Písomná skúška z predmetu „Algebra a diskrétna matematika“ konaná dňa 12. 1. 2015

1. príklad. Aký záver vyplýva z množiny troch výrokov? Vykonajte odvodenie.
„Nie som chytrý alebo mám šťastie“, „nemám šťastie“, „ak študujem, potom som chytrý“.

2. príklad. Dokážte úplnou indukciou platnosť množinovej formuly
$\overline{A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n} = \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \ldots \cap \overline{A_n}$

3. príklad. Nech A a B sú množiny, dokážte pomocou Vennových diagramov
$((A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$,

4. príklad.
Zistite, či tri relácie R nad množinou všetkých ľudí sú reflexívne, symetrické, antisymetrické, alebo tranzitívne, pričom $(x,y) \in R$ vtedy a len vtedy, ak
(a) x je menší ako y, (b) x má rovnaké krstné meno ako y, (c) x a y sa narodili v rovnakom dni

5. príklad. Koľko existuje permutácií nad reťazcom ABCDEFG, ktoré obsahujú dva podreťazce BA a GF,

6. príklad
Na fakulte je 345 študentov, ktorí si zapísali predmet Matematická analýza, 212 študentov, ktorí si zapísali predmet Diskrétna matematika a 188 študentov, ktorí si zapísali súčasne predmety Matematická analýza a Diskrétna matematika. Koľko študentov má zapísaný aspoň jeden z predmetov Matematická analýza alebo Diskrétna matematika.

7. príklad.
Pomocou Quinovej a McCluskeyho metódy nájdite optimálne výrazy k Boolovým funkciám $wxyz + wx\overline{y}z + wx\overline{y}\,\overline{z} + w\overline{x}y\overline{z} + w\overline{x}\,\overline{y}z$, znázornite výslednú optimálnu Boolovu funkciu pomocou logického obvodu.

8. príklad.
Pre ktoré hodnoty parametrov p a q má matica

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ p & 1 & 1 & 1 \\ q & 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

hodnosť 2.

9. príklad. Zostrojte strom riešení pre hru odoberania zápaliek, ktorá je zahájená 5 zápalkami, pričom každý hráč môže odobrať jednu alebo 2 zápalky. Hráč, ktorý odoberie poslednú zápalku prehráva. Aká je vyhrávajúca stratégia pre hráčov? Určite ju pomocou MINMAX odvodenia nad stromom riešení.

10. príklad . Predpokladajme, že spojitý planárny graf má šesť vrcholov, každý stupňa 4. Na koľko strán (oblastí) je rovina rozdelená planárnou reprezentáciou tohto grafu?

Poznámka: Každý príklad je hodnotený 8 bodmi, maximálny počet bodov je 10×8=80. Nezabudnite na písomku napísať meno a priezvisko, číslo krúžku. Čas na písomku je 90 min.

Riešené príklady

1. príklad. Aký záver vyplýva z množiny troch výrokov?
„Nie som chytrý alebo mám šťastie“, „nemám šťastie“, „ak študujem, potom som chytrý“.

p = som chytrý
q = mám šťastie
r = študujem

$\neg p \vee q$	predpoklad$_1$
$\neg q$	predpoklad$_2$
$r \Rightarrow p$	predpoklad$_3$
$\neg p$	dôsledok disjunkt. sylogizmu aplik. na predpoklad$_1$ a predpoklad$_2$
$\neg r$	aplikácia modus tollens na predpoklad$_3$ a dôsledok $\neg p$,
	záver: neštudujem

