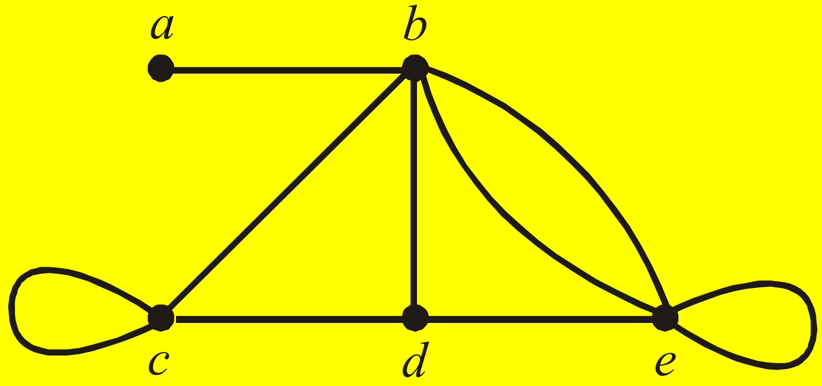


Diagram A znázorňuje graf s násobnými hranami {1,5} a {2,4}, diagram B znázorňuje graf s množinou hrán $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$, kde zobrazenie f je špecifikované takto: $f(e_1) = 1$, $f(e_2) = 2$, $f(e_3) = 1$, $f(e_4) = 3$, $f(e_5) = 1$.

Pseudograf graf, ktorý neobsahuje orientované hrany, ale ktorý môže obsahovať násobné hrany alebo slučky.
Slučka je hrana, ktorá je vychádzajúca a vchádzajúca do rovnakého vrcholu.



Názvy grafov podľa typu hrán

Typ	Hrany	Násobné hrany povolené	Slučky povolené
obyčajný graf	neorientované	nie	nie
multigraf	neorientované	áno	nie
pseudograf	neorientované	áno	áno
orientovaný graf	orientované	nie	áno
orientovaný multigraf	orientované	áno	áno

Príklad

Graf plánovania udalostí = precedence graph

$S_1 \quad a := 0$

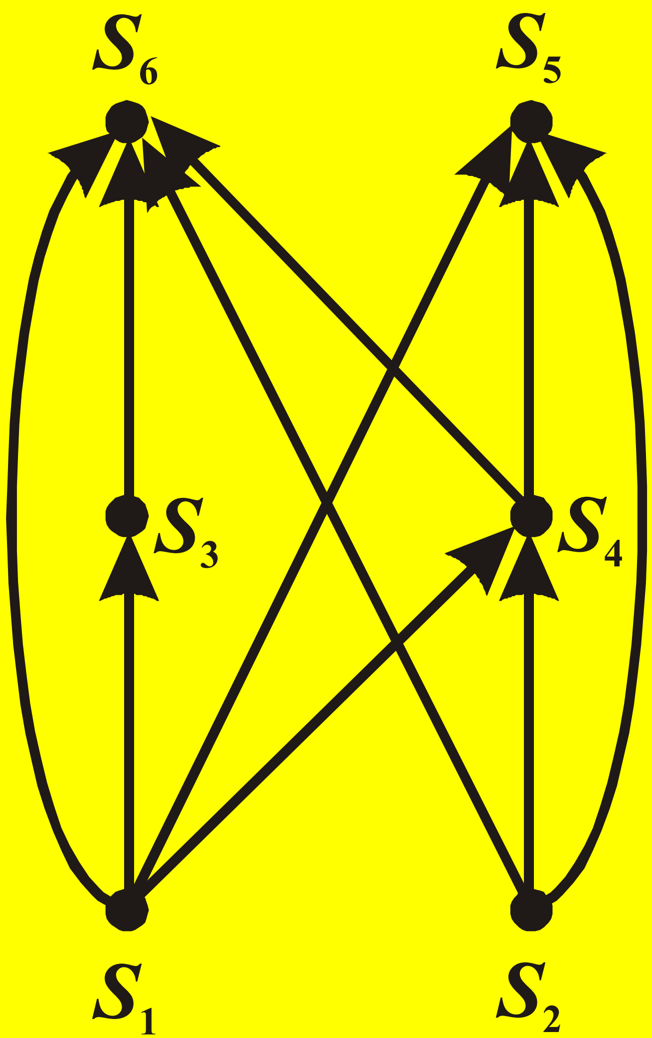
$S_2 \quad b := 1$

$S_3 \quad c := a + 1$

$S_4 \quad d := b + a$

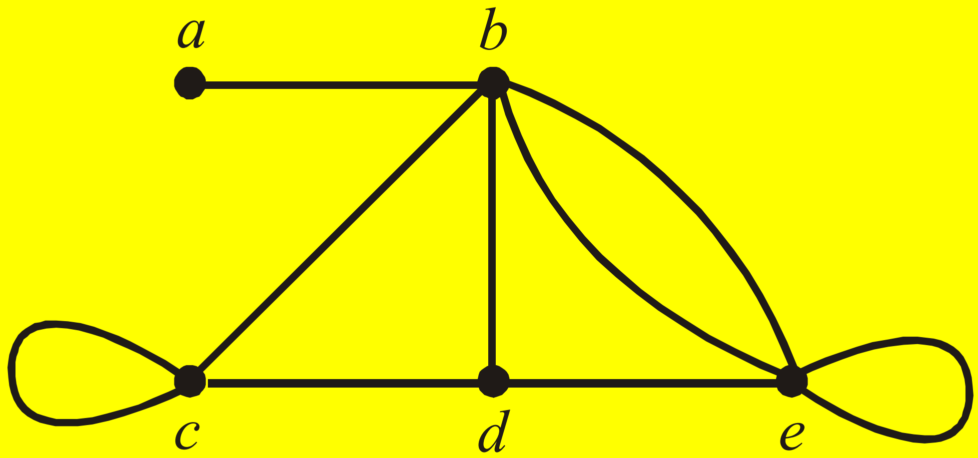
$S_5 \quad e := d + 1$

$S_6 \quad f := c + d$



Niektoré základné definície

Dva vrcholy u a v v neorientovanom grafe G sa volajú ***susedné*** (adjacent, neighbours) v G, keď $\{u,v\}$ je hrana grafu G. Keď $e=\{u,v\}$, o hrane e sa hovorí, že je ***incidentná*** (incident) s vrcholmi u a v alebo *spája* vrcholy u a v.
Stupeň vrcholu v neorientovanom grafe je rovný počtu hrán s ním incidentných, s výnimkou faktu, že slučka na vrchole prispieva dvakrát k stupňu vrcholu. Stupeň vrcholu v sa označuje $deg(v)$.



Stupne vrcholov grafu na tomto obrázku sú nasledujúce: $deg(a)=1$, $deg(b)=5$, $deg(c)=4$, $deg(d)=3$, $deg(e)=5$

Vrchol stupňa 0 sa volá ***izolovaný***, taký nie je spojený zo žiadnym iným vrcholom.

Keď sčítame stupne všetkých vrcholov grafu, každá hrana grafu prispieva k súčtu dvojkou. Súčet stupňov vrcholov je teda dvojnásobkom počtu hrán. Pre neorientovaný graf (môže mať aj násobné hrany a slučky) s $|E|$ hranami teda platí

$$2|E| = \sum_{v \in V} deg(v)$$

Veta. Neorientovaný graf má párny počet vrcholov nepárneho stupňa.

Dôkaz: Nech V_1 a V_2 sú množiny vrcholov párneho, resp. nepárneho stupňa neorientovaného grafu $G=(V,E)$. Potom

$$2|E| = \sum_{v \in V} deg(v) = \sum_{v \in V_1} deg(v) + \sum_{v \in V_2} deg(v)$$

Pretože $deg(v)$ je párne pre $v \in V_1$, prvý člen na pravej strane je párny. Suma na pravej strane musí byť tiež párna, pretože ľavá strana je párna. Preto aj druhý člen na pravej strane musí byť párny. Pretože všetky sčítance tejto sumy sú nepárne, aby vytvorili párne číslo, musí ich byť párny počet. ■

Orientované hrany sa vyjadrujú pomocou usporiadanej dvojice vrcholov, napr. [u,v] pre orientovanú hranu smerujúcu z vrcholu u (začiatočného vrcholu) do vrcholu v (koncového vrcholu).

vstupný stupeň vrcholu v $deg^{-}(v)$ počet hrán, ktoré majú vrchol v ako koncový

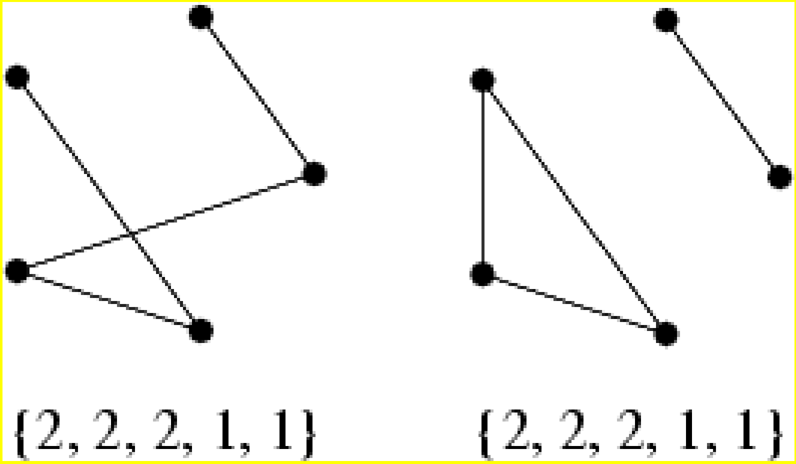
výstupný stupeň vrcholu v $deg^{+}(v)$ počet hrán, ktoré z vrcholu v vychádzajú, teda ho majú ako začiatočný vrchol.

Nech $G=(V,E)$ je graf s orientovanými hranami. Potom

$$\left|E\right| = \sum_{v\in V} deg^{+}(v) = \sum_{v\in V} deg^{-}(v)$$

Pretože každá orientovaná hrana má svoj vstupný a výstupný vrchol, prispieva rovnako jednotkou k sumám vstupných a výstupných stupňov vrcholov, ktoré sa potom rovnajú počtu orientovaných hrán. ■

Keď je daná konečná postupnosť celých nezáporných čísel $s_1, s_2, \ldots, s_n$, je otázka, či môžeme zostrojiť graf s vrcholmi, ktoré majú poporiadku stupne rovné týmto číslam. Keď áno, postupnosť voláme *grafová postupnosť*. Aby postupnosť bola grafová, musí pre každý index i platiť $s_i \leq n-1$ a samozrejme aj $\sum_{i=1}^{n} s_i$ je párne číslo.



Havlova (Hakimiho) veta. Nech je daná postupnosť

$$s_1, s_2, \ldots, s_n, \tag{1}$$

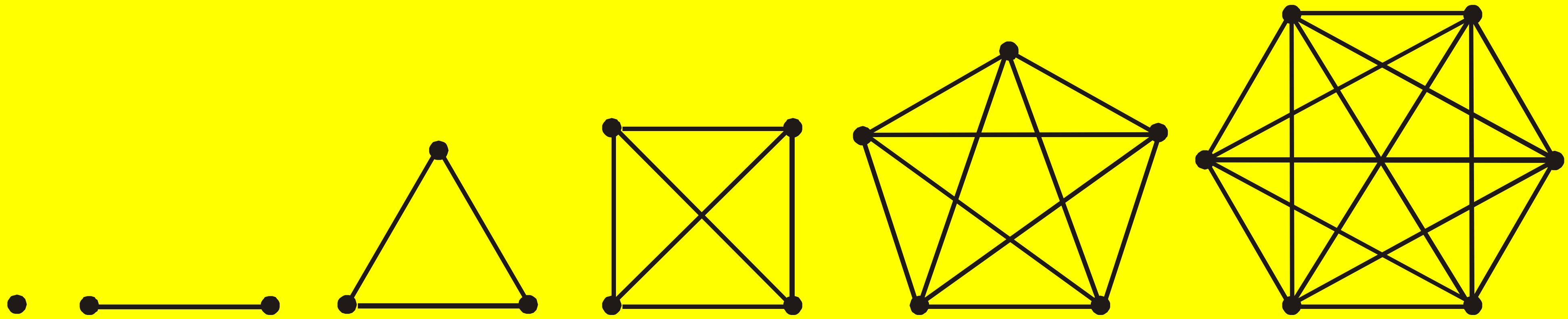
pričom pri nezáporných celých číslach s_i platí $s_1 \geq s_2 \geq \ldots \geq s_n$, $n \geq 2$, $1 \leq s_1 \leq n-1$. Postupnosť (1) je grafová práve vtedy, keď je grafová tiež postupnosť

$$s_2 - 1,\ s_3 - 1,\ \ldots, s_{s_1+1} - 1,\ s_{s_1+2}, \ldots, s_n \tag{2}$$

Niektoré špeciálne typy grafov

Úplný graf o n vrcholoch, označovaný ako K_n, je taký graf, ktorý obsahuje práve jednu hranu medzi každou dvojicou rôznych vrcholov.

