

Algebra a diskrétna matematika

VLADIMÍR KVASNIČKA
JIŘÍ POSPÍCHAL

Algebra a diskrétna matematika

Slovenská technická univerzita
v Bratislave
2008

© prof. Ing. Vladimír Kvasnička, DrSc., prof. RNDr. Jiří Pospíchal, DrSc.

Lektori: doc. RNDr. Ladislav Satko, CSc.
doc. RNDr. Michal Šabo, CSc.

Publikáciu podporilo združenie Gratex IT Inštitút

Vydala Slovenská technická univerzita v Bratislave
vo Vydavateľstve STU, Bratislava, Vazovova 5.

Schválilo vedenie Fakulty informatiky a informačných technológií STU v Bratislave
dňa 25.4.2006, uznesenie číslo 12.1.2006/kd, pre študijný program Informatika a študijný program Počítačové
systémy a siete

OBSAH

PREDHOVOR.....	ix
1 METÓDY MATEMATICKÉHO DŔKAZU	1
1.1 VÝZNAM DŔKAZU V MATEMATIKE	1
1.2 PRAVIDLÁ USUDZOVANIA VO VÝROKOVEJ LOGIKE	4
1.3 PRAVIDLÁ USUDZOVANIA V PREDIKÁTOVEJ LOGIKE.....	11
1.4 METÓDY DŔKAZU VIET.....	15
1.5 MATEMATICKÁ INDUKCIA	19
ZHRNUTIE.....	22
KLÚČOVÉ POJMY	23
CVIČENIA	24
2 TEÓRIA MNOŽÍN I.....	29
2.1 DEFINÍCIA MNOŽINY	29
2.2 ENUMERÁCIA ELEMENTOV V KONEČNÝCH MNOŽINÁCH	37
2.3 KARTEZIÁNSKY SÚČIN MNOŽÍN	42
2.4 MNOŽINA AKO DÁTOVÁ ŠTRUKTÚRA V INFORMATIKE.....	46
ZHRNUTIE.....	47
KLÚČOVÉ POJMY	48
CVIČENIA	49
3 TEÓRIA MNOŽÍN II.....	53
3.1 RELÁCIE	53
3.2 RELÁCIA ČIASTOČNÉHO USPORIADANIA.....	62
3.3 FUNKCIE.....	66
ZHRNUTIE.....	72
KLÚČOVÉ POJMY	73
CVIČENIA	73
4 KOMBINATORIKA I	79
4.1 BINOMICKÉ KOEFICIENTY A PASCALOV TROJUHOLNÍK.....	79
4.2 PERMUTÁCIE A KOMBINÁCIE	88
ZHRNUTIE.....	94
KLÚČOVÉ POJMY	95
CVIČENIA	95
5 KOMBINATORIKA II.....	99
5.1 REKURENTNÉ VZŤAHY.....	99
5.2 METÓDA „ROZDELUJ A PANUJ“	108

5.3	PRINCÍP INKLÚZIE A EXKLÚZIE	113
	ZHRNUTIE	118
	KLÚČOVÉ POJMY	119
	CVIČENIA	120
6	ALGEBRAICKÉ ŠTRUKTÚRY I.....	123
6.1	BINÁRNE OPERÁCIE	123
6.2	POLOGRUPY, MONOIDY A GRUPY	126
6.3	MORFIZMY	135
	ZHRNUTIE.....	138
	KLÚČOVÉ POJMY	139
	CVIČENIA	140
7	ALGEBRAICKÉ ŠTRUKTÚRY II	143
7.1	BOOLOVA ALGEBRA	143
7.2	VLASTNOSTI BOOLOVEJ ALGEBRY.....	146
7.3	BOOLOVE FUNKCIE.....	148
7.4	SPÍNACIE OBVODY	155
7.5	LOGICKÉ OBVODY	159
7.6	OPTIMALIZÁCIA LOGICKÝCH OBVODOV	163
	ZHRNUTIE.....	171
	KLÚČOVÉ POJMY	173
	CVIČENIA	173
8	MATICOVÁ ALGEBRA I	177
8.1	DEFINÍCIA MATICE	177
8.2	OPERÁCIE NAD MATICAMI	181
8.3	HODNOSŤ MATICE	189
8.4	INVERZNÁ MATICA	194
	ZHRNUTIE.....	197
	KLÚČOVÉ POJMY	198
	CVIČENIA	199
9	MATICOVÁ ALGEBRA II.....	205
9.1	SÚSTAVA LINEÁRNYCH ROVNÍC.....	205
9.2	DETERMINANTY	214
	ZHRNUTIE.....	223
	KLÚČOVÉ POJMY	224
	CVIČENIA	224
10	TEÓRIA GRAFOV I.....	227
10.1	ÚVODNÉ POZNÁMKY	227
10.2	NEKTORÉ ZÁKLADNÉ DEFINÍCIE.....	230
10.3	REPREZENTÁCIA GRAFOV A IZOMORFIZMUS	234
10.4	SÚVISLOSŤ V NEORIENTOVANÝCH GRAFOCH A EULEROVSKÉ ŤAHY	237
10.5	HAMILTONOVSKÉ CESTY A KRUŽNICE	244
	ZHRNUTIE.....	249
	KLÚČOVÉ POJMY	249

CVIČENIA	250
11 TEÓRIA GRAFOV II.....	257
11.1 PROBLÉMY NAJKRATŠEJ CESTY	257
11.2 PLANÁRNE GRAFY	260
11.3 FARBENIE GRAFOV	264
ZHRNUTIE.....	271
KLÚČOVÉ POJMY	271
CVIČENIA	272
12 TEÓRIA GRAFOV III.....	277
12.1 STROMY AKO MODELY A ICH ZÁKLADNÉ VLASTNOSTI	277
12.2 BINÁRNE PREHLADÁVACIE STROMY	282
12.3 ROZHODOVACIE STROMY	283
12.4 PREFIXOVÉ KÓDOVANIE	285
12.5 KOREŇOVÉ STROMY REPREZENTUJÚCE ALGEBRAICKÉ VÝRAZY	287
12.6 KOREŇOVÝ STROM AKO MODEL HRY.....	288
ZHRNUTIE.....	295
KLÚČOVÉ POJMY	296
CVIČENIA	296
13 TEÓRIA GRAFOV IV.....	301
13.1 SIETE A METÓDA KRITICKEJ CESTY	301
13.2 MAXIMÁLNY TOK V SIETI A MINIMÁLNY REZ	305
13.3 NÁJDENIE NAJMEŇŠEJ KOSTRY	308
13.4 PREHLADÁVANIE DO HLĚBKY (DEPTH-FIRST SEARCH, DFS).....	310
13.5 PREHLADÁVANIE DO ŠÍRKY (BREADTH-FIRST SEARCH, BFS)	319
ZHRNUTIE.....	322
KLÚČOVÉ POJMY	323
CVIČENIA	323
PRÍLOHA A – RIEŠENÉ PRÍKLADY	329
RIEŠENÉ CVIČENIA Z KAPITOLY 1.....	331
RIEŠENÉ CVIČENIA Z KAPITOLY 2.....	347
RIEŠENÉ CVIČENIA Z KAPITOLY 3.....	355
RIEŠENÉ CVIČENIA Z KAPITOLY 4.....	367
RIEŠENÉ CVIČENIA Z KAPITOLY 5.....	375
RIEŠENÉ CVIČENIA Z KAPITOLY 6.....	383
RIEŠENÉ CVIČENIA Z KAPITOLY 7.....	391
RIEŠENÉ CVIČENIA Z KAPITOLY 8.....	401
RIEŠENÉ CVIČENIA Z KAPITOLY 9.....	411
RIEŠENÉ CVIČENIA Z KAPITOLY 10.....	417
RIEŠENÉ CVIČENIA Z KAPITOLY 11.....	433
RIEŠENÉ CVIČENIA Z KAPITOLY 12.....	443
RIEŠENÉ CVIČENIA Z KAPITOLY 13.....	451

PRÍLOHA B – VZOROVÉ PÍSOMKY	463
1. KONTROLNÁ PÍSOMKA.....	465
2. KONTROLNÁ PÍSOMKA.....	467
3. KONTROLNÁ PÍSOMKA.....	470
ZÁVEREČNÁ PÍSOMKA	473
LITERATÚRA	479
REGISTER	481

PREDHovor

Cieľom tejto učebnice je poskytnúť študentom informatiky na Fakulte informatiky a informačných technológií STU ucelený text k prednáške „*Algebra a diskretná matematika*“. Diskretná matematika patrí medzi teoretické základy informatiky. Slúži nielen pre rozvoj matematicko-logických schopností študentov, ale aj ako teoretická príprava pre ďalšie „pokročilejšie“ informatické predmety. Pri koncipovaní obsahu tejto prednášky stáli sme pred neľahkou úlohou, čo zahrnúť do jej obsahu a čo nie. Pretože táto prednáška substituuje čiastočne aj bývalý predmet „*Lineárna algebra*“, zahrnuli sme z tejto oblasti do učebnice v rozsahu dvoch prednášok aj základy lineárnej algebry, teórie matíc a sústav lineárnych rovníc spolu s elementárnou teóriou determinantov.

Učebnica je určená pre študentov prvého ročníka bakalárskeho štúdia, ktorí majú základné stredoškolské vedomosti z teórie množín, algebry a výrokovej logiky. V prednáške sme sa snažili čo najviac vyjsť v ústrety potrebám informatiky, preto aj oproti časti týkajúcej sa algebry je relatívne uprednostnená diskretná matematika. Cieľom učebnice je aj rozvinúť u študentov schopnosť rigorózneho matematického myslenia pri riešení a formulovaní problémov informatiky.

Prvá kapitola sa týka metód matematického dôkazu. Kapitoly 2 až 5 sú venované teórii množín a kombinatorike, v 6. a 7. kapitole sa venujeme grupám a boolovskej algebry. Kapitoly 8 až 9 sú venované maticiam, sústavám lineárnych rovníc a determinantom. Zvyšok učebnice sa v 10. až 13. kapitole venuje teórii grafov a základným algoritmom a aplikáciám teórie grafov.

Každá kapitola je sprevádzaná príkladmi, ktorých riešenie poskytne študentom schopnosť dobre sa orientovať v danej problematike. Chceme poďakovať mnohým našim študentom, ktorí nám pomohli nájsť veľa nepríjemných preklepov, nepresností a evidentných chýb, a tým prispeli k zvýšeniu kvality tejto učebnice. Taktiež sa musíme poďakovať nášmu zosnulému kolegovi prof. Ing. Norbertovi Frištackému, PhD., s ktorým sme sa často radili pri koncipovaní sylabu prednášky. Na jeho radu sme zaradili do prednášky Quinovu a McCluskeyho metódu optimalizácie Boolovej funkcie špecifikujúcej logický obvod. Až pri prednášaní tohto predmetu sme zistili, že táto „aplikačná“ časť diskkrétnej matematiky patrí medzi študentmi k najobľúbenejšej časti predmetu.

V slovenskej a českej odbornej spisbe existuje mnoho učebných textov diskkrétnej matematiky. Veríme, že aj tento text sa dôstojne zaradí medzi ne, ako moderná učebnica, ktorej vzorom pri jej písaní bola známa a ťažko prekonateľná Rosanova učebnica „*Discrete Mathematics and Its Applications*“ [14].

Na záver sa chceme poďakovať oponentom doc. RNDr. Ladislavovi Satkovi, PhD. (FEI STU) a doc. RNDr. Michalovi Šabovi, CSc. (FCHPT STU) za cenné pripomienky, ktorými prispeli k vylepšeniu tohto učebného textu.

V Bratislave, júl 2008

Vladimír Kvasnička a Jiří Pospíchal

1 METÓDY MATEMATICKÉHO DÔKAZU

DEDUKTÍVNY DÔKAZ • ZÁKLADNÉ PRAVIDLÁ USUDZOVANIA •
MATEMATICKÁ INDUKCIA

V tejto kapitole budeme študovať dva dôležité problémy: (1) Za akých podmienok je matematický dôkaz korektný a (2) aké metódy môžu byť použité pri konštrukcii matematických dôkazov. Metódy dôkazu diskutované v tejto kapitole sú dôležité nielen pre tvorbu korektných dôkazov v matematike, ale aj v samotnej informatike. V teoretickej informatike sa napr. študujú rôzne metódy verifikácie korektnosti programu, alebo či operačný systém je bezpečný. V umelej inteligencii pri odvodzovaní nových faktov z danej databázy poznatkov (množiny výrokových formúl, ktorá sa vo výrokovej logike nazýva teória) je dôležité mať zabezpečené, aby daná databáza bola konzistentná (korektná), teda aby z nej súčasne nevyplýval nejaký výrok a taktiež aj jeho negácia. Môžeme teda konštatovať, že zvládnutie metód matematického dôkazu je dôležité nielen v matematike, ale aj v informatike.

1.1 VÝZNAM DÔKAZU V MATEMATIKE

V matematike, podobne ako aj v informatike, vystupujú do popredia dve otázky: (1) Za akých podmienok je matematický dôkaz korektný a (2) aké metódy môžu byť použité pri konštrukcii matematických dôkazov. V tejto kapitole budeme hľadať odpovede na tieto dve otázky, budeme špecifikovať rôzne formy matematických dôkazov.

VETA

Veta (teoréma, výrok, skutočnosť, fakt, argument, alebo výsledok) je výrok, o ktorom môže byť dokázané, že je pravdivý. V tejto súvislosti hovoríme o *dôkaze* vety, ktorý spočíva v postupnosti jednotlivých „medzikrokov“, ktoré sú odvodené buď z množiny jednoduchých postulátov, nazývaných *axiómy*, alebo z predchádzajúcich viet (pomocných viet, často nazývaných *lemy*) danej postupnosti. Komplikované dôkazy sú obvykle jasnejšie formulované, keď ich dôkaz je rozdelený na jednotlivé medzikroky, ktoré sú formulované ako samostatné vety. Tieto medzikroky – vety v postupnosti sú vytvárané pomocou *pravidiel od-*

vodzovania (pravidiel usudzovania), ktoré z niekoľkých pravdivých tvrdení – argumentov vytvorí nové pravdivé tvrdenie – argument.

KOREKTNOSŤ V INFORMATIKE

Metódy dôkazu diskutované v tejto kapitole sú dôležité nielen pre tvorbu korektných dôkazov matematických viet v matematike, ale aj v samotnej informatike. V teoretickej informatike sa napr. študujú rôzne metódy verifikácie korektnosti programu, alebo či operačný systém je bezpečný. V umelej inteligencii pri odvodzovaní nových faktov z danej databázy poznatkov (množiny výrokových forml, ktorá sa vo výrokovej logike nazýva teória) je dôležité mať zabezpečené, aby daná databáza bola konzistentná (korektná), teda aby z nej súčasne nevyplýval nejaký výrok a taktiež aj jeho negácia. Môžeme teda konštatovať, že zvládnutie metód matematického dôkazu je dôležité nielen v matematike, ale aj v informatike.

DEDUKTÍVNY DŮKAZ

Nižšie uvedená forma dôkazu sa nazýva *deduktívny dôkaz*, ktorý obsahuje:

- *systém elementárnych pojmov*, ktoré sú používané pri formulácii základných zložiek deduktívneho dôkazu,
- *systém axióm* (základné elementárne poznatky, ktoré sú pokladané za evidentné),
- *pravidlá odvodzovania* (pomocou ktorých sa uskutočňuje dôkaz),
- *vety* (deduktívne poznatky – argumenty), ktoré boli odvodené z axióm pomocou pravidiel odvodzovania a ktoré podstatne zjednodušujú a skracujú dôkazy ďalších nových deduktívnych poznatkov.

INDUKTÍVNE USUDZOVANIE

Poznamenajme, že tak v matematike, ako aj v informatike, sa v ojedinelých prípadoch používa aj *induktívne usudzovanie* (dôkaz), ktoré je založené na pozorovaní určitých skutočností, ktoré sa často opakujú v analogických situáciách. Tieto pozorované skutočnosti sú „induktívne“ zovšeobecnené. Nové pojmy, ktoré boli zavedené týmto „induktívnym“ spôsobom sa neskôršie buď dokážu deduktívne v rámci daného systému pojmov, alebo sa postulujú ako nové špeciálne axiómy. Tieto ojedinelé situácie v dejinách matematiky vždy znamenali vznik nových oblastí matematiky, ktoré nie sú striktne deduktívne dokázateľné zo známych pojmov a reprezentujú akty kreativity v matematike, ktoré taktiež znamenajú, že matematika nie je len veda deduktívneho charakteru, kde sa dá každý pojem odvodiť z iných jednoduchších poznatkov¹.

Ilustratívny príklad axiomatického systému

Uvažujme jednoduchý axiomatický systém, ktorý obsahuje tri *elementárne pojmy* – ‘vrchol’, ‘hrana’, ‘ležať na’ a tri *axiómy*

A₁. Každý vrchol leží aspoň na jednej hrane.

A₂. Pre každú hranu existujú práve dva vrcholy, ktoré na nej ležia.

¹ To že matematika nie je veda čisto deduktívna má aj iné hlboké dôvody.

A_3 . Máme práve 5 vrcholov.

Tento axiomatický systém môže mať rôzne interpretácie. Interpretácia, v ktorej sú axiomy pravdivé výroky, sa nazýva *model* axiomatického systému. Už použitá terminológia navodzuje zavedenie modelu *grafu*², kde vrchol je bod a hrana je čiara obsahujúca na svojich koncoch dva vrcholy, pozri obr. 1.1. Dokážeme tieto dve vety, ktoré vyplývajú z axiomatického systému.

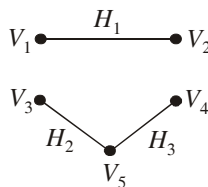
VETA 1.1. Každý graf má aspoň tri hrany.

Podľa axiomy A_1 každý vrchol leží aspoň na jednej hrane, čiže pre ľubovoľný vrchol V_1 existuje taká hrana H_1 , na ktorej daný vrchol leží. Týmto máme zabezpečenú existenciu hrany H_1 , ktorá podľa axiomy A_2 leží na dvoch vrcholoch, tento druhý vrchol označíme V_2 . Pre zostávajúce tri vrcholy V_3 , V_4 a V_5 musia existovať aspoň dve hrany H_2 a H_3 , ktoré ležia na týchto troch vrcholoch.

VETA 1.2. Každý graf má jeden vrchol, ktorý leží aspoň na dvoch hranách.

Dôkaz tejto vety priamo vyplýva zo spôsobu dôkazu vety 1.1. Pretože v druhej časti grafu máme tri vrcholy a dve hrany, musí existovať aspoň jeden vrchol, ktorý leží aspoň na dvoch hranách, čo bolo potrebné dokázať (QED). Model, ktorý ilustruje tieto dve vety je znázornený na obr. 1.1.

OBRÁZOK 1.1.
GRAFOVÝ MODEL



Grafový model jednoduchého axiomatického systému z vety 1.1. Diagram znázorňuje model, ktorý obsahuje 3 hrany, pričom práve jeden vrchol leží na dvoch hranách.

Z našich predchádzajúcich výsledkov vyplýva, že môžeme deduktívny systém rozšíriť o nový elementárny pojem „komponent“, ktorý popisuje takú časť grafu, z ktorej vrcholy nie sú spojené cestou pozostávajúcou z postupnosti hrán s vrcholmi z ostatných častí, ale vždy existuje cesta medzi ľubovoľnou dvojicou vrcholov komponentu. Z obr. 1.1 vyplýva jednoduchá veta.

VETA 1.3. Ak má graf dva komponenty, potom jeden z komponentov obsahuje len jednu hranu.

Z definície komponentu vyplýva, že množina vrcholov je separovaná na dve disjunktné podmnožiny vrcholov, ktoré nie sú prepojené spoločnou hranou a pre každú hranu existujú práve dva vrcholy, ktoré na nej ležia. Z týchto dvoch skutočností vyplýva, že toto disjunktné rozdelenie množiny vrcholov je možné len na dve podmnožiny, ktoré obsahujú dva a tri vrcholy. Podmnožina s dvoma vrcholmi reprezentuje komponent.

² Pojem grafu bude podrobne študovaný v kapitolách 10 až 13.

1.2 PRAVIDLÁ USUDZOVANIA VO VÝROKOVEJ LOGIKE

Pravidlá usudzovania vo výrokovej logike tvoria schému

$$\frac{\begin{array}{l} \text{predpoklad}_1 \\ \dots\dots\dots \\ \text{predpoklad}_n \end{array}}{\text{záver}} \quad (1.1)$$

ktorá obsahuje n predpokladov a jeden záver. Táto schéma usudzovania je totožná so symbolom *logického dôkazu*

$$\{\text{predpoklad}_1, \dots, \text{predpoklad}_n\} \vdash \text{záver} \quad (1.2a)$$

alebo formálne

$$\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\} \vdash \varphi \quad (1.2b)$$

Táto formula logického dôkazu môže byť prepísaná do formuly

$$\vdash \varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n \Rightarrow \varphi \quad (1.3a)$$

alebo v ekvivalentnom tvare, kde konjunkcie sú nahradené implikáciami

$$\vdash \varphi_1 \Rightarrow (\varphi_2 \Rightarrow (\dots (\varphi_n \Rightarrow \varphi))) \quad (1.3b)$$

Tabuľka 1.1. Schémy usudzovania výrokovej logiky



Schéma usudzovania	Teoréma výrokovej logiky	Názov schémy
$\frac{p}{p \vee q}$	$p \Rightarrow (p \vee q)$	adícia
$\frac{p \wedge q}{p}$	$(p \wedge q) \Rightarrow p$	simplifikácia (zjednodušenie)
$\frac{p}{q} \quad \frac{q}{p \wedge q}$	$p \Rightarrow (q \Rightarrow (p \wedge q))$	konjunkcia
$\frac{p}{p \Rightarrow q} \quad q$	$p \Rightarrow ((p \Rightarrow q) \Rightarrow q)$	modus ponens
$\frac{\neg q}{p \Rightarrow q} \quad \neg p$	$\neg q \Rightarrow ((p \Rightarrow q) \Rightarrow \neg p)$	modus tollens
$\frac{p \Rightarrow q}{q \Rightarrow r} \quad p \Rightarrow r$	$(p \Rightarrow q) \Rightarrow ((q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r))$	hypotetický sylogizmus

$\frac{p \vee q}{\neg p} \quad \frac{q}{\quad}$	$(p \vee q) \Rightarrow (\neg p \Rightarrow q)$	disjunktívny sylogizmus
$\frac{p \Rightarrow q}{\neg q \Rightarrow \neg p}$	$(p \Rightarrow q) \Rightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$	inverzia implikácie
$\frac{p \Rightarrow q}{p \Rightarrow \neg q} \quad \frac{\neg p}{\quad}$	$(p \Rightarrow q) \Rightarrow ((p \Rightarrow \neg q) \Rightarrow \neg p)$	reductio ad absurdum

KONZISTENTNÉ
PREDPOKLADY =
 \exists INTERPRETÁCIA,
KEDY SÚ PRAVDIVÉ

Tab. 1.1 obsahuje 9 obvyklých schém usudzovania výrokovej logiky, pričom každá schéma je sprevádzaná aj zákonom (tautológiou) výrokovej logiky (v tvare formuly (1.3b)) a obvyklým historickým názvom. Hovoríme, že predpoklady sú *konzistentné* vtedy a len vtedy, ak existuje aspoň jedna interpretácia³ pravdivostných hodnôt výrokových premenných, pre ktorú sú všetky predpoklady pravdivé. V opačnom prípade je množina predpokladov *nekonzistentná* (*kontradiktórna*) a je charakterizovaná tým, že z nej súčasne logicky vyplýva nejaký záver a aj jeho negácia.

PRÍKLAD 1.1.

Majme dva predpoklady: prvý predpoklad je výrok 'prší' a druhý predpoklad je implikácia 'ak prší, potom je cesta mokrá'. Použitím pravidla usudzovania modus ponens, z pravdivosti týchto dvoch predpokladov vyplýva pravdivý záver 'cesta je mokrá', čo môžeme formálne vyjadriť pomocou schémy

$$\frac{\text{prší}}{\text{ak prší, potom cesta je mokrá}} \quad \frac{\quad}{\text{cesta je mokrá}}$$

PRÍKLAD 1.2.

Použitím schémy usudzovania adície k pravdivému výroku 'teplota je pod bodom mrazu' môžeme pomocou disjunkcie priradiť ľubovoľný výrok (pravdivý alebo nepravdivý), napr. 'prší', dostaneme pravdivý záver 'teplota je pod bodom mrazu alebo prší'

$$\frac{\text{teplota je pod bodom mrazu}}{\text{teplota je pod bodom mrazu alebo prší}}$$

PRÍKLAD 1.3.

Uvažujme dva výroky 'ak dnes bude pršať, potom sa nepôjdem kúpať' a 'ak sa nepôjdem kúpať, potom navštívim príbuzného'. Použitím schémy usudzovania nazvanej hypotetický sylogizmus dostaneme z týchto dvoch predpokladov záver 'ak dnes bude pršať, potom navštívim príbuzného'

$$\frac{\text{ak dnes bude pršať, potom sa nepôjdem kúpať}}{\text{ak sa nepôjdem kúpať, potom navštívim príbuzného}} \quad \frac{\quad}{\text{ak dnes bude pršať, potom navštívim príbuzného}}$$

³ Nech p, q, \dots, r sú atomické výrokové premenné, potom *interpretácia* (vzhľadom k týmto premenným) je označená symbolom $\tau = (p/1, q/0, \dots, r/1)$. Špecifikuje pravdivostné hodnoty jednotlivých premenných; v tomto konkrétnom prípade premenná p je pravdivá, premenná q je nepravdivá, ... a premenná r pravdivá. Ak máme n premenných, potom existuje 2^n rôznych interpretácií. (Pozri kapitolu 1.4 v našej knihe Matematická logika [11].)

Túto schému môžeme sformalizovať pomocou výrokov

$$\begin{aligned} p &= \text{'dnes prší'} \\ q &= \text{'kúpem sa'} \\ r &= \text{'navštívim príbuzného'} \end{aligned}$$

potom schéma má tento formálny tvar mierne modifikovaného hypotetického sylogizmu

$$\frac{\begin{array}{l} p \Rightarrow \neg q \\ \neg q \Rightarrow r \end{array}}{p \Rightarrow r}$$

ktorá je odvodená z pôvodnej schémy hypotetického sylogizmu substitúciou, kde výroková premenná q je substituovaná negáciou $\neg q$.

V poslednom príklade 1.3 boli už použité výrokové premenné, ktoré nám umožnia vykonať formalizáciu celého procesu dôkazu pomocou postupnosti elementárnych krokov. Obrátíme našu pozornosť na formulu (1.2b) logického vyplývania výrokovej formuly φ z predpokladov, ktoré sú reprezentované formulami $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$. Logické vyplývanie ilustrujeme jednoduchým príkladom.

PRÍKLAD 1.4.

Postulujeme, že množina predpokladov obsahuje tieto formuly – zložené výroky:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \text{'dnes poobede nie je slnečno a je chladnejšie ako včera'} \\ \varphi_2 &= \text{'pôjdeme sa kúpať len vtedy, ak bude slnečno'} \\ \varphi_3 &= \text{'ak sa nepôjdeme kúpať, potom sa budeme člnkovať na rieke'} \\ \varphi_4 &= \text{'ak sa budeme člnkovať na rieke, potom sa vrátíme domov podvečer'} \end{aligned}$$

požadovaný záver má tvar

$$\varphi = \text{'budem doma podvečer'}$$

Pomocou výrokových premenných

$$\begin{aligned} p &= \text{'dnes poobede je slnečno'} \\ q &= \text{'je chladnejšie ako včera'} \\ r &= \text{'pôjdeme sa kúpať'} \\ s &= \text{'budeme člnkovať na rieke'} \\ t &= \text{'vrátíme sa domov podvečer'} \end{aligned}$$

vykonáme formalizáciu schémy logického vyplývania do tvaru

$$\{\neg p \wedge q, (r \Rightarrow p) \wedge (p \Rightarrow r), \neg r \Rightarrow s, s \Rightarrow t\} \vdash t$$

Ukážeme, že táto schéma je platná pomocou postupnosti elementárnych krokov, kde budeme používať schémy usudzovania z tab. 1.1.

1.	$\neg p \wedge q$	predpoklad ₁
2.	$(r \Rightarrow p) \wedge (p \Rightarrow r)$	predpoklad ₂
3.	$\neg r \Rightarrow s$	predpoklad ₃
4.	$s \Rightarrow t$	predpoklad ₄
5.	$\neg p$	simplifikácia predpokladu ₁
6.	q	simplifikácia predpokladu ₁
7.	$r \Rightarrow p$	simplifikácia predpokladu ₂

- 8. $\neg r$ medzivýsledok 5 a modus tollens na predpoklad₂
- 9. s medzivýsledok 8 a modus ponens na predpoklad₃
- 10. t medzivýsledok 9 a modus ponens na predpoklad₄

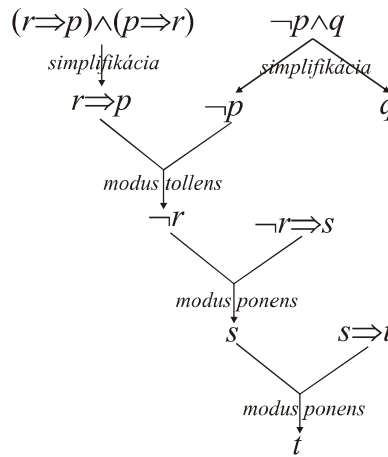
DŔKAZ AKO
POSTUPNŔ
FORMŔL

V Ŕvodnej časti kapitoly 1.1 bolo poznamenané, že dôkaz je možné charakterizovať ako postupnosť formŔl, kde posledná formula sa rovná požadovanému záveru, môžeme teda písať

$$(\neg p \wedge q) \rightarrow (r \Rightarrow p) \rightarrow (\neg r \Rightarrow s) \rightarrow (s \Rightarrow t) \rightarrow (\neg p) \rightarrow (q) \rightarrow (\neg r) \rightarrow (s) \rightarrow (t)$$

TŔto postupnosť formŔl môžeme reprezentovať aj pomocou „stromu dôkazu“ znázorneného na obr. 1.2.

OBRÁZOK 1.2.
STROM
ODVODENIA PRE
PRÍKLAD 1.4.



Strom odvodenia pre logický dôkaz z príkladu 1.4.

PRÍKLAD 1.5.

Nech množina predpokladov obsahuje tieto zložené výroky:

$\varphi_1 = \text{'ak mi pošleš email, potom program dokončím'}$

$\varphi_2 = \text{'ak mi nepošleš email, potom pôjdem spať skôr'}$

$\varphi_3 = \text{'ak pôjdem spať skôr, potom sa ráno zobudím odpočínutý'}$

požadovaný záver má tvar

$\varphi = \text{'ak nedokončím program, potom sa ráno zobudím odpočínutý'}$

Pomocou výrokových premenných

$p = \text{'pošleš mi email'}$

$q = \text{'program dokončím'}$

$r = \text{'pôjdem spať skôr'}$

$s = \text{'ráno sa zobudím odpočínutý'}$

vykonáme formalizáciu schémy logického vyplývania do tvaru

$$\{p \Rightarrow q, \neg p \Rightarrow r, r \Rightarrow s\} \vdash \neg q \Rightarrow s$$

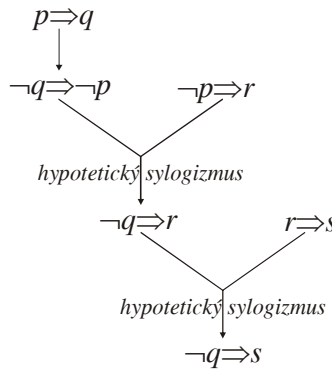
Pomocou postupnosti elementárnych krokov, kde budeme používať schémy usudzovania z tab. 1.1, ukážeme, že táto schéma je platná

- 1. $p \Rightarrow q$ predpoklad₁
- 2. $\neg p \Rightarrow r$ predpoklad₂
- 3. $r \Rightarrow s$ predpoklad₃

- 4. $\neg q \Rightarrow \neg p$ inverzia implikácie na predpoklad₁
- 5. $\neg q \Rightarrow r$ hypotetický sylogizmus na medzivýsledok 4 a predpoklad₂
- 6. $\neg q \Rightarrow s$ hypotetický sylogizmus na medzivýsledok 5 a predpoklad₃

Diagramatická interpretácia tohto logického dôkazu je vykonaná pomocou stromu dôkazu znázorneného na obr. 1.3.

OBRÁZOK 1.3.
STROM
ODVODENIA PRE
PRÍKLAD 1.5.



Strom odvodenia pre logický dôkaz z príkladu 1.5.

VETA O DEDUKCII

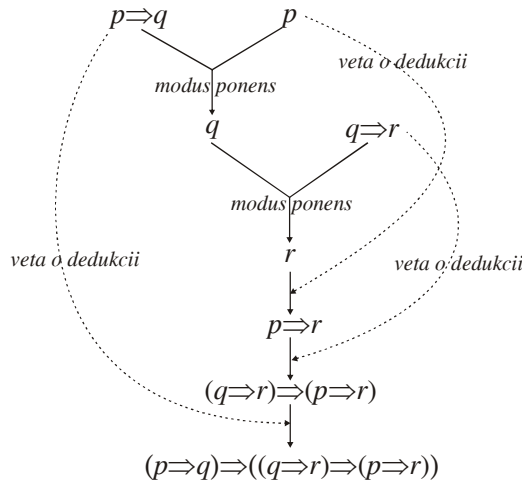


Uskutočnenie logického dôkazu $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\} \vdash \varphi$ môže byť podstatne zjednodušené. Ak množinu predpokladov $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ rozšírime o nový „pomocný“ predpoklad ψ , potom vo výrokovej logike platí **veta o dedukcii** (pozri vetu 2.3 v Matematickej logike [11]), ktorá má tvar

$$(\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\} \cup \{\psi\} \vdash \varphi) \Rightarrow (\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\} \vdash (\psi \Rightarrow \varphi)) \quad (1.4)$$

To znamená, že logický dôkaz formuly φ pomocou rozšírenej množiny predpokladov $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\} \cup \{\psi\}$ je rovnocenný logickému dôkazu formuly $\psi \Rightarrow \varphi$ pomocou pôvodnej množiny predpokladov.

OBRÁZOK 1.4.
STROM
ODVODENIA PRE
PRÍKLAD 1.6.



Strom odvodenia pre logický dôkaz z príkladu 1.6.

PRÍKLAD 1.6. Pomocou logického dôkazu založeného na (1.4) dokážeme zákon hypotetického sylogizmu výrokovej logiky

$$\{p \Rightarrow q, q \Rightarrow r\} \cup \{p\} \vdash r$$

kde množina $\{p \Rightarrow q, q \Rightarrow r\}$ obsahujúca pôvodné predpoklady je rozšírená o pomocný predpoklad p .

1.	$p \Rightarrow q$	predpoklad ₁
2.	$q \Rightarrow r$	predpoklad ₂
3.	p	pomocný predpoklad
4.	q	modus ponens na predpoklad ₁ a pomocný predpoklad
5.	r	modus ponens na predpoklad ₂ a medzivýsledok 4
6.	$p \Rightarrow r$	použitie (1.4) na výsledok 5 a pomocný predpoklad
7.	$(q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$	použitie (1.4) na výsledok 6 a predpoklad ₂
8.	$(p \Rightarrow q) \Rightarrow ((q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r))$	použitie (1.4) na výsl. 7 a predpoklad ₁

TAUTOLÓGIA PLATÍ
PRE PRÁZDNU
MNOŽINU
PREDPOKLADOV

V krokoch 7 a 8 sme opakovane použili vzťah (1.4), kde sme z množiny predpokladov vždy eliminovali jeden predpoklad. Finálny výsledok už platí pre prázdnu množinu predpokladov, čo znamená, že formula je zákonom (tautológiou) výrokovej logiky.

V kapitole 1.1 bolo zdôraznené postavenie viet vo formálnom logickom systéme ako efektívnej skratky logických dôkazov, kde sa už nemusí opakovať to, čo už raz bolo dokázané. Tento prístup výstavby formálnych systémov pomocou viet a ich využívania patrí medzi základné črty formálnych systémov, ktorých výstavba sa uskutočňuje hlavne pomocou prepojenej siete viet, ktoré sú dokazované pomocou už dokázaných viet v predošlých krokoch.

Nech ψ je veta (tautológia), potom logický dôkaz $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\} \vdash \varphi$ môže byť rozšírený o vetu ψ takto

$$(\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\} \vdash \varphi) \Rightarrow (\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\} \cup \{\psi\} \vdash \varphi) \quad (1.5)$$

Význam tohto rozšírenia spočíva v tom, že zahrnutie vhodnej vety (tautologie) ψ môže podstatne zjednodušiť dôkaz vety.

