Písomná skúška z predmetu „Algebra a diskrétna matematika“ konaná dňa 14. 1. 2009

1. príklad. Dokážte metódou vymenovania prípadov nerovnosť: $|a+b| \leq |a| + |b|$, kde *a, b* sú reálne čísla.

2. príklad. Čo môžeme povedať o množinách *A* a *B*, ak platí
(a) $(A \cap B) - B = A$, (b) $A \cap \overline{B} = A$, (c) $A \cup A = A \cap A$, (d) $A \cap B = B \cup A$

3. príklad.
Zistite, či relácia *R* nad množinou celých čísel je (1) reflexívna, (2) symetrická, (3) antisymetrická, alebo (4) tranzitívna, pričom $(x, y) \in R$ vtedy a len vtedy, ak
(a) $x < y$,
(b) $x + y = 0$,
(c) x a y sú párne čísla.

4. príklad.
Koľko existuje binárnych reťazcov dĺžky 10, ktoré
(a) obsahujú práve dve jednotky,
(b) maximálne dve nuly,
(c) minimálne dve nuly.

5. príklad.
Na fakulte je 315 študentov, ktorí si zapísali predmet Matematická analýza, 390 študentov, ktorí si zapísali predmet Diskrétna matematika a 32 študentov, ktorí si nezapísali predmet Matematická analýza a ani predmet Diskrétna matematika. Celkový počet študentov na fakulte je 427. Koľko študentov má zapísaných súčasne predmety Matematická analýza a Diskrétna matematika?

6. príklad.
Pomocou Quinovej a McCluskeyho metódy nájdite optimálny výraz k Boolovej funkcii
$wxy + wx\overline{y} + \overline{w}xy + \overline{w}x\overline{y} + w\overline{x}y + \overline{w}\,\overline{x}\,y$

7. príklad. Pre ktoré hodnoty parametrov p a q má matica

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ p & 1 & 1 & 1 \\ q & 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

hodnosť 2 ?

8. príklad.
Nájdite riešenie systému lineárnych rovníc pomocou Cramerovho pravidla

$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &= -1 \end{aligned}$$

9. príklad. Dokážte priamo z definície, že trojuholníková matica

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$$

s nenulovými diagonálnymi elementmi má hodnosť $h(A) = 3$

10. príklad. Planárna reprezentácia grafu s troma komponentmi má 10 oblastí a graf je tvorený z vrcholov stupňa 3.

(a) Aký je počet vrcholov tohto grafu? (3 body)
(b) Aký je najmenší počet vrcholov jedného komponentu? (1 bod)
(c) Nakreslite komponenty a určite ich typ grafu. (1 bod)

11. príklad. Skonštruujte binárny strom reprezentujúci Huffmanove kódovanie pre nasledujúce symboly s frekvenciami: a: 0,25; b: 0,1; c: 0,15; d: 0,17; e: 0,3; f: 0,03 a priraďte každému symbolu jeho odpovedajúci Huffmanov kód.

Poznámka: Každý príklad je hodnotený 5 bodmi, maximálny počet bodov je 55. Nezabudnite na písomku napísať meno a priezvisko, číslo krúžku a ročník. Čas na písomku je 90 min.

Riešené príklady

1. príklad. Dokážte metódou vymenovania prípadov nerovnosť: $|a+b| \le |a|+|b|$, kde a,b sú reálne čísla.

Riešenie:
(a) $a \le b \le 0$ (podobne platí aj pre $b \le a \le 0$)
$|a+b| \le |a|+|b| \Rightarrow -a-b \le -a-b$

(b) $a \le 0 \le b$ a $a+b \le 0$
$|a+b| \le |a|+|b| \Rightarrow -a-b \le -a+b \Rightarrow -2b \le 0 \Rightarrow b \ge 0$

(c) $a \le 0 \le b$ a $a+b \ge 0$
$|a+b| \le |a|+|b| \Rightarrow +a+b \le -a+b \Rightarrow a \le 0$

(d) $b \le 0 \le a$ a $a+b \le 0$
$|a+b| \le |a|+|b| \Rightarrow -a-b \le a-b \Rightarrow a \ge 0$

(e) $b \le 0 \le a$ a $a+b \ge 0$
$|a+b| \le |a|+|b| \Rightarrow a+b \le a-b \Rightarrow b \le 0$

(f) $0 \le a \le b$ (podobne platí aj pre $0 \le b \le a$)
$|a+b| \le |a|+|b| \Rightarrow a+b \le a+b$

Vo všetkých prípadoch sme dostali nerovnosť, ktorá vyplýva z predpokladov vety, čiže identita platí pre každé *a, b*.