Grafy K_n pre n=1,2,3,4,5,6

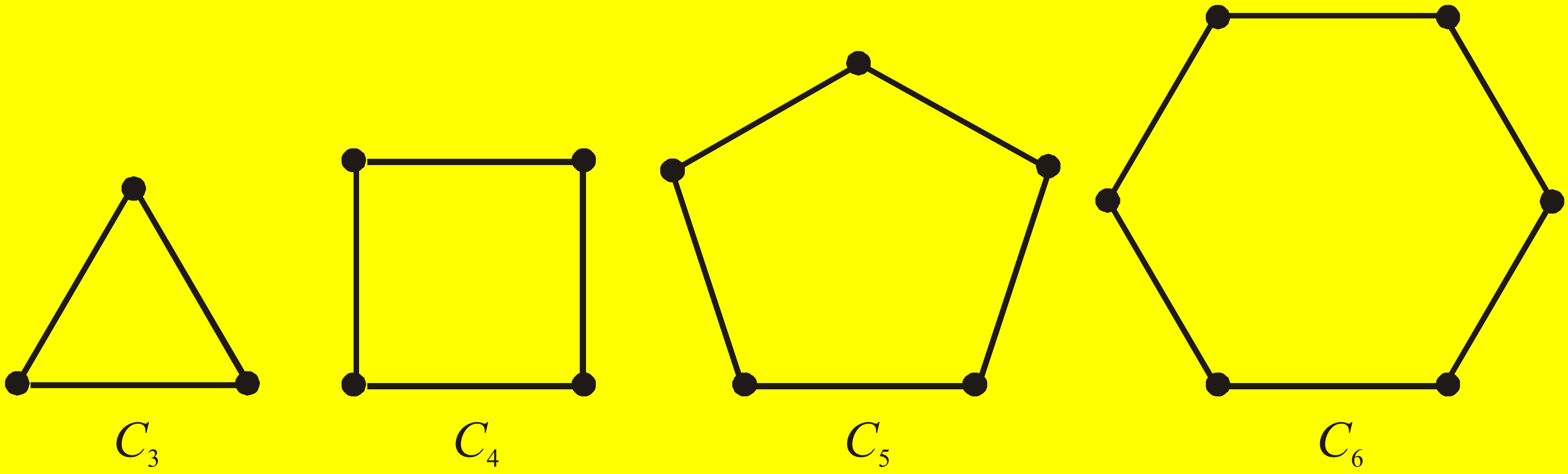


K_1 K_2 K_3 K_4 K_5 K_6

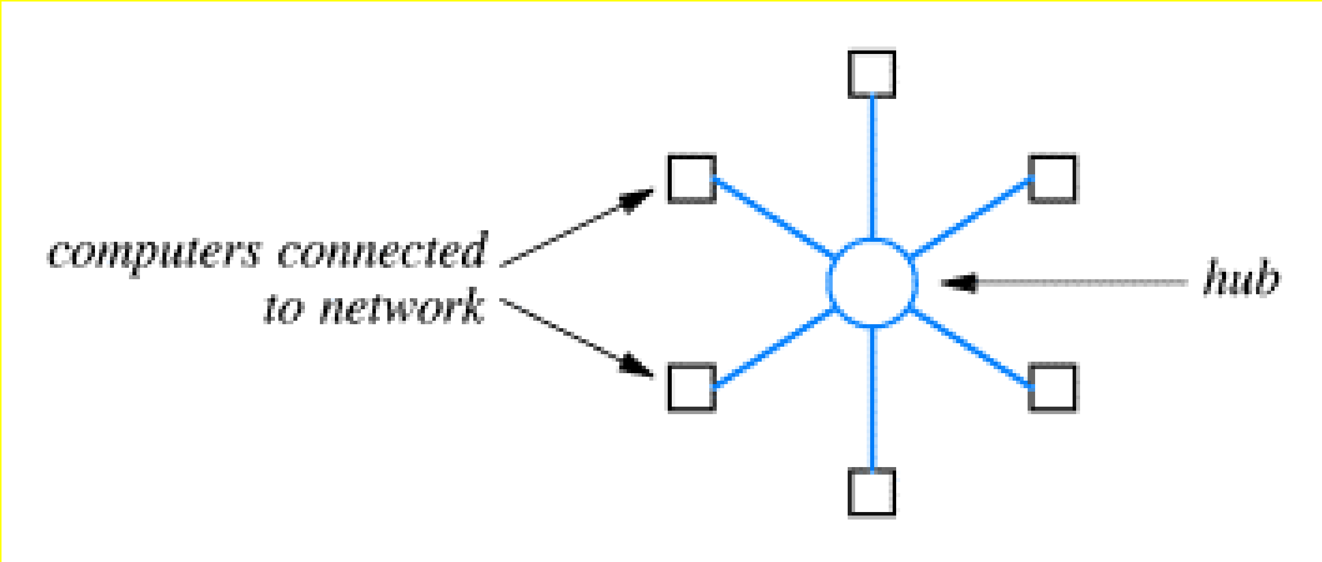
Cyklus

C_n, $n \geq 3$, pozostáva z vrcholov $v_1, v_2, \ldots, v_n$ a hrán $\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \ldots, \{v_{n-1}, v_n\}$, a $\{v_n, v_1\}$.

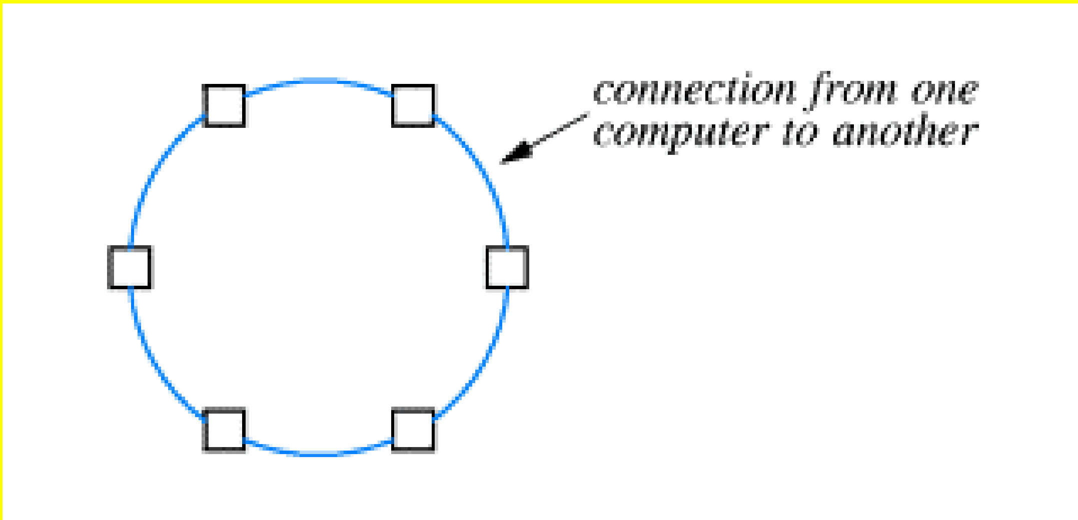
Cykly C_3, C_4, C_5 a C_6



Hviezdica



Kruhová topológia



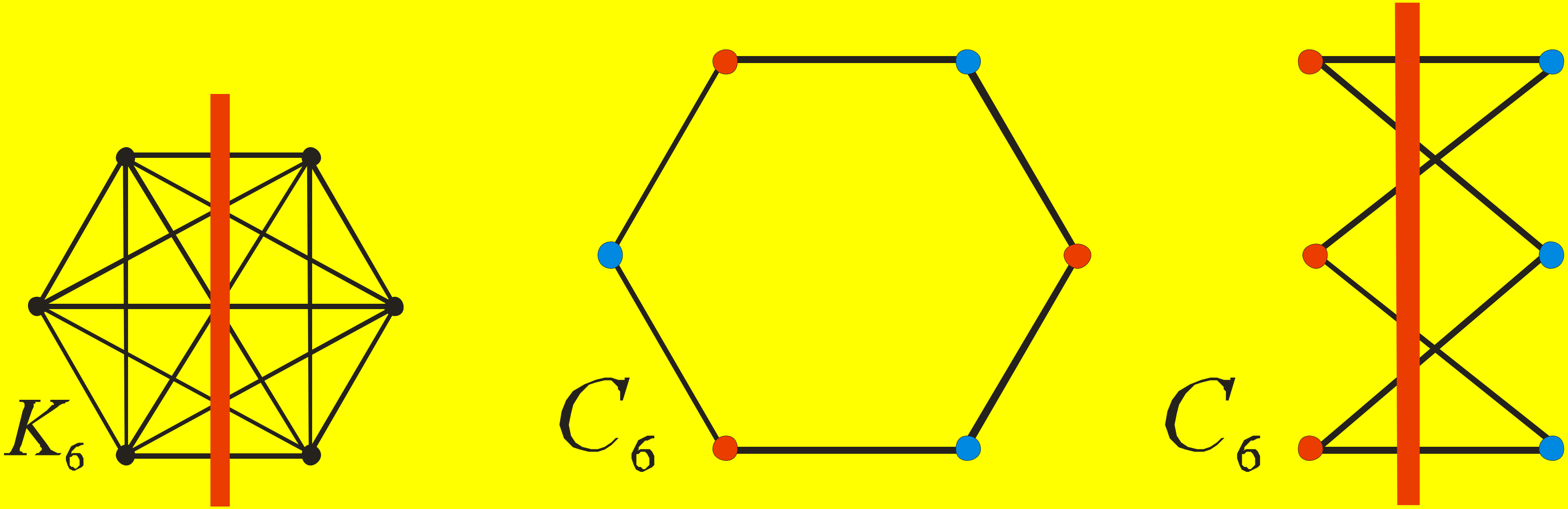
Bipartitný graf
Vrcholová množina môže byť rozdelená na dve disjunktné podmnožiny V_1 a V_2 tak, že každá hrana spája vrchol z jednej z týchto podmnožín s vrcholom z druhej z týchto podmnožín,

Príklad môžeme uviesť graf existujúcich a minulých manželstiev na dedine, kde hrana spája vždy manžela s manželkou. Taký graf sa dá rozdeliť na množinu manželov na jednej strane a množinu manželiek na strane druhej. Niektorí z páru môžu byť spojení s viacerými vrcholmi druhej podmnožiny, keď boli viackrát ženatí/vydaté za rozdielnych partnerov, ale aspoň na Slovensku sa zatiaľ nenájde pár zosobášených mužov či žien.

Príklad: ***Sú grafy C_6 alebo K_6 bipartitné?***

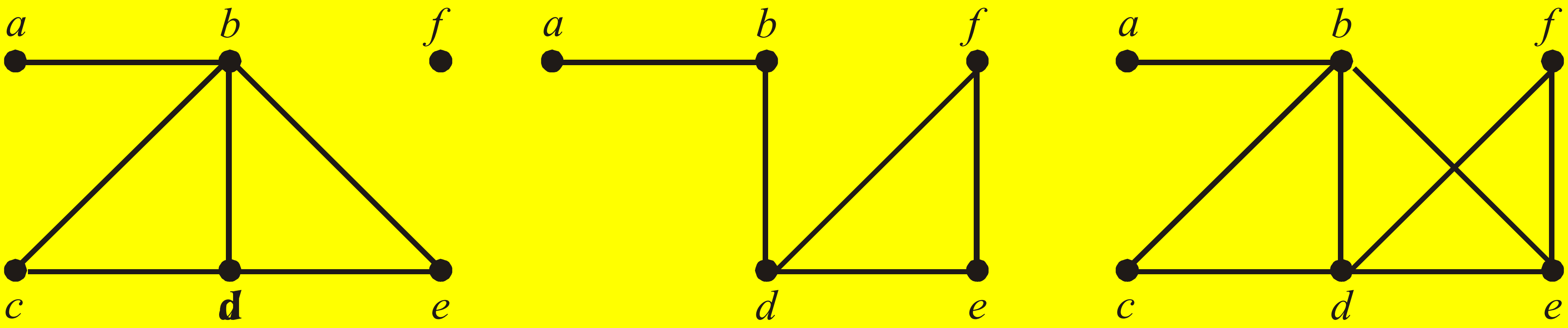
Graf C_6 je bipartitný, $V_1=\{v_1,v_3,v_5\}$, $V_2=\{v_2,v_4,v_6\}$.