PRÍKLAD 1.7. Dokážte zákon rezolventy⁴

$$(p \vee q) \Rightarrow ((\neg p \vee r) \Rightarrow (q \vee r))$$

pomocou zákona hypotetického sylogizmu

$$(p \Rightarrow q) \Rightarrow ((q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r))$$

a pomocou vety o disjunktnom tvare implikácie, $(p \Rightarrow q) \equiv (\neg p \vee q)$, formálne

⁴ V knihe Matematická logika [11] je rezolventa (alebo rezolučný princíp) formulovaná pomocou vety 5.2 ako formula $(B \vee I) \wedge (C \vee \neg I) \Rightarrow (B \vee C)$, ktorá sa dá jednoduchými úpravami previesť na rezolventu z príkladu 1.7.

$$\underbrace{\{(p \Rightarrow q) \Rightarrow ((q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r))\}}_{\varphi_1} \cup \underbrace{\{(p \Rightarrow q) \equiv (\neg p \vee q)\}}_{\psi}$$

$$\vdash \underbrace{((p \vee q) \Rightarrow ((\neg p \vee r) \Rightarrow (q \vee r)))}_{\varphi}$$

Logický dôkaz pozostáva z tejto postupnosti medzivýsledkov:

1.	$(p \Rightarrow q) \Rightarrow ((q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r))$	predpoklad ₁
2.	$(p \Rightarrow q) \equiv (\neg p \vee q)$	pomocný predpoklad - veta
3.	$(\neg p \vee q) \Rightarrow ((\neg q \vee r) \Rightarrow (\neg p \vee r))$	prepis 1 pomocou vety 2
4.	$(\neg q \vee p) \Rightarrow ((\neg p \vee r) \Rightarrow (\neg q \vee r))$	prepis 3 pomocou zámenny $p \leftrightarrow q$
5.	$(p \vee q) \Rightarrow ((\neg p \vee r) \Rightarrow (q \vee r))$	prepis 4 pomocou substitúcie $\neg q/q$

Úplne analogickým spôsobom by sme mohli dokázať, že zákon rezolventy je možné prepísať na zákon hypotetického sylogizmu, z čoho plynie, že tieto dva zákony sú navzájom ekvivalentné:

$$((p \Rightarrow q) \Rightarrow ((q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r))) \equiv ((p \vee q) \Rightarrow ((\neg p \vee r) \Rightarrow (q \vee r)))$$

Chybné pravidlá usudzovania

POTVRDENIE
DÔSLEDKU

Existujú jednoduché modifikácie schém usudzovania modus ponens a modus tollens, ktoré nie sú korektné. Prvá nekorektná schéma sa nazýva *potvrdenie dôsledku* (*affirming the consequent*)

$$\frac{\begin{array}{l} q \\ p \Rightarrow q \end{array}}{p} \quad (1.6a)$$

POPRETIE
PREDPOKLADU

Druhá sa nazýva *popretie predpokladu* (*denying the antecedent*)

$$\frac{\begin{array}{l} \neg p \\ p \Rightarrow q \end{array}}{\neg q} \quad (1.6b)$$

Prvá schéma „popretie predpokladu“ je ilustrovaná príkladom

$$\frac{\begin{array}{l} \text{vydala som sa} \\ \text{ak som pekná, tak sa vydám} \end{array}}{\text{som pekná}}$$

Záver nie je korektný, môže sa vydať aj vtedy, keď nie je pekná. Druhá schéma „potvrdenie dôsledku“ môže byť ilustrovaná podobným príkladom

$$\frac{\begin{array}{l} \text{nie som pekná} \\ \text{ak som pekná, tak sa vydám} \end{array}}{\text{nevydám sa}}$$

Chyba v usudzovaní je podobná ako v predchádzajúcom príklade. O nekorrektnosti schém usudzovania (1.6a-b) sa ľahko presvedčíme tak, že im priradíme formuly výrokovej logiky

$$q \Rightarrow ((p \Rightarrow q) \Rightarrow p) \quad (1.7a)$$

$$\neg p \Rightarrow ((p \Rightarrow q) \Rightarrow \neg q) \quad (1.7b)$$

Pre prvú formulu existuje interpretácia premenných $\tau = (p/0, q/0)$, pre ktorú má prvá formula (1.7a) pravdivostnú hodnotu '0'. Táto interpretácia môže byť použitá aj pre druhú formulu (1.7b) aby sme ukázali, že formula má pravdivostnú hodnotu '0'. To znamená, že obe formuly (1.7a-b) nie sú tautológie, čiže nemôžu byť zákonmi výrokovej logiky.

Ako svedčia mnohé kognitívno-psychologické výskumy, obe tieto schémy, aj keď sú chybné, často sa využívajú v bežnom usudzovaní, možno ich teda pokladať za „klasické chyby“ nášho každodenného uvažovania.

1.3 PRAVIDLÁ USUDZOVANIA V PREDIKÁTOVEJ LOGIKE

Predikátová logika môže byť chápaná ako rozšírenie výrokovej logiky o tzv. kvantifikátory (všeobecný a existenčný) (pozri kapitoly 6 – 8 v Matematickej logike [11]). Základné schémy usudzovania v predikátovej logike sú uvedené v tab. 1.2.

Tabuľka 1.2. Schémy usudzovania predikátovej logiky

Schéma usudzovania	Teoréma predikátovej logiky	Názov schémy
$\frac{\forall x P(x)}{P(c)}$	$(\forall x P(x)) \Rightarrow P(c)$	Konkretizácia univerzálneho kvantifikátora
$\frac{P(c) \text{ pre každé } c}{\forall x P(x)}$	$P(c) \Rightarrow (\forall x P(x))$	Zovšeobecnenie pomocou univerzálneho kvantifikátora
$\frac{\exists x P(x)}{P(c) \text{ pre nejaký element } c}$	$(\exists x P(x)) \Rightarrow P(c)$	Konkretizácia existenčného kvantifikátora
$\frac{P(c) \text{ pre nejaký element } c}{\exists x P(x)}$	$P(c) \Rightarrow (\exists x P(x))$	Zovšeobecnenie pomocou existenčného kvantifikátora



KONKRETIZÁCIA
UNIVERZÁLNEHO
KVANTIFIKÁTORA

Ak nejakú vlastnosť $P(x)$ má každý objekt (individuum) z univerza U , $\forall x P(x)$, potom túto vlastnosť musí mať aj ľubovoľný konkrétny objekt c z tohto univerza,

$$(\forall x P(x)) \Rightarrow P(c) \quad (1.8)$$

Táto vlastnosť je priamym dôsledkom intuitívnej interpretácie univerzálneho kvantifikátora ako konjunkcie vlastnosti $P(x)$ pre každý objekt x z konečného univerza

$$\forall x P(x) =_{\text{def}} \bigwedge_{x \in U} P(x) = P(a) \wedge P(b) \wedge \dots \wedge P(u) \quad (1.9)$$

Ak na túto formulu (predpoklad) použijeme schému usudzovania simplifikácie z tab. 1.1, potom vlastnosť P má menovite každý objekt z U

$$\frac{\forall x P(x)}{\begin{array}{l} P(a) \\ P(b) \\ \dots \\ P(c) \\ \dots \end{array}} \quad (1.10)$$

Potom musí platiť aj implikácia (1.8). Ako ilustračný príklad tejto vlastnosti univerzálneho kvantifikátora uvidíme klasický príklad konkretizácie zo stredovekej logiky

$$\frac{\begin{array}{l} \textit{každý človek je smrteľný} \\ \textit{Sokrates je človek} \end{array}}{\textit{Sokrates je smrteľný}}$$

kde Sokrates patrí do univerza U (obsahujúceho všetkých ľudí) platnosti kvantifikátora \forall . Túto schému usudzovania môžeme zovšeobecniť takto

$$\frac{\begin{array}{l} \forall (x \in U) P(x) \\ c \in U \end{array}}{P(c)} \quad (1.11)$$

ZOVŠEOBECNENIE
POMOCOU
UNIVERZÁLNEHO
KVANTIFIKÁTORA

Ak sa nám podarí dokázať, že vlastnosť P má každý objekt z nejakého univerza U , potom vzhľadom k tomuto univerzu môžeme definovať univerzálny kvantifikátor \forall

$$P(a) \wedge \dots \wedge P(c) \wedge \dots = \bigwedge_{x \in U} P(x) =_{\text{def}} \forall x P(x) \quad (1.12)$$

Ak použijeme na túto formulu schému usudzovania konjunkcie z tab. 1.1, potom

$$\frac{\begin{array}{l} P(a) \\ \dots \\ P(c) \\ \dots \end{array}}{\forall x P(x)} \quad (1.13)$$

potom musí platiť aj

$$P(c) \Rightarrow (\forall x P(x)) \quad (1.14)$$

s poznámkou, že c je ľubovoľný objekt z univerza U . Zovšeobecnenie pomocou univerzálneho kvantifikátora sa často používa v matematike implicitne, pretože dôkaz vlastnosti $P(c)$ bol vykonaný nielen pre určitý špecifický objekt, ale pre ľubovoľný objekt c .

INDUKTÍVNE
ZOVŠEOBECNIE A
FALZIFIKÁCIA

V mnohých prípadoch mimo matematiku, použitie zovšeobecnenia podľa schémy usudzovania (1.13) (alebo predikátovej formuly (1.14)) tvorí základ tzv. *induktívneho zovšeobecnenia*, v ktorom sa snažíme parciálne poznatky zovšeobecniť pre každý objekt postulovaného univerza U . V tejto súvislosti potom vystupuje do popredia podľa rakúsko-anglického filozofa Karla Poppera problém falzifikácie všeobecného výroku $\forall x P(x)$. Stačí nájsť jeden objekt $o \in U$, pre ktorý neplatí vlastnosť P , $\neg P(o)$, potom všeobecný výrok $\forall x P(x)$ je neplatný, $\neg \forall x P(x)$.

Ako ilustračný príklad budeme študovať univerzum U , ktoré obsahuje všetky labute na našej planéte. Experimentálnym pozorovaním zistíme, že pre veľkú podmnožinu $U' \subset U$ platí, že každá labuť z nej je biela (túto vlastnosť označíme predikátom B). Túto skutočnosť môžeme „pochtivo“ zovšeobecniť pomocou univerzálneho kvantifikátora \forall' definovaného vzhľadom k „poduniverzu“ U'

$$\forall' x B(x) =_{\text{def}} \bigwedge_{x \in U'} B(x)$$

V dôsledku určitej netrpezlivosti, pozorovateľ zovšeobecni tento poznatok pre celé univerzum U , postuluje platnosť formuly $\forall x B(x)$. Falzifikácia tejto vlastnosti spočíva v tom, že nájdeme takú labuť (napr. pod skleneným mostom v Piešťanoch), ktorá je čierna, potom automaticky platí $\neg \forall x B(x)$.

ROZŠIROVANIE
PLATNOSTI

V tejto súvislosti môžeme hovoriť aj o verifikácii vlastnosti $\forall' x B(x)$, ďalšími a ďalšími pozorovaniami rozširujeme univerzum U' o ďalšie objekty x , ktoré majú vlastnosť $B(x)$. Avšak je potrebné poznamenať, že toto rozširovanie platnosti $\forall' x B(x)$ o ďalšie objekty nám neprináša nový poznatok, neustále platí, že „labute sú biele“, len máme stále rozsiahlejšie vedomosti o evidentnosti tohto poznatku. Preto falzifikácia, na rozdiel od verifikácie, je zásadne dôležitá pre indukívne zovšeobecňovanie, napomáha nám pri vzniku nových poznatkov (čo ako prvý zdôraznil Karl Popper).

KONKRETIZÁCIA
EXISTENČNÉHO
KVANTIFIKÁTORA

Ak nejaká vlastnosť platí pre niektorý objekt $c \in U$, potom musí platiť aj implikácia

$$(\exists x P(x)) \Rightarrow P(c) \quad (1.15)$$

alebo pomocou schémy usudzovania

$$\frac{\exists x P(x)}{P(c) \text{ pre nejaký element } c} \quad (1.16)$$

Táto vlastnosť konkretizácie existenčného kvantifikátora vyplýva priamo z jeho intuitívnej interpretácie pomocou disjunkcie predikátov nad konečným univerzom

$$\exists x P(x) =_{\text{def}} \bigvee_{x \in U} P(x) = P(a) \vee \dots \vee P(c) \vee \dots \quad (1.17)$$

Disjunkcia výrokov je pravdivá vtedy a len vtedy, ak aspoň jeden jej výrok je pravdivý, potom existuje aspoň jeden objekt c pre ktorý je výrok $P(c)$ pravdivý, t. j. platí implikácia (1.15).

ZOVŠEOBECNENIE
POMOCOU
EXISTENČNÉHO
KVANTIFIKÁTORA

Podľa tejto „skromnej“ schémy usudzovania, ak nejaká vlastnosť P platí aspoň pre jeden objekt c z univerza U , potom túto skutočnosť môžeme zovšeobecniť pomocou existenčného kvantifikátora \exists

$$P(c) \Rightarrow \bigvee_{x \in U} P(x) \stackrel{\text{def}}{=} \exists x P(x) \quad (1.18)$$

kde sme použili schému usudzovania s názvom adícia z tab. 1.1. Túto implikáciu môžeme vyjadriť pomocou schémy usudzovania

$$\frac{P(c) \text{ pre nejaký element } c}{\exists x P(x)} \quad (1.19)$$

Spojením (1.15) a (1.18) dostaneme

$$P(c) \equiv \exists x P(x) \quad (1.20)$$

Podľa tejto formuly, pravdivosť výroku $P(c)$ je ekvivalentná pravdivosti výroku s existenčným kvantifikátorom $\exists x P(x)$.

PRÍKLAD 1.8.

Ukážte, že záver φ vyplýva z predpokladov φ_1 a φ_2 :

φ_1 = ‘každý kto navštevuje prednášky z diskkrétnej matematiky je študentom STU’

φ_2 = ‘Mária navštevuje prednášky z diskkrétnej matematiky’

φ = ‘Mária je študentka STU’.

Tieto tri výroky prepíšeme do tvaru

$$\frac{\begin{array}{l} \varphi_1 = \forall x (DM(x) \Rightarrow STU(x)) \\ \varphi_2 = DM(Maria) \end{array}}{\varphi = STU(Maria)}$$

kde $DM(x)$ je predikát ‘objekt x navštevuje prednášku z diskkrétnej matematiky’ a $STU(x)$ je predikát ‘objekt x je študentom STU’. Korektnosť riešenia overíme postupnosťou formúl

1.	$\forall x (DM(x) \Rightarrow STU(x))$	predpoklad ₁
2.	$DM(Maria)$	predpoklad ₂
3.	$DM(Maria) \Rightarrow STU(Maria)$	konkretizácia 1
4.	$STU(Maria)$	modus ponens na 2 a 3

PRÍKLAD 1.9.

Ukážte, že záver φ vyplýva z predpokladov φ_1 a φ_2 :

φ_1 = ‘niektorí študenti navštevujúci prednášku nečítali predpísanú učebnicu’

φ_2 = ‘každý študent navštevujúci prednášku vykonal skúšku’

φ = ‘niektorí študenti, ktorí vykonali skúšku, nečítali predpísanú učebnicu’.

Tieto tri výroky prepíšeme do tvaru

$$\left| \begin{array}{l} \varphi_1 = \exists x (P(x) \wedge \neg N(x)) \\ \varphi_2 = \forall x (P(x) \Rightarrow S(x)) \\ \hline \varphi = \exists x (S(x) \wedge \neg N(x)) \end{array} \right.$$

kde $P(x)$ je predikát 'objekt x navštevuje prednášku', $N(x)$ je predikát 'objekt x čítal predpísanú učebnicu', $S(x)$ je predikát 'objekt x vykonal skúšku'. Korektnosť riešenia overíme postupnosťou formúl

1.	$\exists x (P(x) \wedge \neg N(x))$	predpoklad ₁
2.	$\forall x (P(x) \Rightarrow S(x))$	predpoklad ₂
3.	$P(c) \wedge \neg N(c)$	konkretizácia predpokladu ₁
4.	$P(c)$	simplifikácia 3
5.	$\neg N(c)$	simplifikácia 3
6.	$P(c) \Rightarrow S(c)$	konkretizácia predpokladu ₂
7.	$S(c)$	modus ponens na 4 a 6
8.	$S(c) \wedge \neg N(c)$	konjunkcia 5 a 7
9.	$\exists x (S(x) \wedge \neg N(x))$	zovšeobecnie 8 pomocou existenčného kvantifikátora

Ako vidieť z uvedených príkladov, dôkazy formúl obsahujúcich kvantifikátory sú zmesou aplikácií schém usudzovania tak z výrokovej, ako aj predikátovej logiky. Táto skutočnosť vyplýva z faktu, že predikátová logika je vlastne zovšeobecnením výrokovej logiky, ktorá je „vnorená“ do predikátovej logiky; všetky zákony výrokovej logiky sú aj zákonmi predikátovej logiky.

1.4 METÓDY DÔKAZU VIET

Dôkaz vety je vo všeobecnosti obtiažny a netriviálny problém, ktorý len v ojedinelých prípadoch môže byť vykonaný priamočiarym mechanickým postupom. Preto v matematike vznikli rôzne metódy dôkazu viet, z ktorých uvedieme najdôležitejšie: priamy dôkaz, nepriamy dôkaz, dôkaz sporom a dôkaz vymenovaním prípadov.

PRIAMY DÔKAZ



Implikácia $p \Rightarrow q$ môže byť dokázaná tak, že ukážeme, že z predpokladu pravdivosti výroku p vyplýva taktiež aj pravdivosť výroku q . Túto jednoduchú formuláciu priameho dôkazu môžeme upresniť tak, že pri dôkaze vychádzame z axióm $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ a z už dokázaných viet $\{\psi_1, \dots, \psi_m\}$, potom dôkaz $p \Rightarrow q$ môžeme charakterizovať vzťahom logického dôkazu

$$\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\} \cup \{\psi_1, \dots, \psi_m\} \cup \{p\} \vdash q \quad (1.21)$$

V tejto schéme máme na ľavej strane všetky axiómy systému, dokázané potrebné

vety (tautológie) a predpoklad p . Použitím pravidiel odvodzovania (modus ponens, pravidlá substitúcie,...) z týchto „predpokladov“ odvodíme dôsledok q .

PRÍKLAD 1.10. Dokážte vetu „ak n je nepárne prirodzené číslo, potom n^2 je taktiež nepárne číslo“.

Požadovanú vetu sformalizujeme pomocou implikácie

$$\underbrace{(n \text{ je nepárne číslo})}_p \Rightarrow \underbrace{(n^2 \text{ je nepárne číslo})}_q$$

Použijeme techniku priameho dôkazu, z predpokladu pravdivosti p dokážeme pravdivosť dôsledku q .

Nech n je nepárne prirodzené číslo, potom existuje také nezáporné celé číslo k , že $n = 2k + 1$. Pre kvadrát čísla n platí

$$n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2 \underbrace{(2k^2 + 2k)}_l + 1 = 2l + 1$$

čiže aj kvadrát n^2 je nepárne číslo. Týmto sme dokázali platnosť implikácie $p \Rightarrow q$.

NEPRIAMY
DŮKAZ



Technika nepriameho dôkazu je založená na ekvivalencii (nazývanej zákon inverzie implikácie) $(p \Rightarrow q) \equiv (\neg q \Rightarrow \neg p)$, podľa ktorej, ak v implikácii vymeníme poradie jej členov, potom musíme negovať aj jej jednotlivé členy. Z tohto zákona vyplýva, že dôkaz implikácie $(p \Rightarrow q)$ je ekvivalentný dôkazu „inverznej“ implikácie $\neg q \Rightarrow \neg p$.

PRÍKLAD 1.11. Dokážte vetu „ak $3n + 2$ je nepárne číslo, potom aj n je nepárne číslo“.

Vetu upravíme do tvaru implikácie

$$\underbrace{(3n + 2 \text{ je nepárne číslo})}_p \Rightarrow \underbrace{(n \text{ je nepárne číslo})}_q$$

Budeme dokazovať inverznú implikáciu

$$\underbrace{(n \text{ je párne číslo})}_{\neg q} \Rightarrow \underbrace{(3n + 2 \text{ je párne číslo})}_{\neg p}$$

Nech n je párne číslo, potom existuje také nezáporné celé číslo k , že $n = 2k$. Pre takto špecifikované číslo n dostaneme $3n + 2 = 3(2k) + 2 = 2(3k + 1)$, ktoré je párne. Týmto sme dokázali inverznú implikáciu $\neg q \Rightarrow \neg p$, čiže musí platiť aj „pôvodná“ implikácia $p \Rightarrow q$.

DŮKAZ SPOROM



Tento typ dôkazu je založený na schéme „reductio ad absurdum“ z tab. 1.1

$$\left| \begin{array}{l} p \Rightarrow q \\ p \Rightarrow \neg q \\ \hline \neg p \end{array} \right. \quad (1.22)$$

založenej na zákone výrokovej logiky

$$(p \Rightarrow q) \Rightarrow ((p \Rightarrow \neg q) \Rightarrow \neg p) \quad (1.23)$$

Túto schému usudzovania môžeme interpretovať tak, že ak z predpokladu p súčas-

ne odvodíme q a $\neg q$, potom musí byť pravdivá negácia $\neg p$ východiskového predpokladu.

PRÍKLAD 1.12. Dokážte, že $\sqrt{2}$ je iracionálne číslo.

Predpokladajme, že $\sqrt{2}$ je racionálne číslo, tento výrok označíme

$$p = '\sqrt{2} \text{ je racionálne číslo}'$$

Z tohto výroku vyplýva, že číslo $\sqrt{2}$ má tvar α/β , kde α a β sú celé nesúdeliteľné čísla, tento výrok označíme

$$q = '\sqrt{2} = \alpha/\beta, \text{ kde } \alpha, \beta \text{ sú celé nesúdeliteľné čísla}'$$

t. j. platí implikácia $p \Rightarrow q$. Úpravou matematického výrazu z výroku q dostaneme formulu $\alpha^2 = 2\beta^2$, z ktorej vyplýva, že číslo $\alpha^2 = 2k$ je párne. V príklade 1.10 bola dokázaná veta, že ak celé číslo n je nepárne, potom aj jeho kvadrát n^2 je nepárne číslo. Obrátením tejto implikácie dostaneme, že ak n^2 je párne číslo, potom aj n je párne číslo. Z tejto vety vyplýva, že číslo α je párne. Potom taktiež platí $\beta^2 = 2p^2$, t. j. β^2 je párne číslo, čiže aj β je párne číslo. Týmto sme dokázali, že α , β sú párne čísla, čiže sú súdeliteľné

$$\neg q = '\sqrt{2} = \alpha/\beta, \text{ kde } \alpha, \beta \text{ sú celé súdeliteľné čísla}'$$

t. j. platí implikácia $p \Rightarrow \neg q$. Týmto sme dokázali, že súčasne platia implikácie $p \Rightarrow q$ a $p \Rightarrow \neg q$, použitím schémy „reductio ad absurdum“ (1.22) dostaneme, že platí negácia ich predpokladu

$$\neg p = '\sqrt{2} \text{ je iracionálne číslo}'$$

čo bolo potrebné dokázať.

DŮKAZ
VYMENOVANÍM
PRÍPADOV

Naším cieľom je dokázať implikáciu

$$(p_1 \vee \dots \vee p_n) \Rightarrow q \tag{1.24}$$

Jednoduchými ekvivalentnými úpravami môžeme túto implikáciu prepísať do ekvivalentného tvaru

$$((p_1 \vee \dots \vee p_n) \Rightarrow q) \equiv ((p_1 \Rightarrow q) \wedge \dots \wedge (p_n \Rightarrow q)) \tag{1.25}$$



1.	$(p_1 \vee \dots \vee p_n) \Rightarrow q$	
2.	$\neg(p_1 \vee \dots \vee p_n) \vee q$	prepis 1 pomocou disjunktívneho tvaru implikácie
3.	$(\neg p_1 \wedge \dots \wedge \neg p_n) \vee q$	použitie De Morganovho zákona na 2
4.	$(\neg p_1 \vee q) \wedge \dots \wedge (\neg p_n \vee q)$	použitie distributívneho zákona na 3
5.	$(p_1 \Rightarrow q) \wedge \dots \wedge (p_n \Rightarrow q)$	prepis 4 s disjunktívnym tvarom implikácie

Formulu (1.25) môžeme prepísať do tvaru schémy usudzovania

$$\frac{\begin{array}{l} (p_1 \Rightarrow q) \\ \dots\dots\dots \\ (p_n \Rightarrow q) \end{array}}{(p_1 \vee \dots \vee p_n) \Rightarrow q} \quad (1.26)$$

Túto schému usudzovania (dôkaz vymenovaním prípadov) používame vtedy, ak výrok q je dôsledok rôznych prípadov p_1, \dots, p_n .

PRÍKLAD 1.13. Dokážte identitu

$$\max\{a, \min\{b, c\}\} = \min\{\max\{a, b\}, \max\{a, c\}\}$$

kde a, b a c sú rôzne čísla.

Dôkaz tejto identity vykonáme tak, že vykonáme verifikáciu identity pre všetkých 6 rôznych prípadov:

(1) Prípad $a < b < c$

$$\begin{aligned} \max\left\{a, \underbrace{\min\{b, c\}}_b\right\} &= \min\left\{\underbrace{\max\{a, b\}}_b, \underbrace{\max\{a, c\}}_c\right\} \\ \underbrace{\max\{a, b\}}_b &= \underbrace{\min\{b, c\}}_b \\ b &= b \end{aligned}$$

(2) Prípad $b < a < c$

$$\begin{aligned} \max\left\{a, \underbrace{\min\{b, c\}}_b\right\} &= \min\left\{\underbrace{\max\{a, b\}}_a, \underbrace{\max\{a, c\}}_c\right\} \\ \underbrace{\max\{a, b\}}_a &= \underbrace{\min\{a, c\}}_a \\ a &= a \end{aligned}$$

Podobným spôsobom preskúmame aj ostatné štyri možnosti vzájomného usporiadania čísel a, b a c . Týmto spôsobom sme dokázali 6 nezávislých implikácií

$$(a < b < c) \Rightarrow (\max\{a, \min\{b, c\}\} = b) \wedge (\min\{\max\{a, b\}, \max\{a, c\}\} = b)$$

$$(b < a < c) \Rightarrow (\max\{a, \min\{b, c\}\} = a) \wedge (\min\{\max\{a, b\}, \max\{a, c\}\} = a)$$

$$\dots\dots\dots (c < b < a) \Rightarrow (\max\{a, \min\{b, c\}\} = a) \wedge (\min\{\max\{a, b\}, \max\{a, c\}\} = a)$$

Týmto „enumeratívnym“ spôsobom sme dokázali danú algebraickú identitu tak, že sme separátne preskúmali všetky možné usporiadania čísel a, b a c .

PRÍKLAD 1.14. Dokážte identitu $|a - b| \leq |a| + |b|$, kde a, b sú ľubovoľné nenulové reálne čísla a $|\cdot|$ je absolútna hodnota.

- (1) $a < b < 0$, potom $a - b < 0$, $a < 0$ a $b < 0$, dokazovaná nerovnosť má tvar $-(a - b) \leq -a - b$, alebo $b \leq 0$, čo je pravdivý výrok.
- (2) $a < 0 < b$, potom $a - b < 0$, $a < 0$ a $b > 0$, dokazovaná nerovnosť má tvar $-(a - b) \leq -a + b$, čo je pravdivý výrok.
- (3) $0 < a < b$, potom $a - b < 0$, $a > 0$ a $b > 0$, dokazovaná nerovnosť má tvar $-(a - b) \leq a + b$, alebo $a \geq 0$, čo je pravdivý výrok.

Podobným spôsobom by sa dokázali aj ostatné tri možnosti ($b < a < 0$, $b < 0 < a$ a $0 < b < a$).

Nutnosť použitia metódy dôkazu vymenovaním všetkých prípadov sa môže stať v niektorých špeciálnych situáciách limitujúcim faktorom uskutočnenia dôkazu, keď počet možných prípadov je veľké číslo. Potom môžeme prenechať hlavnú ťarchu dôkazu počítaču, ktorý systematicky preverí všetky možné prípady. Podobná situácia sa vyskytla počiatkom 90. rokov minulého storočia, keď matematik Andrew Wiles po dlhoročnom úsilí dokázal Veľkú Fermatovu vetu⁵.

1.5 MATEMATICKÁ INDUKCIA

Stojíme pred problémom dokázať formulu $\forall n P(n)$, podľa ktorej vlastnosť $P(n)$ platí pre každé prirodzené číslo. Dôkaz tejto formuly je možné vykonať metódou matematickej indukcie, ktorá je založená na dvoch východiskových predpokladoch $P(1)$ a $\forall n (P(n) \Rightarrow P(n+1))$. Ukážeme, že z týchto dvoch predpokladov vyplýva formula $\forall n P(n)$.

1.	$P(1)$	
2.	$\forall n (P(n) \Rightarrow P(n+1))$	
3.	$P(1) \Rightarrow P(2)$	konkretizácia 2 pre $n = 1$
4.	$P(2) \Rightarrow P(3)$	konkretizácia 2 pre $n = 2$
.....		
5.	$P(n) \Rightarrow P(n+1)$	konkretizácia 2 pre $n = n$
.....		

⁵ Veľká Fermatova veta tvrdí, že rovnica $x^n + y^n = z^n$ nemá celočíselné riešenie pre x, y a z , pričom $xyz \neq 0$ a n je celé číslo, pričom $n > 2$. Wilesov článok, v ktorom podal dôkaz tejto vety, „Modular Elliptic Curves and Fermat's Last Theorem“ bol publikovaný v r. 1995 v časopise *Annals of Mathematics*. Článok je doprevádzaný vysoko technickou publikáciou jeho doktoranda Richarda Taylora, v ktorom boli enumeratívnym spôsobom preštudované na počítači vlastnosti špeciálnej Heckeho algebry, ktorej použitie hrá kľúčovú úlohu v celom dôkaze.

6.	$P(2)$	modus ponens na 1 a 3
7.	$P(3)$	modus ponens na 6 a 4
.....
8.	$P(n+1)$	modus ponens na predchádzajúci riadok a 5
.....
9.	$\forall n P(n)$	zovšeobecnenie pomocou \forall

Tento výsledok môže byť prezentovaný ako schéma usudzovania matematickej indukcie



$$\frac{\begin{array}{l} P(1) \\ \forall n (P(n) \Rightarrow P(n+1)) \end{array}}{\forall n P(n)} \quad (1.27)$$

PEANO

Metóda matematickej indukcie bola známa už počiatkom novoveku talianskemu matematikovi Francescovi Maurolicovi (1494 – 1575), ktorý ju používal na dôkaz niektorých vlastností celých čísel (napr. dokázal, že suma prvých n prirodzených nepárnych čísel sa rovná n^2). V modernej matematike a logike matematická indukcia bola využitá talianskym matematikom a logikom Giuseppom Peanom (1858 – 1932) pri formulácii jeho axiomatického systému aritmetiky celých čísel.

PRÍKLAD 1.15.

Dokážte, že suma prvých n nepárnych prirodzených čísel sa rovná n^2 .

Položíme

$$P(n): 1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = \sum_{i=1}^n (2i-1) = n^2$$

Lahko sa presvedčíme, že platí $P(1) = 1$. Budeme študovať $P(n+1)$

$$\begin{aligned} P(n+1): 1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) + (2(n+1)-1) &= \sum_{i=1}^{n+1} (2i-1) = \\ &= \sum_{i=1}^n (2i-1) + (2(n+1)-1) = n^2 + (2n+1) = (n+1)^2 \end{aligned}$$

Týmto sme dokázali, že platnosť formuly $P(n)$ implikuje formulu $P(n+1)$, pre každé prirodzené číslo n , potom použitím zovšeobecnenia pomocou univerzálneho kvantifikátora dostaneme $\forall n (P(n) \Rightarrow P(n+1))$. Použitím schémy matematickej indukcie dostaneme

$$\forall n P(n): 1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = \sum_{i=1}^n (2i-1) = n^2$$

čím sme zavšili dôkaz vety špecifikujúcej sumu prvých n nepárnych prirodzených čísel.

PRÍKLAD 1.16.

Dokážte, že pre každé prirodzené číslo n platí $n < 2^n$.

Nech $P(n)$ je predikát ' $n < 2^n$ ', potom $P(1)$ je pravdivý výrok. Budeme študovať $P(n+1)$

$$n + 1 < 2^n + 1 \leq 2^n + 2^n = 2^{n+1}$$

kde sme k obidvom stranám nerovnice indukčného predpokladu $n < 2^n$ pripočítali jednotku a taktiež sme použili jednoduchú vlastnosť $1 \leq 2^n$. Týmto sme dokázali, že pre každé prirodzené číslo n platí implikácia $P(n) \Rightarrow P(n+1)$, alebo inak vyjadrené $\forall n (P(n) \Rightarrow P(n+1))$, čo bolo potrebné dokázať.

SILNÁ
MATEMATICKÁ
INDUKCIA



Silná matematická indukcia je špeciálna forma „štandardnej“ matematickej indukcie, v ktorej je vlastnosť $P(n+1)$ implikovaná konjunkciou všetkých predchádzajúcich vlastností, $P(1) \wedge P(2) \wedge \dots \wedge P(n) \Rightarrow P(n+1)$. Predpokladajme, že táto vlastnosť je splnená pre každé $n \geq 1$, potom $\forall n (P(1) \wedge \dots \wedge P(n) \Rightarrow P(n+1))$. Zostrojme zovšeobecnenú schému usudzovania matematickej indukcie

$$\left| \begin{array}{l} P(1) \\ \forall n (P(1) \wedge P(2) \wedge \dots \wedge P(n) \Rightarrow P(n+1)) \\ \hline \forall n P(n) \end{array} \right.$$

Nebudeme dokazovať túto schému usudzovania, jej dôkaz je úplne analogický dôkazu schémy usudzovania matematickej indukcie (1.27).

PRÍKLAD 1.17.

Dokážte, že ľubovoľné prirodzené číslo $n > 1$ môže byť vyjadrené ako súčin prvočísel.

Nech vlastnosť $P(n)$ má tvar

$$P(n): \quad n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}, \quad p_k \leq n$$

kde p_1, p_2, p_3, \dots sú prvé prvočísla (2, 3, 5, ..., ktoré sú menšie ako n) a $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$ sú nezáporné celé čísla. Táto formula je pravdivá pre $P(2)$, kde $\alpha_1 = 1, k = 1$, potom $P(2): 2 = 2^1$. Predpokladajme, že $P(j)$ je pravdivé pre každé prirodzené $j \leq n$. Ukážeme, že z tohto predpokladu vyplýva platnosť $P(n+1)$. Bude rozlišovať dva prípady:

1. *prípado* – $n+1$ je prvočíslo p_k , potom $P(n+1): n+1 = p_1^0 p_2^0 \dots p_k^1$.

2. *prípado* – $n+1$ nie je prvočíslo, potom môže byť písané ako súčin dvoch prirodzených čísel $a \cdot b$, ktoré vyhovujú podmienke $2 \leq a \leq b < n+1$. Každé z týchto dvoch čísel môže byť vyjadrené ako súčin prvočísel (indukčný predpoklad)

$$a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}, \quad p_k \leq n+1$$

$$b = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \dots p_k^{\beta_k}, \quad p_k \leq n+1$$

potom ich súčin má tvar

$$P(n+1): \quad n+1 = a \cdot b = p_1^{\alpha_1 + \beta_1} p_2^{\alpha_2 + \beta_2} \dots p_k^{\alpha_k + \beta_k}, \quad p_k \leq n+1$$

ZHRNUTIE

DÔKAZ

Dôkaz (deduktívny) v matematike a v informatike je špecifický postup konštrukcie nových viet (tautológií – teorém) pomocou súboru vybraných viet (axióm) a pravidiel odvodzovania (napr. pravidla modus ponens) tak, že zostrojíme postupnosť tautológií, pričom posledná tautológia z tejto postupnosti je dokazovaná veta. Komplikované dôkazy sú obvykle jasnejšie formulované, keď ich dôkaz je rozdelený na jednotlivé medzikroky, ktoré sú formulované ako samostatné vety.

INDUKTÍVNE USUDZOVANIE

V matematike a v informatike sa v ojedinelých prípadoch používa aj *induktívne usudzovanie* (dôkaz), ktoré je založené na pozorovaní určitých skutočností, ktoré sa často opakujú v analogických situáciách. Tieto pozorované skutočnosti sú „induktívne“ zovšeobecnené. Nové pojmy, ktoré boli zavedené týmto „induktívnym“ spôsobom sa neskoršie buď dokážu deduktívne v rámci daného systému pojmov, alebo sa postulujú ako nové špeciálne axiómy. Tieto ojedinelé situácie v dejinách matematiky vždy znamenali vznik nových oblastí matematiky, ktoré nie sú striktné deduktívne dokázateľné zo známych pojmov.