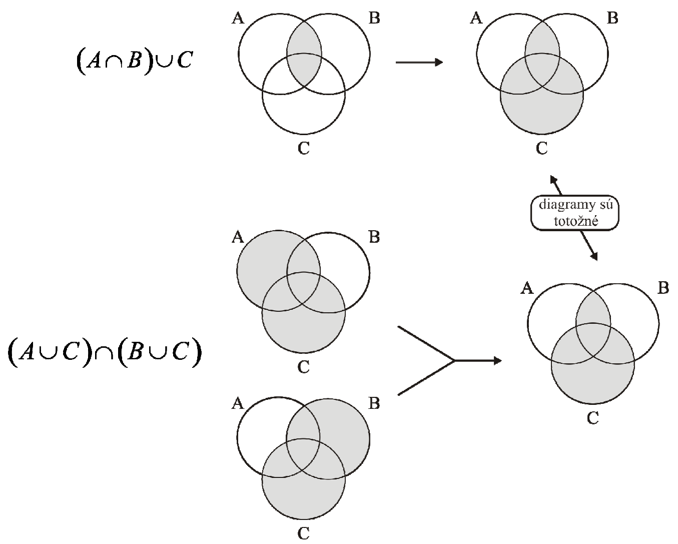
2. príklad. Dokážte úplnou indukciou platnosť množinovej formuly

$$\overline{A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n} = \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \ldots \cap \overline{A_n}$$

Riešenie:
(a) Pre $n = 2$ platí De-Morganov vzťah $\overline{A_1 \cup A_2} = \overline{A_1} \cap \overline{A_2}$, dôkaz sa môže vykonať pomocou Vennových diagramov.
(b) pre $n + 2$ platí $\overline{\underbrace{A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n}_{B} \cup A_{n+1}} = \overline{B \cup A_{n+1}} = \overline{B} \cap \overline{A_{n+1}} = \underbrace{\overline{A_1} \cap \overline{A_{n+1}} \ldots \cap \overline{A_n}}_{indukčný\ predpoklad} \cap \overline{A_{n+1}}$

3. príklad. **4. príklad.** Nech A a B sú množiny, dokážte
$((A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$,

Riešenie:
(a) Dôkaz pomocou Vennovych diagramov



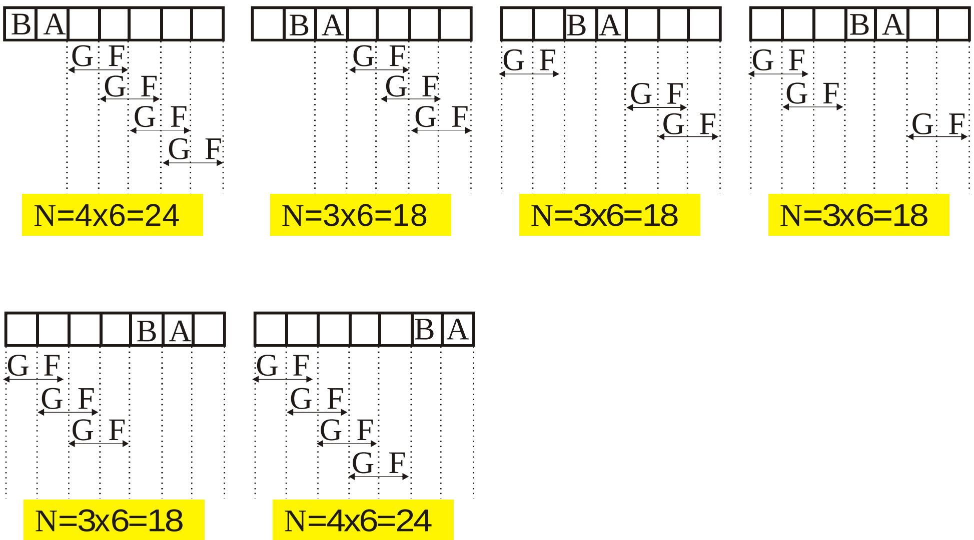
4. príklad.
Zistite, či relácia R nad množinou všetkých ľudí je reflexívna, symetrická, antisymetrická, alebo tranzitívna, pričom $(x,y)\in R$ vtedy a len vtedy, ak