Graf K_6 nie je bipartitný, pri každom možnom rozložení na dve vrcholové podmnožiny jedna z podmnožín musí obsahovať aspoň 2 vrcholy, ktoré podľa definície kompletného grafu musia byť spojené hranou. V skutočností, žiadny kompletný graf o viac ako dvoch vrcholoch nie je bipartitný.



Podgraf a zjednotenie

Podgraf grafu $G=(V,E)$ je graf $H=(W,F)$, kde $W \subseteq V$ a $F \subseteq E$.
Zjednotenie dvoch grafov $G_1=(V_1,E_1)$ a $G_2=(V_2,E_2)$ je graf s vrcholovou množinou $V_1 \cup V_2$ a hranovou množinou $E_1 \cup E_2$. Zjednotenie týchto grafov sa značí $G_1 \cup G_2$.



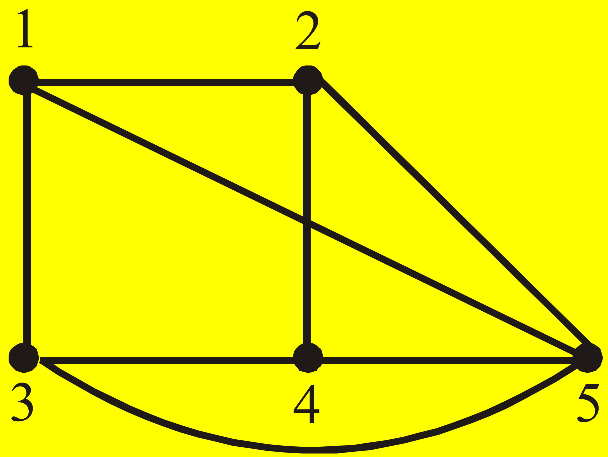
G_1 $\qquad$ G_2 $\qquad$ $G_1 \cup G_2$

Príklad zjednotenia dvoch grafov. Grafy G_1 a G_2 sú súčasne podgrafmi zjednoteného grafu $G_1 \cup G_2$

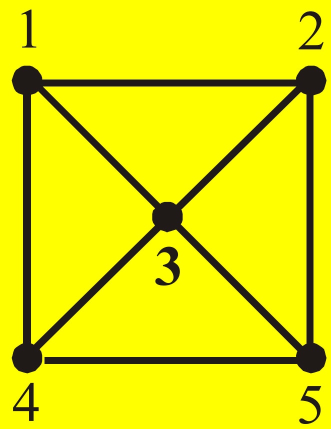
***Izomorfné* grafy**

Keď vhodne posunieme vrcholy jedného grafu nad druhý tak aby sa prekrývali, aj všetky hrany sa budú prekrývať (medzi grafmi existuje mapovanie 1-1 vrcholov, ktoré zachováva hrany)

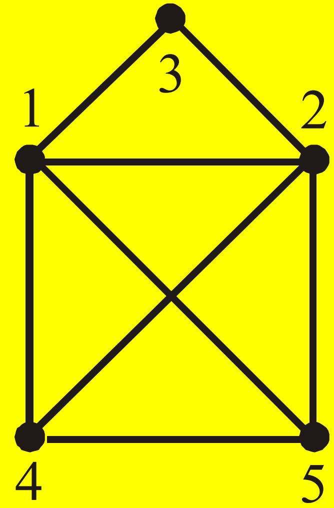
Príklad: Ktoré dvojice grafov sú navzájom izomorfné?
(Pozor, keď sa hrany krížia, neznamená to, že je tam automaticky vrchol!)



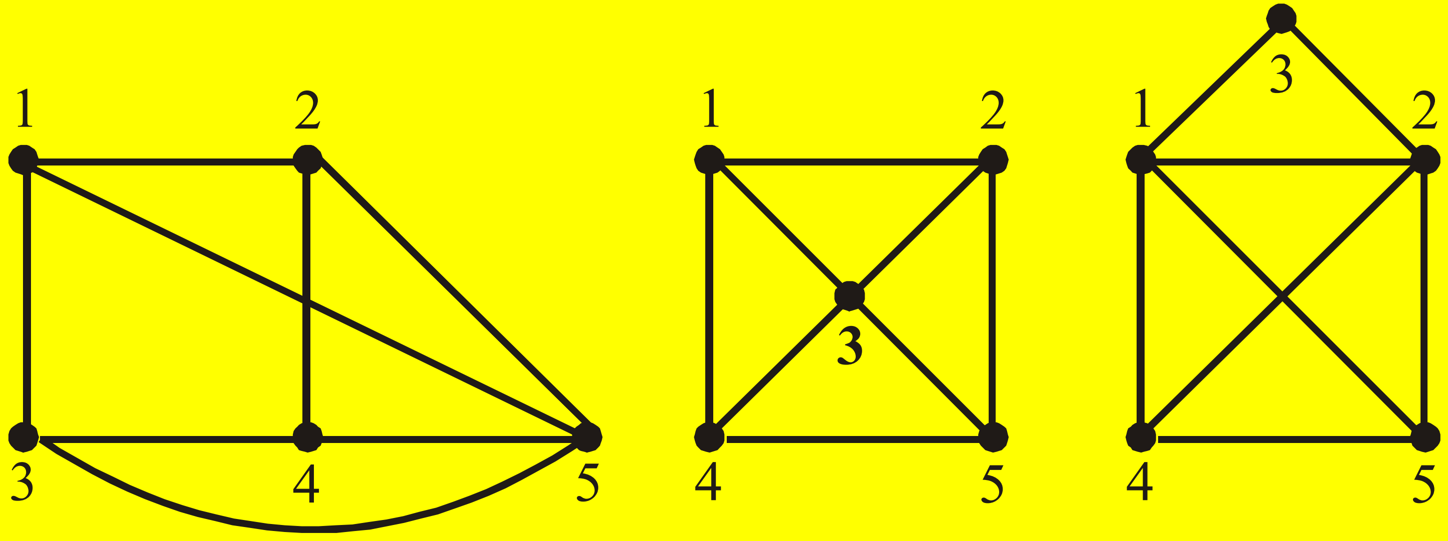
G_1



G_2



G_3



G_1 G_2 G_3

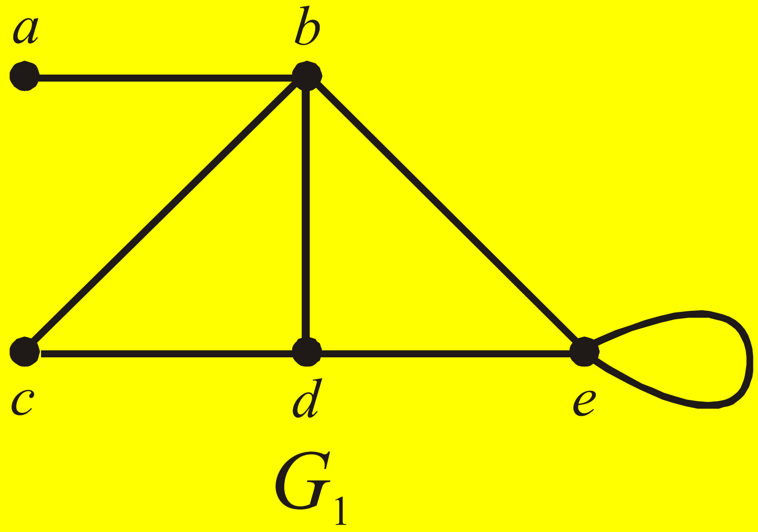
Keď označíme vrcholy grafu G_1 ako v_i a vrcholy grafu G_2 ako w_i , funkcia f mapujúca vrcholy grafu G_1 na vrcholy grafu G_2, $f(v_1)=w_1$, $f(v_2)=w_2$, $f(v_3)=w_4$, $f(v_4)=w_5$, $f(v_5)=w_3$ zachováva hrany

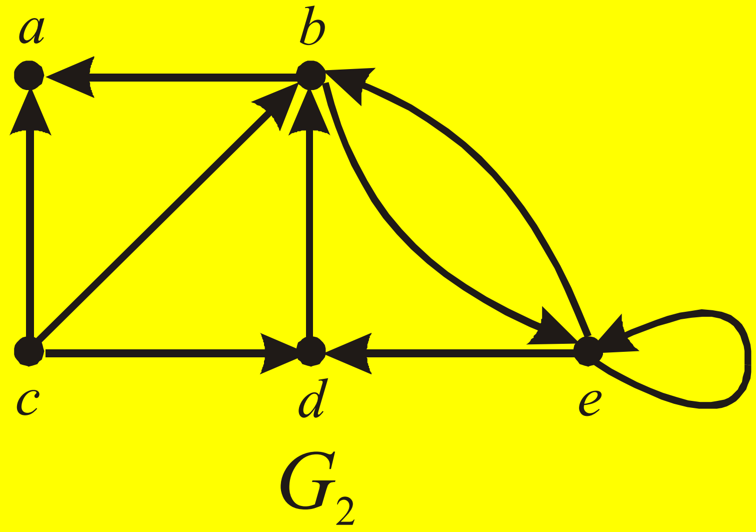
Graf G_3 nie je izomorfný s grafmi G_1 a G_2, pretože mu odpovedajúce vrcholy majú stupne 2,3,3,4,4, zatiaľ čo stupne vrcholov grafov G_1 a G_2 sú 3,3,3,3,4.

Zistenie izomorfizmu dvoch grafov (keď majú rovnaké *invarianty*) má v najhoršom prípade stále exponenciálnu zložitosť (ale NAUTY 100 vrcholov 1s)

Reprezentácia grafov (aby sa dali zadať do počítača)

Zoznam spojenia (adjacency list)

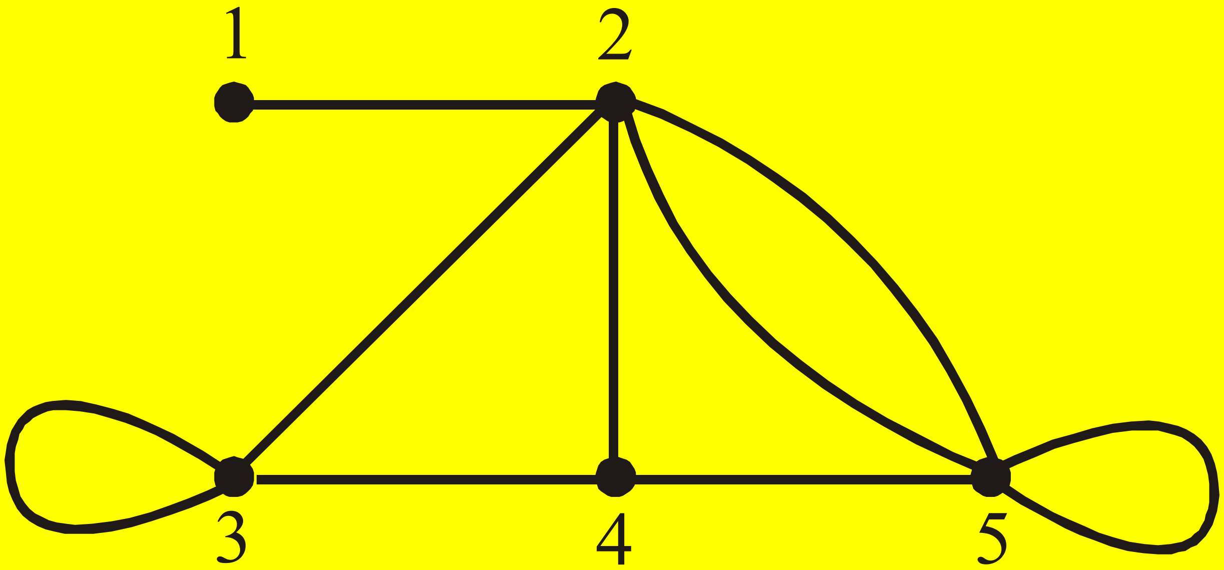




Vrchol grafu G_1	Susedné vrcholy	Vrchol grafu G_2	Susedné vrcholy
a	*b*	*a*	
b	*a, c, d, e*	*b*	*a, e*
c	*b, d*	*c*	*a, b, d*
d	*b, c, e*	*d*	*b*
e	*b, d, e*	*e*	*b, e, d*