2. príklad. Čo môžeme povedať o množinách *A* a *B*, ak platí
(a) $(A \cap B) - B = A$, platí ak $A = \emptyset$, *B* môže byť
(b) $A \cap \overline{B} = A$, platí ak $A \cap B = \emptyset$
(c) $A \cup A = A \cap A$, platí pre ľubovoľné *A*, *B*
(d) $A \cap B = B \cup A$, platí ak $A = B$

3. príklad.
Zistite, či relácia *R* nad množinou celých čísel je (1) reflexívna, (2) symetrická, (3) antisymetrická, alebo (4) tranzitívna, pričom $(x,y) \in R$ vtedy a len vtedy, ak
(a) $x < y$,
(b) $x + y = 0$,
(c) *x* a *y* sú párne čísla.

Riešenie:
(a) $x < y$.
Relácia (1) nie je reflexívna, (2) nie je symetrická, (3) je antisymetrická, (4) je tranzitívna.

(b) $x+y=0$

Relácia (1) nie je reflexívna, (2) je symetrická, (3) nie je antisymetrická, (4) nie je tranzitívna.

(c) x a y sú párne čísla.

Relácia (1) je reflexívna, (2) symetrická, (3) nie je antisymetrická, (4) je tranzitívna.

4. príklad.

Koľko existuje binárnych reťazcov dĺžky 10, ktoré

(a) obsahujú práve dve jednotky,

$$\binom{10}{2}=45$$

(b) maximálne dve nuly, $\binom{10}{0}+\binom{10}{1}+\binom{10}{2}=1+10+45=56$

(c) minimálne dve nuly.

$$\binom{10}{2}+\binom{10}{3}+\binom{10}{4}+\binom{10}{5}+\binom{10}{6}+\binom{10}{7}+\binom{10}{8}+\binom{10}{9}+\binom{10}{10}=$$

$$45+120+210+252+210+120+45+10+1=1013$$

$=2^{10}$-C(10,0)-C(10,1)=1024-1-10=1013

5. príklad

Na fakulte je 315 študentov, ktorí si zapísali predmet Matematická analýza, 390 študentov, ktorí si zapísali predmet Diskrétna matematika a 32 študentov, ktorí si nezapísali predmet Matematická analýza ani predmet Diskrétna matematika. Celkový počet študentov na fakulte je 427. Koľko študentov na fakulte má zapísaných súčasne predmety Matematická analýza a Diskrétna matematika?

$|MA|=315$, $|DM|=390$, $|U-(MA\cup DM)|=32$, $|U|=427$

$|MA\cup DM|=|U|-|U-(MA\cup DM)|=427-32=395$

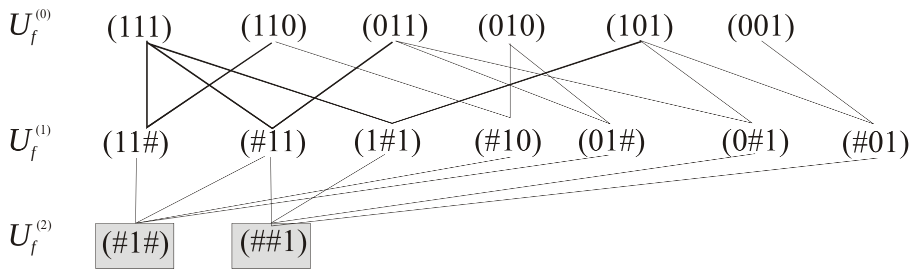
$|MA\cap DM|=|MA|+|DM|-|MA\cup DM|=315+390-395=310$

6. príklad.

Pomocou Quinovej a McCluskeyho metódy nájdite optimálne výrazy k Boolovým funkciám

$wxy+wx\overline{y}+\overline{w}xy+\overline{w}x\overline{y}+w\overline{x}y+\overline{w}\,\overline{x}\,y$,

1. etapa		2. etapa			3. etapa		
1	(111)	1	1-2	(11#)	1	1-5	(#1#)
2	(110)	2	1-3	(#11)	2	2-4	(#1#)
3	(011)	3	1-5	(1#1)	3	2-7	(##1)
4	(010)	4	2-4	(#10)	4	3-6	(##1)
5	(101)	5	3-4	(01#)	5		
6	(001)	6	3-6	(0#1)	6		
		7	5-6	(#01)	7		



Klauzule z 2. etapy sú minimálne a pokrývajú všetky klauzuly z 0. etapy, preto vyberieme klauzuly ktoré pokrývajú pôvodnú množinu klauzúl takto

$$\tilde{V} = \{(\#1\#),(\#\#1)\}$$

Optimálna Boolova funkcia priradená tejto množine má tvar

$$f(w,x,y) = x + y$$

7. príklad.

Pre ktoré hodnoty parametrov p a q má matica

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ p & 1 & 1 & 1 \\ q & 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

hodnosť 2.