PRAVIDLÁ USUDZOVANIA

Pravidlá usudzovania vo výrokovvej logike tvoria schému (pozri tabuľku 1.1)

$$\frac{\begin{array}{l} \text{predpoklad}_1 \\ \dots\dots\dots \\ \text{predpoklad}_n \end{array}}{\text{záver}}$$

ktorá obsahuje n predpokladov a jeden záver. Táto schéma usudzovania je totožná so symbolom *logického dôkazu*

$$\{\text{predpoklad}_1, \dots, \text{predpoklad}_n\} \vdash \text{záver}$$

alebo

$$\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\} \vdash \varphi$$

Použitie pravidiel usudzovania môže byť v niektorých prípadoch podstatne uľahčené aplikáciou vety o dedukcii. Množinu predpokladov $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ rozšírime o nový „pomocný“ predpoklad ψ , potom platí veta o dedukcii

$$(\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\} \cup \{\psi\} \vdash \varphi) \Rightarrow (\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\} \vdash (\psi \Rightarrow \varphi))$$

Dôkaz formuly φ pomocou rozšírenej množiny predpokladov $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\} \cup \{\psi\}$ je rovnocenný dôkazu formuly $\psi \Rightarrow \varphi$ pomocou pôvodnej množiny predpokladov.

METÓDY DÔKAZU VIET

Priamy dôkaz implikácia $p \Rightarrow q$ je uskutočnený tak, že ukážeme, že z predpokladu pravdivosti výroku p vyplýva taktiež aj pravdivosť výroku q .

Nepriamy dôkaz implikácie $p \Rightarrow q$ spočíva v tom, že dôkaz tejto implikácie je ekvivalentný dôkazu „inverznej“ implikácie $\neg q \Rightarrow \neg p$.

Dôkaz sporom je založený na schéme „reductio ad absurdum“ z tab. 1.1

$$\frac{\begin{array}{l} p \Rightarrow q \\ p \Rightarrow \neg q \end{array}}{\neg p}$$

Ak z predpokladu p súčasne odvodíme q a $\neg q$, potom musí byť pravdivá negácia $\neg p$ východzieho predpokladu, čo bolo potrebné dokázať.

Dôkaz vymenovaním prípadov implikácie $(p_1 \vee \dots \vee p_n) \Rightarrow q$ je založený na jej ekvivalentnom tvare

$$((p_1 \vee \dots \vee p_n) \Rightarrow q) \equiv ((p_1 \Rightarrow q) \wedge \dots \wedge (p_n \Rightarrow q))$$

To znamená, že dôkaz sa redukuje na dôkazy všetkých implikácií $p_i \Rightarrow q$, pre $i = 1, 2, \dots, n$. Tento spôsob dôkazu je veľmi častý v diskkrétnej matematike.

MATEMATICKÁ
INDUKCIA

Dôkaz vlastnosti $\forall n P(n)$, t. j. $P(n)$ platí pre každé prirodzené číslo, je možné vykonať metódou matematickej indukcie, ktorá je založená na dvoch východiskových predpokladoch $P(1)$ a $\forall n (P(n) \Rightarrow P(n+1))$, z ktorých vyplýva formula $\forall n P(n)$. Matematickú indukciu vyjadríme schémou usudzovania

$$\frac{\begin{array}{l} P(1) \\ \forall n (P(n) \Rightarrow P(n+1)) \end{array}}{\forall n P(n)}$$

KLÚČOVÉ POJMY

deduktívny dôkaz
matematická indukcia
veta
teoréma
axióma
lema
pravidlá odvodzovania
korektnosť
konzistentnosť
teória
deduktívny dôkaz
elementárny pojem
induktívne usudzovanie
axiomatický systém
interpretácia
model
schéma usudzovania
adícia
simplifikácia

inverzia implikácie
reductio ad absurdum
strom odvodzenia
veta o dedukcii
potvrdenie dôsledku
popretie predpokladu
predikátová logika
konkretizácia univerzálneho kvantifikátora
zovšeobecnenie pomocou univerzálneho kvantifikátora
konkretizácia existenčného kvantifikátora
zovšeobecnenie pomocou existenčného kvantifikátora
induktívne zovšeobecnie
falzifikácia
priamy dôkaz
nepriamy dôkaz

<i>konjunkcia</i>	<i>dôkaz sporom</i>
<i>modus ponens</i>	<i>dôkaz vymenovaním prípadov</i>
<i>modus tollens</i>	<i>F. Maurolico</i>
<i>hypotetický sylogizmus</i>	<i>G. Peano</i>
<i>disjunktívny sylogizmus</i>	<i>silná matematická indukcia</i>

CVIČENIA

1.1. Aké pravidlo usudzovania bolo použité pri dôkaze záverov?

- Mária je študentka informatiky. Preto je Mária študentka informatiky alebo študentka telekomunikácií.
- Jaroslav študuje informatiku a elektrotechnológiu. Preto, Jaroslav študuje informatiku.
- Ak prší, potom plaváreň je zatvorená. Preto, ak plaváreň je otvorená, potom neprší.
- Ak dnes sneží, kino je dnes uzavreté. Kino dnes nie je uzavreté. Preto, dnes nesneží.
- Ak dnes pôjdem plávať, potom ráno skoro vstanem. Ak ráno skoro vstanem, potom pôjdem do obchodu kúpiť čerstvé pečivo. Preto, ak dnes pôjdem plávať, potom pôjdem do obchodu kúpiť čerstvé pečivo.

1.2. Aké pravidlo usudzovania bolo použité pri dôkaze záverov?

- Dnes bude teplo alebo bude smog v ovzduší. Dnes nebude teplo. Preto, dnes bude smog v ovzduší.
- Eva vynikajúco pláva. Ak Eva je vynikajúci plavec, potom môže pracovať ako plavčík. Preto, Eva môže pracovať ako plavčík.
- Stano bude pracovať v počítačovej firme ABC. Ak Stano dokončí štúdium na FIIT, potom nebude pracovať v počítačovej firme ABC. Preto, Stano nedokončil štúdium na FIIT.
- Ak budem intenzívne pracovať na projekte, potom zvládnem teóriu logických obvodov. Ak zvládnem teóriu logických obvodov, potom úspešne dokončím bakalárske štúdium. Preto, ak budem intenzívne pracovať na projekte, potom úspešne dokončím bakalárske štúdium.

1.3. Aké závery vyplývajú z množiny výrokov?

- „Ak jem korenenú stravu, potom mám hrozné sny“, „ak spím a pritom hrmí, potom mám hrozné sny“, „nemám hrozné sny“.
- „Ja som chytrý alebo mám šťastie“, „nemám šťastie“, „ak mám šťastie, potom zvíťazím v lotérii“.
- „Každý študent informatiky vlastní notebook“, „Rudo nevládni notebook“, „Anna vlastní notebook“.
- „Ak mám hlad, potom si kúpim bagetu“, „ak si kúpim bagetu, potom si kúpim aj kofolu“, „ak nepôjdem do bufetu, nekúpim si kofolu“.

- (e) „Všetky hlodavce hryzú potravu“, „myš je hlodavec“, „pes nehryzie potravu“, „netopier nie je hlodavec“.

1.4. Vysvetlite, ktorá schéma usudzovania bola použitá v ktorom kroku.

- (a) „Eva je študentka nášho krúžku a vlastní červené auto“, „každý, kto vlastní červené auto dostal aspoň jednu pokutu za prekročenie rýchlosti“, „preto, niekto z nášho krúžku dostal pokutu za prekročenie rýchlosti“.
- (b) „Všetci moji priatelia Mária, Adolf, Rudolf, Viera a Karol si zapísali do indexu prednášku z diskkrétnej matematiky“, „každý študent, ktorý si zapísal do indexu prednášku z diskkrétnej matematiky, môže si nasledujúci akademický rok zapísať aj prednášku z algoritmov“, „preto, všetci moji priatelia Mária, Adolf, Rudolf, Viera a Karol môžu si nasledujúci akademický rok zapísať do indexu prednášku z algoritmov“.
- (c) „Všetky filmy s Charlie Chaplinom sú vynikajúce“, „Charlie Chaplin hral v nemých filmoch“, „preto, niektoré vynikajúce filmy sú nemé“.

1.5. Vysvetlite prečo uvedené závery sú korektné alebo nekorektné.

- (a) „Všetci študenti v tomto krúžku ovládajú logiku“, „Jano je študent tohto krúžku“, „preto, Jano ovláda logiku“.
- (b) „Každý študent informatiky má zapísanú v indexe prednášku z diskkrétnej matematiky“, „Viera má zapísanú prednášku z diskkrétnej matematiky“, „preto, Viera je študentom informatiky“.
- (c) „Každý kôň má rád ovocie“, „môj pes nie je kôň“, „preto, môj pes nemá rád ovocie“.
- (d) „Každý, kto má rád ovsené vločky je zdravý“, „Lenka nie je zdravá“, „preto, Lenka nemá rada ovsené vločky“.

1.6. Určite, ktorá veta je pravdivá. Ak je uvedený záver korektný, určite, ktorá schéma usudzovania bola použitá pri jeho dôkaze.

- (a) Ak x je reálne číslo také, že $x > 1$, potom $x^2 > 1$. Predpokladajte, že $x^2 > 1$, potom $x > 1$.
- (b) Číslo $\log_2 3$ je iracionálne vtedy, ak sa nedá vyjadriť ako podiel dvoch celých nesúdeliteľných čísel. Pretože číslo $\log_2 3$ nie je vyjadriteľné ako p/q , kde p a q sú celé nesúdeliteľné čísla, potom je číslo $\log_2 3$ iracionálne.
- (c) Ak x je reálne číslo, ktoré spĺňa podmienku $x > 3$, potom $x^2 > 9$. Nech $x^2 \leq 9$, potom $x \leq 3$.
- (d) Ak x je reálne číslo, ktoré spĺňa podmienku $x > 2$, potom $x^2 > 4$. Nech $x \leq 2$, potom $x^2 \leq 4$.

1.7. Určite, či uvedené výroky sú korektné, ak nie, prečo?

- (a) Ak x^2 je iracionálne, potom x je iracionálne. Preto, ak x je iracionálne, potom x^2 je iracionálne.

- (b) Ak x^2 je iracionálne, potom x je iracionálne. Číslo $x = \pi^2$ je iracionálne. Preto, číslo $x = \pi$ je iracionálne.

1.8. Prečo tieto výroky sú nekorektné?

- (a) Nech $H(x)$ je predikát s významom „ x je šťastný“. Nech platí $\exists x H(x)$. Preto, Eva je šťastná.
- (b) Nech $S(x, y)$ je predikát s významom „ x je menší ako y “. Platí implikácia $(\exists s S(s, Max)) \Rightarrow S(Max, Max)$, kde Max je maximálne číslo z konečnej viacprvkovej množiny obsahujúcej prirodzené čísla.

1.9. Dokážte, keď sa dajú dokázať, tieto výroky:

- (a) Dokážte výrok $P(0)$, kde $P(n)$ je výrok „ak n je kladné celé číslo väčšie ako 1, potom $n^2 > n$ “. Ktorú schému usudzovania sme použili?
- (b) Dokážte výrok $P(1)$, kde $P(n)$ je výrok „ak n je kladné celé číslo, potom $n^2 > n$ “. Ktorú schému usudzovania sme použili?
- (c) Nech $P(n)$ je výrok „ak a a b sú kladné reálne čísla, potom $(a + b)^n \geq a^n + b^n$ “. Dokážte, že $P(1)$ je pravdivý výrok.
- (d) Použitím priameho dôkazu dokážte, že kvadrát párneho čísla je párne číslo.
- (e) Použitím nepriameho dôkazu dokážte, že ak n je celé číslo a $n^3 + 5$ je nepárne číslo, potom n je párne číslo.
- (f) Dokážte, že suma dvoch nepárnych čísel je párne číslo.
- (g) Dokážte, že súčin dvoch nepárnych čísel je nepárne číslo.
- (h) Dokážte, že ak x je iracionálne nenulové číslo, potom $1/x$ je iracionálne číslo.

1.10. Dokážte metódou vymenovania prípadov tieto vlastnosti:

- (a) $\max\{x, y\} + \min\{x, y\} = x + y$, kde x, y sú reálne čísla.
- (b) $\min\{a, \min\{b, c\}\} = \min\{\min\{a, b\}, c\}$, kde a, b, c sú navzájom rôzne čísla.
- (c) Kvadráty celých čísel sú reprezentované dekadickými číslicami, ktoré končia 0, 1, 4, 5, 6, alebo 9.
- (d) Štvrté mocniny celých čísel sú reprezentované dekadickými číslami, ktoré končia 0, 1, 5, alebo 6.

1.11. Dokážte tieto vlastnosti:

- (a) Ak n je kladné celé číslo, potom n je párne vtedy a len vtedy, ak $7n + 4$ je párne.
- (b) Ak n je kladné celé číslo, potom n je nepárne vtedy a len vtedy, ak $5n + 6$ je nepárne.
- (c) $m^2 = n^2$ platí vtedy a len vtedy, ak $m = n$, alebo $m = -n$.

- (d) Dokážte, že tieto tri výroky sú ekvivalentné: (1) $a < b$, (2) priemer a a b je väčší ako a , $(a+b)/2 > a$, (3) priemer a a b je menší ako b , $(a+b)/2 < b$.

1.12. Pomocou matematickej indukcie dokážte:

- (a) Suma prvých n prirodzených čísel je

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

- (b) Dokážte formulu

$$3 + 3 \cdot 5 + 3 \cdot 5^2 + \dots + 3 \cdot 5^n = \frac{1}{4}(5^{n+1} - 1)$$

- (c) Dokážte formulu

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

- (d) Dokážte formulu

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$$

- (e) Dokážte formulu $n! < n^n$, pre $n > 1$.

- (f) Dokážte formulu pre prvú deriváciu funkcie $f(x) = x^n$, $f'(x) = nx^{n-1}$.

- (g) Dokážte zovšeobecnené distributívne formuly z výrokovej logiky

$$(1) (p_1 \vee p_2 \vee \dots \vee p_n) \wedge q \equiv (p_1 \wedge q) \vee (p_2 \wedge q) \vee \dots \vee (p_n \wedge q)$$

$$(2) (p_1 \wedge p_2 \wedge \dots \wedge p_n) \vee q \equiv (p_1 \vee q) \wedge (p_2 \vee q) \wedge \dots \wedge (p_n \vee q)$$

- (h) Dokážte zovšeobecnené De Morganove formuly

$$(1) \neg(p_1 \wedge p_2 \wedge \dots \wedge p_n) \equiv (\neg p_1 \vee \neg p_2 \vee \dots \vee \neg p_n)$$

$$(2) \neg(p_1 \vee p_2 \vee \dots \vee p_n) \equiv (\neg p_1 \wedge \neg p_2 \wedge \dots \wedge \neg p_n)$$

1.13. Pomocou rozkladu na parciálne zlomky nájdite formulu pre

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}$$

2 TEÓRIA MNOŽÍN I

MNOŽINA • OPERÁCIE NAD MNOŽINAMI •
MNOŽINOVÁ ALGEBRA • MOHUTNOSŤ A ENUMERÁCIA •
KARTEZIÁNSKY SÚČIN

V tejto kapitole budeme študovať klasickú teóriu množín, ktorá patrí medzi základné matematické formálne prostriedky. Umožňuje formulovať prehľadným a jednotným spôsobom všetky oblasti matematiky prostredníctvom elementárnej štruktúry množiny a operáciami nad ňou. Teória množín vznikla koncom 19. storočia hlavne zásluhou nemeckého matematika Georga Cantora (1845 – 1918). Zásluhu na jej rozšírení má anglický logik a filozof Bertrand Russell (1872 – 1970), ktorý objavil vnútorné nekonzistentnosti jej intuitívnej formulácie, ktoré boli neskôr prekonané jej dôslednou axiomatickou výstavbou. V tejto kapitole budeme prezentovať pôvodnú intuitívnu (neaxiomatickú) výstavbu teórie množín. Budeme sa zaoberať algebrou teórie množín, problémom enumerácie elementov v množinách a na záver budeme špecifikovať dôležité množinové štruktúry – binárne relácie nad množinami.

2.1 DEFINÍCIA MNOŽINY

CANTOR – VZNIK
RUSSELL –
AXIOMATICKÁ
VÝSTAVBA

Koncepcia množiny patrí medzi základné formálne prostriedky matematiky. Umožňuje formulovať prehľadným a jednotným spôsobom všetky oblasti matematiky prostredníctvom elementárnej štruktúry množiny a operáciami nad ňou. Teória množín vznikla koncom 19. storočia hlavne zásluhou nemeckého matematika Georga Cantora (1845 – 1918). Zásluhu na jej rozšírení má anglický logik a filozof Bertrand Russell (1872 – 1970), ktorý objavil vnútorné nekonzistentnosti jej intuitívnej formulácie, ktoré boli neskôr prekonané jej dôslednou axiomatickou výstavbou. V tejto kapitole budeme prezentovať pôvodnú intuitívnu (neaxiomatickú) výstavbu teórie množín.

PRVOK (ELEMENT)

Elementárnym pojmom teórie množín je *prvok (element)*, pod ktorým budeme rozumieť nejaký reálny alebo abstraktný objekt, pričom postulujeme, že objekty medzi sebou sú dobre odlišiteľné.

DEFINÍCIA 2.1.MNOŽINA 

Množina je neusporiadaný súbor prvkov.

ODLIŠITELNÉ
PRVKY

Ak sa nejaké dva prvky nachádzajú v tej istej množine, potom musia byť od seba odlišiteľné; v množine sa neopakuje výskyt dvoch rovnakých (neodlišiteľných) prvkov. V definícii množiny bol použitý elementárny pojem „súbor“, ktorý nebudeme bližšie špecifikovať. Pozorný čitateľ môže namietat', že pojem „súbor“ je vlastne len iný názov pre množinu. Táto skutočnosť naznačuje „osud“ všetkých definícií, pomocou ktorých špecifikujeme nové pojmy prostredníctvom iných elementárnych a intuitívne zrozumiteľných pojmov. Ak by sme pristúpili aj k špecifikácii elementárnych pojmov vyskytujúcich sa v definícii, potom by sme dospeli k nekonečnej rekurzii (opakovaniu) v definíciách, ktoré by takto stratili praktický význam a stali by sa bezcennými formálnymi prostriedkami.

 $a \in A$

Označme množinu písmenom A , potom skutočnosť, že prvok a *patrí* (*nepatrí*) do tejto množiny označíme výrazom $a \in A$ ($a \notin A$). Tento výraz chápeme ako výrok, ktorý je pravdivý (nepravdivý), ak prvok a patrí (nepatrí) do množiny A . Poznamenajme, že symbol \notin môžeme formálne definovať takto: $x \notin A =_{def} \neg(x \in A)$.

VYMENOVANIE A
PREDIKÁT

Množinu môžeme špecifikovať dvoma rôznymi spôsobmi: **Prvý** spôsob určenia množiny je založený na **vymenovaní** všetkých prvkov, ktoré do nej patria

$$A = \{a, b, \dots, u\} \quad (2.1a)$$

Tento spôsob je vhodný len na špecifikácie množín, ktoré obsahujú konečný počet prvkov. Ak by sme takýmto spôsobom chceli napríklad definovať množinu párnych prirodzených čísel, potom tento spôsob je nepoužiteľný, pretože párnych prirodzených čísel je nekonečne mnoho. **Druhý** spôsob špecifikácie množiny je založený na použití **predikátu** $P(x)$, ktorý určuje, či prvok $x \in U$ patrí do množiny A (predikát $P(x)$ je pravdivý) alebo nepatrí do množiny A (predikát $P(x)$ je nepravdivý)

$$A = \{x \in U; P(x)\} \quad (2.1b)$$

Tak napríklad, množina obsahujúca párne nezáporné celé čísla je definovaná takto

$$A = \{n \in U; P(n)\}$$

kde n sú nezáporné celé čísla z univerza $U = \{0, 1, 2, \dots\}$ a predikát $P(n)$ je špecifikovaný rovnosťou $P(n) =_{def} \exists k (n = 2k)$, kde k je nezáporné celé číslo, alebo

$$P(n) = \begin{cases} \text{pravda, } 1 & (n \text{ je párne číslo}) \\ \text{nepravda, } 0 & (n \text{ je nepárne číslo}) \end{cases}$$

Uvedený druhý spôsob špecifikácie množiny môže byť jednoducho pretransformovaný na koncepciu **charakteristických funkcií**. V tomto prístupe predikát $P(x)$ z (2.1b) je určený takto

CHARAKTERIS-
TICKÁ FUNKCIA

$$P(x) \stackrel{\text{def}}{=} (\mu_A(x) = 1) \quad (2.2)$$

kde

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1 & (x \in A) \\ 0 & (x \notin A) \end{cases} \quad (2.3)$$

UNIVERZUM U

Pristúpme teraz k podrobnejšej diskusii špecifikácie množiny pomocou charakteristickej funkcie. Uvažujme **univerzum** U , nad ktorým sú definované všetky ostatné množiny.

DEFINÍCIA 2.2.MNOŽINA
POMOCOU
CHARAKTERIS-
TICKEJ FUNKCIE

Každá množina A je pomocou charakteristickej funkcie vyjadrená takto

$$A = \{x \in U ; \mu_A(x) = 1\} \quad (2.4)$$

kde **charakteristická funkcia** $\mu_A(x)$ je zobrazenie

$$\mu_A : U \rightarrow \{0,1\} \quad (2.5)$$

ktoré binárne ohodnocuje každý prvok x univerza U binárnym číslom $\mu_A(x) \in \{0,1\}$, ktoré vyhovuje vlastnosti (2.3).

PRÁZDNA
MNOŽINA \emptyset
UNIVERZÁLNA
MNOŽINA U

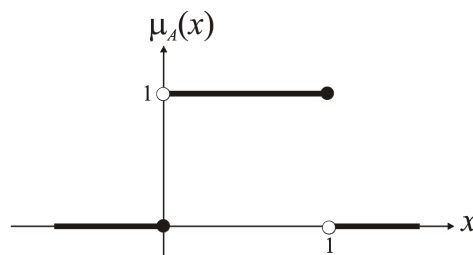
Pomocou charakteristickej funkcie môžeme definovať aj dve špeciálne množiny: **prázdnu množinu** \emptyset , ktorá nemá žiaden prvok, $\emptyset = \{x ; \mu_\emptyset(x) = 0\}$ a **univerzálnu množinu** U , $U = \{x ; \mu_U(x) = 1\}$, ktorá je totožná s univerzom.

PRÍKLAD 2.1.

Vyjadrite množinu – polootvorený interval $A = (0,1]$ pomocou charakteristickej funkcie. V tomto prípade univerzum U je totožné s množinou reálnych čísel R . Charakteristická funkcia $\mu_A(x)$ je definovaná takto

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1 & (\text{pre } 0 < x \leq 1) \\ 0 & (\text{ináč}) \end{cases}$$

Grafické znázornenie tejto charakteristickej funkcie je na obr. 2.1.

OBRÁZOK 2.1.
CHARAKTERIS-
TICKÁ FUNKCIA

Charakteristická funkcia množiny A , ktorá je určená ako polootvorený interval $A = (0,1]$.

Pomocou charakteristických funkcií môžeme definovať operácie nad množinami:

DEFINÍCIA 2.3.
 $A = B$

Hovoríme, že množina $A = \{x ; \mu_A(x) = 1\}$ sa **rovná** množine $B = \{x ; \mu_B(x) = 1\}$, $A = B$, vtedy a len vtedy, ak tieto množiny sú definované

nad rovnakým univerzom U a charakteristické funkcie oboch množín sú rovnaké

$$(A = B) =_{def} \forall (x \in U) (\mu_A(x) = \mu_B(x)) \quad (2.6a)$$

Alternatívna definícia vzťahu rovnosti medzi množinami A a B je

$$(A = B) =_{def} \forall (x \in U) ((x \in A) \equiv (x \in B)) \\ =_{def} \forall (x \in U) ((x \in A \Rightarrow x \in B) \wedge (x \in B \Rightarrow x \in A)) \quad (2.6b)$$

DEFINÍCIA 2.4.

 $A \subseteq B$

Hovoríme, že množina $A = \{x; \mu_A(x) = 1\}$ je podmnožinou množiny $B = \{x; \mu_B(x) = 1\}$, čo píšeme $A \subseteq B$, vtedy a len vtedy, ak každý prvok z množiny A patrí aj do množiny B

$$A \subseteq B =_{def} \forall (x \in U) ((\mu_A(x) = 1) \Rightarrow (\mu_B(x) = 1)) \quad (2.7a)$$


VLASTNÁ
PODMNOŽINA
 $A \subset B$

Alternatívna definícia podmnožiny je

$$A \subseteq B =_{def} \forall (x \in U) ((x \in A) \Rightarrow (x \in B)) \quad (2.7b)$$

V prípade, že $A \neq B$, potom formula $A \subseteq B$ sa prepíše do tvaru $A \subset B$. Hovoríme, že A je **vlastnou podmnožinou** B , ak $A \subset B$ a $A \neq \emptyset$. Rovnosť medzi množinami $A = B$ platí vtedy a len vtedy, ak $(A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A)$.

DEFINÍCIA 2.5.

 $A \cup B$


Hovoríme, že množina $A \cup B$ je **zjednotenie množín** A a B , vtedy a len vtedy, ak

$$A \cup B =_{def} \{x; (x \in A) \vee (x \in B)\} = \{x; \mu_{A \cup B}(x) = 1\} \quad (2.8a)$$

kde

$$\mu_{A \cup B}(x) = \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\} \quad (2.8b)$$

DEFINÍCIA 2.6.

 $A \cap B$

Hovoríme, že množina $A \cap B$ je **prienik množín** A a B , vtedy a len vtedy, ak

$$A \cap B =_{def} \{x; (x \in A) \wedge (x \in B)\} = \{x; \mu_{A \cap B}(x) = 1\} \quad (2.9a)$$

kde

$$\mu_{A \cap B}(x) = \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\} \quad (2.9b)$$

DEFINÍCIA 2.7.

 \bar{A}

Hovoríme, že množina \bar{A} je **doplnok (komplement)** množiny A (vzhľadom k univerzu U), vtedy a len vtedy, ak

$$\bar{A} =_{def} \{x; x \notin A\} = \{x; \mu_{\bar{A}}(x) = 1\} \quad (2.10a)$$

kde

$$\mu_{\bar{A}}(x) = 1 - \mu_A(x) \quad (2.10b)$$

Poznamenajme, že platí jednoduchá ekvivalencia $(x \notin A) \equiv (x \in \bar{A})$, t. j. prvok x nie je z množiny A práve vtedy a len vtedy, ak patrí do komplementu \bar{A} .

DEFINÍCIA 2.8.

Hovoríme, že množina $A - B$ (alebo $A \setminus B$) je **rozdiel množín (relatívny doplnok množín)** A a B , vtedy a len vtedy, ak

$$A - B =_{def} \{x; (x \in A) \wedge (x \notin B)\} = \{x; \mu_{A-B}(x) = 1\} \quad (2.11a)$$

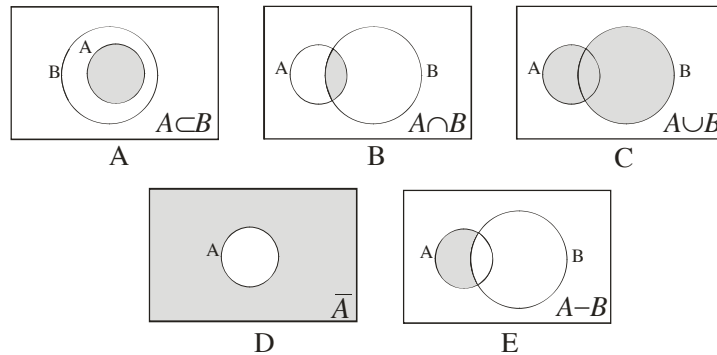
☞ $A \setminus B$

kde

$$\mu_{A-B}(x) = \min\{\mu_A(x), 1 - \mu_B(x)\} \quad (2.11b)$$

Takto definované operácie nad množinou U sú znázornené pomocou Vennových¹ diagramov (pozri obr. 2.2), ktoré reprezentujú rozšírený spôsob vizualizácie množinových operácií a ich formúl.

OBRÁZOK 2.2.
OPERÁCIE NAD
MNOŽINAMI
POMOCOU
VENNOVÝCH
DIAGRAMOV



Znázornenie základných operácií nad množinami pomocou Vennových diagramov. Na týchto diagramoch obdĺniková oblasť znázorňuje univerzum U , kde množiny A a B sú podmnožiny univerza. Diagram A znázorňuje reláciu „podmnožina“ $A \subset B$, keď množina – oblasť A celá leží v množine – oblasti B . Diagram B znázorňuje operáciu „prienik“ $A \cap B$, kde vyšrafovaná oblasť reprezentuje prienik množín A a B . Porovnaním diagramov A a B zistíme, že ak $A \subset B$, potom $A \cap B = A$. Diagram C znázorňuje operáciu zjednotenia množín A a B , vyšrafovaná je oblasť, ktorá sa nachádza v množine A alebo v množine B . Diagram D znázorňuje operáciu doplnok množiny A vzhľadom k univerzu U . Diagram E znázorňuje rozdiel množín A a B , vyšrafovaná je oblasť, ktorá sa nachádza v A a súčasne sa nenachádza v B .

Tab. 2.1 obsahuje základné formuly pre množinové operácie, ktoré tvoria tzv. **algebru teórie množín**. Každá formula z tejto tabuľky má pomerne jednoduchú vizualizáciu pomocou Vennových diagramov, ktoré v mnohých textoch o teórii množín slúžia aj ako podklad pre dôkaz ich korektnosti, pozri obr. 2.3.

☞

Tabuľka 2.1. Formuly teórie množín

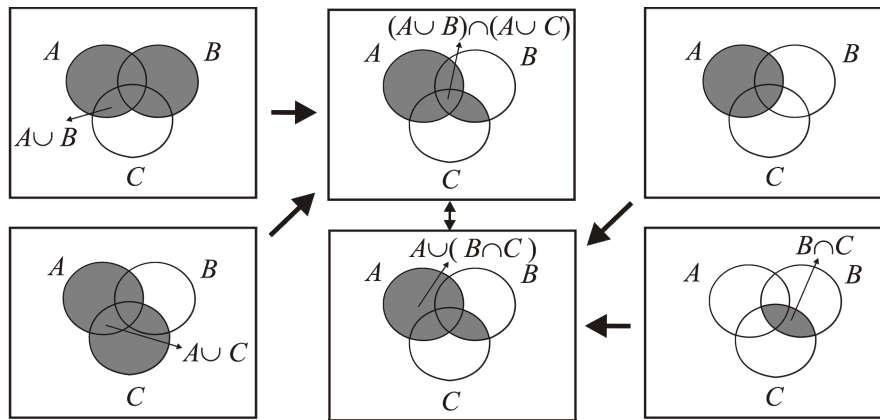
vlastnosť	formula teórie množín
komutatívnosť	$A \cap B = B \cap A$ $A \cup B = B \cup A$
asociatívnosť	$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
distributívnosť	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

¹ John Venn (1834–1923) je anglický matematik, ktorý sa zaslúžil o ďalší rozvoj Boolových algebraických snáh formalizovať výrokovú logiku.

De Morganove vzťahy	$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
idempotentnosť	$A \cap A = A, A \cup A = A$
identita	$A \cap U = A, A \cup \emptyset = A$
dominancia	$A \cap \emptyset = \emptyset, A \cup U = U$
absorpcia	$A \cup (A \cap B) = A, A \cap (A \cup B) = A$
involúcia	$\overline{\overline{A}} = A$
zákon vylúčenia tretieho	$A \cup \overline{A} = U$
zákon sporu	$A \cap \overline{A} = \emptyset$
rozdiel množín	$A - B = A \cap \overline{B}$
distributívne zákony pre rozdiel	$A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$ $A \cup (B - C) = (A \cup B) - (A \cap C)$

OBRÁZOK 2.3.
VERIFIKÁCIA
KOREKTNOSTI
FORMULY

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$



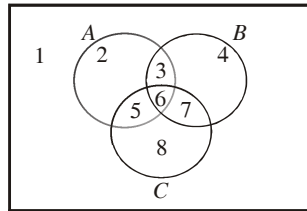
Verifikácia korektnosti formuly $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Prostredný Vennov diagram je zostrojený dvoma rôznymi nezávislými spôsobmi, v oboch prípadoch dostávame ten istý výsledok.

Na obr. 2.3 je znázornená pomocou Vennových diagramov verifikácia formuly $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Ľavá a pravá strana tejto formuly reprezentujú rôzne prístupy ku konštrukcii Vennovho diagramu, v oboch prípadoch dostávame ten istý výsledok, čiže verifikovaná formula je korektná. Tento postup môžeme „algebraizovať“ podobným štýlom, ako sa počítajú pravdivostné hodnoty formúl výrokovej logiky. Na obr. 2.4 je označených 8 oblastí univerza U , ktoré buď ležia alebo neležia v množinách A, B a C . Tak napr. oblasť 5 je taká, že existuje prvok, ktorý sa súčasne nachádza v množinách A a C , a nenachádza sa v množine B . Formula je korektná vtedy a len vtedy, ak pre každú oblasť obe strany formuly dávajú rovnaký výsledok, pozri tab. 2.2. V tejto tabuľke je každý riadok priradený jednej z ôsmich oblastí na obr. 2.4. Binárne hodnoty v jednotlivých riadkoch reprezentujú skutočnosť, či pre danú oblasť existuje

PRINCÍP
KOMPOZICIONA-
LITY

taký prvok, ktorý je v oblasti špecifikujúcej daný stĺpec. Tak napríklad, ôsmy stĺpec v tabuľke 2.2 obsahuje binárne hodnoty, ktoré špecifikujú, či $A \cup B$ a $A \cup C$ obsahujú spoločný prvok. Pri vytváraní tabuľky platí *princíp kompozicionality*, t. j. ohodnotenie zložitejších výrazov je vytvárané pomocou ich jednoduchších zložiek.

OBRÁZOK 2.4.
OBLASTI V
MNOŽINE UNIVERZA



Vyznačenie jednotlivých oblastí v množine univerza U . Oblasť 1 obsahuje prvky, ktoré nie sú obsiahnuté v množinách A , B a C . Oblasť 2 obsahuje prvky, ktoré sú obsiahnuté v množine A , ale nie sú obsiahnuté v množinách B a C . Podobným spôsobom môžu byť charakterizované ostatné oblasti 3, 4, ..., 8.

TABUĽKOVÁ
METÓDA PRE
VERIFIKÁCIU

Tabuľka 2.2. Tabuľková metóda pre verifikáciu formúl teórie množín

oblasť	A	B	C	$A \cup B$	$A \cup C$	$B \cap C$	$(A \cup B) \cap (A \cup C)$	$A \cup (B \cap C)$
1	0	0	0	0	0	0	0	0
2	1	0	0	1	1	0	1	1
3	1	1	0	1	1	0	1	1
4	0	1	0	1	0	0	0	0
5	1	0	1	1	1	0	1	1
6	1	1	1	1	1	1	1	1
7	0	1	1	1	1	1	1	1

PRÍKLAD 2.2.

Pomocou tabuľkovej metódy verifikujte korektnosť De Morganových formúl $\overline{(A \cup B)} = \bar{A} \cap \bar{B}$ a $\overline{(A \cap B)} = \bar{A} \cup \bar{B}$.

A	B	$A \cup B$	\bar{A}	\bar{B}	$A \cap B$	$\overline{A \cup B}$	$\bar{A} \cap \bar{B}$	$\overline{A \cap B}$	$\bar{A} \cup \bar{B}$
0	0	0	1	1	0	1	1	1	1
0	1	1	1	0	0	0	0	1	1
1	0	1	0	1	0	0	0	1	1

PRÍKLAD 2.3.

Dokážte De Morganovu formulu $\overline{(A \cup B)} = \bar{A} \cap \bar{B}$

$$\mu_{\overline{A \cup B}}(x) = 1 - \mu_{A \cup B}(x) = 1 - \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\} \quad (2.12a)$$

$$\mu_{\bar{A} \cap \bar{B}}(x) = \min\{1 - \mu_A(x), 1 - \mu_B(x)\} \quad (2.12b)$$

Použitím algebraickej identity²

² Ktorá sa jednoducho dokáže použitím metódy vymenovania prípadov z kapitoly 1.4.

$$1 - \max\{a, b\} = \min\{1 - a, 1 - b\}$$

dokážeme, že formuly (2.12a-b) sú totožné pre ľubovoľné charakteristické funkcie, čiže platí

$$\forall (x \in U) (\mu_{\overline{A \cup B}}(x) = \mu_{\overline{A} \cap \overline{B}}(x)) \quad (2.13)$$

Použitím podmienky (2.6a) dostaneme, že množiny $\overline{(A \cup B)}$ a $\overline{A} \cap \overline{B}$ sa navzájom rovnajú.

PRÍKLAD 2.4.