Matica susednosti (adjacency matrix) $A = (a_{\mathrm{ij}})$

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{pre } \{v_i, v_j\} \in E \text{ grafu } G \\ 0 & \text{ináč} \end{cases}$$

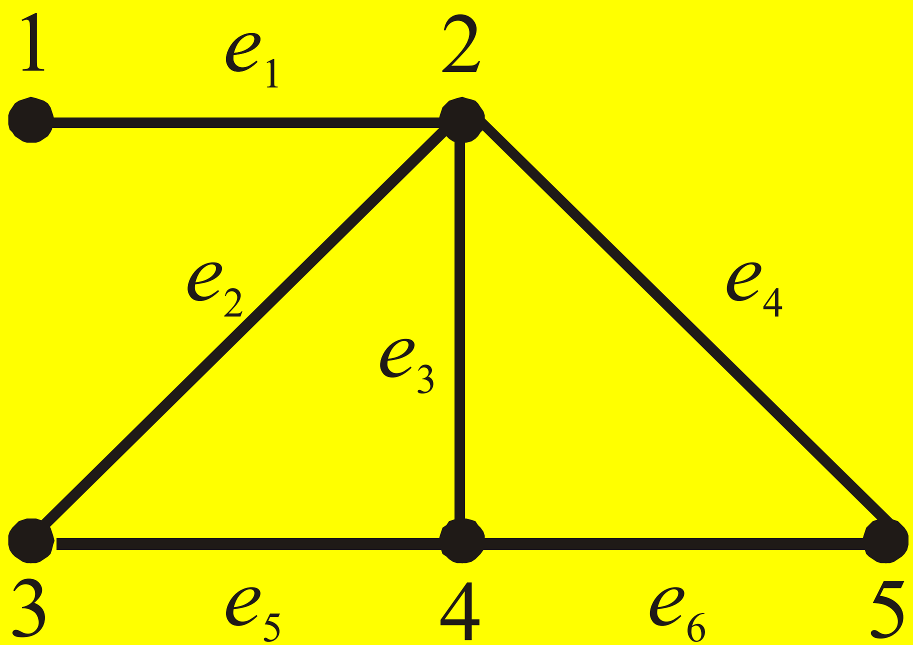


$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Incidenčná matica

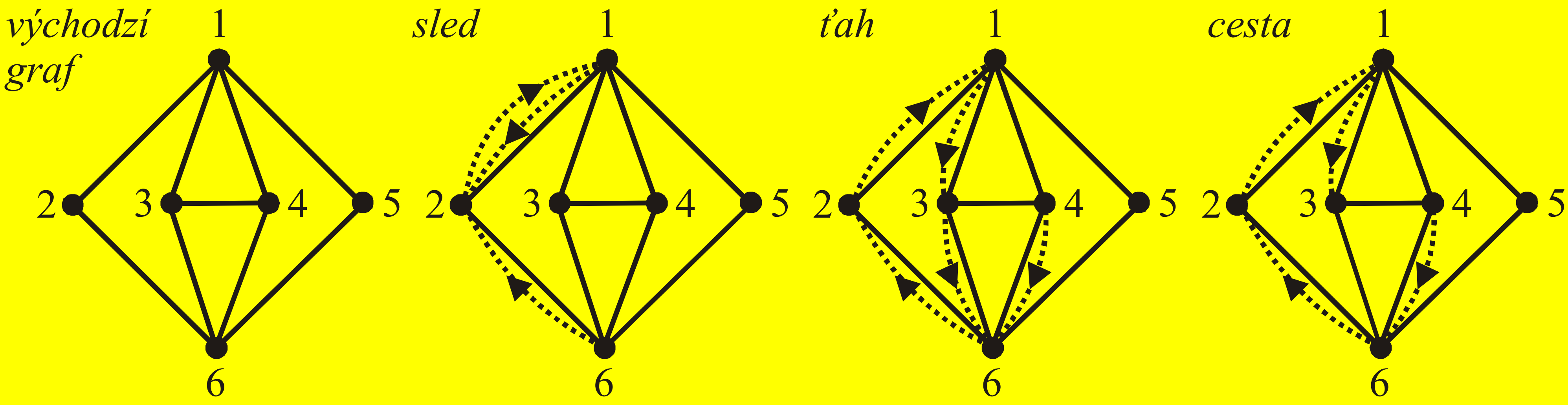
Pre neorientovaný graf G=(V,E) s n vrcholmi a m hranami **je to** $n\times m$ matica

$\boldsymbol{M} = (m_{ij})$, kde $m_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{keď hrana } e_j \text{ je incidentná s vrcholom } v_i \\ 0 & \text{inak} \end{cases}$



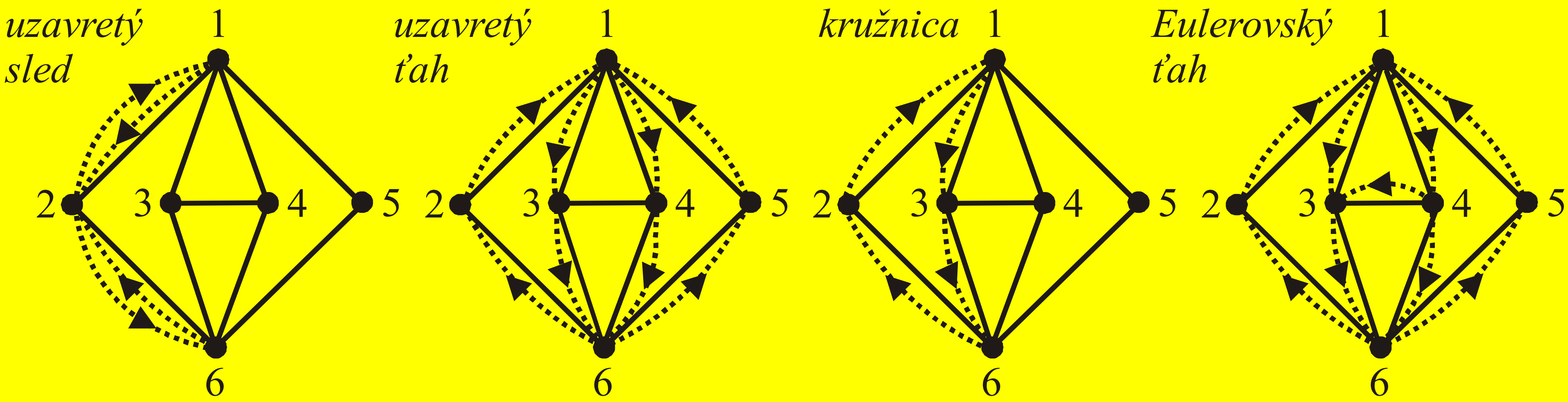
$$\begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Súvislosť v neorientovaných grafov a eulerovské ťahy



sled (6,2,1,2) – môžu sa opakovať sa vrcholy aj hrany
ťah (4,6,2,1,3,6) – neopakujú sa hrany
cesta (4,6,2,1,3) – neopakujú sa vrcholy ani hrany,

Súvislosť v neorientovaných grafov a eulerovské ťahy



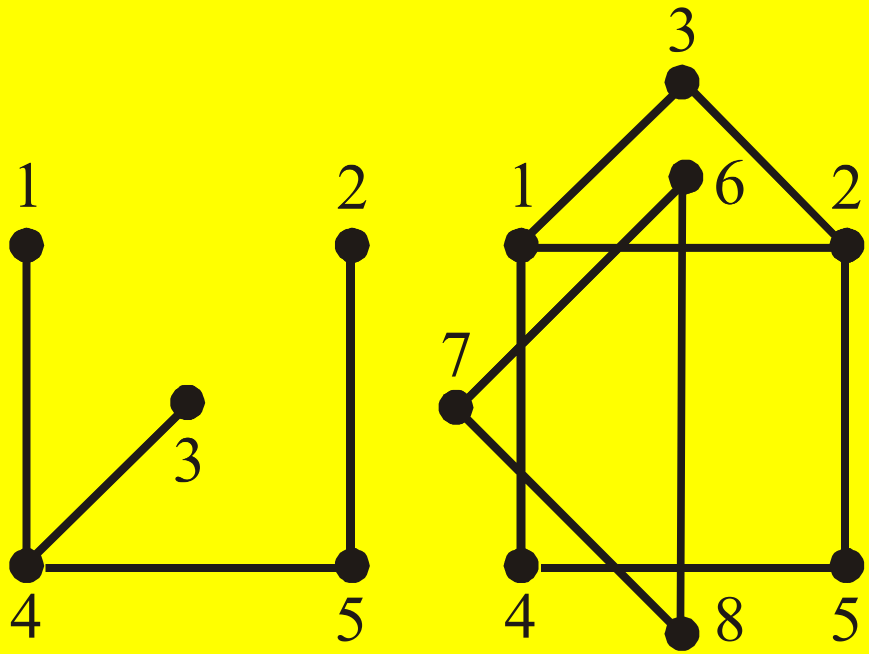
uzavretý sled (6,2,1,2,6) – posledný vrchol totožný s prvým, môžu sa opakovať sa vrcholy aj hrany

uzavretý ťah (4,6,2,1,3,6,5,1,4) – posledný vrchol totožný s prvým, neopakujú sa hrany

kružnica (6,2,1,3,6) – ťah (neopakujú sa hrany) a posledný vrchol totožný s prvým, inak sa neopakujú,

eulerovský ťah (4,6,2,1,3,6,5,1,4,3) – prejde cez všetky hrany práve raz

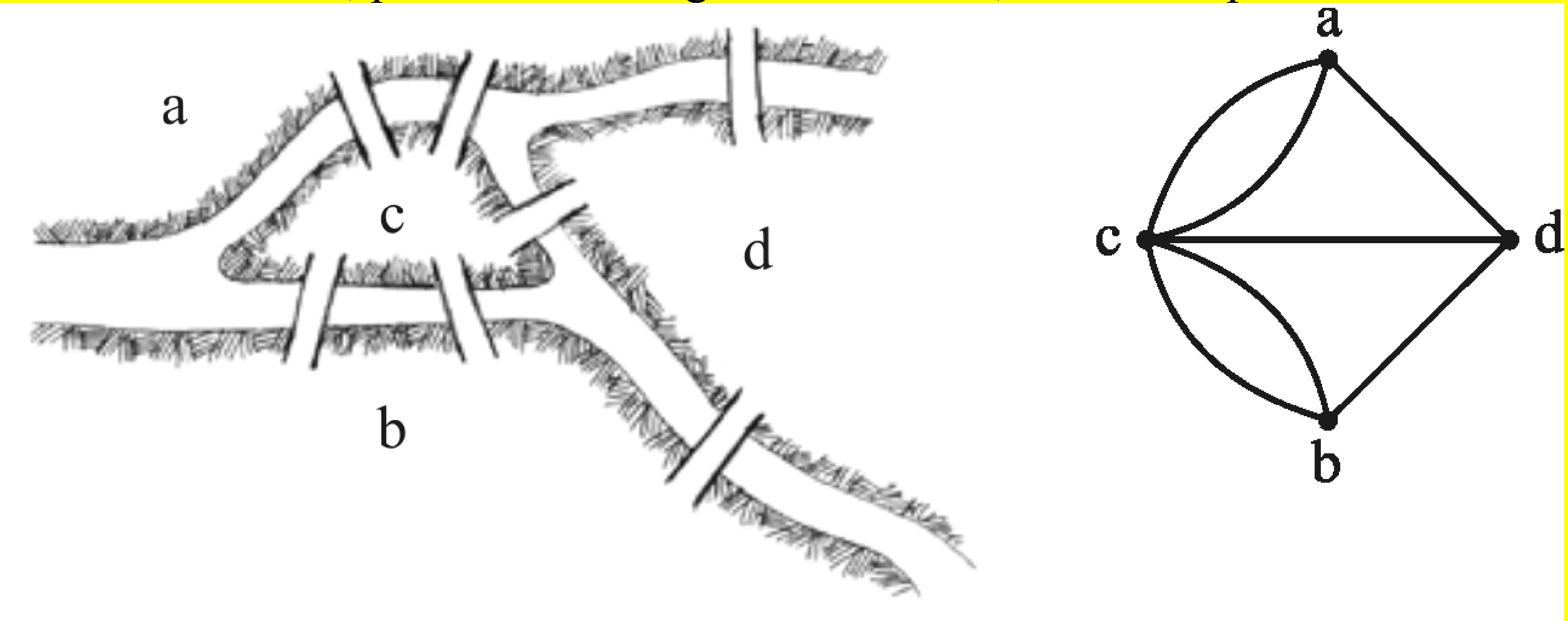
Neorientovaný graf sa volá ***súvislý***, pokiaľ existuje cesta medzi každou dvojicou rozdielnych vrcholov grafu.
(Môžu ľubovoľné dva počítače v počítačovej sieti vzájomne komunikovať?)