Riešenie:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ p & 1 & 1 & 1 \\ q & 1 & -3 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -5 & 4 \\ 0 & 1 & 1-2p & 1+p \\ 0 & 1 & -3-2q & 3+q \end{pmatrix}$$

Z podmienky rovnosti 3. a 4. riadku dostaneme $1-2p=-3-2q$ a $1+p=3+q$, riešením tohto systému dostaneme p=3 a q=1, potom posledná ekvivaletná matica má tvar

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -5 & 4 \\ \cancel{0} & \cancel{1} & \cancel{-5} & 4 \\ \cancel{0} & \cancel{1} & \cancel{-5} & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -5 & 4 \end{pmatrix}$$

8. príklad.

Nájdite riešenie systému lineárnych rovníc pomocou Cramerovho pravidla

$$2x_1 - 3x_2 + x_3 = 1$$
$$x_1 + 2x_2 - x_3 = 0$$
$$2x_1 + x_2 + x_3 = -1$$

Riešenie:

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 12, \quad |\boldsymbol{A}_1| = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2,$$

$$|\boldsymbol{A}_2| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -6, \quad |\boldsymbol{A}_3| = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -10$$

Potom riešenie

$$x_1 = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}, \quad x_2 = \frac{-6}{12} = -\frac{1}{2}, \quad x_3 = \frac{-10}{12} = -\frac{5}{6}$$

9. príklad. Dokážte priamo z definície, že trojuholníková matica

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$$

má hodnosť $h(A) = 3$.

Riešenie:
Budeme dokazovať stĺpcovú hodnosť, zavedieme stĺpce matice

$$s_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \; s_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ 0 \end{pmatrix}, \; s_3 = \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix}$$

Tieto vektory sú lineárne nezávislé, ak ich lineárna kombinácia sa rovná nulovému vektoru len pre nulové koeficienty

$$\alpha_1 s_1 + \alpha_2 s_2 + \alpha_3 s_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Táto vektorová rovnica špecifikuje systém 3 rovníc pre koeficienty

$$\begin{aligned} \alpha_1 a_{11} + \alpha_2 a_{12} + \alpha_3 a_{13} &= 0 \\ \alpha_2 a_{22} + \alpha_3 a_{23} &= 0 \\ \alpha_3 a_{33} &= 0 \end{aligned}$$

Postupným riešením tohto systému dostaneme $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$. To znamená, že stĺpcové vektory s_1, s_2, s_3 sú lineárne nezávislé, čiže stĺpcová hodnosť matice je 3. Pretože platí veta, že stĺpcová hodnosť sa rovná riadkovej hodnosti, potom hodnosť matice A je 3.

10. príklad. Planárna reprezentácia grafu s troma komponentmi má 10 oblastí a graf je tvorený z vrcholov stupňa 3.

(d) Aký je počet vrcholov tohto grafu? (3 body)
(e) Aký je najmenší počet vrcholov jedného komponentu? (1 bod)
(f) Nakreslite komponenty a určite ich typ grafu (1 bod)

Riešenie:

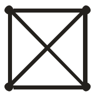
(a) Použijeme Eulerovu formulu |R|=|E|-|V|+|K| +1, spolu s formulou $2|E| = \sum_{v \in V} deg(v)$ teda,

$|E| = \frac{\sum_{v \in V} deg(v)}{2} = \frac{|V| deg(v)}{2}$, potom

10=|V|*3/2-|V|+3+1, teda |V|=12.

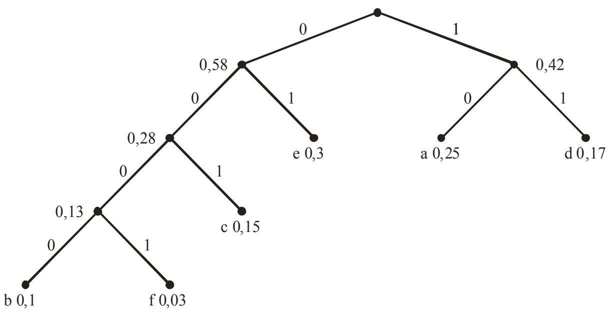
(b) Keďže stupeň každého vrcholu je 3, musí byť spojený s troma ďalšími a najmenšia veľkosť komponentu je 4.

(c) Keďže vrcholov je 12 , komponenty sú 3 a najmenšia môže mať počet vrcholov 4, všetky 3 komponenty budú mať veľkosť 4 (3x4=12). Každý komponent so štyrmi vrcholmi stupňa 3 je kompletný graf o 4 vrcholoch, K_4.



K_4

11. príklad. Skonštruujte binárny strom reprezentujúci Huffmanove kódovanie pre nasledujúce symboly s frekvenciami: a: 0,25; b: 0,1; c: 0,15; d: 0,17; e: 0,3 f 0,03 a priraďte každému symbolu jeho odpovedajúci Huffmanov kód..



b: 0000, f: 0001 c:001 e: 01 a: 10 d: 11

(Existujú rôzne Huffmanove kódy odpovedajúce rôznemu poradiu nakreslenia vetiev zľava doprava, ale počet číslic kódu pre jednotlivé symboly je vždy rovnaký)