(a) x je menší ako y,
tranzitívna: $\forall x \forall y \forall z\left(\left(x<y\right)\wedge\left(y<z\right)\Rightarrow\left(x<z\right)\right)$
antisymetrická: $\forall x \forall y\left(\left(x,y\right)\in R\Rightarrow\left(y,x\right)\notin R\right)$

(b) x má rovnaké krstné meno ako y,
reflexívna: $\forall x\left(\left(x,x\right)\in R\right)$
symetrická: $\forall x \forall y\left(\left(x,y\right)\in R\Rightarrow\left(y,x\right)\in R\right)$
tranzitívna: $\forall x \forall y \forall z\left(\left(x,y\right)\in R\wedge\left(y,z\right)\in R\Rightarrow\left(x,z\right)\in R\right)$

(c) x a y sa narodili v rovnakom dni,
reflexívna: $\forall x\left(\left(x,x\right)\in R\right)$
symetrická: $\forall x \forall y\left(\left(x,y\right)\in R\Rightarrow\left(y,x\right)\in R\right)$
tranzitívna: $\forall x \forall y \forall z\left(\left(x,y\right)\in R\wedge\left(y,z\right)\in R\Rightarrow\left(x,z\right)\in R\right)$

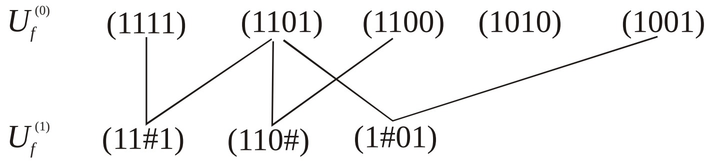
5. príklad. Koľko existuje permutácií nad reťazcom ABCDEFG, ktoré obsahujú dva podreťazce BA a GF,



Celkový počet reťazcov je 2×24+4×18 = 120.

6. príklad
Na fakulte je 345 študentov, ktorí si zapísali predmet Matematická analýza, 212 študentov, ktorí si zapísali predmet Diskrétna matematika a 188 študentov, ktorí si zapísali súčasne predmety Matematická analýza a Diskrétna matematika. Koľko študentov má zapísaný aspoň jeden z predmetov Matematická analýza alebo Diskrétna matematika.
$|MA|=345$, $|DM|=212$,$|MA\cap DM|=188$
$|MA\cup DM|=|MA|+|DM|-|MA\cap DM|=345+212-188=369$

7. príklad.
Pomocou Quinovej a McCluskeyho metódy nájdite optimálne výrazy k Boolovým funkciám
$wxyz + wx\bar{y}z + wx\bar{y}\,\bar{z} + w\bar{x}y\bar{z} + w\bar{x}\,\bar{y}z$,

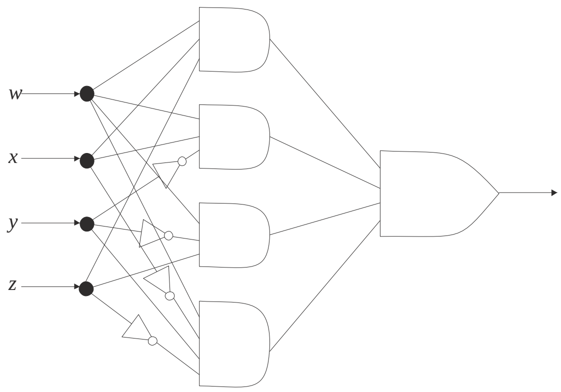


Klauzule z 1. etapy sú minimálne a pokrývajú až na 4. klauzulu všetky klauzuly z 0. etapy, preto vyberieme klauzuly ktoré pokrývajú pôvodnú množinu klauzúl takto

$$\tilde{V} = \{(11\#1),(110\#),(1\#01),(1010)\}$$

Optimálna Boolova funkcia priradená tejto množine má tvar

$$f(w,x,y,z) = wxz + wx\bar{y} + w\bar{y}z + w\bar{x}y\bar{z}$$



8. príklad.
Pre ktoré hodnoty parametrov p a q má matica

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ p & 1 & 1 & 1 \\ q & 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

hodnosť 2.
Riešenie:

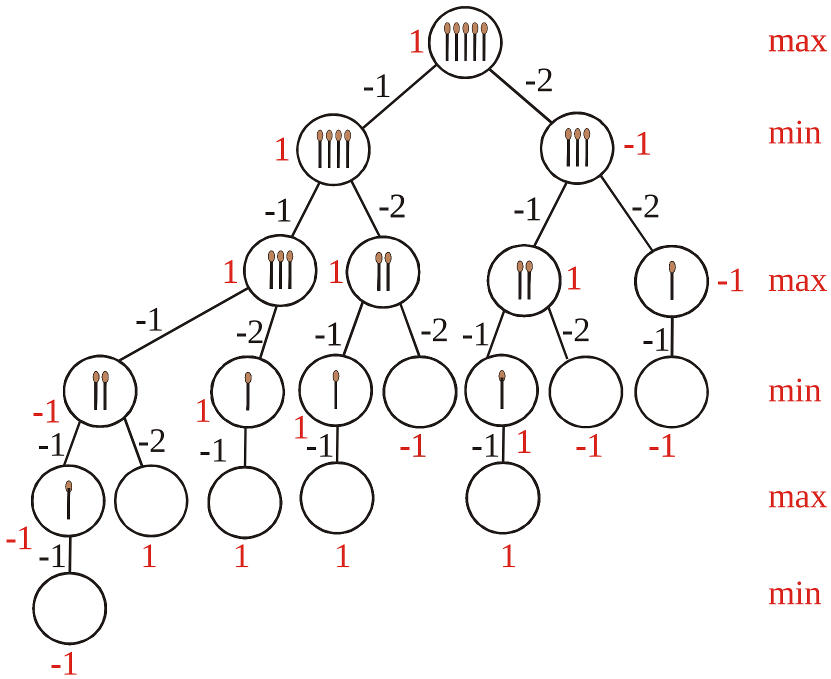
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ p & 1 & 1 & 1 \\ q & 1 & -3 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -5 & 4 \\ 0 & 1 & 1-2p & 1+p \\ 0 & 1 & -3-2q & 3+q \end{pmatrix}$$

Z podmienky rovnosti 3. a 4. riadku dostaneme $1-2p=-3-2q$ a $1+p=3+q$, riešením tohto systému dostaneme p=3 a q=1, potom posledná ekvivaletná matica má tvar

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -5 & 4 \\ \cancel{0} & \cancel{1} & \cancel{-5} & \cancel{4} \\ \cancel{0} & \cancel{1} & \cancel{-5} & \cancel{4} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -5 & 4 \end{pmatrix}$$

9. príklad. Zostrojte strom riešení pre hru odoberania zápaliek, ktorá je zahájená 5 zápalkami, pričom každý hráč môže odobrať jednu alebo 2 zápalky. Hráč, ktorý odoberie poslednú zápalku prehrával. Aká je vyhrávajúca stratégia pre hráčov.

Riešenie:



Prvý hráč má vyhrávajúcu stratégiu, v prvom ťahu odoberie jednu zápalku, v ďalšom ťahu prvý hráč dve (jednu) zápalky, ak v predchádzajúcom ťahu .druhý hráč odobral jednu (dve) zápalky.

10. príklad. Predpokladajme, že spojitý planárny graf má šesť vrcholov, každý stupňa 4. Na koľko strán (oblastí) je rovina rozdelená planárnou reprezentáciou tohto grafu?

Riešenie: Použijeme Eulerovu formulu $|R|=|E|-|V|+|K|+1$, teda $|R|=6\times4/2-6+1+1=8$.
kde $|R|$ je počet oblastí, $|E|$ je počet hrán, $|V|$ je počet vrcholov a $|K|$ je počet komponent.