G_1 G_2

Príklad súvislého a nesúvislého grafu (graf G_2 je nesúvislý, má dva komponenty s vrcholovými množinami $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ a $\{v_6, v_7, v_8\}$, medzi dvojicami vrcholov z rôznych množín neexistuje cesta.

Eulerova veta, prvá veta teórie grafov z r. 1736, ktorá rieši problém



Eulerova veta: Súvislý graf má uzavretý eulerovský ťah práve vtedy, keď má všetky vrcholy párneho stupňa.

K dôkazu Eulerovej vety je užitočné mať pomocnú vetu:
Veta. Každý vrchol grafu G s uzavretým eulerovským ťahom je incidentný s hranou aspoň jednej kružnice tohto grafu.

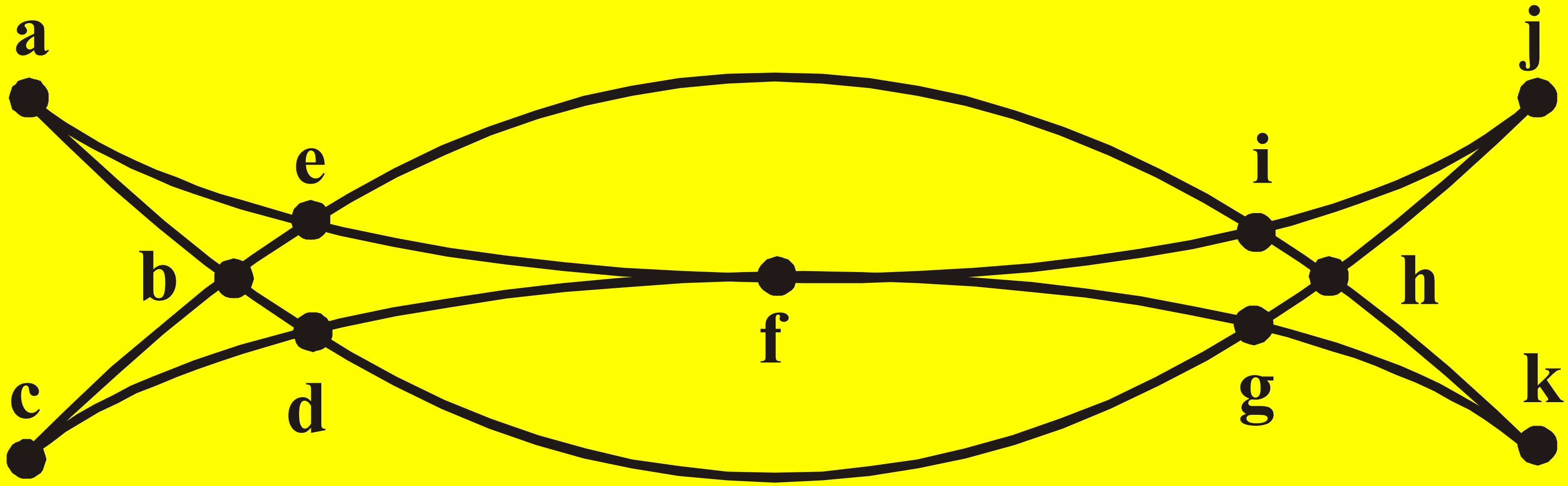
Dôkaz vety 10.5. Nech x je ľubovolný vrchol a xy hrana s ním incidentná. Hrana xy nemôže byť mostom grafu G, pretože po jej odstránení by sme dostali nesúvislý graf a komponent s uzlom x by mal 1 vrchol nepárneho stupňa, čo odporuje Vete 10.1. Existuje teda kružnica prechádzajúca hranou xy a teda tiež vrcholom x. ■

Dôkaz Eulerovej vety

Keď sa graf G dá zostrojiť jedným uzavretým ťahom, je súvislý. V grafe nemôže existovať vrchol v nepárneho stupňa, pretože ťahom do v práve toľkokrát vstupujeme, koľkokrát z neho vystupujeme.

Predpokladajme súvislý graf s vrcholmi párneho stupňa. Zvoľme ľubovolný vrchol w. Podľa pomocnej vety existuje v našom grafe kružnica, ktorá obsahuje vrchol w, táto kružnica nám určuje uzavretý ťah začínajúci a končiaci vo w (presnejšie, v závislosti od smeru, ktorým sa po kružnici pohybujeme, môžeme vybrať z 2 takých ťahov).

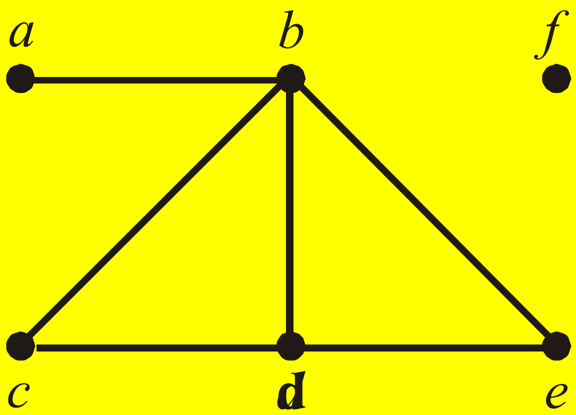
Zo všetkých ťahov začínajúcich a končiacich uzlom w si zoberme ťah T_{max} s najväčšou dĺžkou. Ukážeme si, že to je náš želaný uzatvorený eulerovský ťah. Predpokladajme, že by niektorá hrana grafu nepatrila do T_{max}. Zostrojme podgraf G_1 grafu G, do ktorého dáme všetky hrany grafu G nepatriace do T_{max} a vrcholy s nimi incidentné. Je vidno, že G_1 je graf so všetkými vrcholmi párneho stupňa, ktorý sa dá rozložiť na súvislé podgrafy. Teda aj G_1 sa dá rozložiť na uzatvorené ťahy. Teraz ale jednoducho zostrojíme z T_{max} nový ťah tým, že doňho „vnoríme“ cykly grafu G_1. Tento nový ťah má ale dĺžku väčšiu, ako bola dĺžka T_{max}, čím dochádzame ku sporu. Preto T_{max} obsahuje každú hranu grafu G a tým je veta dokázaná. ■



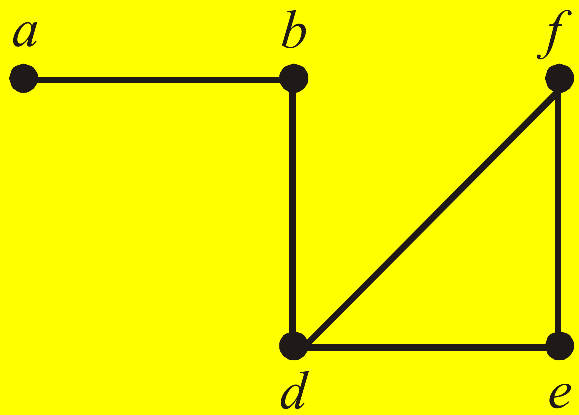
Príklad: Graf volaný Mohamedova šabľa – dá sa nekresliť jedným ťahom, ktorý začína a končí v rovnakom bode (a žiadna čiara nie je zdvojená)?
Všetky vrcholy sú párneho stupňa, graf má uzavretý eulerovský ťah. Použijeme postup z predchádzajúceho dôkazu vety. Najprv zostrojíme ľubovoľnú uzatvorený ťah v grafe, napr. ťah T: a,b,d,c,b,e,i,f,e,a. Keďže sme takto nenašli želaný uzatvorený eulerovský ťah, zostrojíme podgraf G_1 grafu G, do ktorého dáme všetky hrany grafu G nepatriace do T a vrcholy s nimi incidentné. Potom v G_1 vytvoríme ťah d,g,h,j,i,h,k,g,f,d, ktorý prechádza cez všetky hrany grafu G_1. Vnorením tohto ťahu do prvého ťahu na vhodnom mieste dostávame ťah $a,b,d,g,h,j,i,h,k,g,f,d,c,b,e,i,f,e,a$, ktorá prechádza cez všetky hrany.

Veta. Súvislý graf má neuzavretý eulerovský ťah práve vtedy, keď má práve dva vrcholy nepárneho stupňa

Dôkaz: Keď má súvislý graf neuzavretý eulerovský ťah, zrejme má 2 vrcholy nepárneho stupňa. Opačne, keď máme graf s dvoma vrcholmi nepárneho stupňa, stačí ich spojiť s novým vrcholom x a všetky vrcholy majú párny stupeň a existuje uzatvorený eulerovský ťah. Po odstránení vrcholu x a s ním incidentných hrán dostávame otvorený eulerovský ťah. ■



G_1



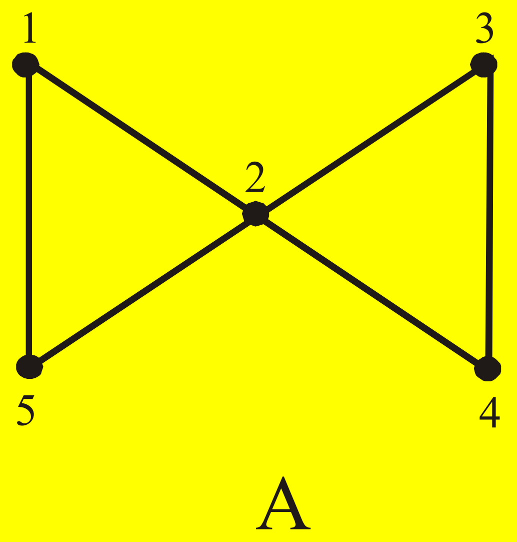
G_2

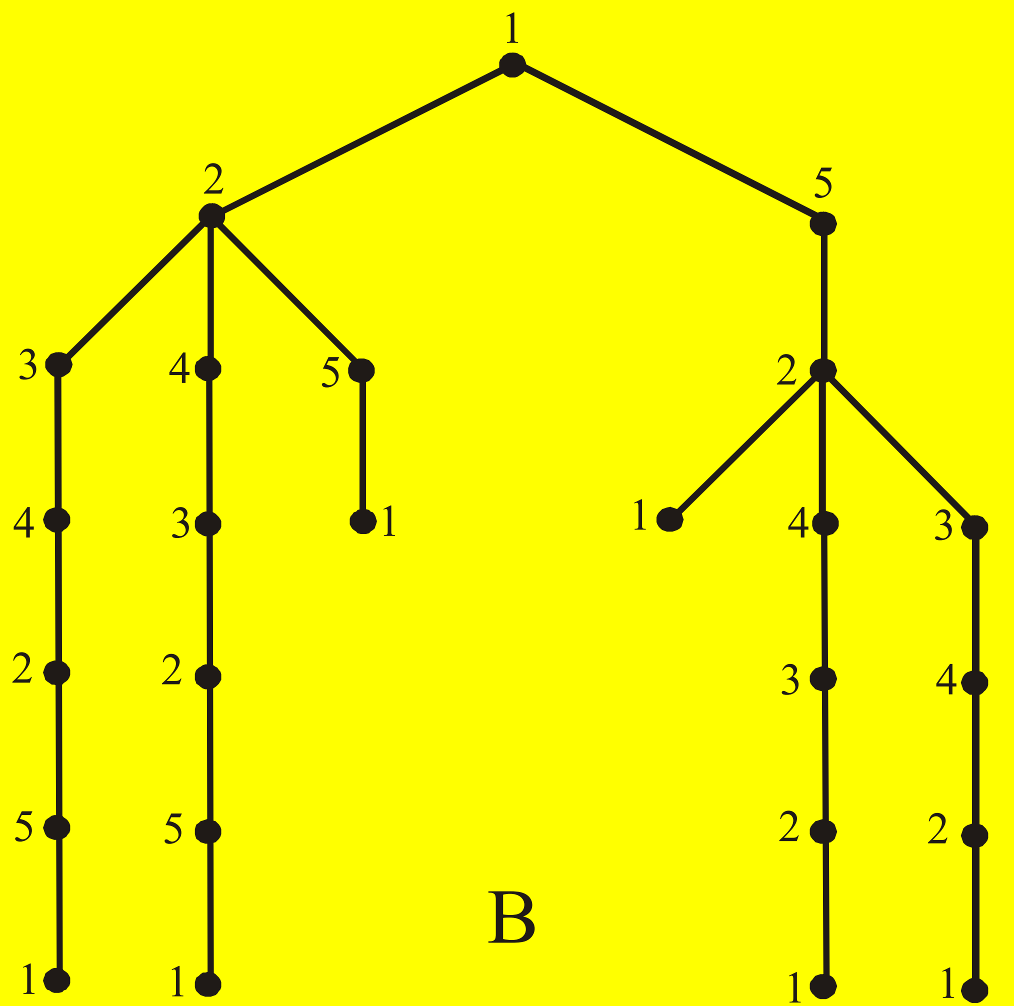
Príklad: Dajú sa grafy G_1, G_2 nakresliť jedným ťahom? Keďže obsahujú dva vrcholy nepárneho stupňa, uzavretý eulerovský ťah v nich neexistuje. Existuje v nich ale otvorený eulerovský ťah.