Dokážte distributívnu formulu $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

$$\begin{aligned} \mu_{A \cup (B \cap C)}(x) &= \max\{\mu_A(x), \mu_{B \cap C}(x)\} = \max\{\mu_A(x), \min\{\mu_B(x), \mu_C(x)\}\} \\ \mu_{(A \cup B) \cap (A \cup C)} &= \min\{\mu_{A \cup B}(x), \mu_{A \cup C}(x)\} \\ &= \min\{\max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}, \max\{\mu_A(x), \mu_C(x)\}\} \end{aligned}$$

Použitím algebraickej identity (pozri príklad 1.13)

$$\max\{a, \min\{b, c\}\} = \min\{\max\{a, b\}, \max\{a, c\}\}$$

dostaneme, že vyššie uvedené charakteristické funkcie sa rovnajú

$$\forall (x \in U) (\mu_{A \cup (B \cap C)}(x) = \mu_{(A \cup B) \cap (A \cup C)})$$

čiže sa rovnajú aj množiny, ktoré určujú, $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

PRÍKLAD 2.5.

Dokážte distributívne zákony pre rozdiel množín.

K dôkazu použijeme formulu z Tabuľky 2.1 pre rozdiel množín, $A - B = A \cap \overline{B}$. Pristúpime k dôkazu prvej formuly $A \cap (B - C) = (A \cap B) - (\overline{A} \cup C)$, upravíme jej ľavú a pravú stranu

$$A \cap (B - C) = A \cap (B \cap \overline{C}) = A \cap B \cap \overline{C}$$

$$(A \cap B) - (\overline{A} \cup C) = (A \cap B) \cap \overline{(\overline{A} \cup C)} = (A \cap B) \cap (A \cap \overline{C}) = A \cap B \cap \overline{C}$$

Týmto sme dokázali, že ľavá a pravá strana sú si rovné, čiže platí prvý distributívny zákon pre rozdiel množín. Úplne analogickým spôsobom dokážeme aj platnosť druhej formuly $A \cup (B - C) = (A \cup B) - (\overline{A} \cap C)$, pomocou vzťahu

$A - B = A \cap \overline{B}$ upravíme ľavú a pravú stranu

$$A \cup (B - C) = A \cup (B \cap \overline{C}) = (A \cup B) \cap (A \cup \overline{C})$$

$$(A \cup B) - (\overline{A} \cap C) = (A \cup B) \cap \overline{(\overline{A} \cap C)} = (A \cup B) \cap (A \cup \overline{C})$$

Podobne ako aj v predchádzajúcom dôkaze, ľavá a pravá strana sú si rovné, čiže platí aj druhý distributívny zákon pre rozdiel množín.

MOHUTNOSŤ
(KARDINALITA) $|A|$

Ak množina A je **konečná** (obsahuje konečný počet prvkov), potom jej **mohutnosť** (**kardinalita**), označená $|A|$, je počet prvkov, ktoré obsahuje. V prípade, že množina A nie je konečná, potom jej mohutnosť je nekonečná, $|A| = \infty$.

PRÍKLAD 2.6.

Aká je mohutnosť množín?

(a) $A = \{x; x \text{ je celé číslo ohraničené } 1/8 < x < 17/2\}$, $|A| = 8$,

(b) $A = \{x; \sqrt{x} \text{ je celé číslo}\} = \{0, 1, 4, 9, 16, \dots\}$, $|A| = \infty$,

(c) $A = \{x; x^2 = 1 \text{ alebo } 2x^2 = 1\} = \{1, -1, 1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}\}$, $|A| = 4$,

(d) $A = \{a, \{a, b\}, \{a, b, c\}\}$, $|A| = 3$,

(e) $A = \{a, \{a\}, \{\{a\}\}\}$, $|A| = 3$.

(f) $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $B = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, $|A - B| = 4$.

2.2 ENUMERÁCIA PRVKOV V KONEČNÝCH MNOŽINÁCH


V rôznych aplikáciách teórie množín vystupuje do popredia problém enumerácie prvkov danej konečnej množiny, čiže aká je mohutnosť danej množiny. Poznamenajme, že v tejto kapitole sa budeme zaoberať len konečnými množinami. Nech A a B sú disjunktné množiny (ich prienik je prázdna množina, $A \cap B = \emptyset$), potom mohutnosť ich zjednotenia je určená súčtom mohutností jednotlivých množín

$$|A \cup B| = |A| + |B| \quad (2.14a)$$

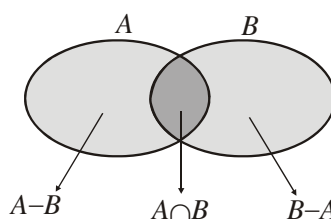
Tento výsledok môže byť jednoducho zovšeobecnený pomocou matematickej indukcie na mohutnosť zjednotenia n vzájomne disjunktných množín

$$|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| = |A_1| + |A_2| + \dots + |A_n| \quad (2.14b)$$

Zovšeobecnenie formuly (2.14a) pre množiny, ktoré majú neprázdny prienik (ne-disjunktné množiny) je špecifikované vetou

VETA 2.1. Mohutnosť množiny $A \cup B$ je určená formulou

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| \quad (2.15)$$

OBRÁZOK 2.5.
ROZKLAD MNOŽÍN

Rozklad množín A a B na tri disjunktné podmnožiny: $A - B$, $B - A$ a $A \cap B$

ROZKLAD MNOŽÍN

Formulu (2.15) ľahko dokážeme pomocou rozkladu množín A a B na disjunktné podmnožiny, pozri obr. 2.5, potom použitím (2.14) dostaneme

$$|A \cup B| = |A - B| + |B - A| + |A \cap B|$$

Mohutnosť samotných množín A a B je určená takto

$$|A| = |A - B| + |A \cap B|$$

$$|B| = |B - A| + |A \cap B|$$

Kombináciou týchto troch formúl dostaneme vzťah (2.15).

Podobne ako pre (2.14a), formula (2.15) môže byť zovšeobecnená pre mohutnosť zjednotenia 3 množín

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C| \quad (2.16)$$

Formulu (2.15) ľahko zovšeobecníme indukciou na

$$|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| = \sum_{i=1}^n |A_i| - \sum_{\substack{i,j=1 \\ (i < j)}}^n |A_i \cap A_j| + \sum_{\substack{i,j,k=1 \\ (i < j < k)}}^n |A_i \cap A_j \cap A_k| + \dots \\ + (-1)^{n+1} |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n| \quad (2.17)$$



PRÍKLAD 2.7.

Každý zo 100 študentov Fakulty informatiky UGBM študuje aspoň jeden z týchto odborov: matematika, informatika a ekonómia. Nech U je množina všetkých študentov FI UGBM, M je množina študentov matematiky, I je množina študentov informatiky a E je množina študentov ekonómie. Počty študentov sú určené tabuľkou:

Študenti	symbol	počet
Všetci	$ U $	100
matematika	$ M $	65
informatika	$ I $	45
ekonómia	$ E $	42
matematika a informatika	$ M \cap I $	20
matematika a ekonómia	$ M \cap E $	25
informatika a ekonómia	$ I \cap E $	15

(i) Prvou úlohou je zistiť, koľko študentov súčasne študuje tri odbory, $|M \cap I \cap E| = ?$

Použitím formuly (2.16) dostaneme

$$|U| = |M \cup I \cup E| = |M| + |I| + |E| - |M \cap I| - |M \cap E| - |I \cap E| + |M \cap I \cap E|$$

Táto formula nám špecifikuje počet študentov, ktorí súčasne študujú matematiku, informatiku a ekonómiu

$$100 = 65 + 45 + 42 - 20 - 25 - 15 + |M \cap I \cap E|$$

potom $|M \cap I \cap E| = 8$.

(ii) Druhou úlohou je zistiť, koľko študentov študuje matematiku a informatiku, ale nie ekonómiu, $|M \cap I \cap \bar{E}| = ?$ Mohutnosť množiny $M \cap I$ môžeme vyjadriť takto

$$|M \cap I| = |M \cap I \cap E| + |M \cap I \cap \bar{E}| \Rightarrow |M \cap I \cap \bar{E}| = -|M \cap I \cap E| + |M \cap I|$$

Použitím predchádzajúcich výsledkov dostaneme

$$|M \cap I \cap \bar{E}| = -|M \cap I \cap E| + |M \cap I| = 20 - 8 = 12.$$

(iii) Poslednou, treťou úlohou je zistiť, koľko študentov študuje len informatiku, ale nie matematiku a ekonómiu, $|\bar{M} \cap I \cap \bar{E}| = ?$ Kardinalitu množiny I rozložíme na štyri časti

$$\begin{aligned} |I| &= |I \cap (M \cup \bar{M}) \cap (E \cup \bar{E})| = \\ &= |I \cap M \cap E| + |I \cap M \cap \bar{E}| + |I \cap \bar{M} \cap E| + |I \cap \bar{M} \cap \bar{E}| \end{aligned}$$

Platia tieto identity

$$\begin{aligned} |I \cap \bar{M} \cap E| &= |I \cap E| - |I \cap M \cap E| \\ |I \cap M \cap \bar{E}| &= |I \cap M| - |I \cap M \cap E| \end{aligned}$$

Dosadením týchto výsledkov do predošlého vzťahu dostaneme

$$|I| = -|I \cap M \cap E| + |I \cap E| + |I \cap M| + |I \cap \bar{M} \cap \bar{E}|$$

alebo

$$|I \cap \bar{M} \cap \bar{E}| = |I| + |I \cap M \cap E| - |I \cap E| - |I \cap M| = 45 + 8 - 15 - 20 = 18.$$

RUSSELL:

$$\begin{aligned} M &= \{A; A \notin A\} \\ M &\in M? \end{aligned}$$

AXIOMATIZÁCIA
„RODINA MNOŽÍN“

Pojem množina môže byť zovšeobecnený tak, že prvky množiny môžu byť taktiež množiny (pozri príklad 2.6, zadanie d, e). Ak pristúpime na túto terminológiu, potom je korektný výrok „množina všetkých možných množín, ktoré neobsahujú samy seba ako prvky“. Označme túto množinu M , potom obsahuje také množiny A pre ktoré platí $A \notin A$, formálne $M = \{A; A \notin A\}$. Russell bol prvý, ktorý počiatkom 20. storočia poukázal na skutočnosť, že takto formulované výroky sú vnútorne rozporné. Položme si otázku, či táto množina obsahuje samu seba, $M \in M$? Nech platí $M \in M$, potom podľa definície musí platiť $M \notin M$. Nech platí $M \notin M$, potom však z definície vyplýva taktiež $M \in M$. Tieto dva závery (implikácie) môžeme spojiť do jednej ekvivalencie, $(M \in M) \equiv (M \notin M)$, čo je evidentná kontradikcia. Russell navrhol prekonať túto vnútornú kontradikčnosť intuitívnej teórie množín tak, že pojem množina sa môže používať len na „prvej“ úrovni, t. j. keď prvkami tejto množiny sú prvky, ktoré nemajú svoju štruktúru. Na druhej úrovni používal termín „rodina množín“, jej prvky sú množiny z prvej úrovne. Na ďalšej tretej úrovni môžeme hovoriť o triede množín, jej prvky sú rodiny množín z predchádzajúcej druhej úrovne. Týmto spôsobom výrok „množina, ktorá obsahuje všetky možné množiny“ je nekorektný, jeho správna forma je „rodina všetkých možných množín“, potom už máme (hlavne zásluhou vhodnej terminológie) odstránený zmienený paradox, ktorý svojho času zohral fundamentálnu úlohu v teórii množín. Iný spôsob prekonania paradoxov Russellovho typu je dôsledná axiomatizácia teórie množín.

Nech $I = \{1, 2, \dots, n\}$ je množina indexov, ktorá obsahuje prvých n kladných celých čísel. Predpokladajme, že pre každý index $i \in I$ má definovanú množinu A_i ,

potom rodina množín je definovaná takto

$$\mathcal{A} = \{A_i; i \in I\} = \{A_1, A_2, \dots, A_n\} \quad (2.18)$$

Pre rodinu množín \mathcal{A} môžeme definovať operáciu prieniku a zjednotenia jej množín

$$\bigcap_{i \in I} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n = \{x; x \in A_i, \text{ pre každé } i \in I\} \quad (2.19a)$$

$$\bigcup_{i \in I} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \{x; x \in A_i, \text{ pre nejaké } i \in I\} \quad (2.19b)$$

PRÍKLAD 2.8.

Nech $I = R$, t. j. množina indexov je totožná s množinou reálnych čísel a nech

$$A_k = \{(x, kx); x \in R\}$$

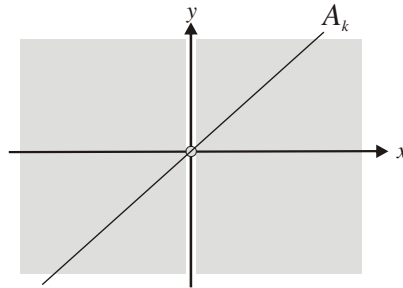
kde $k \in R$. Geometrická interpretácia množiny A_k je priamka so smernicou k , ktorá prechádza stredom súradnicového systému, pozri obr. 2.6. To znamená, že prienik množín A_k je jednoprvková množina, ktorá obsahuje stred súradnicového systému

$$\bigcap_{k \in R} A_k = \{(0, 0)\}$$

Zjednotenie týchto množín nám dáva celú rovinu bez osi o_y , doplnenú o stred súradnicového systému (pozri obr. 2.6)

$$\bigcup_{k \in R} A_k = \{(x, y); x, y \in R \text{ a } x \neq 0\} \cup \{(0, 0)\}$$

OBRÁZOK 2.6.
GEOMETRICKÁ
INTERPRETÁCIA
MNOŽINY



Vytieňovaná oblasť znázorňuje zjednotenie všetkých množín A_k , ktoré reprezentuje celú rovinu, z ktorej je odstránená os o_y , plus počiatok súradnicového systému $(0, 0)$. Množina A_k je reprezentovaná priamkou $y=kx$.

DEFINÍCIA 2.9.
POTENČNÁ
MNOŽINA

Množina $\mathcal{P}(A)$ sa nazýva potenčná množina vzhľadom k množine (alebo jednoducho, množiny) A vtedy a len vtedy, ak obsahuje všetky možné podmnožiny množiny A

$$\mathcal{P}(A) = \{B; B \subseteq A\} \quad (2.20)$$

Potenčná množina obsahuje prázdnu množinu \emptyset a taktiež aj množinu A , pretože obe tieto množiny sú podmnožinou množiny A . Vlastnosti potenčnej množiny sú určené vetou

VETA 2.2.

Potenčná množina $\mathcal{P}(A)$ spĺňa tieto vlastnosti

$$(A \subseteq B) \equiv (\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)) \quad (2.21a)$$

$$\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B) \quad (2.21b)$$

$$\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cap B) \quad (2.21c)$$

Dokážeme ekvivalenciu (2.21a), musíme dokázať dve nezávisle implikácie $(A \subseteq B) \Rightarrow (\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B))$ a $(\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)) \Rightarrow (A \subseteq B)$.

(1) Predpokladajme, že $A \subseteq B$, nech $X \in \mathcal{P}(A)$, potom $X \subseteq A$. Pretože predpokladáme platnosť $A \subseteq B$, potom musí platiť aj $X \subseteq B$, teda aj $X \in \mathcal{P}(B)$. Týmto sme dokázali, že z predpokladu $A \subseteq B$ je odvoditeľná implikácia $(X \in \mathcal{P}(A)) \Rightarrow (X \in \mathcal{P}(B))$, z čoho priamo plynie $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$.

(2) Predpokladajme, že $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$, pretože $A \in \mathcal{P}(A)$, potom z predpokladu vyplýva, že musí platiť aj $A \in \mathcal{P}(B)$, čo je možné len vtedy, ak $A \subseteq B$.

Dôkaz vzťahu (2.21b) bude spočívať v dôkaze implikácie $X \in (\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)) \Rightarrow X \in \mathcal{P}(A \cup B)$. Predpokladajme $X \in \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$, potom

$$\begin{aligned} (X \in \mathcal{P}(A)) \vee (X \in \mathcal{P}(B)) &\Rightarrow (X \subseteq A) \vee (X \subseteq B) \Rightarrow \\ X \subseteq (A \cup B) &\Rightarrow X \in \mathcal{P}(A \cup B) \end{aligned}$$

Týmto sme dokázali $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B)$.

Dôkaz formuly (2.21c) je podobný poslednému dôkazu (v tomto prípade ide o množinovú rovnosť, t. j. musíme dokázať dve implikácie $p \Rightarrow q$ a $q \Rightarrow p$).

PRÍKLAD 2.9.

Niekoľko ilustračných príkladov potenčných množín:

(a) $A = \emptyset$, $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset\}$,

(b) $A = \{a\}$, $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{a\}\}$,

(c) $A = \{a, b\}$, $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$,

(d) $A = \{a, b, c\}$, $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}\}$.

PRÍKLAD 2.10.

Pri práci s potenčnými množinami musíme veľmi starostlivo rozlišovať medzi symbolmi \in a \subseteq . Ak $a \in A$, potom $\{a\} \subseteq A$ alebo $\{a\} \in \mathcal{P}(A)$. Študujme množinu $A = \{1, 2, \{1\}\}$, potom $1 \in A$ a $\{1\} \in A$, preto $\{1\} \in \mathcal{P}(A)$ a taktiež aj $\{\{1\}\} \in \mathcal{P}(A)$. Potenčná množina $\mathcal{P}(A)$ je

$$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{\{1\}\}, \{1, 2\}, \{1, \{1\}\}, \{2, \{1\}\}, \{1, 2, \{1\}\}\}$$


Pripomíname, že prvky 1, $\{1\}$ a $\{\{1\}\}$ sú rôzne. Prvý prvok z tejto trojice je číslo, druhý prvok je množina s jedným prvkom – číslom a tretí prvok je množina s jedným prvkom – množinou, ktorá obsahuje číslo 1.

Zostrojme postupnosť

$$1, \{1\}, \{\{1\}\}, \{\{\{1\}\}\}, \dots$$

každý prvok (s výnimkou prvého prvku) tejto postupnosti je množina, ktorá obsahuje predchádzajúci prvok. Táto vlastnosť rekurentnosti môže byť použitá na definíciu n -tého člena postupnosti

$$X_1 = 1 \quad \text{a} \quad X_{n+1} = \{X_n\}, \quad \text{pre } n = 1, 2, 3, \dots$$

VETA 2.3. 

Mohutnosť potenčnej množiny $\mathcal{P}(A)$ konečnej množiny A je určená jednoduchým vzťahom

$$|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|} \quad (2.22)$$

Tento výsledok pre mohutnosť potenčnej množiny sa ľahko dokáže pomocou nasledujúcej úvahy: Nech konečná množina A obsahuje n prvkov, $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, každá podmnožina $A' \subseteq A$ môže byť charakterizovaná pomocou charakteristickej funkcie – binárneho vektora dĺžky n . Ak v i -tej polohe tohto vektora je 1 (0), potom $a_i \in A'$ ($a_i \notin A'$). To znamená, že každá podmnožina z potenčnej množiny $\mathcal{P}(A)$ je jednoznačne špecifikovaná binárnym vektorom dĺžky n . Pretože v každej polohe binárneho vektora sú prípustné len dve hodnoty (1 a 0), potom celkový počet rôznych binárnych vektorov dĺžky n je 2^n , toto číslo špecifikuje aj mohutnosť potenčnej množiny, $|\mathcal{P}(A)| = 2^n$, kde $|A| = n$. Tento jednoduchý výsledok viedol niektorých autorov k tomu, že potenčnú množinu označili symbolom 2^A , jej mohutnosť sa rovná $2^{|A|}$.

2.3 KARTEZIÁNSKY SÚČIN MNOŽÍN

USPORIADANÉ
DVOJICE PRVKOV

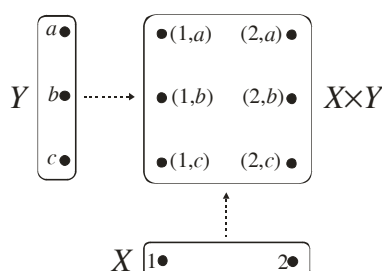
V mnohých matematických disciplínach alebo v ich aplikáciách vystupujú usporiadané dvojice prvkov. Tak napríklad, komplexné číslo môže byť charakterizované ako usporiadaná dvojica reálnych čísel $z = (x, y)$, kde x (y) je reálna (komplexná) časť. Základná relácia pre usporiadané dvojice je rovnosť: $(x, y) = (x', y')$, ktorá platí vtedy a len vtedy, ak sú si rovné ich prvé a druhé časti, $x = x'$ a $y = y'$. Táto podmienka rovnosti platí aj pre komplexné čísla, ktoré sú si rovné vtedy a len vtedy, ak sa rovnajú ich reálne a imaginárne časti. Ďalším ilustračným príkladom použitia usporiadanej dvojice v matematike je špecifikácia bodu ležiaceho v rovine, ktorý je taktiež plne určený usporiadanou dvojicou (x, y) svojich súradníc. Dva body (dve usporiadané dvojice) $A = (x, y)$ a $B = (x', y')$ sú rovné vtedy a len vtedy, ak sú rovné ich súradnice, $x = x'$ a $y = y'$.

DEFINÍCIA 2.10.

Množina $X \times Y$ sa nazýva **karteziánsky súčin**³ dvoch množín X a Y vtedy a len vtedy, ak

$$X \times Y = \{(x, y); x \in X \text{ a } y \in Y\} \quad (2.23)$$

OBRÁZOK 2.7.
KARTEZIÁNSKY
SÚČIN POMOCOU
VENNOVÝCH
DIAGRAMOV



Znázornenie karteziánskeho súčinu pomocou Vennových diagramov.

V prípade, že $X = Y$, potom $X \times X = X^2$. Poznamenajme, že ak aspoň jedna z množín X alebo Y je prázdna množina, potom aj karteziánsky súčin $X \times Y$ je prázdny. Ak množiny X a Y sú obe neprázdne, potom $X \times Y = Y \times X$ vtedy a len vtedy, ak $X = Y$ (táto vlastnosť je priamym dôsledkom podmienky rovnosti, $(x, y) = (x', y')$, medzi dvoma usporiadanými dvojicami).

PRÍKLAD 2.11.

Nech $X = \{1, 2\}$ a $Y = \{a, b, c\}$, potom

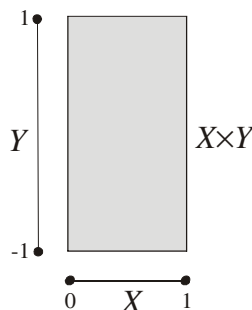
$$X \times Y = \{(1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c)\}$$

reprezentácia tohto súčinu pomocou Vennovho diagramu je znázornená na obr. 2.7.

PRÍKLAD 2.12.

Nech $X = [0, 1]$ a $Y = [-1, 1]$ sú uzavreté intervaly reálnych čísel, karteziánsky súčin týchto dvoch intervalov môže byť znázornený pomocou obdĺžnika na obr. 2.8.

OBRÁZOK 2.8.
KARTEZIÁNSKY
SÚČIN DVOCH
ÚSEČIEK

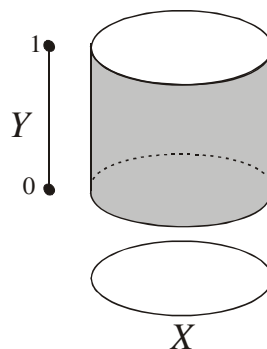


Znázornenie karteziánskeho súčinu dvoch úsečiek X a Y , výsledná oblasť je obdĺžnik.

³ Pomenovanie je po francúzskom matematikovi a filozofovi René Descartesovi (1596 – 1650), ktorý sa pokladá za zakladateľa analytickej geometrie. Je tvorcom koncepcie ortogonálneho súradnicového systému, v ktorom je bod charakterizovaný usporiadanou dvojicou súradníc – reálnych čísel. Táto „matematizácia“ geometrie sa pokladá za jeden z najväčších úspechov matematiky 17. storočia, ktorý umožnil, okrem iného aj Leibnizovi zaviesť pojem derivácie funkcie ako smernicu dotyčnice ku grafu funkcie.

PRÍKLAD 2.13. Nech $X = \{(x, y); x^2 + y^2 = 1\}$ je kružnica o polomere 1 so stredom v centre súradnicového systému a $Y = [0, 1]$ je jednotková úsečka, karteziánsky súčin týchto dvoch oblastí produkuje povrch plášťa valca dĺžky 1 a s polomerom 1, pozri obr. 2.9.


OBRÁZOK 2.9.
KARTEZIÁNSKY
SÚČIN KRUŽNICE A
ÚSEČKY



Znázornenie karteziánskeho súčinu kružnice X a úsečky Y , výsledná oblasť je valcová plocha.

KARTEZIÁNSKY
SÚČIN PRE N -TICU

Koncepcia usporiadanej dvojice môže byť zovšeobecnená na usporiadanú n -ticu, pomocou karteziánskeho súčinu n množín. Hovoríme, že dve n -tice (x_1, x_2, \dots, x_n) a $(x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$ sa rovnajú vtedy a len vtedy, ak sú rovné ich zložky, $x_1 = x'_1$, $x_2 = x'_2$, ..., $x_n = x'_n$.

DEFINÍCIA 2.11.
KART. SÚČIN N
MNOŽÍN 

Množina $X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$ sa nazýva karteziánsky súčin n množín X_1, X_2, \dots, X_n vtedy a len vtedy, ak

$$X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n); x_1 \in X_1, x_2 \in X_2, \dots, x_n \in X_n\} \quad (2.24a)$$

Karteziánsky súčin môžeme taktiež vyjadriť symbolicky takto

$$X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n = \prod_{i=1}^n X_i \quad (2.24b)$$

Ak všetky množiny z karteziánskeho súčinu sa rovnajú množine X , potom výraz $X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$ je zjednodušený na X^n .


PRÍKLAD 2.14. Nech $A = \{1, 2\}$, $B = \{a, b\}$ a $C = \{\alpha, \beta\}$, potom karteziánsky súčin týchto množín má tvar

$$A \times B \times C = \{(1, a, \alpha), (1, a, \beta), (1, b, \alpha), (1, b, \beta), (2, a, \alpha), (2, a, \beta), (2, b, \alpha), (2, b, \beta)\}$$

PRÍKLAD 2.15. Nech $X_1 = X_2 = \dots = X_n = R$, kde R je množina reálnych čísel. Potom R^n je množina obsahujúca všetky n -tice reálnych čísel

$$R^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n); x_1, x_2, \dots, x_n \in R\}$$

a môže byť interpretovaná ako **n -rozmerný lineárny priestor**.

VETA 2.4. 


Mohutnosť karteziánskeho súčinu $X \times Y$ dvoch konečných množín X a Y s mohutnosťami $|X| = m$ a $|Y| = n$, sa rovná súčinu mohutností jeho zložiek

$$|X \times Y| = |X| \cdot |Y| = m \cdot n \quad (2.25a)$$

Tento výsledok môže byť jednoducho zovšeobecnený indukciou na n -násobný karteziánsky súčin konečných množín

$$|X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n| = |X_1| \cdot |X_2| \cdot \dots \cdot |X_n| = m_1 \cdot m_2 \cdot \dots \cdot m_n \quad (2.25b)$$

kde m_i je mohutnosť množiny X_i .

VETA 2.5. 

Karteziánsky súčin množiny A s prienikom alebo zjednotením dvoch množín X a Y vyhovuje podmienkam distributívnosti

$$A \times (X \cap Y) = (A \times X) \cap (A \times Y) \quad (2.26a)$$

$$(X \cap Y) \times A = (X \times A) \cap (Y \times A) \quad (2.26b)$$

$$A \times (X \cup Y) = (A \times X) \cup (A \times Y) \quad (2.26c)$$

$$(X \cup Y) \times A = (X \times A) \cup (Y \times A) \quad (2.26d)$$


Dokážeme prvú rovnosť (2.26a), ostatné sa môžu dokázať analogickým spôsobom. Nech $(a, x) \in A \times (X \cap Y)$, potom $a \in A$ a $x \in (X \cap Y)$. Z posledného výrazu vyplýva, že x sa súčasne vyskytuje v X a taktiež aj v Y . Potom $(a, x) \in A \times X$ a taktiež aj $(a, x) \in A \times Y$, čiže $(a, x) \in (A \times X) \cap (A \times Y)$, čím sme dokázali $A \times (X \cap Y) \subseteq (A \times X) \cap (A \times Y)$. Predpokladajme, že $(a, x) \in (A \times X) \cap (A \times Y)$, potom $(a, x) \in (A \times X)$ a $(a, x) \in (A \times Y)$. Tieto dva vzťahy môžeme prepísať takto: $a \in A$ a $x \in X \cap Y$, alebo $(a, x) \in A \times (X \cap Y)$, čím sme dokázali $(A \times X) \cap (A \times Y) \subseteq A \times (X \cap Y)$. Spojením týchto dvoch relácií inklúzie dostaneme dokazovanú rovnosť $A \times (X \cap Y) = (A \times X) \cap (A \times Y)$, čo bolo potrebné dokázať.

PRÍKLAD 2.16.

Nech $A = \{a, b, c\}$, $X = \{x, y, z\}$ a $Y = \{y, z, t\}$.

$$\begin{aligned} A \times (X \cap Y) &= \{a, b, c\} \times (\{x, y, z\} \cap \{y, z, t\}) = \{a, b, c\} \times \{y, z\} \\ &= \{(a, y), (b, y), (c, y), (a, z), (b, z), (c, z)\} \\ (A \times X) \cap (A \times Y) &= (\{a, b, c\} \times \{x, y, z\}) \cap (\{a, b, c\} \times \{y, z, t\}) \\ &= \{(a, x), (a, y), (a, z), (b, x), (b, y), (b, z), (c, x), (c, y), (c, z)\} \cap \\ &\quad \{(a, y), (a, z), (a, t), (b, y), (b, z), (b, t), (c, y), (c, z), (c, t)\} \\ &= \{(a, y), (b, y), (c, y), (a, z), (b, z), (c, z)\} \end{aligned}$$

Ak porovnáme pravé strany oboch výrazov, dostaneme, že ľavé strany sú si rovné, t. j. platí (2.26a). Podobným spôsobom môžeme verifikovať formuly (2.26b-d).

VETA 2.6. 

Pre ľubovoľné tri množiny A, B a X platí implikácia

$$(A \subseteq B) \Rightarrow ((A \times X) \subseteq (B \times X)) \quad (2.27a)$$

Ak X je neprázdna množina, potom

$$((A \times X) \subseteq (B \times X)) \Rightarrow (A \subseteq B) \quad (2.27b)$$

Dôkaz tejto vety je pomerne jednoduchý, a preto ho prenecháme pozornému čitateľovi.

2.4 MNOŽINA AKO DÁTOVÁ ŠTRUKTÚRA V INFORMATIKE

ALGORITMY TEÓRIE GRAFOV

V mnohých aplikáciách množinová dátová štruktúra podstatne uľahčuje implementáciu algoritmov, ktoré sú založené na formalizme teórie množín. Ako príklad takýchto algoritmov môže slúžiť teória grafov, ktorej jednoduchá a súčasne aj elegantná teória je založená na množinách. Mnohé algoritmy teórie grafov (napr. problém obchodného cestujúceho) patrí medzi základné algoritmy, preto je dôležité, hlavne z pedagogických dôvodov, mať možnosť využívať dátovú štruktúru množiny pre zjednodušenie a sprehládnenie týchto algoritmov.

CHARAKTERIS- TICKÁ BINÁRNA FUNKCIA

Základný prístup k implementácii dátovej štruktúry množiny je jej charakteristická binárna funkcia, ktorá môže byť reprezentovaná binárnym vektorom. Maximálna dĺžka tohto vektora (napr. $2^8 = 256$) špecifikuje maximálnu mohutnosť implementovanej množiny. Pre jednoduchosť uvažujme binárne vektory dĺžky $2^3 = 8$, ktoré určujú množiny v rámci univerzálnej množiny $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. Tak napr. binárny vektor (11001100) špecifikuje množinu $A = \{1, 2, 5, 6\}$. Ak binárny vektor obsahuje len nuly, potom množina $A = \emptyset$; v opačnom prípade, ak binárny vektor obsahuje len jednotky, potom $A = U$. Pomocou binárnych vektorov môžeme pomerne jednoducho vykonávať algebraické operácie nad množinami.

OPERÁCIA ZJEDNOTENIA

(1) **Operácia zjednotenia** množín A a B , $C = A \cup B$, ktoré sú reprezentované binárnymi vektormi

$$\mu_A = (a_1, a_2, \dots, a_n)$$

$$\mu_B = (b_1, b_2, \dots, b_n)$$

je realizovaná pomocou binárnej operácie 'disjunkcie'

$$\mu_{A \cup B} = (c_1, c_2, \dots, c_n) = (a_1, a_2, \dots, a_n) \vee (b_1, b_2, \dots, b_n)$$

kde

$$c_i = \max\{a_i, b_i\}$$

OPERÁCIA PRIENIKU

(2) **Operácia prieniku** množín A a B , $C = A \cap B$, je realizovaná pomocou binárnej operácie 'konjunkcie'

$$\mu_{A \cap B} = (c_1, c_2, \dots, c_n) = (a_1, a_2, \dots, a_n) \wedge (b_1, b_2, \dots, b_n)$$

kde

$$c_i = \min\{a_i, b_i\}$$

OPERÁCIA
KOMPLEMENTU

(3) **Operácia komplementu** množiny A , $C = \bar{A}$, je realizovaná pomocou unárnej operácie 'komplementu'

$$\mu_{\bar{A}} = (c_1, c_2, \dots, c_n) = (1 - a_1, 1 - a_2, \dots, 1 - a_n)$$

PRÍKLAD 2.17.

Definujme dva binárne vektory dĺžky 8 (t. j. univerzum $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$) $\mu_A = (11001111)$ a $\mu_B = (00011001)$, ktoré reprezentujú množiny $A = \{1, 2, 5, 6, 7, 8\}$ a $B = \{4, 5, 8\}$. Nad množinami A a B vykonáme základné operácie pomocou binárnych operácií nad vektormi. Zjednotenie $A \cup B$ je určené pomocou binárnej operácie 'disjunkcie'

$$(11001111) \vee (00011001) = (11011111)$$

Výsledný vektor špecifikuje množinu $C = \{1, 2, 4, 5, 6, 7, 8\}$. Podobným spôsobom môžeme vykonať aj operáciu prieniku $A \cap B$ pomocou operácie 'konjunkcie' pre binárne vektory

$$(11001111) \wedge (00011001) = (00001001)$$

Výsledný vektor špecifikuje množinu $C = \{5, 8\}$. Komplementy \bar{A} a \bar{B} sú zostrojené pomocou operácie „negácie“ binárnych vektorov

$$\mu_{\bar{A}} = \neg(11001111) = (00110000)$$

$$\mu_{\bar{B}} = \neg(00011001) = (11100110)$$

Výsledné vektory reprezentujú množiny $C = \bar{A} = \{3, 4\}$ a $C = \bar{B} = \{1, 2, 3, 6, 7\}$.

ZHRNUTIE

MNOŽINA

Koncepcia množiny je najrozšírenejšia elementárna štruktúra matematiky. V intuitívnom prístupe je definovaná ako súbor prvkov, ktoré sú navzájom odlíšiteľné. Symbol $x \in A$ čítame tak, že prvok a patrí do množiny A . Množina je špecifikovaná dvoma rôznymi spôsobmi: (1) vymenovaním všetkých jej prvkov a (2) pomocou charakteristickej funkcie. Nad množinami môžeme definovať reláciu rovnosti ($A = B$) a inklúzie ($A \subseteq B$) a operácie prieniku ($A \cap B$), zjednotenia ($A \cup B$), rozdielu ($A - B$) a komplementu \bar{A} . Tieto operácie sú vizualizované pomocou Vennových diagramov. Symbol $|A|$ vyjadruje kardinalitu množiny A , t. j. počet jej prvkov.

ENUMERÁCIA
PRVKOV
V MNOŽINÁCH

Enumerácia prvkov v množinách je založená na formule, ktorá špecifikuje kardinalitu prieniku množín

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

Túto formulu možno jednoducho zovšeobecniť indukciou pre prienik troch alebo

viac množín. Kardinalita zjednotenia dvoch množín množiny $|A \cup B|$ sa interpretuje ako počet prvkov, ktoré buď patria do množiny A alebo patria do množiny B (t. j. majú buď vlastnosť A alebo vlastnosť B). Podobným spôsobom interpretujeme aj kardinalitu prieniku množín $|A \cap B|$, ako počet prvkov, ktoré súčasne patria do množiny A a množiny B (t. j. majú vlastnosť A a vlastnosť B).

POTENČNÁ MNOŽINA

Pre danú množinu A potenčná množina $\mathcal{P}(A)$ obsahuje ako prvky všetky možné podmnožiny množiny A . Kardinalita potenčnej množiny je určená jednoduchou formulou $|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$.