Algoritmus spätného prehľadávania pre konštrukciu uzavretej eulerovskej cesty

```
U₁:= ∅; w₁:=1; U₂:=Γ(1); d:=2;
while d>1 do
if U_d ≠ ∅ then
begin w_d:=get_element(U_d); U_d:=U_d-{w_d};
      if d≤m then
      begin d:=d+1;
            U_d:=Γ(w_{d-1});
            Z množiny U_d odstránime tie vrcholy i∈Γ(w_{d-1}),
            ktorých hrany {i,w_{d-1}} sa vyskytujú v aktuálnej
            ceste (w_1,w_2,...,w_{d-1});
      end else
      if w_1=w_d then
      begin print(w_1,w_2,...,w_{n+1});
            d:=d-1;
      end;
end else d:=d-1;
```

$\Gamma(i)$ množina vrcholov, susedných s vrcholom indexovaným i.

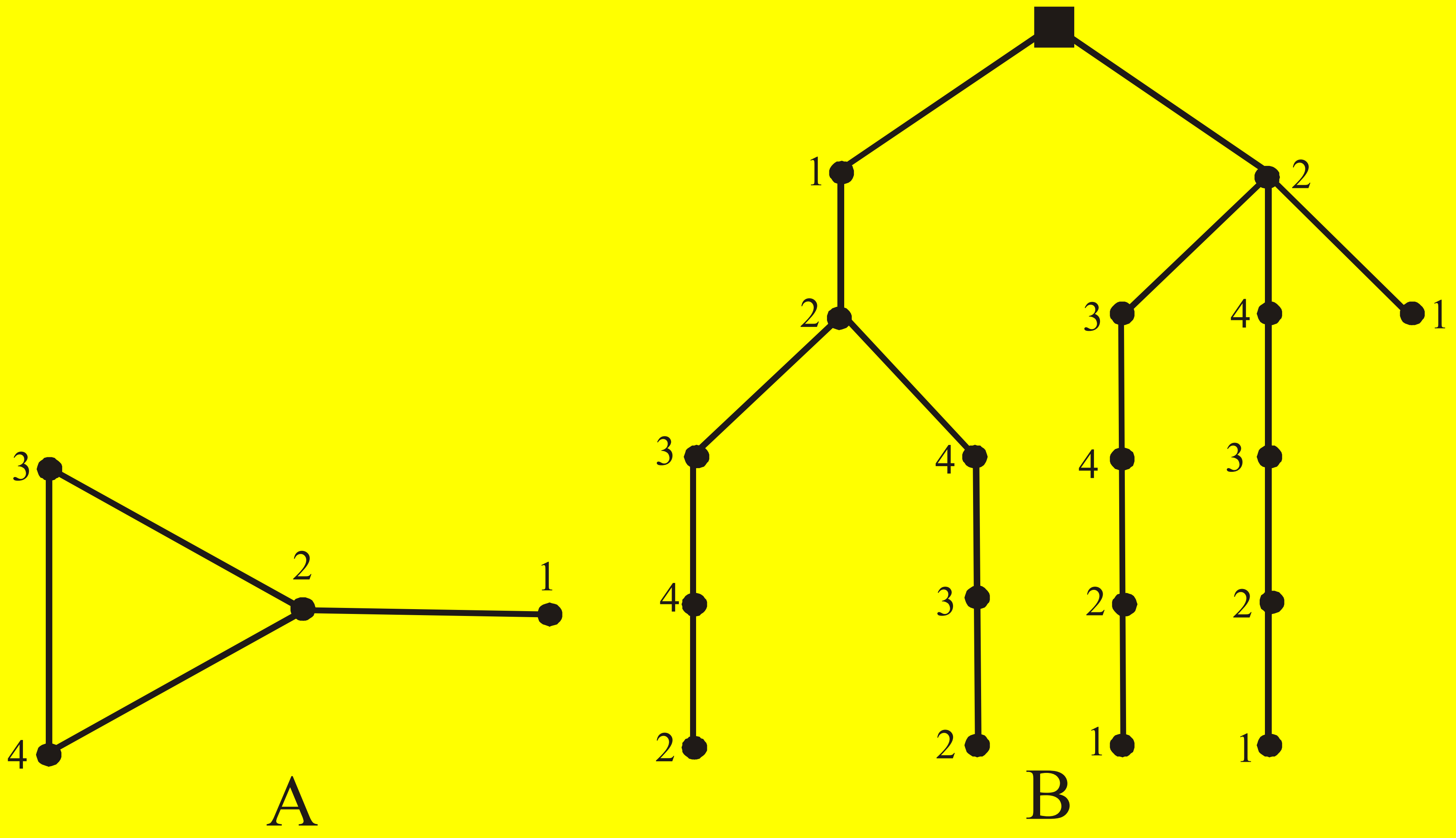




Strom riešení (diagram B) pre uzavretú eulerovskú cestu zostrojený algoritmom spätného prehľadávania pre obyčajný graf

Algoritmus spätného prehľadávania pre konštrukciu otvorenej eulerovskej cesty

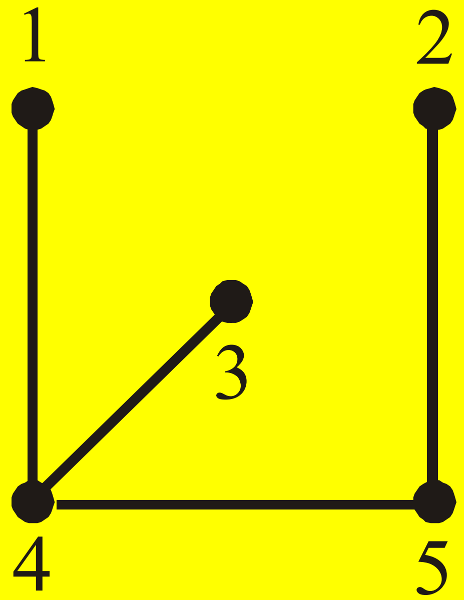
```
U₁:={vrcholy s nepárnym stupňom}; d:=1;
while d>0 do
if U_d ≠ ∅ then
begin w_d:=zober_prvok(U_d); U_d:=U_d-{w_d};
      if d≤m then
      begin d:=d+1;
            U_d:=Γ(w_{d-1});
            Z množiny U_d odstránime tie vrcholy i∈Γ(w_{d-1}),
            ktorých hrany {i,w_{d-1}} sa vyskytujú v aktuálnej
            ceste (w_1,w_2,...,w_{d-1});
      end else
      begin print(w_1,w_2,...,w_{n+1});
            d:=d-1;
      end;
end else d:=d-1;
```



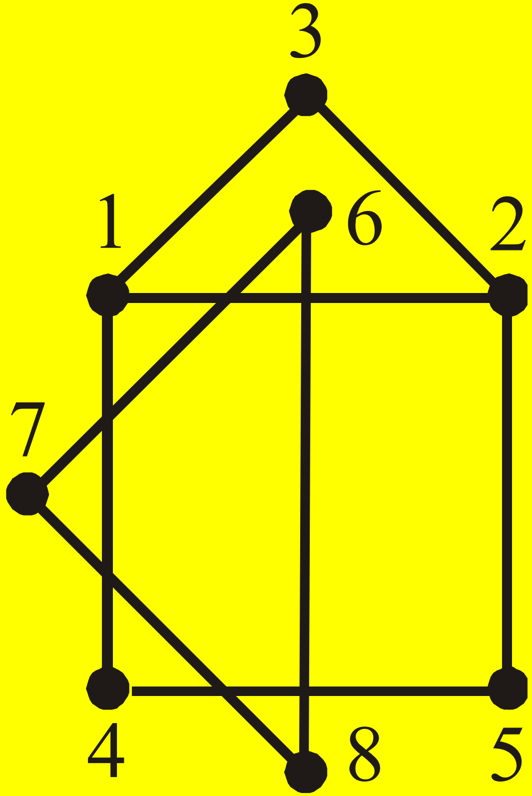
Strom riešení (diagram B) pre otvorenú eulerovskú cestu zostrojený algoritmom spätného prehľadávania pre obyčajný graf (diagram A).

Nesúvislý graf, je zjednotením dvoch alebo viac súvislých grafov, z ktorých žiaden pár nemá spoločný vrchol. Tieto súvislé podgrafy sa volajú **komponenty** grafu.

Niekedy odstránením hrany alebo vrcholu z grafu sa graf rozpadne na viac komponentov. Takú hranu voláme **most** a vrchol voláme **artikulácia**.



G_1

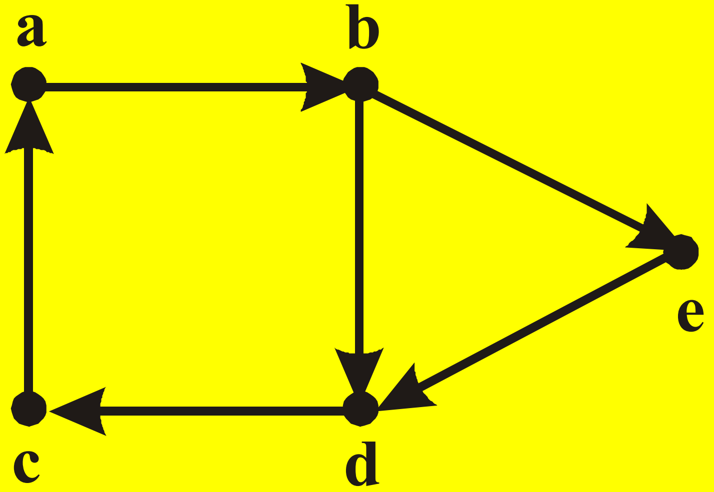


G_2

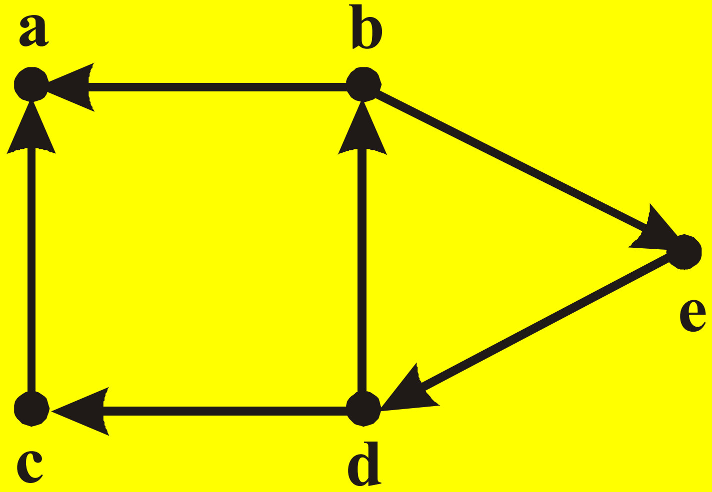
Príklad: u grafu G_1 sú artikuláciami vrcholy v_4 a v_5 a mostmi sú všetky hrany, zatiaľ čo u grafu G_2 neexistujú ani artikulácie, ani mosty.

Orientovaný graf je ***silno súvislý***, keď pre ľubovoľné dva vrcholy a, b grafu existuje tak cesta "po šípkach" z a do b, ako aj cesta z b do a.

Orientovaný graf je ***slabo súvislý***, keď existuje cesta "po šípkach" medzi ľubovoľnými dvoma vrcholmi v neorientovanom grafe, vzniknutom z orientovaného grafu odstránením orientácie hrán.



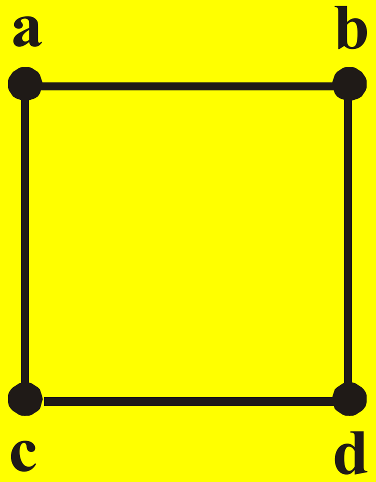
G_1



G_2

Príklad silno súvislého grafu G_1 a slabo súvislého grafu G_2.

Veta. Nech G je graf s maticou susednosti **A** vzhľadom na usporiadanie vrcholov v_1, v_2, …v_n (s orientovanými alebo neorientovanými hranami a povolenými slučkami a násobnými hranami). Počet rozdielnych sledov dĺžky r z vrcholu v_i do vrcholu v_j, kde r je kladné celé číslo, sa rovná prvku a_{ij} matice $\mathbf{A}^r$.



$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad A^4 = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 8 & 8 & 0 \\ 0 & 8 & 8 & 0 \\ 8 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

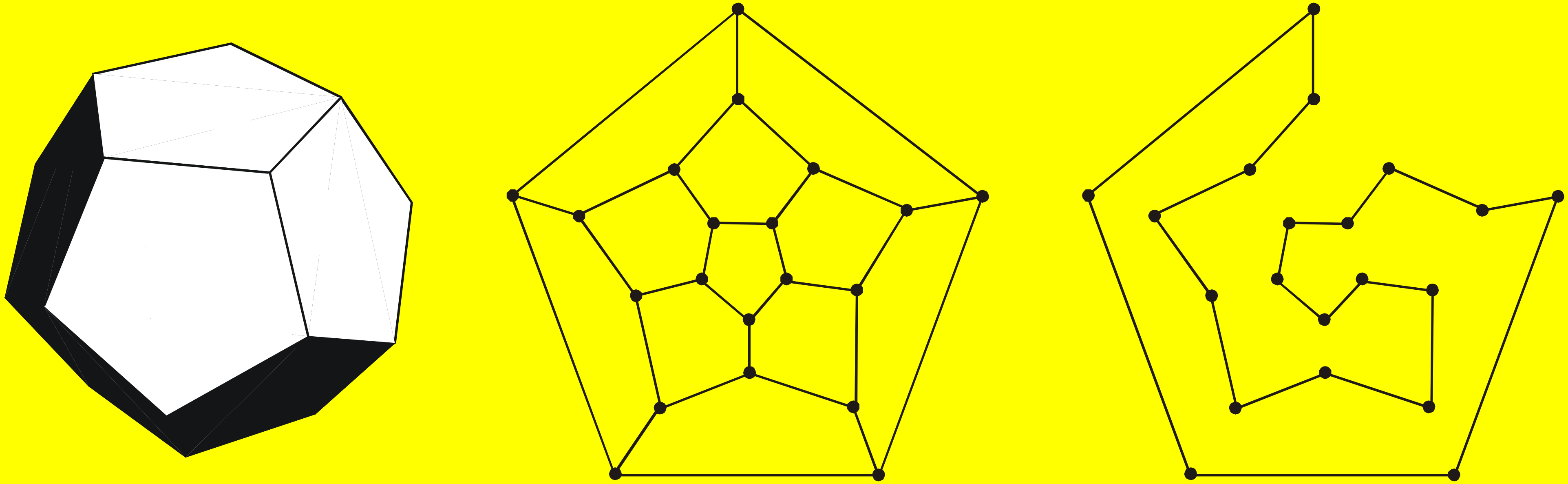
Príklad: Koľko sledov dĺžky 4 existuje z vrcholu a do vrcholu d?

Počet sledov o dĺžke 4 od vrcholu a do vrcholu d sa rovná prvku a_{14} matice A^4, teda 8. Konkrétne ide o sledy a,b,a,b,d; a,b,a,c,d; a,b,d,b,d; a,b,d,c,d; a,c,a,b,d; a,c,a,c,d; a,c,d,b,d; a a,c,d,c,d.

Hamiltonovské cesty a kružnice

Existuje aj podobný problém ako u mostov Královce pre vrcholy grafov: dá sa po hranách v grafe prejsť práve raz cez všetky vrcholy a prípadne sa aj vrátiť na východzí vrchol?

V roku 1857 írsky matematik Sir *William Rowan Hamilton* navrhol hru zvanú "cesta okolo sveta". Bolo treba nájsť cestu po hranách dodekaédra (pravidelného dvanásťstenu) všetkými vrcholmi predstavujúcimi mestá vo svete tak aby sa prešlo cez všetky mestá až do východzieho po najmenšom počte hrán



William Rowan Hamilton (1805-1865) sa narodil v Dubline v rodine právnika. Už ako 3-ročný vedel výborne čítať a zvládol pokročilú aritmetiku. Preto ho poslali bývať s jeho strýkom, vynikajúcim lingvistom. V 8 rokoch Hamilton vedel po latinsky, grécky a hebrejsky. Ďalej zvládol taliančinu, francúzštinu a orientálne jazyky, pýšil sa tým, že pozná toľko jazykov, koľko má rokov. V 17 rokoch sa ale zameral na matematickú astronómiu. Do vstupu na vysokú školu Trinity College v 18 rokoch Hamilton nechodil do žiadnej školy, vzdelávali ho súkromí tútori. Po škole bol menovaný Kráľovským astronómom, a v tejto funkcii zotrval celý život. Najvýznamnejšie objavy urobil, keď mal 20 rokov, predovšetkým v optike, abstraktnej algebre (vynašiel objekty zvané quarternióny). Ku koncu života trpel alkoholizmom, žil odlúčene a ostali po ňom stohy nepublikovaných prác, premiešané s taniermi so zvyškami jedla.

Cesta $x_0,x_1,...,x_n$ v grafe G= (V,E) sa volá ***hamiltonovská cesta***, keď $V=\{x_0,x_1,..., x_{n-1},x_n\}$ a $x_i \neq x_j$ pre $0 \leq \underline{i} < j \leq n$. Kružnica $x_0,x_1,...,x_n,x_0$ (s $n>1$) v grafe G= (V,E) sa volá ***hamiltonovská kružnica***, keď $x_0,x_1,..., x_{n-1},x_n$ je hamiltonovská cesta.

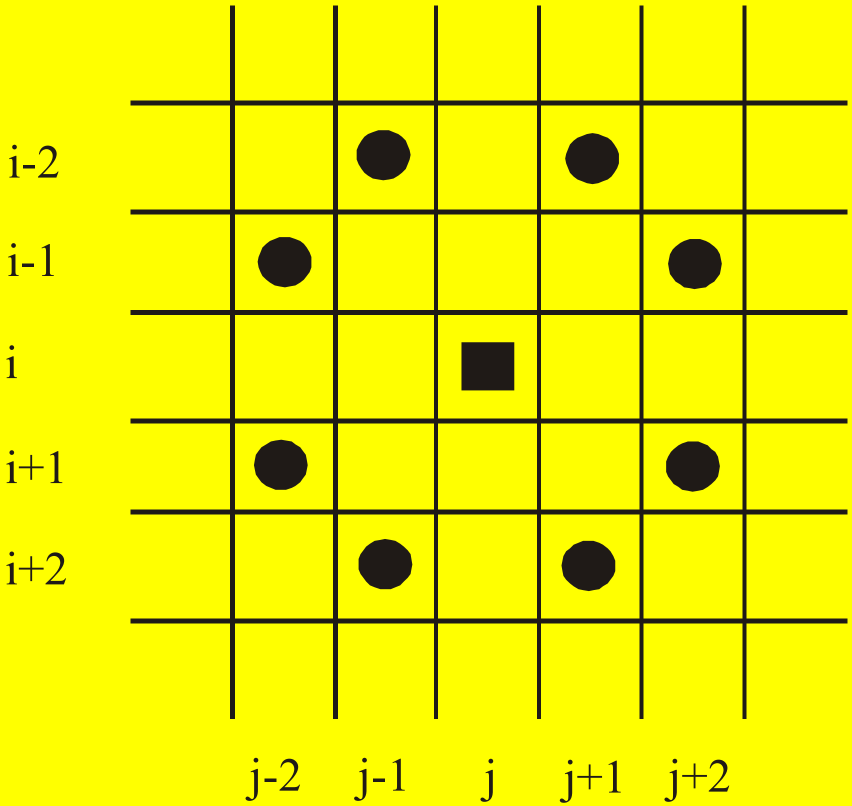
Existuje hamiltovská kružnica?
Nutné a postačujúce kritéria pre ☹
postačujúce podmienky ☺
zakazujúce podmienky ☺
Vo všeobecnosti, čím viac hrán má graf, tým pravdepodobnejšie je, že bude mať hamiltonovskú kružnicu

Diracov teorém: Keď G je jednoduchý graf s n vrcholmi pre $n \geq 3$ taký, že stupeň každého vrcholu v G je aspoň $n/2$, potom má graf G hamiltonovskú kružnicu.

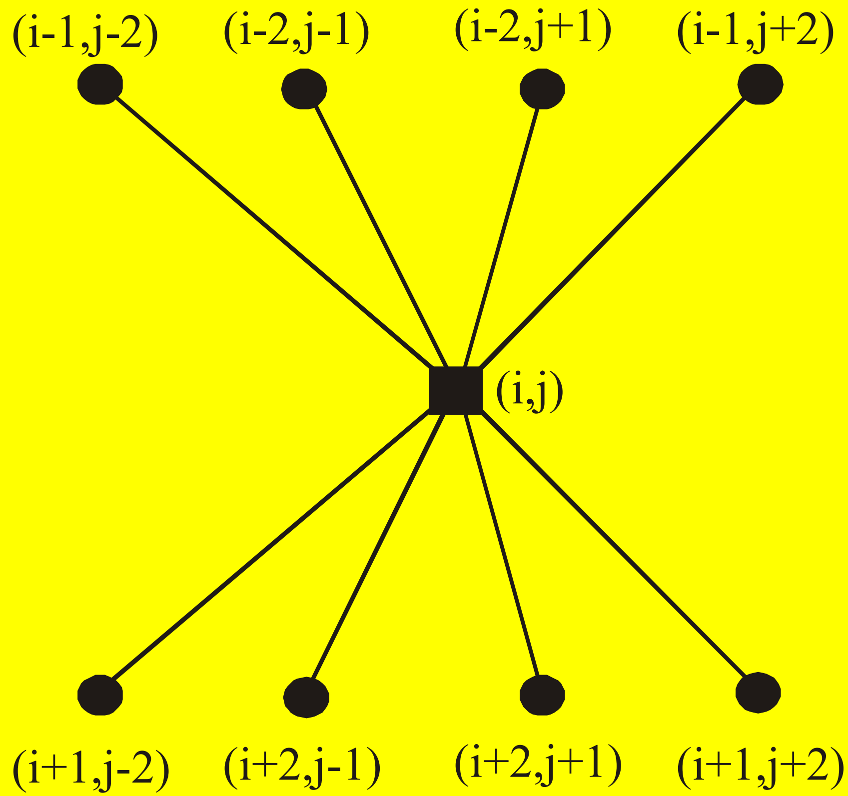
Oreho teorém: Keď G je jednoduchý graf s n vrcholmi pre n≥3 taký, že $deg(u)+deg(v) \geq n$ pre každú dvojicu nesusedných vrcholov u a v v G, potom má graf G hamiltonovskú kružnicu.