KARTEZIÁNSKY SÚČIN MNOŽÍN

Pre dve množiny X a Y karteziánsky súčin $X \times Y$ je množina, ktorá obsahuje všetky možné usporiadané dvojice (x, y) , pre $x \in X$ a $y \in Y$. Význam karteziánskeho súčinu spočíva v tom, že pomocou vhodných množín A_1, A_2, \dots, A_n môžeme vytvárať súčiny $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$, ktoré majú názornú geometrickú interpretáciu pomocou rôznych telies. Tak napríklad nech A je úsečka a B je kružnica, potom $A \times B$ je plášť valca (pozri obr. 2.9).

KLÚČOVÉ POJMY

množina
operácie nad množinami
množinová algebra
mohutnosť (kardinalita)
enumerácia
karteziánsky súčin
Georg Cantor
Bertrand Russell
axiomatická výstavba
prvok (element)
odlišiteľné prvky
vymenovanie prvkov
predikát
charakteristická funkcia
univerzum U
prázdna množina \emptyset
rovnosť množín

podmnožina
vlastná podmnožina $A \subset B$
zjednotenie množín
prienik množín
doplnok (komplement) množiny
rozdiel množín (relatívny doplnok)
Vennove diagramy
algebra teórie množín
princíp kompozicionality
oblasti v množine univerza
tabuľková metóda pre verifikáciu
rodina množín
axiomatizácia
geometrická interpretácia množiny
potenčná množina
René Descartes

CVIČENIA

2.1. Ktoré prvky patria do množiny:

- (a) $\{x; (x \in \mathbb{R}) \wedge (x^2 = 1)\}$, (kde \mathbb{R} je množina reálnych čísel)
- (b) $\{x; (x \in \mathbb{R}) \wedge (x^2 - 3x + 2 = 0)\}$,
- (c) $\{x; (x \in \mathbb{N}) \wedge (x < 12)\}$, (kde \mathbb{N} je množina nezáporných celých čísel)
- (d) $\{x; (x \in \mathbb{N}) \wedge (x^2 < 100)\}$,
- (e) $\{x; (x \in \mathbb{N}) \wedge (x^2 = 2)\}$.

2.2. Vyjadrite tieto množiny pomocou predikátu (pozri (2.1b)):

- (a) $A = \{0, 3, 6, 9, 12\}$,
- (b) $A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$,
- (c) $A = \{m, n, o, p\}$.

2.3. Zistite, či množiny z každej dvojice sú navzájom rovné:

- (a) $A = \{1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$,
- (b) $A = \{\{1\}\}$, $B = \{1, \{1\}\}$,
- (c) $A = \emptyset$, $B = \{\emptyset\}$.

2.4. Nech $A = \{2, 4, 6\}$, $B = \{2, 6\}$, $C = \{4, 6\}$, $D = \{4, 6, 8\}$. Zistite, ktoré množiny sú podmnožiny ktorých množín.

2.5. Pre každú množinu A určite, či platí $2 \in A$:

- (a) $A = \{x \in \mathbb{R}; x < 2\}$,
- (b) $A = \{x \in \mathbb{R}; \exists (n \in \mathbb{N})(x = n^2)\}$,
- (c) $A = \{2, \{2\}\}$,
- (d) $A = \{\{2\}, \{\{2\}\}\}$,
- (e) $A = \{\{2\}, \{2, \{2\}\}\}$.

2.6. Pre každý príklad z cvičenia 2.5 rozhodnite, či prvok $\{2\}$ je prvkom množiny A .

2.7. Rozhodnite, či výroky sú pravdivé alebo nepravdivé:

- (a) $0 \in \emptyset$,
- (b) $\emptyset \in \{0\}$,
- (c) $\{0\} \subset \emptyset$,

- (d) $\emptyset \subset \{0\}$,
- (e) $\{0\} \in \{0\}$,
- (f) $\{0\} \subset \{0\}$,
- (g) $\{0\} \subseteq \{0\}$.

2.8. Rozhodnite, či výroky sú pravdivé alebo nepravdivé:

- (a) $\emptyset \in \{\emptyset\}$,
- (b) $\emptyset \in \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$,
- (c) $\{\emptyset\} \in \{\emptyset\}$,
- (d) $\{\emptyset\} \in \{\{\emptyset\}\}$,
- (e) $\{\emptyset\} \subset \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$,
- (f) $\{\{\emptyset\}\} \subset \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$.

2.9. Nech $A \subseteq B$ a $B \subseteq C$, dokážte $A \subseteq C$.

2.10. Nájdite také dve množiny A a B , aby platilo

- (a) $A \in B$,
- (b) $A \subseteq B$.

2.11. Aká je mohutnosť týchto množín:

- (a) $\{a\}$,
- (b) $\{\{a\}\}$,
- (c) $\{a, \{a\}\}$,
- (d) $\{a, \{a\}, \{a, \{a\}\}\}$.

2.12. Aká je mohutnosť týchto množín:

- (a) \emptyset ,
- (b) $\{\emptyset\}$,
- (c) $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$,
- (d) $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$.

2.13. Zostrojte potenčnú množinu $\mathcal{P}(A)$ pre

- (a) $A = \{a\}$,
- (b) $A = \{a, b\}$,
- (c) $A = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$.

2.14. Dokážte alebo vyvráťte implikáciu $(\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(B)) \Rightarrow (A = B)$.

2.15. Určite, ktorá z množín je potenčná množina

- (a) \emptyset ,
- (b) $\{\emptyset, \{a\}\}$,
- (c) $\{\emptyset, \{a\}, \{\emptyset, a\}\}$,
- (d) $\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$.

2.16. Nech $A = \{a, b, c\}$, $B = \{x, y\}$, zostrojte

- (a) $A \times B$,
- (b) $B \times A$.

2.17. Aký význam má karteziánsky súčin $A \times B$, kde A je množina prednášok, ktoré poskytuje Ústav aplikovanej informatiky a B je množina pedagógov Fakulty informatiky?

2.18. Aký je význam karteziánskeho súčinu $A \times B \times C$, kde A je množina všetkých leteckých spoločností, B a C sú množiny letísk na svete.

2.19. Nech A je množina študentov FIIT, ktorí sú z Bratislavy a B je množina študentov FIIT, ktorí jazdia na fakultu autom. Opíšte študentov, ktorí patria do množiny

- (a) $A \cap B$,
- (b) $A \cup B$,
- (c) $A - B$,
- (d) $B - A$.

2.20. Nech A je množina prvákov na našej fakulte a B je množina študentov navštevujúcich diskretnú matematiku. Vyjadrite pomocou množín A a B tvrdenia:

- (a) Množina prvákov, ktorí navštevujú prednášku z diskretnéj matematiky.
- (b) Množina prvákov, ktorí nenavštevujú prednášku z diskretnéj matematiky.
- (c) Množina študentov, ktorí sú prváci alebo navštevujú prednášku z diskretnéj matematiky.
- (d) Množina študentov, ktorí nie sú prváci alebo nenavštevujú prednášku z diskretnéj matematiky.

2.21. Nech A a B sú množiny, dokážte

- (a) $(A \cap B) \subseteq A$,
- (b) $(A \cap B) \subseteq B$,
- (c) $A \subseteq (A \cup B)$,
- (d) $B \subseteq (A \cup B)$,
- (e) $A - B \subseteq A$,
- (f) $A \cap (B - A) = \emptyset$.

2.22. Nech A , B a C sú množiny, dokážte $(A - B) - C = (A - C) - (B - C)$.

2.23. Čo môžeme povedať o množinách A a B , ak platí

- (a) $A \cup B = A$,
- (b) $A \cap B = A$,
- (c) $A - B = A$,
- (d) $A \cap B = B \cap A$,
- (e) $A - B = B - A$.

2.24. Nech A , B a C sú množiny, zistite, či sú pravdivé implikácie:

- (a) $(A \cup C = B \cup C) \Rightarrow (A = B)$,
- (b) $(A \cap C = B \cap C) \Rightarrow (A = B)$.

2.25. Nech A a B sú množiny, dokážte vlastnosť $(A \subseteq B) \Rightarrow (\bar{B} \subseteq \bar{A})$.

2.26. Nech $A_i = \{1, 2, \dots, i\}$, pre $i=1, 2, \dots, n$. Nájdite

- (a) $A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n$,
- (b) $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$.

2.27. Nech A_i je množina binárnych reťazcov, ktorých dĺžka nie je väčšia ako i , pre $i=1, 2, \dots, n$. Nájdite

- (a) $A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n$,
- (b) $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$.

2.28. Dokážte pomocou matematickej indukcie vzťahy

$$(a) \overline{\bigcup_{i=1}^n A_i} = \bigcap_{i=1}^n \bar{A}_i$$

$$(b) \overline{\bigcap_{i=1}^n A_i} = \bigcup_{i=1}^n \bar{A}_i$$

3 TEÓRIA MNOŽÍN II

RELÁCIE • OPERÁCIE NAD RELÁCIAMI • EKVIVALENCIA •
USPORIADANOSŤ • FUNKCIE

Táto kapitola je pokračovaním predchádzajúcej kapitoly, budeme študovať rôzne operácie nad binárnymi reláciami, pojem rovnosti a usporiadanosti nad množinou. Na záver kapitoly budeme študovať pojem funkcie (zobrazenia), ktorý patrí medzi fundamentálne matematické štruktúry a tvorí základ mnohých matematických disciplín.

3.1 RELÁCIE

DEFINÍCIA 3.1. BINÁRNA RELÁCIA



Nech X a Y sú dve množiny, množina R sa nazýva **binárna relácia** z množiny X do množiny Y vtedy a len vtedy, ak je podmnožinou karteziánskeho súčinu množín X a Y

$$R \subseteq X \times Y \quad (3.1)$$

Relácia R môže byť alternatívne zadaná pomocou charakteristickej funkcie

$$R = \{(x, y); \mu_R(x, y) = 1\} \quad (3.2)$$

kde $\mu_R(x, y)$ je charakteristická funkcia špecifikujúca množinu R .

Na obr. 3.1 je znázornená relácia $R \subseteq X \times Y$, kde $X = \{a, b, c, d\}$ a $Y = \{1, 2, 3, 4\}$, táto relácia obsahuje 6 usporiadaných dvojíc z karteziánskeho súčinu $X \times Y$, ktorý obsahuje $4 \times 4 = 16$ prvkov.

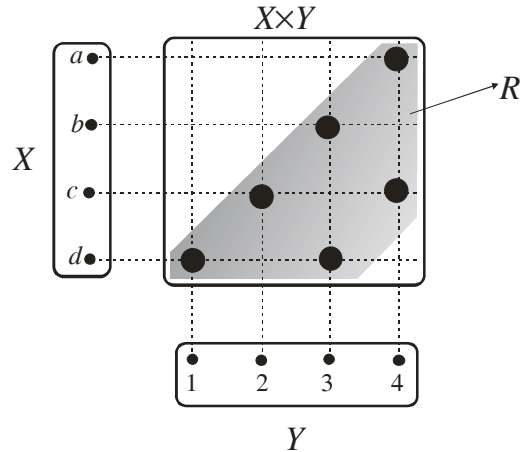
DEFINÍCIA 3.2. INVERZNÁ RELÁCIA



Nech $R \subseteq X \times Y$ je relácia, potom množina usporiadaných dvojíc $(y, x) \in Y \times X$, ktorých inverzia patrí do relácie $(x, y) \in R$, sa nazýva **inverzná relácia** R^{-1} (vzhľadom k relácii R) vtedy a len vtedy, ak

$$R^{-1} = \{(y, x); (x, y) \in R\} \quad (3.3)$$

OBRÁZOK 3.1.
RELÁCIA AKO
PODMNOŽINA
KARTEZIÁNSKEHO
SÚČINU



Znázornenie relácie R ako podmnožiny kartezianskeho súčinu (vytieňovaná oblasť) dvoch množín X a Y , $R = \{(d,1), (c,2), (b,3), (d,3), (a,4), (c,4)\}$.

Pre relácie, ktoré sú definované nad rovnakou dvojicou množín X a Y , môžeme definovať obvyklé množinové operácie prieniku, zjednotenia a negácie. Majme dve relácie $P, Q \subseteq X \times Y$, ktorých špecifikácia pomocou charakteristických funkcií má tvar

$$P = \{(x, y); \mu_P(x, y) = 1\}$$

$$Q = \{(x, y); \mu_Q(x, y) = 1\}$$

DEFINÍCIA 3.3.
ZJEDNOTENIE,
PRIENIK A
DOPLNOK RELÁCIÍ



Relácia $R = P \cup Q$ sa nazýva **zjednotenie relácií** P a Q vtedy a len vtedy, ak platí

$$P \cup Q = \{(x, y); \mu_{P \cup Q}(x, y) = 1\} \quad (3.4a)$$

$$\mu_{P \cup Q}(x, y) = \max\{\mu_P(x, y), \mu_Q(x, y)\} \quad (3.4b)$$

Relácia $R = P \cap Q$ sa nazýva **prienik relácií** P a Q vtedy a len vtedy, ak platí

$$P \cap Q = \{(x, y); \mu_{P \cap Q}(x, y) = 1\} \quad (3.5a)$$

$$\mu_{P \cap Q}(x, y) = \min\{\mu_P(x, y), \mu_Q(x, y)\} \quad (3.5b)$$

Relácia $R = \bar{P}$ sa nazýva **doplnok relácie** P vtedy a len vtedy, ak

$$\bar{P} = \{(x, y); \mu_{\bar{P}}(x, y) = 1\} \quad (3.6a)$$

$$\mu_{\bar{P}}(x, y) = 1 - \mu_P(x, y) \quad (3.6b)$$

PRÍKLAD 3.1.

Nech $X = \{1, 2, 3\}$ a $Y = \{p, q\}$, relácie P a Q majú tvar

$$P = \{(1, q), (2, p), (3, q)\}$$

$$Q = \{(1, q), (2, p), (3, p)\}$$

Zjednotenie a prienik týchto relácií sú

$$P \cup Q = \{(1, q), (2, p), (3, p), (3, q)\}$$

$$P \cap Q = \{(1, q), (2, p)\}$$

Inverzné relácie sú špecifikované

$$P^{-1} = \{(q, 1), (p, 2), (q, 3)\}$$

$$Q^{-1} = \{(q, 1), (p, 2), (p, 3)\}$$

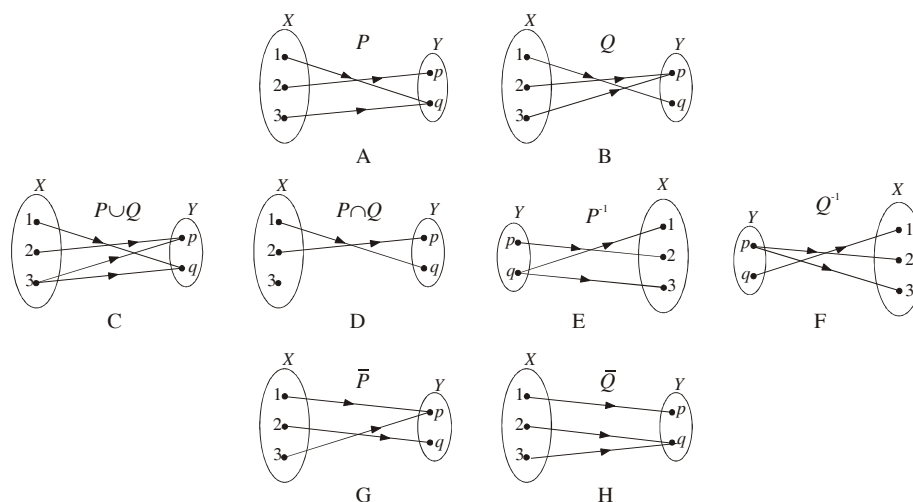
Doplňky k reláciám sú

$$\bar{P} = \{(1, p), (2, q), (3, p)\}$$

$$\bar{Q} = \{(1, p), (2, q), (3, q)\}$$

Tieto relácie sú znázornené na obr. 3.2.

OBRÁZOK 3.2.
ZJEDNOTENIE,
PRIENIK A
DOPLNOK RELÁCIÍ



Diagramy A a B znázorňujú relácie P a Q definované nad rovnakými množinami X a Y . Diagramy C a D znázorňujú zjednotenie resp. prienik týchto dvoch relácií. Diagramy E a F znázorňujú inverzné relácie P^{-1} resp. Q^{-1} . Diagramy G a H znázorňujú doplnky k reláciám P resp. Q .

Alternatívny spôsob špecifikácie relácie je pomocou binárnej matice¹ (obsahujúcej len binárne prvky 0 a 1). Nech $X = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ a $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ sú dve množiny s mohutnosťami $|X| = m$ resp. $|Y| = n$. Relácia R špecifikovaná nad týmito množinami má tvar

$$R = \{(x_i, y_j); \mu_R(x_i, y_j) = 1\}$$

DEFINÍCIA 3.4.
MATICA RELÁCIÍ

Hovoríme, že binárna matica A , ktorá má m riadkov a n stĺpcov, **reprezentuje reláciu** R (alebo je **matica relácie** R) vtedy a len vtedy, ak jej maticové prvky sú špecifikované formulou

¹ Pojem binárnej matice je presne špecifikovaný v kapitole 8. V tejto etape si môžeme pod binárnou maticou predstaviť charakteristickú funkciu relácie usporiadanú do tvaru tabuľky.



$$A_{ij} = \mu_R(x_i, y_j) = \begin{cases} 1 & (\text{dvojica } (x_i, y_j) \in R) \\ 0 & (\text{dvojica } (x_i, y_j) \notin R) \end{cases} \quad (3.7)$$

PRÍKLAD 3.2. Maticová reprezentácia relácií P a Q z príkladu 3.1 má tvar

$$A_P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Kompozícia relácií

DEFINÍCIA 3.5.
KOMPOZÍCIA
RELACÍ



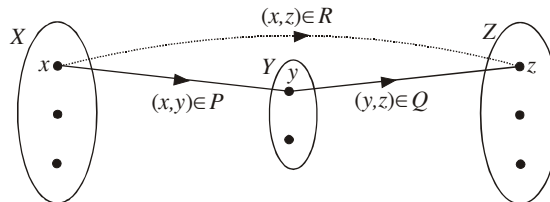
Nech $P = \{(x, y); \mu_P(x, y) = 1\} \subseteq X \times Y$ a $Q = \{(y, z); \mu_Q(y, z) = 1\} \subseteq Y \times Z$ sú dve relácie, reláciu $R = P \circ Q = \{(x, z); \mu_R(x, z) = 1\}$ nazývame **kompozíciou relácií** P a Q vtedy a len vtedy, ak jej charakteristická funkcia je určená vzťahom

$$\mu_R(x, z) = \max_y \{ \min \{ \mu_P(x, y), \mu_Q(y, z) \} \} \quad (3.8)$$

Kompozícia relácií P a Q je alternatívne vyjadrená takto

$$R = P \circ Q = \{(x, z); x \in X \wedge z \in Z \wedge \exists y \in Y : (x, y) \in P \wedge (y, z) \in Q\} \quad (3.9)$$

OBRÁZOK 3.3.
ZNÁZORNENIE
KOMPOZÍCIE
DVOCH RELACÍ



Znázornenie kompozície dvoch relácií P a Q , výsledná relácia R obsahuje dvojicu (x, z) vtedy a len vtedy, ak existuje taký prvok $y \in Y$, že platí $(x, y) \in P$ a $(y, z) \in Q$.

To znamená, že v kompozícii R dva prvky $x \in X$ a $z \in Z$ tvoria usporiadanú dvojicu $(x, z) \in R$ vtedy a len vtedy, ak existuje taký „medziprvok“ $y \in Y$, pre ktorý platí, že $(x, y) \in P$ a $(y, z) \in Q$, pozri obr. 3.3.

VETA 3.1.



Nech P , Q a R sú relácie definované nad takými množinami, aby nasledujúce operácie boli prípustné, potom platí

$$(P \circ Q)^{-1} = Q^{-1} \circ P^{-1} \quad (3.10a)$$

$$(P \circ Q) \circ R = P \circ (Q \circ R) \quad (3.10b)$$

$$P \circ (Q \cup R) = (P \circ Q) \cup (P \circ R) \quad (3.10c)$$

$$(Q \cup R) \circ P = (Q \circ P) \cup (R \circ P) \quad (3.10d)$$

$$P \circ (Q \cap R) = (P \circ Q) \cap (P \circ R) \quad (3.10e)$$

$$(Q \cap R) \circ P = (Q \circ P) \cap (R \circ P) \quad (3.10f)$$

Dôkaz prvej vlastnosti (3.10a) priamo vyplýva z definícií kompozície a inverznej relácie. Nech $P \subseteq X \times Y$ a $Q \subseteq Y \times Z$, potom $(P \circ Q)^{-1} \subseteq Z \times X$ a pre každé $(z, x) \in Z \times X$ platí

$$\begin{aligned} \mu_{(P \circ Q)^{-1}}(z, x) &= \mu_{P \circ Q}(x, z) = \max_{y \in Y} \{ \min \{ \mu_P(x, y), \mu_Q(y, z) \} \} \\ &= \max_{y \in Y} \{ \min \{ \mu_{P^{-1}}(y, x), \mu_{Q^{-1}}(z, y) \} \} = \mu_{Q^{-1} \circ P^{-1}}(z, x) \end{aligned}$$

kde poradie jednotlivých členov vo vnútorných zložených zátvorkách vyplýva z definície (3.8) kompozície dvoch relácií.

Dôkaz asociatívnosti (3.10b) vyplýva priamo z asociatívnosti operácie *max min*.

Vzťah distributívnosti (3.10c) dokážeme takto

$$\begin{aligned} \mu_{P \circ (Q \cup R)}(x, z) &= \max_{y \in Y} \{ \min \{ \mu_P(x, y), \mu_{Q \cup R}(y, z) \} \} \\ &= \max_{y \in Y} \{ \min \{ \mu_P(x, y), \max \{ \mu_Q(y, z), \mu_R(y, z) \} \} \} \\ &= \max_{y \in Y} \{ \max \{ \min \{ \mu_P(x, y), \mu_Q(y, z) \}, \min \{ \mu_P(x, y), \mu_R(y, z) \} \} \} \\ &= \max_{y \in Y} \{ \max \{ \min \{ \mu_P(x, y), \mu_Q(y, z) \}, \min \{ \mu_P(x, y), \mu_R(y, z) \} \} \} \\ &= \max_{y \in Y} \{ \underbrace{\max \{ \min \{ \mu_P(x, y), \mu_Q(y, z) \} \}}_{\mu_{P \circ Q}(x, z)}, \underbrace{\max \{ \min \{ \mu_P(x, y), \mu_R(y, z) \} \}}_{\mu_{P \circ R}(x, z)} \} \\ &= \max \{ \mu_{P \circ Q}(x, z), \mu_{P \circ R}(x, z) \} = \mu_{(P \circ Q) \cup (P \circ R)}(x, z) \end{aligned}$$

Pri dôkaze tejto distributívnej formuly sme použili identitu

$$\min \{ a, \max \{ b, c \} \} = \max \{ \min \{ a, b \}, \min \{ a, c \} \}$$

ktorá sa jednoducho dokáže metódou vymenovania možností (pozri príklad 1.13) tak, že ju overíme pre všetkých šesť možností vzájomnej usporiadanosti navzájom rôznych čísel a, b a c .

PRÍKLAD 3.3.

Uvažujme množiny $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, $Y = \{y_1, y_2, y_3\}$ a $Z = \{z_1, z_2, z_3\}$, definujme nad týmito množinami relácie $P \subseteq X \times Y$ a $Q \subseteq Y \times Z$, ktorých binárne matice sú

$$A_P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Potom relácie P a Q majú tvar

$$P = \{(x_1, y_1), (x_1, y_3), (x_2, y_3), (x_3, y_1), (x_3, y_2), (x_4, y_3)\}$$

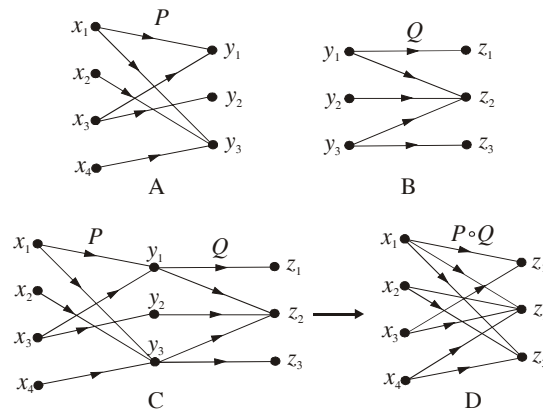
$$Q = \{(y_1, z_1), (y_1, z_2), (y_2, z_2), (y_3, z_2), (y_3, z_3)\}$$

Kompozícia týchto dvoch relácií má tvar

$$P \circ Q = \{(x_1, z_1), (x_1, z_2), (x_1, z_3), (x_2, z_2), (x_2, z_3), (x_3, z_1), (x_3, z_2), (x_4, z_2), (x_4, z_3)\}$$

Grafická interpretácia týchto relácií je znázornená na obr. 3.4.

OBRÁZOK 3.4.
KOMPOZÍCIA
RELÁCIÍ $P \circ Q$



Diagramy A a B znázorňujú relácie P a Q z príkladu 3.3, ich kompozícia $P \circ Q$ je vytvorená pomocou diagramu C, ktorý znázorňuje spojenie relácií P a Q prostredníctvom vrcholov y_i . Ak z vrcholu x_i existuje orientovaná cesta do vrcholu z_j , potom graf reprezentujúci kompozíciu $P \circ Q$ obsahuje hranu z x_i do z_j .

Vlastnosti relácií

V tomto odseku budeme študovať relácie $P \subseteq X \times X$, ktoré sú definované ako podmnožina karteziánskeho súčinu $X \times X$.

DEFINÍCIA 3.6.
REFLEXÍVNA
SYMETRICKÁ
ANTISYMETRICKÁ
TRANZITÍVNA
RELÁCIA



Reláciu $R \subseteq X \times X$ nazývame:

- (1) **reflexívnou** vtedy a len vtedy, ak $\forall (x \in X)((x, x) \in R)$,
- (2) **symetrickou** vtedy a len vtedy, ak $\forall (x, y \in X)((x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \in R)$,
- (3) **antisymetrickou** vtedy a len vtedy, ak $\forall (x, y \in X)((x, y) \in R \wedge (y, x) \in R \Rightarrow x = y)$ a
- (4) **tranzitívnou** vtedy a len vtedy, ak $\forall (x, y, z \in X)((x, y) \in R \wedge (y, z) \in R \Rightarrow (x, z) \in R)$.

Z definície 3.6 vyplýva, že pre antisymetrickú reláciu platí, že ak prvky $x, y \in X$ sú rôzne, $x \neq y$, potom platí implikácia $(x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \notin R$, t. j. nemôžu súčasne existovať dvojice relácie $(x, y) \in R$ a $(y, x) \in R$. Dôsledkom tejto vlastnosti je, že ak v nejakej relácii R existujú také dva rôzne prvky $x, y \in X$, pre ktoré platí $((x, y) \in R)$ a $((y, x) \in R)$, potom táto relácia nie je antisymetrická (t. j. podmienka antisymetričnosti je falzifikovaná).

∃ RELÁCIE
SÚČASNE
SYMETRICKÉ AJ
ANTISYMETRICKÉ

Existujú relácie súčasne symetrické aj antisymetrické (napr. rovnosť), ani symetrické ani antisymetrické (napr. deliteľnosť), symetrické a nie antisymetrické (kongruencia modulo n , teda zvyšky po delení prirodzeným číslom n sú rovnaké) a nesymetrické a antisymetrické (menšie alebo rovné, pozri príklad 3.4).

PRÍKLAD 3.4.

Nech $X = \mathbb{R}$ je množina reálnych čísel a relácia $P \subseteq X \times X$ má interpretáciu

$$((x, y) \in P) \stackrel{\text{def}}{=} (x \leq y)$$

Takto definovaná relácia P vyhovuje týmto podmienkam:

- (a) relácia P je reflexívna, pre každé reálne číslo $x \in X$ platí $x \leq x$, t. j. $(x, x) \in P$,
- (b) relácia P nie je symetrická, pretože $x \leq y$ neimplikuje $y \leq x$,
- (c) relácia P je antisymetrická, pretože $x < y$ implikuje $\neg(y < x)$,
- (d) relácia P je tranzitívna, pretože $x < y$ a $y < z$ implikuje $x < z$.

PRÍKLAD 3.5.

Nech $X = \{a, b, c, d\}$, relácia $P \subseteq X \times X$ je špecifikovaná množinou

$$P = \{(a, a), (a, b), (a, c), (b, a), (b, c), (b, d), (d, d)\}$$

Táto relácia nespĺňa žiadnu vlastnosť z definície 3.6:

- (a) relácia P nie je reflexívna, $(b, b) \notin P$,
- (b) relácia P nie je symetrická, implikácia $(a, c) \in P \Rightarrow (c, a) \in P$ nie je pravdivá,
- (c) relácia P nie je antisymetrická, relácia obsahuje súčasne dvojice $(a, b), (b, a)$,
- (d) relácia P nie je tranzitívna, implikácia $(a, b), (b, d) \in P \Rightarrow (a, d) \in P$ nie je pravdivá.

Relácia $P \subseteq X \times X$ má diagramatickú interpretáciu pomocou orientovaného grafu. V tomto prípade prvky množiny X sú vrcholy a usporiadané dvojice $(x, y) \in P$ sú orientované hrany, ktoré začínajú v x a končia v y . Vlastnosti z definície 3.6 majú v rámci tohto pohľadu na reláciu jednoduchú interpretáciu:

- (a) Relácia P je reflexívna, potom každý vrchol $x \in X$ má slučku – orientovanú hranu, ktorá začína a končí v tom istom vrchole.
- (b) Relácia P je symetrická, ak vrcholy $x, y \in X$ sú spojené hranou $(x, y) \in P$, potom existuje aj opačná hrana $(y, x) \in P$. V tomto prípade symetrickej relácie, jej grafická interpretácia obsahuje hrany medzi vrcholmi x a y vždy po dvojiaciach, t. j. existencia hrany (x, y) implikuje existenciu hrany (y, x) , a naopak.
- (c) Relácia P je antisymetrická, medzi dvoma rôznymi vrcholmi $x \neq y$ nemôže existovať dvojica hrán (x, y) a (y, x) . V prípade, že by existovala, potom z podmienky antisymetričnosti vyplýva, že $x = y$, čo je v spore s pôvodným predpokladom.

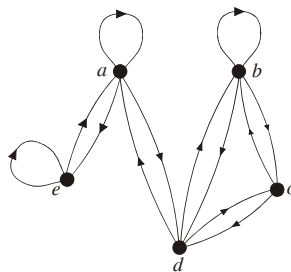
INTERPRETÁCIA
VLASTNOSTÍ
RELÁCIE AKO
ORIENTOVANÉHO
GRAFU



(d) Relácia P je tranzitívna, z existencie hrán (x, y) a (y, z) , ktoré majú spoločný vrchol y , vyplýva existencia hrany (x, z) .

PRÍKLAD 3.6.

Nech $X = \{a, b, c, d, e\}$, relácia P definovaná nad touto množinou je určená grafom na obr. 3.5.

OBRÁZOK 3.5.
GRAFICKÁ
INTERPRETÁCIA
RELÁCIE

Grafická interpretácia relácie P nad množinou $X = \{a, b, c, d, e\}$

Z obrázku 3.5 vidíme, že

- (1) relácia P nie je reflexívna, potrebné slučky neexistujú na vrcholoch c a d ,
- (2) relácia P je symetrická, ak medzi vrcholmi x a y existuje hrana (x, y) , potom existuje aj opačná hrana (y, x) ,
- (3) relácia P nie je antisymetrická, z existencie dvojíc opačne orientovaných hrán na rôznych vrcholoch nevyplýva rovnosť týchto dvoch vrcholov.
- (4) relácia P nie je tranzitívna, pretože existencia hrán (e, a) a (a, d) neimplikuje existenciu hrany (e, d) .

Relácia ekvivalencie**DEFINÍCIA 3.7.**

Relácia $P \subseteq X \times X$ sa nazýva **relácia ekvivalencie** vtedy a len vtedy, ak je reflexívna, symetrická a tranzitívna.

RELÁCIA
EKVIVALENCIE \sim

Reláciu ekvivalencie P budeme označovať symbolom \sim , t. j.

$$\forall (x, y \in X) ((x \sim y) =_{\text{def}} ((x, y) \in P))$$

Pomocou relácie ekvivalencie môžeme konečnú množinu X rozdeliť na n disjunktných podmnožín $X_1, X_2, \dots, X_n \subset X$, kde $X = X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_n$ a $X_i \cap X_j = \emptyset$, pre $i \neq j$

$$x, y \in X_i \Rightarrow x \sim y \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (3.11a)$$

$$(x \in X_i) \wedge (y \in X_j) \Rightarrow (x \not\sim y) \quad (i \neq j) \quad (3.11b)$$

kde $(x \not\sim y) =_{\text{def}} \neg(x \sim y)$. Vlastnosť (3.11a) vyplýva priamo z definície ekvivalencie, vlastnosť (3.11b) platí len pre maximálnu prípustnú hodnotu n .

PRÍKLAD 3.7.

Nech $X = \mathbb{R}$ je množina reálnych čísel, relácia $P \subseteq X \times X$ je definovaná takto:

$$((x, y) \in P) \equiv (x^2 = y^2)$$

- (1) Relácia P je reflexívna, pretože $x^2 = x^2$, pre každé $x \in \mathbb{R}$,
- (2) relácia P symetrická, pretože $x^2 = y^2$ implikuje $y^2 = x^2$,
- (3) relácia P je tranzitívna, pretože $x^2 = y^2$ a $y^2 = z^2$ implikuje $x^2 = z^2$.

Z tohto vyplýva, že P je relácia ekvivalencie.

DEFINÍCIA 3.8.
 TRIEDA
 EKVIVALENCIE


Nech P je relácia ekvivalencie nad množinou X a nech $x \in X$. Množina $[x] \subseteq X$, ktorá je priradená prvku $x \in X$, sa nazýva **triedou ekvivalencie** vtedy a len vtedy, ak obsahuje všetky možné prvky X , ktoré sú ekvivalentné danému prvku x

$$[x] = \{y \in X; (x, y) \in P\} \quad (3.12)$$

VETA 3.2.

Nech $P \subseteq X \times X$ je relácia ekvivalencie a nech $x, y \in X$. Potom podmienka $[x] = [y]$ je splnená vtedy a len vtedy, ak $(x, y) \in P$.

- (1) Predpokladajme, že P je relácia ekvivalencie, dokážeme implikáciu

$$(x, y) \in P \Rightarrow ([x] = [y])$$

Nech $z \in [x]$, potom na základe definície (3.12) $(x, z) \in P$. Pretože P je symetrická relácia, z predpokladu $(x, y) \in P$ vyplýva, že taktiež $(y, x) \in P$. Relácia P je aj tranzitívna, z predpokladov $(x, z) \in P$ a $(y, x) \in P$ vyplýva, že $(y, z) \in P$, čiže aj $z \in [y]$. Týmto sme dokázali, že $[x] \subseteq [y]$. Analogicky dokážeme aj $[y] \subseteq [x]$, tým sme dokázali, že $[x] = [y]$.

- (2) Budeme dokazovať implikáciu

$$([x] = [y]) \Rightarrow (x, y) \in P$$

Táto implikácia je priamy dôsledok definície (3.12).

VETA 3.3.

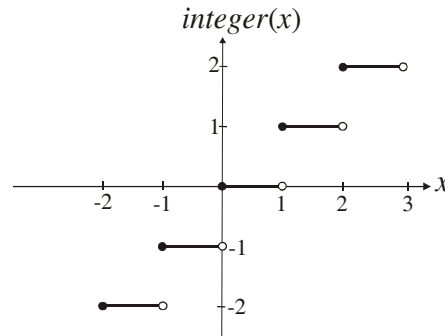
Nech $P \subseteq X \times X$ je relácia ekvivalencie, potom množina X má disjunktný rozklad pomocou všetkých rôznych tried ekvivalencie

$$X = [x] \cup [y] \cup \dots \cup [z] \quad (3.13)$$

Dôkaz tejto vety rozdelíme na dva kroky: v prvom kroku dokážeme, že každý prvok $x \in X$ patrí do nejakej triedy ekvivalencie. P je reflexívna relácia, preto pre každé $x \in X$ dvojica $(x, x) \in P$, čiže $\forall x (x \in [x])$. V druhom kroku dokážeme, že množina pre dva neekvivalentné prvky x a y , $(x, y) \notin P$, príslušné triedy ekvivalencie sú disjunktné, $[x] \cap [y] = \emptyset$. Nech $z \in [x] \cap [y]$, potom $z \in [x]$ a $z \in [y]$, potom $(z, x) \in P$ a $(z, y) \in P$. Použitím tranzitivity a symetričnosti P

dostaneme $(x, y) \in P$, z čoho plynie $[x] = [y]$. To znamená, že z predpokladu neprázdnoty prieniku tried ekvivalencie $[x] \cap [y]$ dostaneme, že triedy sú totožné, čo je v spore s predpokladom, že prvky x a y sú neekvivalentné. Týmto sme nepriamo dokázali, že $[x] \cap [y] = \emptyset$. Spojením vlastností z prvého a druhého kroku dokážeme vetu 3.3, t. j. pre každý prvok $x \in X$ existuje trieda ekvivalencie, do ktorej tento prvok patrí, pričom triedy ekvivalencie sú navzájom disjunktne. To odpovedá rozkladu množiny z (3.11a-b) na n podmnožín X_i .