Tieto teorémy ale nepodávajú nutné podmienky pre výskyt hamiltonovskej kružnice, napríklad neplatia pre K_5, ktorý hamiltonovskú kružnicu celkom isto má (ako aj všetky kompletné grafy pre 3 a viac vrcholov)

Príklad. Nakreslite graf, ktorý reprezentuje hamiltonovskú cestu koňom na šachovnici 3×4.

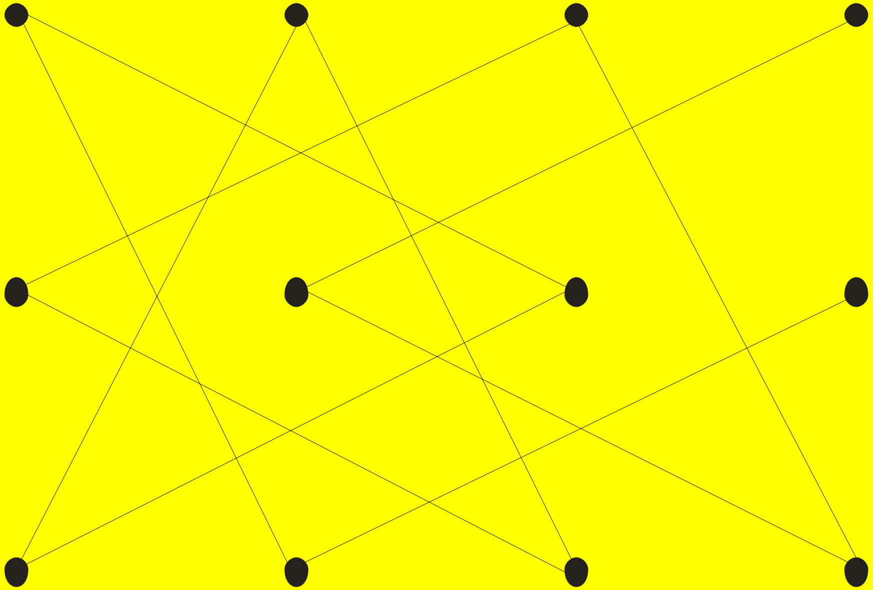


A



B

(A) Prípustné ťahy koňom na šachovnici
(B) Odpovedajúci graf (východzí vrchol je označený štvorcom)

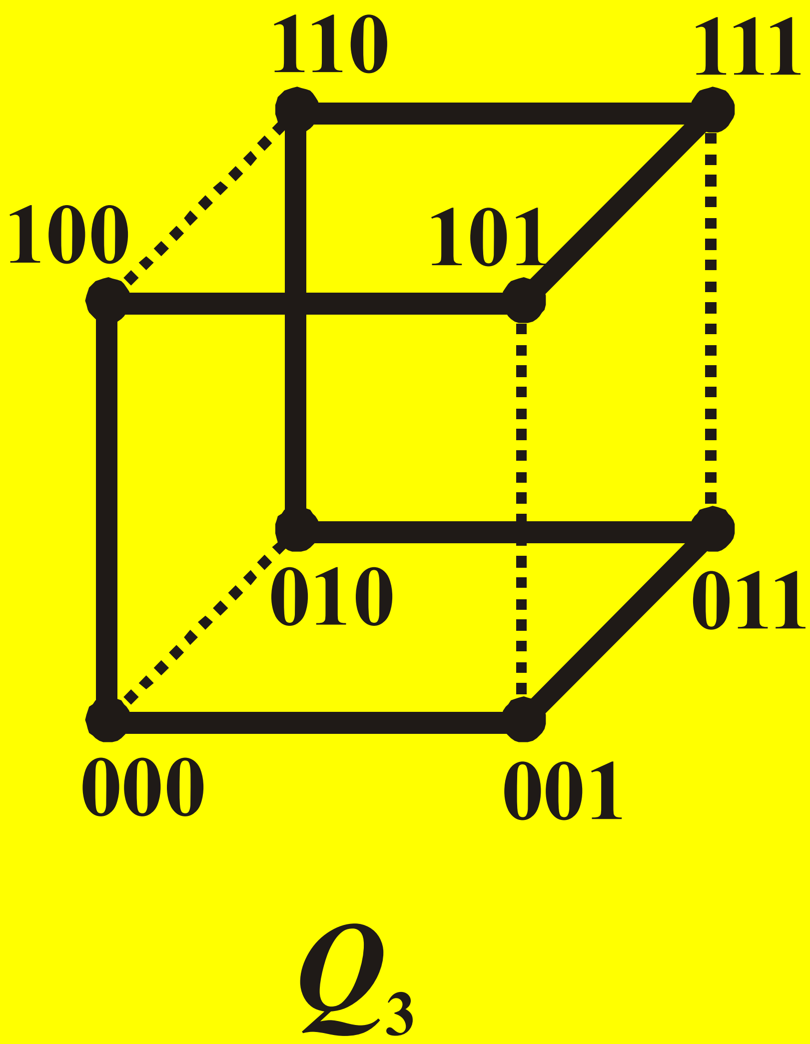


Ťah koňom na šachovnici 3×4

3	6	9	12
8	11	4	1
5	2	7	10

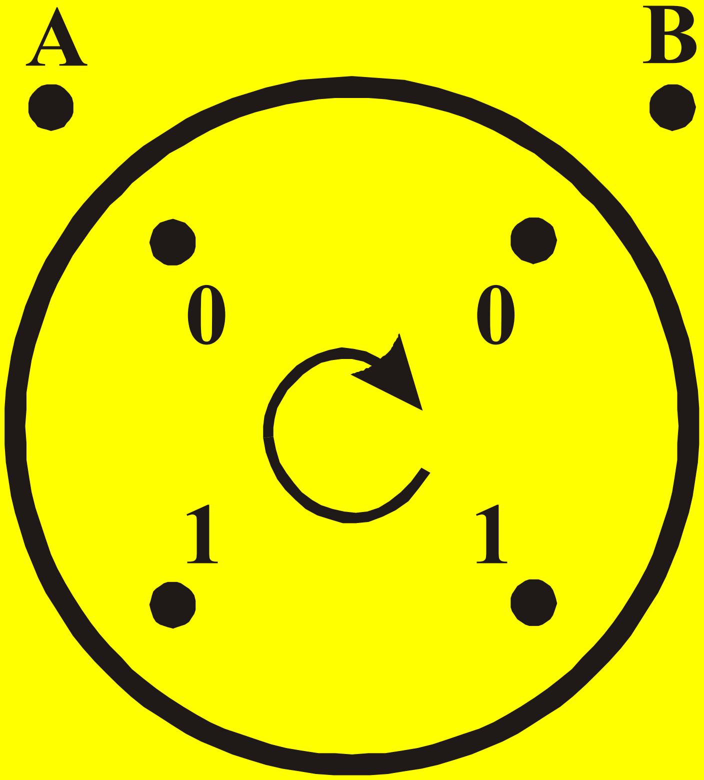
tabuľka postupnosti ťahov

Príklad. Ako súvisí **Grayov kód** s hamiltonovskou kružnicou?



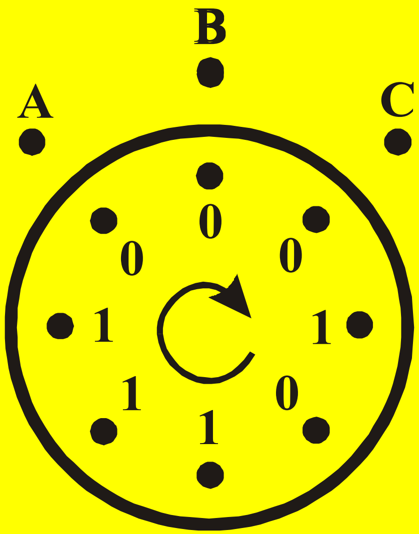
Grayov kód pozostáva z n binárnych reťazcov pre všetky možné kombinácie bitov, kedy reťazce sú usporiadané po rade tak, že sa líšia vždy o 1 bit, napr. 000,001,010,110,111,101,100, a prvý sa tiež líši od posledného o 1 bit. Grayov kód bol pomenovaný po Frankovi Grayovi, ktorý ho vymyslel v 40tych rokoch 20 storočia v AT&T Bell laboratóriách, aby minimalizoval chyby v prenose signálu. Hodnoty bitov v reťazcoch môžu definovať hodnoty súradníc, a teda vrcholy n-rozmernej hyperkocky. Nájdenie postupnosti reťazcov líšiacich sa vždy o 1 bit potom odpovedá nájdeniu hamiltonovskej kružnice na odpovedajúcej hyperkocke.

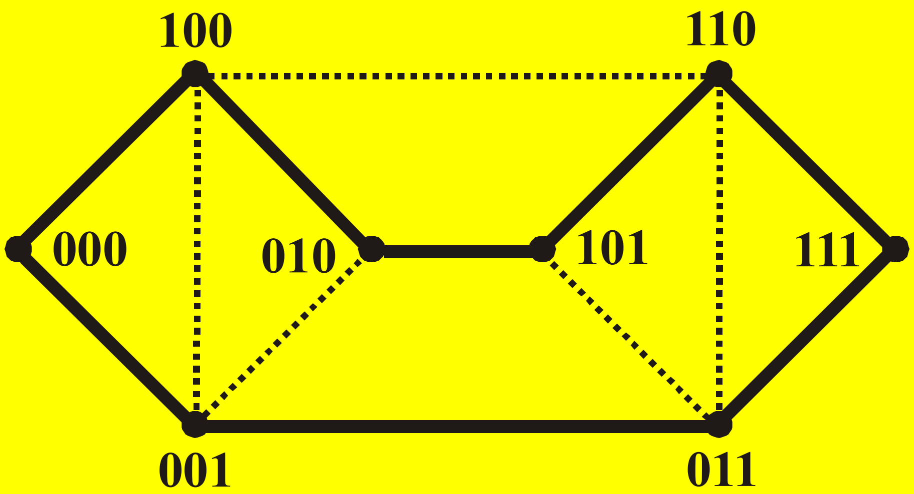
Príklad: Automatická práčka a eulerovská a hamiltonovská kružnica

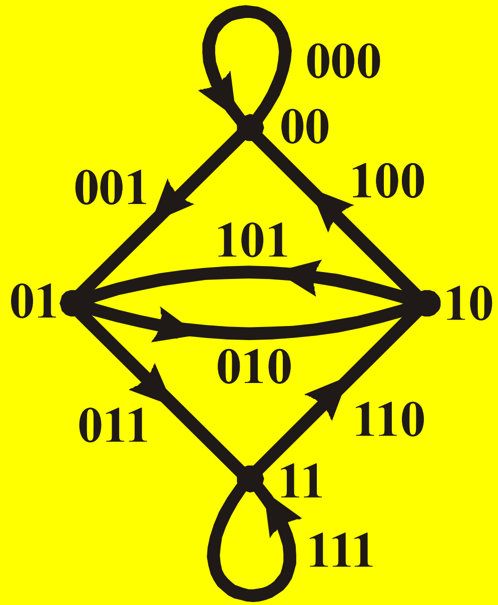


Nastavenie 4 možných programov práčky zapojením/nezapojením u dvoch kontaktov *A*, *B*. Otáčaním gombíka sa prepoja (označené 1) alebo neprepoja (označené 0) kontakty, pre ktoré máme štyri kombinácie: 00,01,10,11.
Netreba 2x4=8 miest, ale stačia iba 4 miesta.
Pre cyklickú postupnosť 0011, ak berieme vždy dve susedné číslice, a posúvame sa o jedno miesto, vytvoríme pod BA dvojice 00, 01, 11, 10

Ako na 8 programov?







Riešenie: pre cyklickú postupnosť 00011101 sa berú sa vždy tri susedné číslice; keď sa posúvame o jedno miesto, vytvoríme pod CBA trojice 000, 001, 011, 111, 110, 101, 010, 100. Cyklickú postupnosť možno získať pomocou hamiltonovskej kružnice v prvom grafe, kde sú spojené binárne reťazce, ktoré dostaneme jeden z druhého pridaním číslice dopredu a odobratím poslednej číslice, alebo naopak. Pridaná číslica môže byť 0 alebo 1. Rovnaké riešenie môžeme získať z druhého grafu, kde vrcholy tvoria spoločné podreťazce binárnych reťazcov a hrany tvoria prekryv binárnych reťazcov vrcholov. V takom grafe nám stačí nájsť uzatvorený eulerovský ťah, aby sme dostali cyklickú postupnosť.