OBRÁZOK 3.6.
DISJUNKTNÝ
ROZKLAD
POMOCOU TRIED
EKVIVALENCIE
Z FUNKCIE
 $INTEGER(x)$



Znázornenie funkcie $integer(x)$.

PRÍKLAD 3.8.

Nech $X = \mathbb{R}$ je množina reálnych čísel, relácia $P \subseteq X \times X$ je definovaná

$$((x, y) \in P) \equiv (integer(x) = integer(y))$$

kde funkcia $integer(x)$ je definovaná ako maximálne celé číslo, ktoré je menšie alebo rovné reálnemu číslu x (pozri obr. 3.6). Ľahko sa presvedčíme, že takto definovaná relácia P je relácia ekvivalencie nad množinou \mathbb{R} reálnych čísel. Ako ilustračný príklad študujme $1/2 \in \mathbb{R}$, kde $integer(1/2) = 0$, trieda ekvivalencie je $[0] = \{x; 0 \leq x < 1\}$. Pre ďalšie reálne číslo $3/2 \in \mathbb{R}$, $integer(3/2) = 1$, dostaneme triedu ekvivalencie $[1] = \{x; 1 \leq x < 2\}$: Množinu reálnych čísel \mathbb{R} môžeme vyjadriť ako zjednotenie týchto tried ekvivalencie charakterizovaných celými číslami

$$\mathbb{R} = \bigcup_{i \in \mathbb{Z}} [i] = \dots [-2] \cup [-1] \cup [0] \cup [1] \cup [2] \dots$$

kde \mathbb{Z} je množina celých čísel.

3.2 RELÁCIA ČIASTOČNÉHO USPORIADANIA

Pre mnohé množiny je možné definovať reláciu usporiadania jej prvkov. Tak napríklad, množina reálnych čísel \mathbb{R} má prirodzené usporiadanie svojich prvkov pomocou relácie ' \leq ' (pozri príklad 3.4). Táto relácia je reflexívna, antisymetrická a tranzitívna.

DEFINÍCIA 3.9.POSET 

Relácia $P \subseteq X \times X$ sa nazýva *čiasťočné usporiadanie* vtedy a len vtedy, ak je reflexívna, antisymetrická a tranzitívna. Množina X spolu s touto reláciou sa nazýva *čiasťočne usporiadaná množina (poset)*.

PRÍKLAD 3.9.

(1) Relácia čiasťočného usporiadania $P \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ môže byť jednoducho uskutočnená pomocou známej relácie ' \leq ', ktorá sa interpretuje ako „menší alebo rovný“ (pozri príklad 3.4).

(2) Ak by sme chceli reláciu P interpretovať pomocou relácie ' $<$ ', potom P nie je čiasťočné usporiadanie, pretože P nie je reflexívna (t. j. neplatí $x < x$).

(3) Nech F je systém podmnožín univerza U , $F = \{X; X \in \mathcal{P}(U)\}$. Pomocou množinovej relácie ' \subseteq ' môžeme nad týmto systémom F definovať reláciu P tak, že $((X, Y) \in P) =_{def} (X \subseteq Y)$. Ľahko sa presvedčíme, že táto relácia je čiasťočné usporiadanie, je reflexívna, antisymetrická a tranzitívna.

(4) Nech $X = \mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$ je množina kladných celých čísel. Definujme nad touto množinou reláciu $P \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ pomocou pojmu deliteľnosti; $((m, n) \in P) =_{def} (m \text{ je deliteľné } n)$. Tak napríklad, pre $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ relácia P obsahuje dvojice $P = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6), (2,1), (3,1), (4,1), (4,2), (5,1), (6,1), (6,2), (6,3)\}$. Táto relácia je čiasťočné usporiadanie, pretože je reflexívna, antisymetrická a tranzitívna.

DEFINÍCIA 3.10.

MAXIMÁLNY A MINIMÁLNY PRVOK



Nech $P \subseteq X \times X$ je čiasťočné usporiadanie. **Maximálny prvok** (ak existuje) $x_{max} \in X$ je určený podmienkou

$$\forall (x \in X) \left(((x_{max}, x) \in P) \Rightarrow (x = x_{max}) \right) \quad (3.14)$$

Minimálny prvok (ak existuje) $x_{min} \in X$ je určený podmienkou

$$\forall (x \in X) \left(((x, x_{min}) \in P) \Rightarrow (x = x_{min}) \right) \quad (3.15)$$

Táto definícia maximálneho prvku $x_{max} \in X$ je založená na podmienke, že ak postulujeme existenciu takého prvku $x \in X$ pre ktorý platí $(x_{max}, x) \in P$, potom nutne $x = x_{max}$, t. j. neexistuje taký prvok $x \in X$, ktorý by bol „väčší“ ako prvok x_{max} . Podobne, pre minimálny prvok $x_{min} \in X$ neexistuje taký prvok $x \in X$, ktorý by bol menší ako x_{min} .

PRÍKLAD 3.10.

Študujme množinu $X = \{1, 2, 3\}$, jej potenčná množina $\mathcal{P}(X)$ obsahuje všetky možné podmnožiny X

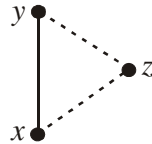
$$\mathcal{P}(X) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$$

Ak čiasťočné usporiadanie nad touto potenčnou množinou je relácia ' \subseteq ', potom maximálny (minimálny) prvok je $\{1, 2, 3\}$ (\emptyset). Definujme podmnožinu Q potenčnej množiny $\mathcal{P}(X)$ $Q = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}\}$. Táto množina má dva maximálne prvky $\{1, 2\}$ a $\{2, 3\}$ a jeden minimálny prvok \emptyset .

Hasseho diagramy

Nech X je čiastočne usporiadaná množina s reláciou $P \subseteq X \times X$. Hovoríme, že prvok y je pokrytý prvkom x vtedy, ak $(x, y) \in P$ a neexistuje taký prvok z , rôzny od x a y , pre ktorý súčasne platí $(x, z) \in P$ a $(z, y) \in P$, pozri obr. 3.7.

OBRÁZOK 3.7.
PRVOK y JE
POKRYTÝ
PRVKOM x



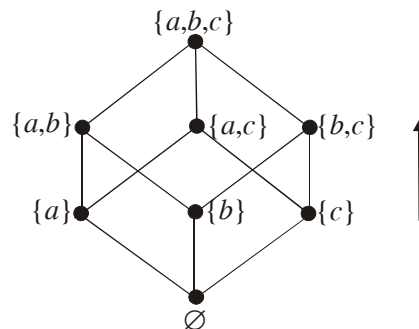
Znázornenie pojmu „prvok y je **pokrytý** prvkom x “, neexistuje taký prvok z , pre ktorý by platilo „prvok z je pokrytý x “ a „prvok y je pokrytý z “.

Hasseho diagram priradený konečnej množine X s reláciou $P \subseteq X \times X$ čiastočného usporiadania obsahuje vrcholy, ktoré sú stotožnené s prvkami z X ; pričom dva vrcholy x a y sú spojené hranou, ak prvok y je pokrytý prvkom x .

Hasseho diagram konečnej čiastočne usporiadanej množiny X s reláciou čiastočného usporiadania $P \subseteq X \times X$ zostrojíme jednoducho tak, že v prvom kroku zostrojíme graf relácie (pozri text za príkladom 3.5), z tohto grafu vynecháme slučky (dôsledok reflexivity relácie) a tie hrany, ktoré sú dôsledkom tranzitivity relácie. Graf usporiadame tak, aby bol dobre zorientovaný zhora nadol vzhľadom k pokrytiu.

PRÍKLAD 3.11. Hasseho diagram pre množinu $X = \mathcal{P}(\{a, b, c\})$, ktorá je čiastočne usporiadaná pomocou relácie \subseteq , je znázornený na obr. 3.8.

OBRÁZOK 3.8.
HASSEHO
DIAGRAM PRE
POTENČNÚ
MNOŽINU



Znázornenie Hasseho diagramu pre $X = \mathcal{P}(\{a, b, c\})$, ktorá je čiastočne usporiadaná reláciou \subseteq . Šípka vpravo znázorňuje orientáciu čiar, ktoré sú orientované zdola nahor.

PRÍKLAD 3.12. Relácia P čiastočného usporiadania je špecifikovaná Hasseho diagramom znázorneným na obr. 3.9. Našou úlohou je vydedukovať dvojice, ktoré obsahuje táto relácia:

- (1) Množina nad ktorou je definovaná relácia má tvar $X = \{a, b, r, s, t, x, y, z\}$.
- (2) Relácia P je reflexívna, t. j. obsahuje všetky možné dvojice (u, u) , pre každé

$u \in X$,

$$P^{(1)} = \{(a,a), (b,b), (r,r), (s,s), (t,t), (x,x), (y,y), (z,z)\}$$

(3) Relácia P obsahuje všetky hrany z Hasseho diagramu na obr. 3.9, pričom hrany sú orientované zdola nahor,

$$P^{(2)} = P^{(1)} \cup \{(a,r), (b,r), (b,s), (b,t), (r,x), (r,y), (s,y), (s,z), (t,z)\}$$

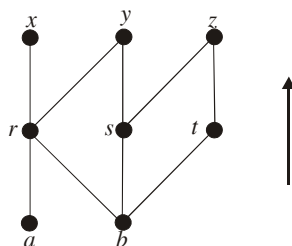
(4) Relácia P je tranzitívna, čiže, ak napr. obsahuje dvojicu (a,r) a (r,x) , potom musí obsahovať aj dvojicu (a,x) ,

$$P^{(3)} = P^{(2)} \cup \{(a,x), (a,y), (b,x), (b,y), (b,z)\}$$

Zjednotením týchto troch parciálnych výsledkov dostaneme konečný tvar relácie P

$$P = \left\{ \begin{array}{l} (a,a), (b,b), (r,r), (s,s), (t,t), (x,x), (y,y), (z,z), \\ (a,r), (b,r), (b,s), (b,t), (r,x), (r,y), (s,y), (s,z), \\ (t,z), (a,x), (a,y), (b,x), (b,y), (b,z) \end{array} \right\}$$

OBRÁZOK 3.9.
HASSEHO
DIAGRAM
ČIASOČNÉHO
USPORIADANIA
Z PRÍKLADU 3.12.



Hasseho diagram pre hypotetickú reláciu čiastočného usporiadania nad množinou $X = \{a, b, r, s, t, x, y, z\}$. Šípka vpravo znázorňuje orientáciu čiar zdola nahor.

Hasseho diagram pre reláciu čiastočného usporiadania P nad konečnou množinou X ukazuje jasne maximálne a minimálne prvky. Minimálne prvky sú také, ktoré sú reprezentované vrcholmi, z ktorých hrany len vychádzajú, podobne, maximálne prvky sú také, ktoré sú reprezentované vrcholmi, do ktorých hrany len vchádzajú. Relácia čiastočného usporiadania P , ktorá je reprezentovaná Hasseho diagramom na obr. 3.9 má dva minimálne prvky a a b , tri maximálne prvky x , y a z .

VETA 3.4.

Každá relácia čiastočného usporiadania $P \subseteq X \times X$, kde X je konečná množina, obsahuje aspoň jeden minimálny prvok a aspoň jeden maximálny prvok.

Nech $a_1 \in X$, ak je tento prvok minimálny, dôkaz je dokončený. V opačnom prípade existuje $a_2 \in X$ taký, že $(a_2, a_1) \in P$. Prvok a_2 je buď minimálny alebo ak nie, potom existuje taký prvok $a_3 \in X$, že $(a_3, a_2) \in P$. Pretože množina X má konečný počet prvkov, tento proces predlžovania smerom dole musí byť v nejakom momente ukončený prvkom, ktorý je minimálny. Podobným spôsobom môžeme zostrojiť prvok, ktorý je maximálny.

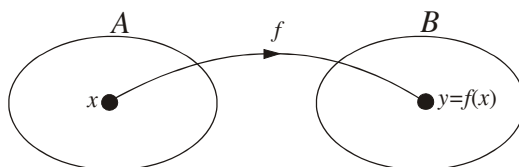
3.3 FUNKCIE

Pojem funkcie (alebo zobrazenia) patrí medzi základné pojmy matematiky. V matematike pod funkciou f rozumieme jednoznačný predpis, pomocou ktorého každému argumentu x z množiny A priradíme práve jednu funkčnú hodnotu označenú $y = f(x)$ z množiny B . Túto špecifikáciu funkcie zapisujeme takto:

$$f : A \rightarrow B \quad (3.16a)$$

pozri obr. 3.10.

OBRÁZOK 3.10.
ZNÁZORNENIE
ZOBRAZENIA



Schematické znázornenie zobrazenia $f : A \rightarrow B$.

Alternatívna forma definície funkcie (3.16a) je pomocou množiny obsahujúcej usporiadané dvojice

$$f = \{(x, f(x)); x \in A\} \quad (3.16b)$$

DEFINÍCIA 3.11.
OBOR DEFINÍCIE,
KOOR, OBOR
FUNKČNÝCH
HODNŔT,
ARGUMENT,
OBRAZ,
TRANSFORMÁCIA



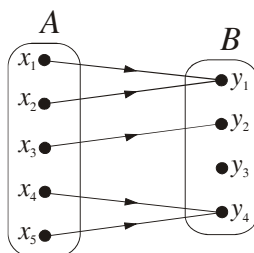
Relácia $f \subseteq A \times B$ sa nazýva **funkcia** vtedy a len vtedy, ak pre každé $x \in A$ existuje práve jedno $y \in B$ také, že $(x, y) \in f$

$$\forall (x \in A) \exists! (y \in B) ((x, y) \in f) \quad (3.17)$$

kde symbol $\exists!$ značí, že existuje práve jeden prvok. Množina A sa nazýva **obor definície** (alebo len **obor**) funkcie f , $D_f = A$, a množina B sa nazýva **koobor**.

Obor funkčných hodnôt funkcie f je množina $H_f = \{f(x); x \in A\} = f(A)$. Ak $(x, y) \in f$, potom x sa nazýva **argument** a y sa nazýva **funkčná hodnota (obraz)**. Funkcia f sa taktiež nazýva **zobrazenie**. Špeciálny prípad funkcie je **transformácia**, kde musí platiť $A = B$.

OBRÁZOK 3.11.
ZNÁZORNENIE
FUNKCIE
 $f \subseteq A \times B$



Znázornenie funkcie $f \subseteq A \times B$, pre každé $x \in A$ existuje práve jedno $y \in B$ také, že $(x, y) \in f$. Funkcia f má tvar relácie $f = \{(x_1, y_1), (x_2, y_1), (x_3, y_2), (x_4, y_4), (x_5, y_4)\}$.

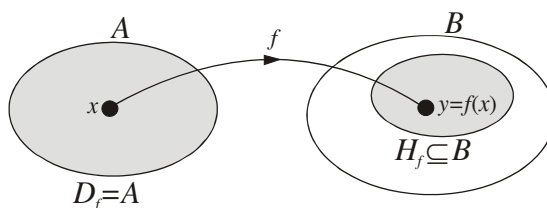
Funkcia je špeciálny prípad relácie, ktorá vyhovuje podmienke jednoznačnosti (3.17), pozri obr. 3.11.

Z obr. 3.11 vyplýva, že definícia 3.11 nám nezabezpečuje, aby množina funkčných hodnôt $\{f(x); x \in A\}$ bola totožná s množinou B , vo všeobecnosti platí len

$$B' = f(A) = \{f(x); x \in A\} \subseteq B \quad (3.18)$$

pozri obr. 3.12.

OBRÁZOK 3.12.
PRE FUNKCIU
 $f: A \rightarrow B$
 $H_f = f(A) \subseteq B$



Znázornenie skutočnosti, že pre funkciu $f: A \rightarrow B$, obor funkčných hodnôt $H_f = f(A)$ je vo všeobecnosti len podmnožinou B .

DEFINÍCIA 3.12.
ROVNOSŤ FUNKCIÍ



Hovoríme, že dve funkcie $f: A \rightarrow B$ a $g: A' \rightarrow B'$ sa **rovnajú** vtedy a len vtedy, ak súčasne platí

- (1) $A = A'$,
- (2) $\forall (x \in A)(f(x) = g(x))$.

Táto definícia rovnosti dvoch funkcií má praktický význam, často intuitívne hovoríme že dve funkcie sa rovnajú, táto definícia nám presne špecifikuje, čo musí byť splnené, aby táto podmienka bola splnená.

JEDNOTKOVÁ
FUNKCIA

Špeciálnym prípadom funkcie je **jednotková funkcia** $i_A: A \rightarrow A$, pre ktorú platí

$$\forall (x \in A)(i_A(x) = x) \quad (3.19)$$

Jej obor a obor funkčných hodnôt sú si rovné, $D_{i_A} = H_{i_A} = A$.

Zložená funkcia

V kapitole 3.1 bola definovaná kompozícia $P \circ Q$ dvoch relácií P a Q . Podobný postup môže byť použitý aj pre kompozíciu funkcií, ktorej výsledok nazývame zložená funkcia. Majme dve funkcie $f: A \rightarrow B$ a $g: B \rightarrow C$, kompozíciou týchto dvoch funkcií (pozri obr. 3.13) vytvoríme novú funkciu $h = f \circ g: A \rightarrow C$, ktorá sa nazýva zložená funkcia.

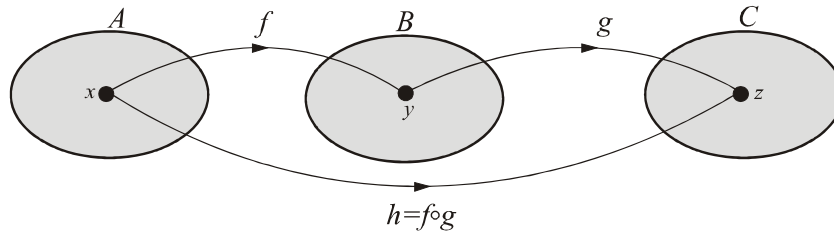
DEFINÍCIA 3.13.
ZLOŽENÁ FUNKCIA



Hovoríme, že kompozíciou funkcií $f: A \rightarrow B$ a $g: B \rightarrow C$ vznikne **zložená funkcia** $h = f \circ g: A \rightarrow C$ vtedy a len vtedy, ak

$$h = f \circ g = \{(x, z) \in A \times C; \exists (y \in B)((x, y) \in f) \wedge ((y, z) \in g)\} \quad (3.20)$$

OBRÁZOK 3.13.
ZLOŽENÁ FUNKCIA



Znázornenie tvorby zloženej funkcie h z funkcií f a g . Táto zložená funkcia existuje len vtedy, keď prienik oboru funkčných hodnôt H_f funkcie f a definičného oboru D_g funkcie g je neprázdny, $H_f \cap D_g \neq \emptyset$.

Z definície 3.13 priamo plynie, že zložená funkcia $h = f \circ g$ existuje len vtedy, ak pre danú dvojicu $(x, z) \in A \times C$ existuje taký prvok $y \in B$, pre ktorý súčasne platí $(x, y) \in f$ a $(y, z) \in g$. Ináč povedané, musí existovať neprázdny prienik medzi oborom funkčných hodnôt H_f funkcie f a definičným oborom D_g funkcie g , $H_f \cap D_g \neq \emptyset$.

AKO ZOSTROJÍŤ
ZLOŽENÚ
FUNKCIU?

Ako zostrojíte zloženú funkciu? Z obr. 3.13 aplikáciou funkcie f na argument x dostaneme obraz $y = f(x)$, podobne, aplikáciou funkcie g na argument y dostaneme obraz z , $z = g(y)$; ak do tohto výsledku dosadíme za y predchádzajúci výsledok $y = f(x)$, získame konečný tvar zloženej funkcie

$$g\left(\underbrace{f(x)}_y\right) = g(y) = z \quad (3.21)$$

PRÍKLAD 3.13.

Študujme dve funkcie

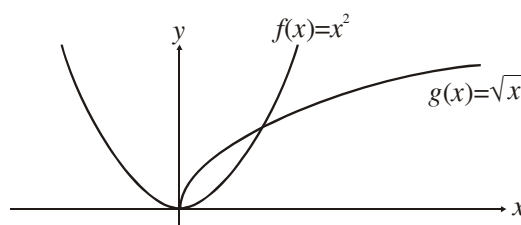
(1) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, ktorej analytický tvar je $f(x) = x^2$, jej definičný obor $D_f = \mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ je množina všetkých reálnych čísel (reálna os) a obor funkčných hodnôt $H_f = [0, \infty)$ je množina nezáporných reálnych čísel.

(2) $g: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, ktorej analytický tvar je $g(x) = \sqrt{x}$, kde obor definičný a obor funkčných hodnôt sú rovnaké, $D_g = H_g = [0, \infty)$.

Prvá zložená funkcia má tvar $h(x) = g(f(x)) = \sqrt{x^2} = |x|$, jej obor definície je $D_h = \mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ a obor funkčných hodnôt je $H_h = [0, \infty)$, t. j. zobrazuje množinu reálnych čísel \mathbb{R} na množinu nezáporných reálnych čísel $[0, \infty)$. Priebeh funkcie $h(x) = |x|$ je znázornený na obr. 3.15, diagram A.

Druhá zložená funkcia má tvar $h'(x) = f(g(x)) = (\sqrt{x})^2 = x$, táto funkcia má rovnaký obor a obor hodnôt, $D_{h'} = H_{h'} = [0, \infty)$, t. j. zobrazuje „lineárne“ množinu nezáporných reálnych čísel na tú istú podmnožinu. Pribeh funkcie $h'(x) = x$ je znázornený na obr. 3.15, diagram B.

OBRÁZOK 3.14.
GRAFY FUNKCIÍ
Z PRÍKLADU 3.13.



Grafy funkcií $f(x)$ a $g(x)$ z príkladu 3.13.

$D_h \neq D_{h'}$,
FUNKCIE SÚ RÔZNE

Môžeme si položiť otázku či sa zložené funkcie $h(x)$ a $h'(x)$ rovnajú alebo nie. Podľa definície 3.12, dve funkcie sú si rovné vtedy a len vtedy, ak majú rovnaké obory, obory hodnôt a predpisy (analytické tvary), ak je porušená jedna z týchto troch podmienok, potom funkcie sú rôzne. V našom prípade $D_h \neq D_{h'}$, čiže zložené funkcie sú rôzne.

OBRÁZOK 3.15.
GRAFY
ZLOŽENÝCH
FUNKCIÍ
Z PRÍKLADU 3.13

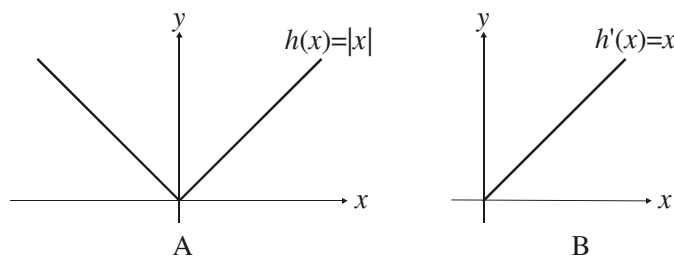


Diagram A znázorňuje graf zloženej funkcie $h(x) = g(f(x)) = |x|$, diagram B znázorňuje graf zloženej funkcie $h'(x) = f(g(x)) = x$.

Inverzná funkcia

Podľa definície 3.2 je inverzná relácia P^{-1} určená jednoducho inverziou usporiadaných dvojíc z relácie P (pozri obr. 3.2). Žiaľ, tento jednoduchý postup je neaplikovateľný pre konštrukciu inverznej funkcie, pretože vzniknutá relácia už nemusí spĺňať podmienku jednoznačnosti (pozri definíciu 3.11). Preto musíme zaviesť ešte dodatočné predpoklady na reláciu, aby bola nielen funkciou, ale existovala k nej aj inverzná funkcia.

DEFINÍCIA 3.14.
INJEKCIA

Funkcia $f: A \rightarrow B$ sa nazýva **injekcia (jedno-jednoznačná)** vtedy a len vtedy, ak vyhovuje podmienke

$$\forall (x, x' \in A) (x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')) \quad (3.22)$$

Pôvodnú podmienku jednoznačnosti z definície 3.11 môžeme vyjadriť takto

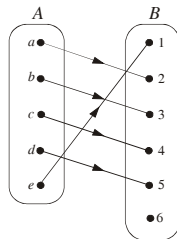
$$\forall (x, x' \in A) (f(x) \neq f(x') \Rightarrow x \neq x') \quad (3.23)$$

Spojením týchto dvoch podmienok dostaneme, že injekcia vyhovuje podmienke

$$\forall (x, x' \in A) ((x \neq x') \Leftrightarrow (f(x) \neq f(x'))) \quad (3.24)$$


To znamená, že pre injekciu podmienka rôznosti argumentov je ekvivalentná podmienke rôznosti im odpovedajúcich funkčných hodnôt.

OBRÁZOK 3.16.
INJEKCIA BEZ
INVERZNEJ
FUNKCIE



Schematické znázornenie injekcie $f: A \rightarrow B$, kde každému argumentu je priradená práve jedna funkčná hodnota, a taktiež aj naopak, ku každej funkčnej hodnote existuje práve jeden argument. Musíme však poznamenať, že množina B obsahuje prvky, ktoré nie sú funkčné hodnoty f . Tak napríklad k prvku $y_0 \in B$ označenému číslom 6 neexistuje taký argument $x_0 \in A$, aby platilo $y_0 = f(x_0)$. Pomocou tohto jednoduchého ilustračného príkladu sme ukázali, že k funkcii $f: A \rightarrow B$ neexistuje inverzná funkcia $f^{-1}: B \rightarrow A$, aj keď táto funkcia je injekcia.

Problémy s konštrukciou inverznej funkcie pre injekciu sú ilustrované na obr. 3.16. Je ukázané, že aj keď je funkcia $f: A \rightarrow B$ jedno-jednoznačná (t. j. injekcia), inverzná funkcia $f^{-1}: B \rightarrow A$ k nej neexistuje, množina B obsahuje také prvky $y \in B$ ku ktorým neexistujú argumenty $x \in A$, aby $y = f(x)$. Z tohto dôvodu musíme definíciu injekcie rozšíriť o ďalšiu podmienku.

DEFINÍCIA 3.15.
BIJEKCIA 

Injekcia funkcie $f: A \rightarrow B$ sa nazýva **bijekcia** vtedy a len vtedy, ak pre každý prvok $y \in B$ existuje v množine A taký prvok x , že $y = f(x)$.

DEFINÍCIA 3.16.
INVERZNÁ FUNKCIA



Nech funkcia $f: A \rightarrow B$ je bijekcia. Hovoríme, že funkcia $f^{-1}: B \rightarrow A$ je inverzná k funkcii f vtedy a len vtedy, ak vyhovuje týmto dvom podmienkam

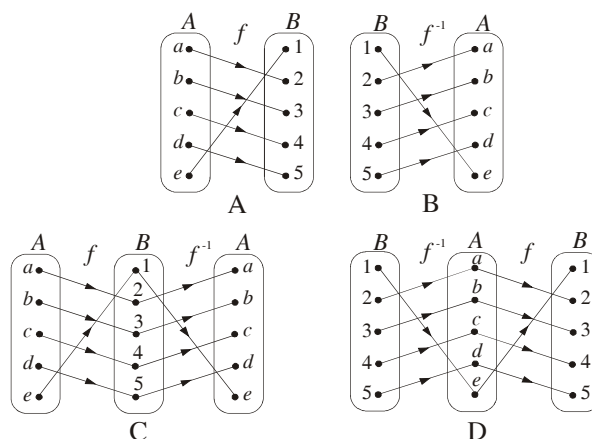
$$f(f^{-1}(x)) = i_B(x) \quad (3.25a)$$

$$f^{-1}(f(x)) = i_A(x) \quad (3.25b)$$

kde i_X je jednotková funkcia definovaná nad množinou X .

Definícia 3.16 je ilustrovaná obrázkom 3.17, kde v oboch prípadoch dostávame jednotkovú funkciu definovanú nad oborom A resp. oborom B .

OBRÁZOK 3.17.
JEDNOTKOVÁ
FUNKCIA
Z INVERZNEJ
BIJEKCIE

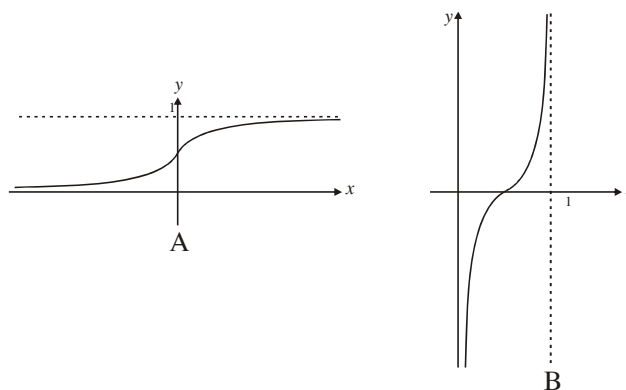


Diagramy A a B znázorňujú zobrazenia f a f^{-1} prevzaté z obr. 3.16. Diagram C znázorňuje zloženú funkciu $h = f^{-1} \circ f = i_A : A \rightarrow A$, diagram D znázorňuje zloženú funkciu $h' = f \circ f^{-1} = i_B : B \rightarrow B$.

PRÍKLAD 3.14.

Zostrojte inverznú funkciu k funkcii $f(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}}$.

OBRÁZOK 3.18.
PRIEBEHY FUNKCIÍ
PRE PRÍKLAD 3.14



Priebehy funkcií (A) $f(x) = 1/(1 + e^{-x})$ a (B) $f^{-1}(x) = \ln(x/(1-x))$

Graf funkcie $f(x)$ je znázornený na obr. 3.18. Táto funkcia² zobrazuje obor defínicie $D_f = \mathbb{R}$ na obor hodnôt $H_f = (0,1)$. Funkcia je monotónne rastúca a vyhovuje asymptotickým podmienkam $f(\infty) = 1$ a $f(-\infty) = 0$. Z monotónnosti vyplýva, že funkcia je injekcia a že ku každej funkčnej hodnote $y \in (0,1)$ existuje taký argument $x \in (-\infty, \infty)$, že $y = f(x)$, t. j. funkcia f je bijektívna, čiže k nej existuje inverzná funkcia (pozri obr. 3.18)

² V teórii neurónových sietí je táto funkcia známa ako sigmoidová prechodová (alebo aktivačná) funkcia, ktorá „stlačí“ celú reálnu os na otvorenú úsečku $(0,1)$.

$$f^{-1}(x) = \ln \frac{x}{1-x}$$

Zostrojíme zložené funkcie $f(f^{-1}(x))$ a $f^{-1}(f(x))$.

$$f(f^{-1}(x)) = \frac{1}{1 + \exp(-f^{-1}(x))} = \frac{1}{1 + \exp\left(-\ln\left(\frac{x}{1-x}\right)\right)} = \frac{1}{1 + \frac{1-x}{x}} = x = i_{(0,1)}(x)$$

$$f^{-1}(f(x)) = \ln \frac{f(x)}{1-f(x)} = \ln \frac{\frac{1}{1+e^{-x}}}{1 - \frac{1}{1+e^{-x}}} = \ln \frac{\frac{1}{1+e^{-x}}}{\frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}} = \ln e^x = x = i_{(-\infty, \infty)}(x)$$

Aj keď výsledok vyzerá rovnaký, vlastné zložené (jednotkové) funkcie majú rozdielne definičné obory.

ZHRNUTIE

RELÁCIE Relácia R medzi množinami X a Y je definovaná ako podmnožina ich karteziánskeho súčinu

$$R \subseteq X \times Y$$

Pretože relácia je definovaná ako podmnožina, pomocou množinových relácií a operácií môžeme zaviesť vzťahy medzi nimi alebo nové relácie (prienik, zjednotenie a kompozíciu). Relácia R môže byť reflexívna, symetrická, antisymetrická a tranzitívna.

RELÁCIA EKVIVALENCIE Relácia ekvivalencie patrí medzi základné relácie, je to taká relácia, ktorá je reflexívna, symetrická a tranzitívna. Pre množinu X , nad ktorou je definovaná relácia ekvivalencie, môžeme vykonať rozklad množiny X na disjunktné podmnožiny, ktoré obsahujú navzájom ekvivalentné prvky.

RELÁCIA ČIASTOČNÉHO USPORIADANIA Relácia $P \subseteq X \times X$ sa nazýva **čiasťočné usporiadanie** vtedy, ak je reflexívna, antisymetrická a tranzitívna. Množina X spolu s touto reláciou sa nazýva **čiasťočne usporiadaná množina (poset)**. Poset môže byť znázornený pomocou Hasseho diagramu, kde existuje aspoň jeden maximálny prvok a jeden minimálny prvok.

FUNKCIE Funkcia $f: A \rightarrow B$ je definovaná ako jednoznačné zobrazenie, ktoré každému prvku z A priradí práve jeden prvok z množiny B . Množina A sa nazýva **obor definície** funkcie f , $D_f = A$, a množina B obsahuje **obor funkčných hodnôt** funkcie f , $H_f \subseteq B$, pozri obr. 3.10.

Funkciu $f: A \rightarrow B$ môžeme alternatívne interpretovať ako reláciu $f \subseteq A \times B$. Ak $(x, y) \in f$, potom x sa nazýva **argument** a $y = f(x)$ sa nazýva **funkčná hodnota (obraz)**. Pomocou operácie kompozície relácií môžeme definovať kom-

pozíciu funkcií $f \subseteq A \times B$ a $g \subseteq B \times C$ ako novú „zloženú“ funkciu $h = f \circ g : A \rightarrow C$. Pre špeciálne typy funkcií $f : A \rightarrow B$, ktoré sú tzv. bijekcie, môžeme definovať inverznú funkciu $f^{-1} : B \rightarrow A$.

KLÚČOVÉ POJMY

<i>relácia</i>	<i>disjunktný rozklad</i>
<i>operácie nad reláciami</i>	<i>čiasťočné usporiadanie</i>
<i>ekvivalencia</i>	<i>poset</i>
<i>usporiadanosť</i>	<i>maximálny prvok</i>
<i>funkcia</i>	<i>minimálny prvok</i>
<i>binárna relácia</i>	<i>Hasseho diagramy</i>
<i>charakteristická funkcia</i>	<i>pokrytie prvku</i>
<i>karteziánsky súčin</i>	<i>obor definície</i>
<i>inverzná relácia</i>	<i>koobor</i>
<i>zjednotenie relácií</i>	<i>obor funkčných hodnôt</i>
<i>prienik relácií</i>	<i>argument</i>
<i>doplňok relácie</i>	<i>funkčná hodnota (obraz)</i>
<i>binárna matica</i>	<i>transformácia</i>
<i>kompozícia relácií</i>	<i>rovnosť funkcií</i>
<i>reflexívna relácia</i>	<i>jednotková funkcia</i>
<i>symetrická relácia</i>	<i>zložená funkcia</i>
<i>antisymetrická relácia</i>	<i>inverzná funkcia</i>
<i>tranzitívna relácia</i>	<i>injekcia (jedno-jednoznačná funkcia)</i>
<i>relácia ako orientovaný graf</i>	<i>bijekcia</i>
<i>trieda ekvivalencie</i>	

CVIČENIA

3.1. Zostrojte množinu usporiadaných dvojíc pre reláciu $R \subseteq A \times A$, $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, kde $(x, y) \in R$ vtedy a len vtedy, ak

- (a) $x = y$,
- (b) $x + y = 4$,
- (c) $x > y$,
- (d) x je deliteľné y .

3.2. Nech $R = \{(x, y); x \text{ je deliteľné } y\}$ je relácia pre $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

- (a) Zostrojte množinu usporiadaných dvojíc pre túto reláciu,
- (b) znázornite túto reláciu diagramaticky tak, ako je to vykonané na obr. 3.1,
- (c) znázornite túto reláciu grafom tak, ako je to vykonané na obr. 3.2,

(d) reprezentujte reláciu pomocou binárnej matice A z definície 3.4.

3.3. Pre každú z nasledujúcich relácií R nad množinou $\{1, 2, 3, 4\}$ zistite, či je reflexívna, symetrická, antisymetrická, alebo tranzitívna.

(a) $\{(2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 2), (3, 3), (3, 4)\}$

(b) $\{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$

(c) $\{(2, 4), (4, 2)\}$

(d) $\{(1, 2), (2, 3), (3, 4)\}$

(e) $\{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$

(f) $\{(1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 1), (3, 4)\}$

3.4. Zistite, či relácia R nad množinou všetkých ľudí je reflexívna, symetrická, antisymetrická, alebo tranzitívna, pričom $(x, y) \in R$ vtedy a len vtedy, ak

(a) x je menší ako y ,

(b) x a y sa narodili v rovnakom dni,

(c) x má rovnaké krstné meno ako y ,

(d) x a y majú aspoň jednu dvojicu rovnakých starých rodičov.

3.5. Zistite, či relácia R nad množinou všetkých www stránok je reflexívna, symetrická, antisymetrická, alebo tranzitívna, pričom $(x, y) \in R$ vtedy a len vtedy, ak

(a) každý, kto navštívil túto stránku x , navštívil aj stránku y ,

(b) neexistuje priame prepojenie medzi stránkami x a y ,

(c) existuje aspoň jedno prepojenie medzi stránkami x a y ,

(d) existuje stránka, ktorá obsahuje prepojenia tak na stránku x ako aj na stránku y .

3.6. Zistite, či relácia R nad množinou reálnych čísel je reflexívna, symetrická, antisymetrická, alebo tranzitívna, pričom $(x, y) \in R$ vtedy a len vtedy, ak

(a) $x + y = 0$,

(b) $x = \pm y$,

(c) $x - y$ je racionálne číslo,

(d) $x = 2y$,

(e) $xy \geq 0$,

(f) $xy = 0$,

(g) $x = 1$,

(h) $x = 1$ alebo $y = 1$.

3.7. Zostrojte inverznú reláciu $R^{-1} \subseteq Y \times X$ pre relácie $R \subseteq X \times Y$, ktoré sú špecifikované

(a) $R = \{(x, y); x < y\}$ nad množinou celých čísel,

(b) $R = \{(x, y); x \text{ je deliteľné } y\}$ nad množinou kladných celých čísel,
 $X, Y = \{1, 2, 3, \dots\} = \mathbb{N}$.

(c) R je relácia nad všetkými európskymi štátmi, ktorá obsahuje dvojicu (x, y) vtedy a len vtedy, ak štát x susedí so štátom y .

3.8. Nech $P = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4)\}$ a $Q = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4)\}$, $P, Q \subseteq X \times X$ sú relácie nad $X = \{1, 2, 3, 4\}$. Nájdite

- $P \cup Q, P \cap Q,$
- $P - Q, Q - P,$
- $\bar{P}, \bar{Q},$
- $P^{-1}, Q^{-1},$
- $P \circ Q, Q \circ P,$
- $(P \circ Q)^{-1}, (Q \circ P)^{-1},$
- $P^{-1} \circ Q^{-1}, Q^{-1} \circ P^{-1}.$

3.9. Nájdite chybu v dôkaze tejto vety:

Ak relácia $R \subseteq X \times X$ je symetrická a tranzitívna, potom je aj reflexívna.

Dôkaz: Nech $x \in X$, zoberte taký prvok $y \in X$ pre ktorý $(x, y) \in R$. Pretože R je symetrická relácia, potom taktiež $(y, x) \in R$. Použitím vlastnosti tranzitívnosti relácie R dostaneme $(x, x) \in R$, pretože $(x, y), (y, x) \in R$.

3.10. Nech $R, S \subseteq X \times X$ sú reflexívne relácie. Dokážte alebo vyvráťte tieto tvrdenia:

- $R \cup S$ je reflexívna relácia,
- $R \cap S$ je reflexívna relácia,
- $R - S$ je reflexívna relácia,
- $R \circ S$ je reflexívna relácia.

3.11. Dokážte tieto tvrdenia:

- Relácia $R \subseteq X \times X$ je symetrická vtedy a len vtedy, ak $R = R^{-1}$,
- Relácia $R \subseteq X \times X$ je antisymetrická vtedy a len vtedy, ak $R \cap R^{-1}$ je podmnožinou „diagonálnej“ relácie $\Delta = \{(x, x); x \in X\}$,
- Relácia $R \subseteq X \times X$ je reflexívna vtedy a len vtedy, ak R^{-1} je reflexívna relácia,
- Ak je relácia $R \subseteq X \times X$ reflexívna a tranzitívna, potom pre každé $n > 0$ platí, že $R^n = R$, kde $R^n = \underbrace{R \circ R \circ \dots \circ R}_{n\text{-krát}}$.

3.12. Rozhodnite, či $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ak

- $f(x) = 1/x,$

(b) $f(x) = \sqrt{x}$,

(c) $f(x) = \sqrt{1+x^2}$.

3.13. Nájdite definičný obor a obor hodnôt funkcií:

(a) funkcia priradí každému bitovému reťazcu rozdiel medzi počtom jednotiek a počtom núl v reťazci,

(b) funkcia priradí každému bitovému reťazcu dvojnásobok počtu núl v reťazci,

(c) funkcia priradí (štandardným spôsobom) každému bitovému reťazcu dekadické číslo.

3.14. Zistite, či funkcie $f: A \rightarrow A$, kde $A = \{a, b, c, d\}$, sú injektívne a nakreslite diagram zobrazenia podľa obr. 3.11:

(a) $f(a) = b, f(b) = a, f(c) = c, f(d) = d$,

(b) $f(a) = b, f(b) = b, f(c) = d, f(d) = c$,

(c) $f(a) = d, f(b) = b, f(c) = c, f(d) = d$.

3.15. Zistite, či funkcie $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, kde $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ je množina prirodzených čísel, môžu byť definované nasledujúcim spôsobom:

(a) $f(n) = n - 1$,

(b) $f(n) = n^2$,

(c) $f(n) = 1 + \text{integer}(n/2)$, kde $\text{integer}(x)$ je celá časť reálneho čísla,

(d) $f(n) = n^3$.

3.16. Nech $f: A \rightarrow B$, zostrojte obor hodnôt $H_f(A) \subseteq B$ kde $A = \{-1, 0, 2, 4, 7\}$, pre

(a) $f(x) = 1$,

(b) $f(x) = 2x + 1$,

(c) $f(x) = \text{integer}(x/5)$,

(d) $f(x) = \text{integer}\left(\frac{1+x^2}{3}\right)$.

3.17. Nech $f(x) = 2x$, zostrojte:(a) $f(A)$, kde A je množina celých čísel,(b) $f(A)$, kde A je množina kladných celých čísel,(c) $f(\mathbb{R})$, kde \mathbb{R} je množina reálnych čísel.**3.18.** Nech $f: A \rightarrow B$ a $g: B \rightarrow C$, dokážte, že ak funkcie f a g sú injektívne, potom aj ich kompozícia $f \circ g: A \rightarrow C$ je injektívna funkcia.

- 3.19.** Zostrojte zložené funkcie $f(g(x))$ a $g(f(x))$, kde $f(x) = 1 + x^2$ a $g(x) = x + 2$ sú funkcie s oborom reálnych čísel.
- 3.20.** Nech $f(x) = ax + b$ a $g(x) = cx + d$, kde a, b, c a d sú konštanty, zistite, za akých podmienok platí $f(g(x)) = g(f(x))$.
- 3.21.** Zistite, za ktorých podmienok existuje k funkcii $f(x) = ax + b$ funkcia inverzná $f^{-1}(x)$.
- 3.22.** Nech $f : A \rightarrow B$ a nech $A', A'' \subseteq A$. Dokážte platnosť týchto formúl:
- (a) $f(A' \cup A'') = f(A') \cup f(A'')$,
 - (b) $f(A' \cap A'') \subseteq f(A') \cap f(A'')$.
- 3.23.** Nech $f(x) = x^2$ je funkcia s oborom nezáporných reálnych čísel. Nájdite
- (a) $f^{-1}(1)$,
 - (b) $f^{-1}(\{x; 0 < x < 1\})$
 - (c) $f^{-1}(\{x; x > 4\})$.
- 3.24.** Nech $f : A \rightarrow B$ a nech $B', B'' \subseteq B$. Dokážte platnosť týchto formúl:
- (a) $f^{-1}(B' \cap B'') = f^{-1}(B') \cap f^{-1}(B'')$,
 - (b) $f^{-1}(B' \cup B'') = f^{-1}(B') \cup f^{-1}(B'')$.
- 3.25.** Nech $f : A \rightarrow B$ a nech $B' \subseteq B$. Dokážte platnosť formuly $f^{-1}(\overline{B'}) = \overline{f^{-1}(B')}$, kde $\overline{B'}$ je $B - B'$ a $\overline{f^{-1}(B')}$ je $A - H_{f^{-1}}(B')$.

4 KOMBINATORIKA I

BINOMICKÉ KOEFICIENTY • PERMUTÁCIE • KOMBINÁCIE

Predmetom štúdia tejto kapitoly budú základy kombinatoriky a jej jednoduché štruktúry – binomické koeficienty, permutácie a kombinácie. Tieto štruktúry umožňujú analyzovať rôzne enumeračné problémy, pričom výsledkom týchto analýz sú jednoduché explicitné formuly pre počet požadovaných objektov.

4.1 BINOMICKÉ KOEFICIENTY A PASCALOV TROJUHOLNÍK

POČET CIEST NA MRIEŽKE

Budeme študovať svet na ortogonálnej mriežke, na tejto mriežke máme umiestnené dva body S a G , našou úlohou je určiť počet všetkých možných optimálnych ciest z bodu S do bodu G po hranách mriežky (pozri obr. 4.1). Nech súradnice bodov S a G sú (i, j) resp. (k, l) , kde i, j, k a l sú kladné celé čísla (celočíselné súradnice) potom vzdialenosť medzi bodmi S a G je určená vzťahom

$$d(S, G) = |i - k| + |j - l| \quad (4.1)$$

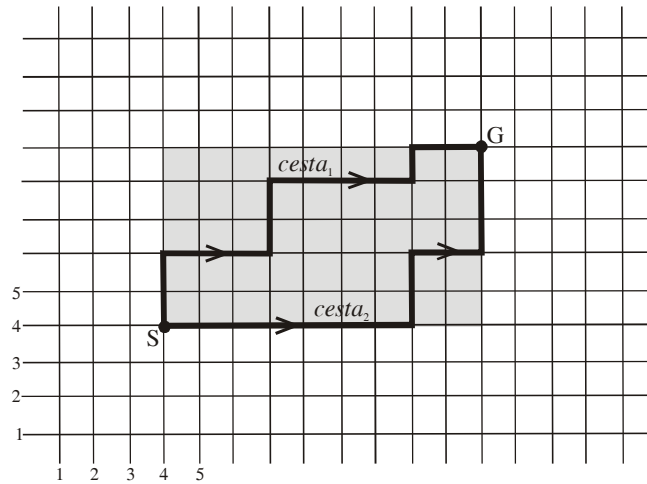
Pomocou tejto metriky¹ môžeme definovať aj pojem *optimálna* (alebo *minimálna*) *cesta*, ktorá spája body S a G : je to taká cesta, ktorej dĺžka (počet hrán ortogonálnej mriežky) je určená vzťahom (4.1). Z obr. 4.1 vyplýva, že daná cesta je pre $i \leq k$ a $j \leq l$ optimálna vtedy a len vtedy, ak je neklesajúca, t. j. neobsahuje úsek v ktorom by hodnoty buď prvej alebo druhej súradnice klesali.

PRÍKLAD 4.1.

Zistite, koľkými optimálnymi cestami sú spojené dva body S a G na ortogonálnej mriežke znázornenej na obr. 4.1.

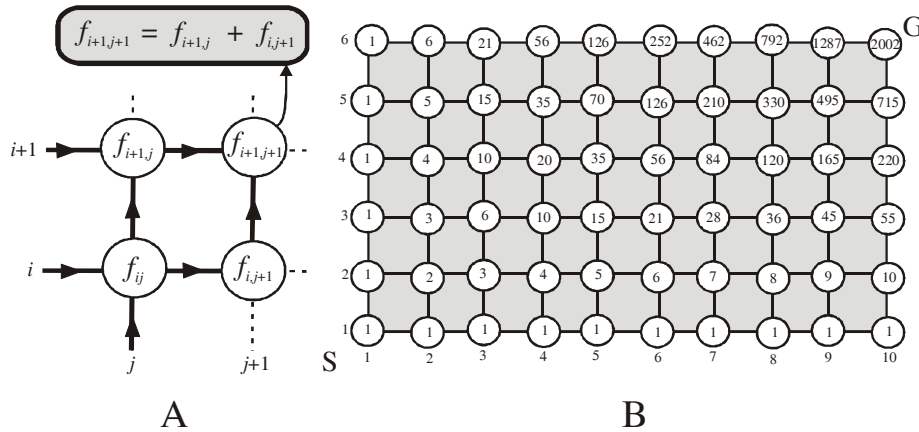
¹ V matematike je *metrika* taká funkcia $d(x, y)$, ktorá je (1) pozitívne definitná, $d(x, y) \geq 0$, pričom rovnosť platí len pre $x = y$, (2) symetrická, $d(x, y) = d(y, x)$, a (3) spĺňajúca „trojuholníkovú“ nerovnosť, $d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$.

OBRÁZOK 4.1.
OPTIMÁLNE CESTY
NA
ORTOGONÁLNEJ
MRIEŽKE



Svet na ortogonálnej mriežke, na ktorej sú umiestnené dva body S a G. Naším cieľom je zistiť, koľko existuje optimálnych (minimálnych) ciest, ktoré spájajú tieto dva body. Horizontálne a vertikálne čiary sú indexované kladnými celými číslami, ktoré špecifikujú polohu uzlov mriežky pomocou usporiadaných dvojíc kladných celých čísel, tak napr. bod S má súradnice (4,4).

OBRÁZOK 4.2.
URČENIE POČTU
OPTIMÁLNYCH
CIEST



(A) Diagram znázorňuje určenie počtu optimálnych ciest, ktoré končia vo vrchole $(i+1,j+1)$, ktorý je jednoducho určený súčtom počtov optimálnych ciest do vrcholov $(i,j+1)$ $(i+1,j)$. (B) Znáznorenie konštrukcie celového počtu ciest z vrcholu S do vrcholu G na výseku sveta ortogonálnej mriežky z obr. 4.1. Číslo uvedené v pravom hornom vrchole, 2002, je celkový počet optimálnych ciest z S do G.

Na obr. 4.2 je znázornený výsek ortogonálneho sveta z obr. 4.1. Budeme postupne počítat počty minimálnych ciest medzi východiskovým bodom S a bodmi, ktoré ležia medzi týmto bodom a koncovým bodom G. Ohodnotenie vrcholu s dvojicou indexov (i,j) je označené f_{ij} . Postupujeme tak, že predpokladáme, že máme už ohodnotené vrcholy, ktoré sú vzdialené od vrcholu S o d hrán, v nasledujúcom kroku budeme ohodnocovať vrcholy so vzdialenosťou $d+1$ použitím formule

$$f_{i+1,j+1} = f_{i,j+1} + f_{i+1,j} \quad (4.2)$$

Tento postup opakujeme tak dlho, až sa dostaneme do koncového bodu G. Výsledok tohto procesu je znázornený na diagrame B obr. 4.2. Koncový vrchol G je ohodnotený číslom 2002, to znamená, že z vrcholu S do vrcholu G existuje 2002 rôznych ciest.

Schéma výpočtu koeficientov f_{ij} v idealizovanej podobe je znázornená na obr. 4.2, diagram A, celý výpočet je znázornený na diagrame B.

DEFINÍCIA 4.1.
BINOMICKÝ

KOEFICIENT 

Binomický koeficient pre $i \geq j \geq 0$ je definovaný ako podiel

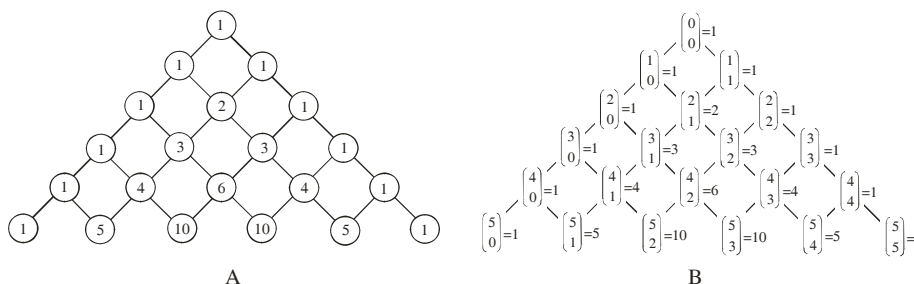
$$\binom{i}{j} = \frac{i!}{j!(i-j)!} \quad (4.3)$$

Binomické koeficienty sú jednoduchým spôsobom reprezentované pomocou Pascalovho² trojuholníka, pozri obr. 4.3. Tento diagram je založený na postupnej realizácii formuly (4.2). Jedná sa vlastne o pootočené (v smere hodinových ručičiek) diagramu A na obr. 4.2, okolo vrcholu S o uhol $3\pi/4$. Vyjadrenie koeficientov f_{ij} pomocou binomických koeficientov je založené na identite (pozri obr. 4.3, diagram B)

$$f_{ij} = \binom{i+j-2}{j-1} \quad (4.4)$$

pričom indexy i a j sú ohraničené podmienkou $i, j \geq 1$. Koeficienty f_{ij} , ktoré nevyhovujú tejto podmienke, sú pre konštrukciu Pascalovho trojuholníka nepodstatné, pretože, obrazne povedané, Pascalov trojuholník je zostrojený z vrcholu pyramídy smerom dole.

OBRÁZOK 4.3.
PASCALOV
TROJUHLNÍK
SČÍTANÍM
A BINOMICKÝMI
KOEFIČIENTAMI



(A) Pascalov trojuholník, ktorého jednotlivé členy sú zostrojené tak, že pre danú polohu získame aktuálny člen tak, že sčítame dva susedné vyššie členy. (B) Pascalov trojuholník vyjadrený pomocou binomických koeficientov.

Porovnaním diagramov A a B na obr. 4.3 zistíme, že binomické koeficienty vyhovujú podmienkam z tejto vety:

² Blaise Pascal (1623-1662), francúzsky matematik, fyzik a filozof, je pokladaný za zakladateľa modernej teórie pravdepodobnosti (v rámci ktorej objavil aj „Pascalov“ trojuholník), vo fyzike formuloval zákon, ktorý je v súčasnosti známy ako „Pascalov“ zákon tlaku a ktorý tvorí jeden zo základov hydrauliky. Ako 19-ročný mladík zostrojil jednu z prvých fungujúcich mechanických kalkulačiek. Vo filozofii sa venoval náboženskej tematike.

VETA 4.1.
BINOMICKÉ
KOEFIČIENTY –
PODMIENKY



Binomické koeficienty spĺňajú podmienky

$$\binom{k}{0} = \binom{k}{k} = 1 \quad (4.5a)$$

$$\binom{k}{1} = \binom{k}{k-1} = k \quad (4.5b)$$

$$\binom{k}{i} = \binom{k}{k-i} \quad (\text{pre } i=0,1,\dots,k) \quad (4.5c)$$

$$\binom{k}{i} + \binom{k}{i+1} = \binom{k+1}{i+1} \quad (4.5d)$$

Dôkaz týchto vlastností priamo plynie z definície (4.3) binomických koeficientov. Dokážeme (4.5d) (ktorá sa nazýva Pascalova identita a je prepisom formúl (4.2) a (4.4))

$$\begin{aligned} \binom{k+1}{i+1} &= \frac{(k+1)!}{(k-i)!(i+1)!} = \frac{k!(k+1)}{(k-i)!i!(i+1)} = \frac{k!}{(k-i)!i!} \frac{(k+1)}{(i+1)} = \\ &= \frac{k!}{(k-i)!i!} \frac{(i+1) + (k-i)}{(i+1)} = \frac{k!}{(k-i)!i!} \left(1 + \frac{k-i}{i+1}\right) = \binom{k}{i} + \binom{k}{i+1} \end{aligned}$$

Binomické koeficienty sú významné v algebre, kde umožňujú v kompaktnom tvare vyjadriť n -tú mocninu súčtu $(x+y)$.

VETA 4.2.
(BINOMICKÁ VETA)



Nech x a y sú ľubovoľné reálne čísla a n je kladné celé číslo, potom

$$(x+y)^n = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} x^{n-j} y^j \quad (4.6)$$

Dôkaz tejto vety možno vykonať pomocou indukcie. Zvolíme podstatne jednoduchší postup, ako dokázať binomickú formulu, ktorá je veľmi blízko spätá s úlohou nájsť počet optimálnych ciest, ktoré spájajú dva vrcholy na ortogonálnej mriežke. Položme si otázku, koľkými spôsobmi môže byť realizovaný súčin $x^i y^j$ z mocniny $(x+y)^n$. Tento súčin môže byť vytvorený dvoma elementárnymi operáciami z čiastočných výsledkov $x^{i-1} y^j$ a $x^i y^{j-1}$ násobením premennou x resp. premennou y

$$x^{i-1} y^j \cdot x \rightarrow x^i y^j, \quad x^i y^{j-1} \cdot y \rightarrow x^i y^j$$

Tento jednoduchý výsledok môžeme použiť aj na výpočet počtu spôsobov konštrukcie súčinu $x^i y^j$, pozri obr. 4.4. Nech symbol $N(x^i y^j)$ označuje počet spôsobov konštrukcie súčinu $x^i y^j$, potom platí (porovnaj s formulou (4.2))

$$N(x^i y^j) = N(x^{i-1} y^j) + N(x^i y^{j-1}) \quad (4.7)$$

Môžeme teda uzavrieť, že Pascalov trojuholník a trojuholník na obr. 4.4 sú ekvivalentné, čiže porovnaním obr. 4.4 s obr. 4.3, diagram B, dostávame, že počet

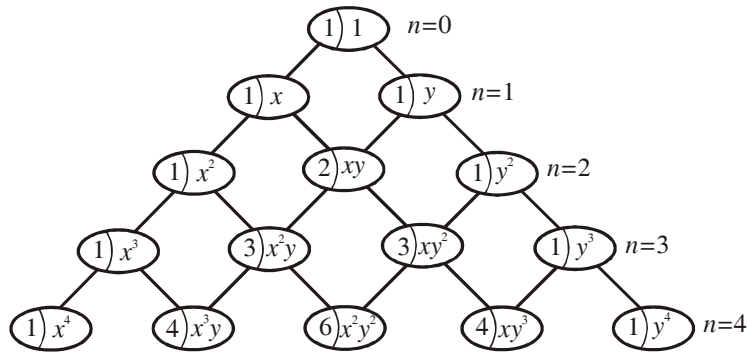
možných konštrukcií člena $x^{n-j}y^j$ je určený binomickým koeficientom $\binom{n}{j}$,

alebo

$$\begin{aligned}(x+y)^n &= \underbrace{(x+y)\dots(x+y)}_{n\text{-krát}} = \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \dots + \binom{n}{n}y^n \\ &= \sum_{j=0}^n \binom{n}{j}x^{n-j}y^j\end{aligned}$$

Týmto sme dokázali formulu (4.6).

OBRÁZOK 4.4.
PASCALOV
TROJUHOLNÍK PRE
SPÔSOBY
KONŠTRUKCIE
SÚČINOV $x^i y^j$



Verzia Pascalovho trojuholníka pre výpočet spôsobov konštrukcie súčinov $x^i y^j$. Šikmé čiary idúce z pravej do ľavej strany (z ľavej do pravej strany) vyjadrujú súčin premennou x (y). Čísla uvedené v ľavej strane oválov sú rovné, podobne ako v Pascalovom trojuholníku, binomickým koeficientom $\binom{i}{j}$.

PRÍKLAD 4.2.

Zostrojte rozvoj $(x+y)^4$.

Použitím binomickej vety dostaneme

$$\begin{aligned}(x+y)^4 &= \sum_{j=0}^4 \binom{4}{j}x^{4-j}y^j = \binom{4}{0}x^4 + \binom{4}{1}x^3y + \binom{4}{2}x^2y^2 + \binom{4}{3}x y^3 + \binom{4}{4}y^4 \\ &= x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4\end{aligned}$$

PRÍKLAD 4.3.

Aký je koeficient $x^{12}y^{13}$ v rozvoji $(x+y)^{25}$?

Z binomickej vety dostaneme, že tento koeficient je určený

$$\binom{25}{13} = \frac{25!}{13!12!} = 5\,200\,300$$

PRÍKLAD 4.4.


Aký je koeficient $x^{12}y^{13}$ v rozvoji $(2x-3y)^{25}$?

Použitím binomickej vety dostaneme

$$(2x + (-3y))^{25} = \sum_{j=0}^{25} \binom{25}{j} (2x)^{25-j} (-3y)^j$$

Potom koeficient, ktorý sa nachádza pri člene $x^{12}y^{13}$, je

$$\binom{25}{13} 2^{12} (-3)^{13} = -\frac{25!}{13!12!} 2^{12} 3^{13} = -174493112729600$$

VETA 4.3. 

Nech n je nezáporné celé číslo, potom

$$\sum_{j=0}^n \binom{n}{j} = 2^n \quad (4.8)$$

Táto formula je jednoduchým dôsledkom binomickej vety (4.6), keď položíme $x = y = 1$. Takto môžeme zostrojiť množstvo analogických forém, tak napríklad, ak položíme $x = 1$ a $y = 2$, potom

$$(1 + 2)^n = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} 2^j = 3^n \quad (4.9)$$

Alebo, ak položíme $x = 1$ a $y = -1$, potom

$$(1 - 1)^n = \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} = 0 \Rightarrow \sum_{j=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2j} = \sum_{j=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2j+1} \quad (4.10a)$$

alebo

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \dots = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \dots \quad (4.10b)$$

kde $\lceil x \rceil$ je horná celá časť reálneho čísla x .

VETA 4.4.
REKURENTNÉ
VZŤAHY BINOM.
KOEFCIENTOV

Binomické koeficienty spĺňajú

$$\binom{i}{j+1} = \frac{i-j}{j+1} \binom{i}{j} \quad (4.11a)$$

$$\binom{i+1}{j} = \frac{i+1}{i-j+1} \binom{i}{j} \quad (4.11b)$$

Tieto rovnosti môžu byť jednoducho odvodené priamo z definície binomických koeficientov

$$\binom{i+1}{j} = \frac{(i+1)!}{j!(i+1-j)!} = \frac{i!}{j!(i-j)!} \frac{i+1}{i-j+1} = \frac{i+1}{i-j+1} \binom{i}{j}$$

PRÍKLAD 4.5.

Ukážeme jednoduchý ilustračný príklad použitia vzťahov (4.11) pre jednoduchý rekurentný výpočet binomických koeficientov. Ako ilustráciu uvidíme výpočet koeficientov $\binom{5}{j}$, pričom bude vychádzať zo známej hodnoty koeficienta

$$\binom{5}{0} = 1.$$

1. krok:

$$\binom{5}{1} = \binom{5}{0+1} = \frac{5}{1} \binom{5}{0} = 5$$

2. krok:

$$\binom{5}{2} = \binom{5}{1+1} = \frac{4}{2} \binom{5}{1} = 10$$

3. krok:

$$\binom{5}{3} = \binom{5}{2+1} = \frac{3}{3} \binom{5}{2} = 10$$

4. krok:

$$\binom{5}{4} = \binom{5}{3+1} = \frac{2}{4} \binom{5}{3} = 5$$

5. krok:

$$\binom{5}{5} = \binom{5}{4+1} = \frac{1}{5} \binom{5}{4} = 1$$

6. krok:

$$\binom{5}{6} = \binom{5}{5+1} = \frac{0}{6} \binom{5}{5} = 0$$

Formula (4.11a) poskytuje nulové binomické koeficienty $\binom{i}{j}$, pre $i < j$. Tento

spôsob výpočtu binomických koeficientov môžeme charakterizovať tak, že sme počítali koeficienty v 5. riadku Pascalovho trojuholníka. Alternatívna formula (4.11b) umožňuje prechod medzi dvoma susednými riadkami v Pascalovom trojuholníku. Tak napríklad zo známeho koeficienta $\binom{5}{1}$ spočítame koeficient $\binom{6}{1}$


$$\binom{6}{1} = \binom{5+1}{1} = \frac{6}{5} \binom{5}{1} = 6$$

Význam tohto rekurentného spôsobu výpočtu binomických koeficientov spočíva v tom, že ak potrebujeme poznať napr. koeficient $\binom{100}{3}$, jeho priamy výpočet z definície (4.3) naráža na veľké problémy s presnosťou aritmetiky v počítačoch.

Preto je výhodné vychádzať zo známeho koeficienta $\binom{100}{0} = 1$, použitím (4.11a)

postupne vypočítame koeficienty $\binom{100}{1} = 100$, $\binom{100}{2} = 4950$, $\binom{100}{3} = 161700$.

Priamy výpočet v počítači podľa vzorca $\binom{100}{3} = \frac{100!}{97! \cdot 3!}$ je v rámci štandardnej aritmetiky počítača nerealizovateľný.

VETA 4.5. 
 (VANDERMONDEO
 VA³ IDENTITA)

$$\binom{m+n}{r} = \sum_{i=0}^r \binom{m}{r-i} \binom{n}{i} \quad (4.12)$$

Dôkaz tejto vety vykonáme pomocou binomickej vety 4.2, uvažujme výraz

$$(1+x)^m (1+x)^n = (1+x)^{m+n}$$


Na obidve strany aplikujeme formulu (4.6)

$$\begin{aligned} (1+x)^m (1+x)^n &= \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} x^j \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x^i = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \binom{m}{j} \binom{n}{i} x^{i+j} = \sum_{r=0}^{m+n} \left(\sum_{i=0}^r \binom{m}{r-i} \binom{n}{i} \right) x^r \\ (1+x)^{m+n} &= \sum_{r=0}^{m+n} \binom{m+n}{r} x^r \end{aligned}$$

Porovnaním pravých strán týchto výrazov dostaneme formulu (4.12)

Ak položíme v (4.12) $m = n$ a $r = n$, potom dostaneme novú identitu pre binomické koeficienty

$$\binom{2n}{n} = \sum_{i=0}^n \binom{n}{n-i} \binom{n}{i} = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i}^2$$

VETA 4.6. 

Nech $n \geq r$ sú nezáporné celé čísla, potom

$$\binom{n+1}{r+1} = \sum_{j=r}^n \binom{j}{r} \quad (4.13)$$


Vetu dokážeme opakovaním použitím Pascalovej identity (4.5d)

$$\begin{aligned} \binom{n+1}{r+1} &= \binom{n}{r} + \binom{n}{r+1} \\ \binom{n}{r+1} &= \binom{n-1}{r} + \binom{n-1}{r+1} \\ \binom{n-1}{r+1} &= \binom{n-2}{r} + \binom{n-2}{r+1} \\ &\dots \end{aligned}$$

Potom platí

$$\binom{n+1}{r+1} = \binom{n}{r} + \binom{n-1}{r} + \binom{n-2}{r} + \dots + \binom{r}{r} = \sum_{j=r}^n \binom{j}{r}$$

³ Alexandre Théophile Vandermonde (1735–1796) francúzsky matematik, fyzik, technolog a politik. V priebehu rokov 1771 až 1772 publikoval tri práce, v ktorých sa zaoberal teóriou koreňov algebraických rovníc. Na záver svojho života bol aktívnym politikom Francúzskej revolúcie, zastával významné funkcie vo vláde.

VETA 4.7.
(MULTINOMICKÁ
VETA) 

Nech n je kladné prirodzené číslo, potom pre ľubovoľné reálne x_1, x_2, \dots, x_p platí

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_p)^n = \sum \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_p!} x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots x_p^{n_p} \quad (4.14)$$

kde suma ide cez všetky nezáporné indexy n_1, n_2, \dots, n_p , ktoré vyhovujú podmienke $n_1 + n_2 + \dots + n_p = n$.

Dôkaz tejto vety vykonáme tak, že binomickú formulu (4.6) prepíšeme do iného tvaru, ktorý budeme pokladať za indukčnú hypotézu.

$$(x_1 + x_2)^n = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} x_1^{n-j} x_2^j = \sum \frac{n!}{n_1! n_2!} x_1^{n_1} x_2^{n_2} \quad (\spadesuit)$$

kde sumácia ide cez nezáporné indexy, ktoré vyhovujú podmienke $n_1 + n_2 = n$. Túto formulu, ktorá je formálnym prepisom binomickej formuly, aplikujeme pre rozklad $n = 3$, pričom použijeme substitúciu $x_2 \rightarrow (x_2 + x_3)$. Dvojnásobným použitím hypotézy (\spadesuit) dostaneme

$$\begin{aligned} (x_1 + (x_2 + x_3))^n &= \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} x_1^{n-j} (x_2 + x_3)^j = \sum \frac{n!}{n_1! n_2!} x_1^{n_1} (x_2 + x_3)^{n_2} \\ &= \sum \frac{n!}{n_1! n_2!} x_1^{n_1} \sum \frac{n_2!}{m_2! m_3!} x_2^{m_2} x_3^{m_3} = \sum \frac{n!}{n_1! m_2! m_3!} \frac{n_2!}{n_1! n_2! m_2! m_3!} x_1^{n_1} x_2^{m_2} x_3^{m_3} \\ &= \sum \frac{n!}{n_1! n_2! n_3!} x_1^{n_1} x_2^{n_2} x_3^{n_3} \end{aligned}$$

Tento postup môžeme opakovať tak dlho, až získame formulu (4.14) pre dané n .

PRÍKLAD 4.6.

Zostrojte koeficient pri x^4 vo výraze $(1 - x + 2x^2)^5$.

Použijeme formulu (4.14)

$$\begin{aligned} (1 - x + 2x^2)^5 &= \sum_{n_1, n_2, n_3 \geq 0} \frac{5!}{n_1! n_2! n_3!} (1)^{n_1} (-x)^{n_2} (2x^2)^{n_3} \\ &= 5! \sum_{n_1, n_2, n_3 \geq 0} \frac{(-1)^{n_2} 2^{n_3}}{n_1! n_2! n_3!} x^{n_2 + 2n_3} \end{aligned} \quad (\clubsuit)$$

príčom sumačné indexy vyhovujú podmienke $n_1 + n_2 + n_3 = 5$. Pretože nás zaujíma koeficient pri x^4 , sumačné indexy musia vyhovovať ďalšej podmienke $n_2 + 2n_3 = 4$, potom prípustné hodnoty sumačných indexov sú: (3,0,2), (2,2,1) a (1,4,0). Dosadením týchto prípustných indexov do formuly (\clubsuit) dostaneme explicitný výraz pre koeficient pri x^4 v rozvoji $(1 - x + 2x^2)^5$

$$5! \left(\frac{2^2}{3!0!2!} + \frac{2^1}{2!2!1!} + \frac{2^0}{1!4!0!} \right) = 105$$

4.2 PERMUTÁCIE A KOMBINÁCIE

DEFINÍCIA 4.2. PERMUTÁCIA



Permutácia množiny $A = \{o_1, o_2, \dots, o_n\}$ obsahujúcej n rôznych objektov, je usporiadaná n -tica objektov z tejto množiny, $P = (o_{p_1}, o_{p_2}, \dots, o_{p_n})$. Usporiadaná r -tica (kde $1 \leq r \leq n$) objektov z množiny A sa nazýva **r -permutácia** (alternatívne **variácia** r -tej triedy z n prvkov).

Permutácia P býva v mnohých prípadoch stotožňovaná priamo s indexmi p_i , preto budeme permutáciu aj označovať takto

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{pmatrix} \quad (4.15a)$$

alebo v zjednodušenom tvare

$$P = (p_1, p_2, \dots, p_n) \quad (4.15b)$$

Permutáciu v tvare (4.15) môžeme taktiež interpretovať ako bijektívne zobrazenie množiny $A = \{1, 2, \dots, n\}$ na seba, $P: A \rightarrow A$, pozri obr. 3.16.

PRÍKLAD 4.7.

Navrhnite algoritmus pre náhodnú generáciu permutácie n objektov. Podmienka „náhodnosti“ generovanej permutácie spočíva v tom, že ak by sme algoritmus použili M -krát, $M \rightarrow \infty$, potom pravdepodobnosť $\text{prob}(p_i = k)$, že v pozícii i bude kladné celé číslo $1 \leq k \leq n$, $p_i = k$, má asymptotickú hodnotu rovnakú pre každé i

$$\forall i \forall k \left(\lim_{M \rightarrow \infty} \text{prob}(p_i = k) = \frac{1}{n} \right)$$

Túto podmienku nie je ľahké dodržať pri návrhu algoritmu schopného úplne náhodne generovať permutáciu. Jednu z možných implementácií takého algoritmu uvádzame v Pascale

ALGORITMUS 4.1.

NÁHODNE
GENEROVANIE
PERMUTÁCIE

```

for i:=1 to n do ei:=i;
for i:=1 to n do
  begin k:=random(n-i+1)+1;
    pi:=ek;
    for j:=k to n-i+1 do ej:=ej+1;
  end;

```

Algoritmus je inicializovaný vytvorením postupnosti $e = (1, 2, \dots, n)$. Potom pre $i=1, 2, \dots, n$ vygenerujeme náhodné číslo k z intervalu $\langle 1, n-i+1 \rangle$, položíme $p_i := e_k$, pričom časť postupnosti s indexmi z intervalu $\langle k+1, n-i+1 \rangle$ sa posunie o jeden člen vľavo (zaplní sa prázdne miesto po použití e_k).

OBRÁZOK 4.5.
NÁHODNÉ
GENEROVANIE
PERMUTÁCIE

	p	e								
$i=1$	<table border="1" style="display: inline-table; border-collapse: collapse;"> <tr><td style="width: 20px; height: 20px; text-align: center;">2</td><td style="width: 20px; height: 20px;"></td><td style="width: 20px; height: 20px;"></td><td style="width: 20px; height: 20px;"></td></tr> </table>	2				<table border="1" style="display: inline-table; border-collapse: collapse;"> <tr><td style="width: 20px; height: 20px; text-align: center;">1</td><td style="width: 20px; height: 20px; background-color: #e0e0e0; text-align: center;">2</td><td style="width: 20px; height: 20px; text-align: center;">3</td><td style="width: 20px; height: 20px; text-align: center;">4</td></tr> </table>	1	2	3	4
2										
1	2	3	4							
$i=2$	<table border="1" style="display: inline-table; border-collapse: collapse;"> <tr><td style="width: 20px; height: 20px; text-align: center;">2</td><td style="width: 20px; height: 20px; text-align: center;">4</td><td style="width: 20px; height: 20px;"></td><td style="width: 20px; height: 20px;"></td></tr> </table>	2	4			<table border="1" style="display: inline-table; border-collapse: collapse;"> <tr><td style="width: 20px; height: 20px; text-align: center;">1</td><td style="width: 20px; height: 20px; text-align: center;">3</td><td style="width: 20px; height: 20px; background-color: #e0e0e0; text-align: center;">4</td><td style="width: 20px; height: 20px;"></td></tr> </table>	1	3	4	
2	4									
1	3	4								
$i=3$	<table border="1" style="display: inline-table; border-collapse: collapse;"> <tr><td style="width: 20px; height: 20px; text-align: center;">2</td><td style="width: 20px; height: 20px; text-align: center;">4</td><td style="width: 20px; height: 20px; text-align: center;">1</td><td style="width: 20px; height: 20px;"></td></tr> </table>	2	4	1		<table border="1" style="display: inline-table; border-collapse: collapse;"> <tr><td style="width: 20px; height: 20px; background-color: #e0e0e0; text-align: center;">1</td><td style="width: 20px; height: 20px; text-align: center;">3</td><td style="width: 20px; height: 20px;"></td><td style="width: 20px; height: 20px;"></td></tr> </table>	1	3		
2	4	1								
1	3									
$i=4$	<table border="1" style="display: inline-table; border-collapse: collapse;"> <tr><td style="width: 20px; height: 20px; text-align: center;">2</td><td style="width: 20px; height: 20px; text-align: center;">4</td><td style="width: 20px; height: 20px; text-align: center;">1</td><td style="width: 20px; height: 20px; text-align: center;">3</td></tr> </table>	2	4	1	3	<table border="1" style="display: inline-table; border-collapse: collapse;"> <tr><td style="width: 20px; height: 20px; background-color: #e0e0e0; text-align: center;">3</td><td style="width: 20px; height: 20px;"></td><td style="width: 20px; height: 20px;"></td><td style="width: 20px; height: 20px;"></td></tr> </table>	3			
2	4	1	3							
3										

Príklad náhodného generovania permutácie 4 objektov. Z pomocnej postupnosti e v každom kroku i vyberieme náhodne element (vysvietené okienko) a použijeme ho do tvorby permutácie p .

PRÍKLAD 4.8.

Navrhňte algoritmus pre systematické generovanie všetkých permutácií n objektov.

Naivné riešenie tejto úlohy spočíva v prístupe, že sa napíše n do seba vnorených cyklov premenných p_1, p_2, \dots, p_n , testovaním zostrojíme takú postupnosť týchto premenných, že ich číselné hodnoty sú rôzne (t. j. neexistujú také $i \neq j$, aby $p_i = p_j$). Tento algoritmus musí zostrojiť n^n postupností, aby z nich testovaním vybral $n!$ korektných postupností reprezentujúcich permutácie. Navyše, štruktúra algoritmu sa mení s dimenziou úlohy n ; napríklad, ak zväčšíme n na $n+1$, potom musíme pridať ďalší vnorený cyklus pre premennú p_{n+1} . Na prekonanie týchto algoritmických problémov s konštrukciou všetkých permutácií použijeme metódu prehľadávania do hĺbky, ktorá sa systematickým spôsobom pohybuje po strome riešení, pričom na konci každej vetvy stromu riešení máme zostrojenú postupnosť čísel p_1, p_2, \dots, p_n , ktorá reprezentuje novú permutáciu. Použitý algoritmus je univerzálne platný pre každé kladné n .

ALGORITMUS 4.2.
SYSTEMATICKÉ
GENEROVANIE
VŠETKÝCH
PERMUTÁCIÍ

```

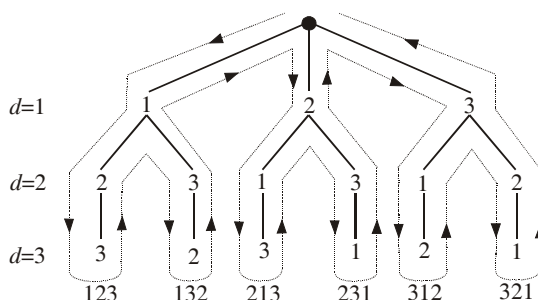
U1 := {1, 2, ..., n}; d := 1;
while d > 0 do
  if Ud ≠ {} then
    begin pd := get_element(Ud); Ud := Ud - {pd};
      if d < n then
        begin d := d + 1;
          Ud := {1, 2, ..., n} - {p1, p2, ..., pd-1};
        end else print(p1, p2, ..., pn);
      end else d := d - 1;

```

Premenná d určuje hĺbku prehľadávania. Pre každú hĺbku prehľadávania d sa definuje nová množina indexov U_d , z ktorej sa vyberajú kandidáti na predĺženie postupnosti o jeden člen. Množina U_d sa zostrojuje tak, aby neobsahovala indexy z aktuálnej postupnosti indexov, takže nemusíme neustále testovať, či nový pridaný index sa rovná niektorému predchádzajúcemu indexu z postupnosti. Algoritmus končí, keď množiny kandidátov U_1, U_2, \dots, U_n sú prázdne. Aktiváciou

procedúry - funkcie `get_element(A)` dostaneme element neprázdnjej množiny A . Beh algoritmu pre $n=3$ je znázornený na obr. 4.6, kde je uvedený strom riešení pre danú úlohu a prerušovanou orientovanou čiarou je znázornený pohyb algoritmu po celom strome.

OBRÁZOK 4.6.
STROM
KONŠTRUKCIE
PERMUTÁCIÍ



Strom riešení konštrukcie všetkých permutácií pre $n=3$ metódou prehľadávania do hĺbky.

VETA 4.8.
 R -PERMUTÁCIE

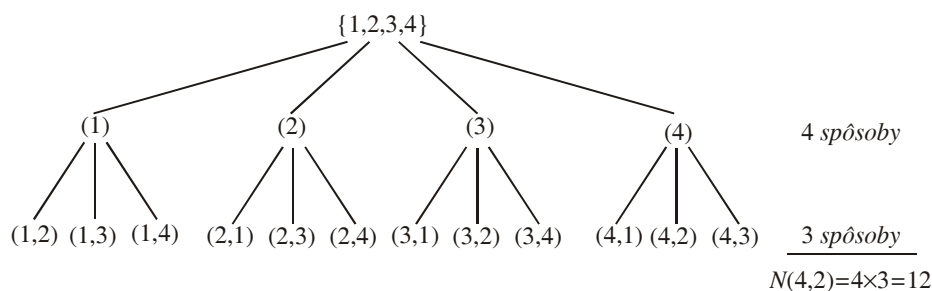


Počet r -permutácií množiny n objektov je

$$N(n, r) = n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!} \quad (4.16)$$

Dôkaz tejto vety je jednoduchý. Prvý element permutácie môže byť vybraný z množiny A n spôsobmi. Potom nám zostáva $n-1$ spôsobov výberu druhého elementu atď., pozri obr. 4.7.

OBRÁZOK 4.7.
2-PERMUTÁCIE Z
4 OBJEKTOV



Znázornenie tvorby 2-permutácií z množiny 4 objektov.

PRÍKLAD 4.9.

Koľkými možnými spôsobmi možno vybrať prvých troch víťazov súťaže, do ktorej sa prihlásilo 100 účastníkov?

Pretože je podstatné, ktorá osoba bude odmenená prvou, druhou alebo treťou cenou, počet spôsobov výbery prvých troch odmenených je špecifikovaný počtom 3-permutácií zo 100 objektov

$$N(100, 3) = 100 \cdot 99 \cdot 98 = 970\,200$$

PRÍKLAD 4.10.

Nech na športovom podujatí sa zúčastňuje 8 pretekárov. Víťaz bude odmenený zlatou medailou, pretekár, ktorý skončí na druhom mieste bude odmenený striebornou medailou a pretekár, ktorý skončí na tretom mieste bude odmenený bronzovou medailou. Koľkými rôznymi spôsobmi môžu byť odmenení pretekári tromi medailami?

Celkový počet troch pretekárov, ktorí sú odmenení medailou sa rovná počtu 3-permutácií z 8 objektov, $N(8,3) = 8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$.

DEFINÍCIA 4.3.
R-KOMBINÁCIA




***r*-kombinácia elementov** množiny $A = \{o_1, o_2, \dots, o_n\}$ je podmnožina, ktorá obsahuje r elementov, $A' = \{o_{p_1}, o_{p_2}, \dots, o_{p_r}\} \subseteq A = \{o_1, o_2, \dots, o_n\}$.

Tak napríklad, pre $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ je podmnožina $A' = \{2, 4, 6\}$ 3-kombináciou z A . Počet r -kombinácií z množiny obsahujúcej n elementov je označený veličinou $C(n, r)$.

PRÍKLAD 4.11.

Vytvorte všetky možné 2-kombinácie elementov z množiny $A = \{a, b, c, d\}$. Potom existuje $C(4, 2) = 6$ 2-kombinácií, ktoré sú reprezentované podmnožinami $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{a, d\}$, $\{b, c\}$, $\{b, d\}$ a $\{c, d\}$.

VETA 4.9. 
POČET
R-KOMBINÁCIÍ

Počet r -kombinácií z množiny n objektov (alternatívny názov je kombinácie r -tej triedy z n prvkov) je

$$C(n, r) = \binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!r!} \quad (4.17)$$

Dôkaz tejto formuly je jednoduchý a je založený na tom, že podľa vety 4.8 poznáme počet r -permutácií $N(n, r)$, pretože permutácie sú závislé na poradí r elementov, musíme číslo $N(n, r)$ podeliť $N(r, r) = r!$

$$C(n, r) = \frac{N(n, r)}{N(r, r)} = \frac{n!(n-r)!}{r!(n-r)!} = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \binom{n}{r}.$$

Týmto sme dokázali, že počet r -kombinácií nad množinou, ktorá obsahuje n elementov, je určený binomickým koeficientom $\binom{n}{r}$.

„KOMBINATORICKÝ
DŮKAZ“

Jeden z fundamentálnych pojmov kombinatoriky je „**kombinatorický dôkaz**“, je to taký dôkaz, ktorý minimalizuje použitie algebraických metód (napr. formúl špecifikujúcich vlastnosti binomických koeficientov), ale skôr je založený na argumentoch „spočítania“ a „zahrnutia“ elementov, pričom sa vychádza z elementárnych pojmov kombinatoriky, akými sú permutácie a kombinácie. Nie vždy je tento postup použiteľný alebo konceptuálne jasný, preto aj v kombinatorike sa v mnohých prípadoch obraciame na štandardné algebraické metódy založené na úprave formúl a úplnej indukcií.

PRÍKLAD 4.12.

Gymnázium X sa dohodlo s partnerským gymnáziom Y , že usporiadajú spoločný tenisový turnaj, na ktorom sa z každého gymnázia zúčastní päť študentov. Nech gymnázium X (Y) má k dispozícii 10 (15) hráčov, koľko rôznych spôsobov obsadenia turnaja môžu gymnázia zostaviť?

Gymnázium X môže zostaviť $C(10,5)$ rôznych tímov a gymnázium Y môže zostaviť $C(15,5)$ rôznych tímov, súčin týchto čísel nám poskytuje počet rôznych spôsobov obsadenia turnaja

$$C(10,5) \times C(15,5) = \binom{10}{5} \binom{15}{5} = 756756$$

t. j. môžu zostaviť 756756 spôsobov obsadenia tenisového turnaja.

V mnohých prípadoch máme riešiť kombinatorické problémy, kde je povolené opakovanie určitých elementov. Ako príklad môžeme uviesť reťazec 6 znakov AABBC, stojíme pred úlohou vypočítať všetky možné a neekvivalentné reťazce, ktoré môžu byť zostrojené z tohto reťazca permutáciami jeho elementov. Prvé intuitívne riešenie tohto problému je, že existuje $6!$ rôznych reťazcov, ktoré môžu byť zostrojené permutáciami pôvodného reťazca AABBC. Táto odpoveď nie je správna, pretože ignoruje skutočnosť, že reťazce obsahuje tri dvojice (AA, BB a CC) rovnakých znakov, ktoré nie sú medzi sebou rozlíšiteľné. Preto musíme pôvodný výsledok opraviť tak, aby obsahoval aj možnosť opakovania týchto symbolov, potom celkový počet neekvivalentných reťazcov je

$$6! / (2! \cdot 2! \cdot 2!) = (2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6) / (2 \cdot 2 \cdot 2) = 90$$

Pod permutáciou s opakovaním budeme rozumieť len vytváranie takých usporiadaných n -tíc z objektov množiny A , ktoré sú rôzne, čiže opakovanie n -tíc v dôsledku prehodenia poradia rovnakých elementov v A je vylúčené.

VETA 4.10.
PERMUTÁCIE
S OPAKOVANÍM



Počet permutácií *s opakovaním* n objektov, medzi ktorými je n_1 nerozlišiteľných objektov prvého typu, n_2 nerozlišiteľných objektov druhého typu, ..., a n_p nerozlišiteľných objektov p -teho typu, pričom $n_1 + n_2 + \dots + n_p = n$, je určený

$$\frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_p!} \quad (4.18)$$

Kombinatorický dôkaz je pomerne ľahký, je založený na skutočnosti, že celkový počet permutácií n objektov, ktorý je rovný $n!$, je podelený počtami permutácií 1. typu, 2. typu, ..., týmto sa implementuje skutočnosť, že objekty rovnakého typu nie sú odlišiteľné. Náznaky nekombinatorického dôkazu (4.18) boli použité pri dôkaze vety 4.7.

MULTIMNOŽINA


Problém zavedenia r -permutácií s opakovaním vyžaduje tento komentár: Z definície množiny vyplýva, že každý element sa v množine vyskytuje práve jedenkrát. Nech $a \in A$, potom $a \notin (A - \{a\})$. Avšak pri špecifikácii r -permutácií s opakovaním pripúšťame možnosť, že niektoré elementy sa vyskytujú v množine aspoň dvakrát. Táto konceptuálna nekonzistentnosť zavedenia r -permutácie je formálne odstránená postulátom, že množina A je multimnožina, v ktorej je prípustné opakovanie niektorých elementov. Tak napr. $A = \{a, a, b\}$ je multimnožina, ktorá obsahuje element a dvakrát. Multimnožina môže byť formálne chápaná ako obyčajná množina, keď zavedieme indexovanie elementov, ktoré sa opakujú,

napr. $A = \{a_1, a_2, b\}$; týmto indexovaním sú elementy dobre navzájom odlišené. Obvykle sa v literatúre tento problém s opakovaním nespomína, je však dobré, aby každý vedel, o čo sa jedná a ako sa to dá riešiť na formálnej úrovni tak, aby použité formulácie boli korektné.

**R-PERMUTÁCIE
S OPAKOVANÍM
BEZ
ANALYTICKÉHO
RIEŠENIA**

Problém určenia počtu r -permutácií s opakovaním nie je vo všeobecnosti riešiteľný analyticky pomocou formúl, ako je tomu napríklad pri určení počtu permutácií n objektov s opakovaním pomocou formuly (4.18). Preto, ak chceme riešiť nejaký konkrétny príklad zistenia počtu r -permutácií s opakovaním, musíme použiť počítačovú enumeráciu týchto permutácií.

Uvažujme tento zjednodušený prípad r -permutácií s opakovaním. Chceme zostrojiť usporiadanú r -ticu, $(\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_r)$, kde jej zložky α_i sú brané z množiny obsahujúcej k znakov, $B = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k\}$.

VETA 4.11. 

**R-PERMUTÁCIE
PRE k ZNAKOV**

Celkový počet r -permutácií obsahujúcich k znakov je

$$k^r \quad (4.19)$$

PRÍKLAD 4.13.

Vytvoríme 2-permutácie s opakovaním nad množinou znakov $B = \{a, b\}$, touto množinou.

$$P_1^{(2)} = (aa), P_2^{(2)} = (ab), P_3^{(2)} = (ba), P_4^{(2)} = (bb)$$


Použitím formuly (4.18) dostaneme počet 2-permutácií

$$2^2 = 4$$

Kombinácia s opakovaním v zjednodušenom prístupe môže byť chápaná ako vytváranie množiny, ktorá obsahuje n elementov, pričom elementy sú odlišiteľné podľa k druhov. Pre ilustráciu tohto pojmu pokúsme sa vytvoriť množinu, ktorá obsahuje $n = 3$ prvkov, pričom tieto prvky sú troch druhov, označené napr. a, b a c . Takto špecifikované množiny sú

$$S_1 = \{a, a, a\}, S_2 = \{a, a, b\}, S_3 = \{a, a, c\}, S_4 = \{b, b, b\}, S_5 = \{a, b, b\}, \\ S_6 = \{b, b, c\}, S_7 = \{c, c, c\}, S_8 = \{a, c, c\}, S_9 = \{b, c, c\}, S_{10} = \{a, b, c\}$$

VETA 4.12.

**R-KOMBINÁCIE
Z k ZNAKOV** 

Celkový počet r -kombinácií z k znakov je

$$\binom{r+k-1}{k-1} \quad (4.20)$$

Kombinatorický dôkaz tejto vety spočíva v predstave, že prvky množiny r -kombinácie z k znakov sú usporiadané lineárne tak, že najprv idú prvé znaky, potom druhé znaky atď. Skupiny rovnakých znakov v tomto lineárnom útvere sú oddelené „separátormi“, ktorých je $k - 1$. Tak napríklad, množiny z vyššie uvedeného ilustračného príkladu môžeme upraviť pomocou separátorov

$$S_1 = \{a, a, a | \}, S_2 = \{a, a, | b \}, S_3 = \{a, a, | | c \}, S_4 = \{| b, b, b \}, S_5 = \{a, | b, b \}, \\ S_6 = \{| b, b, | c \}, S_7 = \{ | | c, c, c \}, S_8 = \{a | | c, c \}, S_9 = \{| b |, c, c \}, S_{10} = \{a, | b |, c \}$$

Teraz je už zrejmé, že počet r -kombinácií z k znakov sa rovná počtu umiestnení $k-1$ separátorov na $r+k-1$ miest, tento počet je určený binomickým koeficientom (4.20).

PRÍKLAD 4.14. Koľko je usporiadaných rozkladov čísla 10 na 4 kladné sčítance?

Predstavme si číslo 10 ako rad 10 jednotiek, medzi ktoré umiestnime 3 separátory, počet jednotiek medzi dvoma separátormi určuje jednotlivé sčítance. Stojíme však pred problémom, ako zabezpečiť, aby každý sčítanec bol nenulový, alebo aby dva separátory nestáli bezprostredne vedľa seba. Toto zabezpečíme tak, že z 10 jednotiek odoberieme 4 jednotky a rozdelíme ich medzi jednotlivé sčítance. Tým máme zaručenú nenulovosť každého sčítanca, riešenie úlohy potom už musíme len rozdeliť pomocou troch separátorov $10-4=6$ jednotiek, čo je určené binomickým koeficientom

$$\binom{6+4-1}{4-1} = 84$$

ZHRNUTIE

BINOMICKÝ KOEFICIENT

Binomický koeficient pre $i \geq j \geq 0$ je definovaný ako podiel

$$\binom{i}{j} = \frac{i!}{j!(i-j)!}$$

Koeficient má pomerne jednoduchú geometrickú interpretáciu ako počet ciest na ortogónalnej mriežke z východiskového bodu $(1,1)$ do koncového bodu $(1+i,1+j)$. Alternatívny spôsob definície koeficientov je pomocou Pascalovho trojuholníka. Binomické koeficienty určujú koeficienty v binomickej vete

$$(x+y)^n = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} x^{n-j} y^j$$

ktorá sa matematickou indukciou jednoducho zovšeobecní na multinomickú vetu

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_p)^n = \sum \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_p!} x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots x_p^{n_p}$$

Binomické koeficienty vyhovujú rôznym rekurentným vzťahom, ktoré podstatne uľahčujú ich výpočet.

PERMUTÁCIA

Permutácia množiny n rôznych objektov, $A = \{o_1, o_2, \dots, o_n\}$ je usporiadaná n -tica objektov z tejto množiny, $P = (o_{p_1}, o_{p_2}, \dots, o_{p_n})$. Permutácia P býva v mnohých prípadoch stotožňovaná priamo s indexmi p_i , preto budeme permutáciu aj označovať takto

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{pmatrix}$$

alebo v zjednodušenom tvare

$$P = (p_1, p_2, \dots, p_n)$$

R-PERMUTÁCIA

Usporiadaná *r*-ticia (kde $1 \leq r \leq n$) objektov z množiny *A* sa nazýva *r*-permutácia. Počet *r*-permutácií množiny *n* objektov je

$$N(n, r) = n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Počet permutácií *s opakovaním* *n* objektov, medzi ktorými je n_1 nerozlíšiteľných objektov prvého typu, n_2 nerozlíšiteľných objektov druhého typu, ..., a n_p nerozlíšiteľných objektov *p*-teho typu, pričom $n_1 + n_2 + \dots + n_p = n$, je určený

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\dots n_p!}$$

Celkový počet *r*-permutácií obsahujúcej *k* znakov je k^r .

KOMBINÁCIA

Kombinácia s opakovaním môže byť chápaná v zjednodušenom prístupe ako vytváranie množiny, ktorá obsahuje *n* elementov, pričom elementy sú odlišiteľné podľa *k* druhov. Celkový počet *r*-kombinácií z *k* znakov prvkov je

$$\binom{r+k-1}{k-1}$$

KLÚČOVÉ POJMY

permutácie

kombinácie

binomický koeficient

Pascalov trojuholník

Pascalova identita

Vandermondeova identita

multinomická veta

generovanie permutácií

r-permutácia

r-kombinácia

„kombinatorický dôkaz“

permutácie s opakovaním

r-permutácie s opakovaním

r-permutácie pre *k* znakov

r-kombinácie z *k* znakov

CVIČENIA

4.1. Nájdite rozvoj $(x+y)^5$ pomocou kombinatorických úvah, koľkými spôsobmi vznikajú pri rozvoji $(x+y)^5 = (x+y)(x+y)(x+y)(x+y)(x+y)$ súčiny $x^j y^j$.

4.2. Nájdite koeficient $x^8 y^9$ v rozvoji $(3x+2y)^{17}$.

4.3. Nech riadok v Pascalovom trojuholníku obsahuje binomické koeficienty $\binom{10}{k}$, pre $0 \leq k \leq 10$ má tieto členy: 1, 10, 45, 120, 210, 252, 210, 120, 45, 10,

1. Použitím Pascalovej identity (4.5d) zostrojte nasledujúci riadok.

4.4. John býva v New Yorku na Manhattane na rohu 5th Avenue a 5th Street. Akú minimálnu vzdialenosť prejde do práce ráno, ak jeho úrad sídli na rohu 8th Avenue a 12th Street? Koľko rôznych ciest má túto minimálnu vzdialenosť?

4.5. Dokážte platnosť identity $k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$.

4.6. Dokážte platnosť identity $\binom{n}{r} \binom{r}{k} = \binom{n}{k} \binom{n-k}{r-k}$.

4.7. Použitím identity (4.11a) spočítajte postupne binomický koeficient $\binom{15}{4}$, pričom výpočet je inicializovaný „počiatočnou hodnotou“ binomického koeficienta $\binom{15}{0} = 1$.

4.8. Postup výpočtu binomického koeficientu z cvičenia 4.7 zovšeobecnite do tvaru algoritmu špecifikovaného napr. v PseudoPascalle pre výpočet binomického koeficientu $\binom{i}{j}$, kde $i \geq j \geq 0$. Diskutujte význam tohto algoritmu vzhľadom k algoritmu, ktorý počíta binomické koeficienty pomocou ich definície, $\binom{i}{j} = \frac{i!}{j!(i-j)!}$.

4.9. V Pascalovom trojuholníku je pre n -tý riadok určená počiatočná časť členov, zostrojte nasledujúci člen tejto postupnosti: 1, 9, 36, 84.

4.10. Zostrojte koeficient člena $x^3y^2z^5$ z rozvoja $(x + y + z)^{10}$.

4.11. Nech $A = \{a, b, c, d\}$, vytvorte

- (a) všetky permutácie vzhľadom k tejto množine,
- (b) všetky permutácie, ktoré končia znakom a ,
- (c) všetky permutácie, ktoré majú znak a práve raz.

4.12. Aký je počet 5-permutácií nad množinou A , ktorá obsahuje 8 elementov, $|A| = 8$?

4.13. Koľko možností existuje pre prvé tri pozície v konských dostihoch pre 12 koní?

- 4.14.** Koľko existuje binárnych reťazcov dĺžky 10, ktoré
- (a) obsahujú práve jednu jednotku,
 - (b) maximálne tri jednotky,
 - (c) minimálne tri jednotky,
 - (d) rovnaký počet jednotiek a núl.
- 4.15.** Koľko existuje permutácií nad reťazcom ABCDEFG, ktoré
- (a) obsahujú podreťazec BCD,
 - (b) obsahujú podreťazec CFGA,
 - (c) dva podreťazce BA a GF,
 - (d) dva podreťazce ABC a DE,
 - (e) dva podreťazce DEF a ABG.
- 4.16.** Koľkými spôsobmi môžeme usporiadať 8 mužov a 5 žien tak, aby dve ženy nestáli vedľa seba?
- 4.17.** Na skúške z diskkrétnej matematiky bolo nutné vyhodnotiť 40 jednoduchých otázok tak, že musia byť označené ako pravdivé alebo nepravdivé, pričom 17 otázok je nepravdivých. Koľkými rôznymi spôsobmi môžu byť označené jednotlivé príklady za pravdivé a nepravdivé?
- 4.18.** Na Ústave kognitívnej vedy našej fakulty je zamestnaných sedem žien a deväť mužov.
- (a) Koľkými spôsobmi môžeme vytvoriť štátnicovú komisiu, ktorá má šesť členov tak, aby mala rovnaký počet mužov a žien?
 - (b) Koľkými spôsobmi môžeme zostaviť päťčlennú vedeckú radu ústavu, tak, aby obsahovala aspoň jedného muža a jednu ženu?
- 4.19.** Anglická abeceda má 21 spoluhlások a 5 samohlások. Koľko reťazcov dĺžky 6 môžeme zostaviť nad touto abecedou tak, aby
- (a) obsahovali práve jednu samohlásku?
 - (b) obsahovali práve dve samohlásky?
 - (c) obsahovali maximálne jednu samohlásku?
 - (d) obsahovali maximálne dve samohlásky?
- 4.20.** Koľkými spôsobmi môžeme vytvoriť postupnosť piatich znakov nad množinou, ktorá obsahuje tri elementy, ak opakovanie je povolené?
- 4.21.** Koľkými spôsobmi môžeme vybrať päť elementov do postupnosti z množiny obsahujúcej päť elementov, pričom opakovanie je povolené?
- 4.22.** Koľko reťazcov obsahujúcich šesť rôznych písmen môže byť vytvorených?
- 4.23.** Koľkými spôsobmi môžeme vybrať 8 mincí z detskej sporiteľničky (prasiatka), ktorá obsahuje 100 jednokorunových mincí a 50 dvojkorunových mincí? (Mince sú inak nerozlíšiteľné a nezáleží na poradí výberu mincí, iba na sume ich hodnôt.)

5 KOMBINATORIKA II

REKURENTNÉ FORMULY • ALGORITMY „ROZDEĽUJ A PANUJ“ • METÓDA INKLÚZIE A EXKLÚZIE

Táto kapitola je pokračovaním predchádzajúcej kapitoly a je zameraná na rôzne netradičné enumeračné metódy typu rekurentných foriem, algoritmov typu „rozdeľuj a panuj“ a metódy inklúzie a exklúzie.

5.1 REKURENTNÉ VZŤAHY

Mnohé enumeračné problémy nie sú riešiteľné použitím štandardných kombinatorických metód, ktoré boli prezentované v predchádzajúcej kapitole. Jeden z týchto „obtiažnych“ enumeračných problémov je výpočet počtu binárnych reťazcov dĺžky $n+1$, ktoré neobsahujú sekvenciu dvoch núl (t. j. podreťazec '00' sa v týchto binárnych reťazcoch nesmie vyskytovať). Nech symbol a_n vyjadruje počet takýchto binárnych reťazcov. Pomocou jednoduchých úvah (ktoré budú podrobne špecifikované neskôr) odvodíme formulu

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$$

Tento výraz sa nazýva *rekurentná formula*, ktorá spolu s počiatočnými hodnotami $a_1 = 2$, $a_2 = 3$ určuje postupnosť $\{a_n\}$. Z tejto postupnosti sme často schopní odvodiť aj analytickú formulu pre veličiny a_n ako funkciu argumentu n . Ako uvidíme neskôr, tento prístup založený na rekurentnej formule je aplikovateľný na riešenie širokého spektra enumeračných problémov.

UKÁŽKA
REKURENTNEJ
FORMULY

PRÍKLAD 5.1.

Nech počet baktérií sa zdvojnásobí každú hodinu. Ak kolónia obsahuje v počiatočnom čase 5 baktérií, koľko ich bude mať za n hodín? Pre takto špecifikovaný systém platí rekurentná formula $a_n = 2a_{n-1}$, ktorá spolu s počiatočnou podmienkou $a_0 = 5$ jednoznačne určuje veličinu a_n pre každé kladné celočíselné n . Postupným použitím rekurentnej formuly dostaneme $a_1 = 5 \cdot 2$, $a_2 = 2a_1 = 5(2)^2$, ..., $a_n = f(n) = 5(2)^n$. Z tohto riešenia vyplýva, že počet baktérií rastie exponenciálne vzhľadom k „časovej“ diskretnej premennej n .

DEFINÍCIA 5.1.
 REKURENTNÁ
 FORMULA


Rekurentná formula pre postupnosť $\{a_n\}$ je rovnica, ktorá vyjadruje n -tý člen postupnosti a_n pomocou predchádzajúcich členov postupnosti, $a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_{n-k}$ (k je celé kladné číslo)

$$a_n = f(a_{n-k}, a_{n-k+1}, \dots, a_{n-1}) \quad (5.1)$$

a počiatocných hodnôt prvých k elementov postupnosti, a_0, a_1, \dots, a_{k-1} . Postupnosť $\{a_n\}$ sa nazýva **riešenie** rekurentnej formuly, ak jej jednotlivé členy vyhovujú tejto formule.

REKURZIA

Existuje úzky vzťah medzi rekurentnou formulou a **rekurziou**. Rekurzívny algoritmus zostrojuje pre danú hodnotu „premennej“ n riešenie pomocou riešení rovnakého problému pre menšie hodnoty premennej n . Rekurzívny algoritmus sa ukončí, keď sa dosiahnu hodnoty premennej n , pre ktoré riešenie už poznáme (napr. ako počiatocnú hodnotu). Keď analyzujeme zložitosť rekurzívneho algoritmu, dostávame rekurentné formuly, ktoré špecifikujú počet operácií (obvykle súčinov) potrebných k získaniu riešenia problému s hodnotou premennej n , pomocou počtu operácií potrebných k získaniu riešenia problému s menšími hodnotami premennej n .

PRÍKLAD 5.2.

Študujme jednoduchý príklad rekurzívneho algoritmu pre výpočet faktoriálu, ktorý využíva rekurentnú formulu $n! = n(n-1)!$, s počiatocnou podmienkou $0! = 1$

$$n! = \begin{cases} 1 & (n=0) \\ n(n-1)! & (n \geq 1) \end{cases}$$

Táto formula je implementovaná v Pasmale pomocou jednoduchej funkcie s rekurzívnym volaním svojho názvu.

ALGORITMUS 5.1.
 REKURZÍVNY
 ALGORITMUS PRE
 VÝPOČET
 FAKTORIÁLU

```
function Factorial(n: integer): integer;
begin if n=0 then Factorial:=1 else
      Factorial:=n*Factorial(n-1);
end;
```

PRÍKLAD 5.3.

Nech postupnosť $\{a_n\}$ je riešenie rekurentnej formuly $a_n = a_{n-1} - a_{n-2}$, pre $n=2, 3, \dots$, a nech počiatocné hodnoty sú $a_0=3$ a $a_1=5$. Prvé členy postupnosti $\{a_n\}$ sú

n	a_n
0	3
1	5
2	2
3	-3
4	-5

n	a_n
5	-2
6	3
7	5
8	2

Pokúsime sa odvodiť analytickú formulu $a_n = f(n)$.

n	a_n
0	a_0
1	a_1
2	$a_1 - a_0$
3	$a_2 - a_1 = a_1 - a_0 - a_1 = -a_0$
4	$a_3 - a_2 = -a_0 - (a_1 - a_0) = -a_1$
5	$a_4 - a_3 = -a_1 - (-a_0) = -(a_1 - a_0)$
6	$a_5 - a_4 = a_0 - a_1 - (-a_1) = a_0$
7	$a_6 - a_5 = a_0 - (a_0 - a_1) = a_1$
8	$a_7 - a_6 = a_1 - (a_0) = a_1 - a_0$

Z tejto tabuľky vyplýva, že analytická formula, ktorá určuje jednotlivé členy postupnosti má tvar

$$f(3k) = (-1)^k a_0$$

$$f(3k+1) = (-1)^k a_1$$

$$f(3k+2) = (-1)^k (a_1 - a_0)$$

pre $k=0, 1, 2, \dots$.

ZLOŽITÉ ÚROKOVANIE

Do banky sme uložili 10000 EUR na ročný úrok 11%. Koľko peňazí budeme mať na účte po 30 rokoch?

Nech veličina P_n je výška vkladu po n rokoch, táto veličina je špecifikovaná rekurentnou formulou

$$P_n = P_{n-1} + 0,11 P_{n-1} = 1,11 P_{n-1}$$

s počiatočnou podmienkou $P_0 = 10000$. Ak rekurentnú rovnicu riešime postupne (iteračne), dostaneme prvé členy postupnosti riešení $\{P_n\}$

$$P_1 = 1,11 P_0$$

$$P_2 = 1,11 P_1 = (1,11)^2 P_0$$

$$P_3 = 1,11 P_2 = (1,11)^3 P_0$$

$$\dots\dots\dots$$

$$P_n = 1,11 P_{n-1} = (1,11)^n P_0$$

Platnosť poslednej formuly pre P_n môže byť verifikovaná pomocou matematickej indukcie. Ak položíme $n = 30$, potom dostaneme






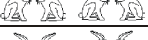




$$P_{30} = (1,11)^{30} \cdot P_0 = (1,11)^{30} \cdot 10000 = 228922,97 \text{ EUR}$$

Fibonacciho čísla

FIBONACCIHO¹
ČÍSLA

Fibonacci v knihe *Liber Abaci* formuloval túto slávnú úlohu: Na ostrove je umiestnený jeden pár zajacov (opačného pohlavia). Zajace sa môžu množiť až vtedy, keď dosiahnu dospelosť v 2 mesiacoch, potom každý mesiac produkujú nový pár zajacov, pozri tab. 5.1.

Tabuľka 5.1. Fibonacciho model zajacov na ostrove

mesiac	reprodukčné páry	nereprodukčné páry	celkový počet
1			1
2			1
3			2
4			3
5			5
6			8

REKURENTNÁ
FORMULA PRE
FIBONACCIHO
ČÍSLA

Označme počet párov zajacov v mesiaci n symbolom (**Fibonacciho číslom**) F_n , potom populácia zajacov môže byť modelovaná pomocou rekurentných formúl. Na konci prvého mesiaca počet párov je $F_1 = 1$, pretože tento pár v priebehu druhého mesiaca nemôže mať potomkov, potom taktiež $F_2 = 1$. Počet párov po n mesiacoch je určený rekurentnou formulou

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \quad (n \geq 3) \quad (5.2)$$

spolu s počiatocnými podmienkami. Podľa tejto rovnice, počet párov v mesiaci n sa rovná súčtu počtu párov v predchádzajúcom mesiaci a počtu párov z pred dvoch mesiacov (pretože, každý novorodený pár začne plodiť potomkov až po dvoch mesiacoch). Prvých 12 Fibonacciho čísel je uvedených v tab. 5.2.

Tabuľka 5.2. Fibonacciho čísla

n	F_n
1	1
2	1
3	2
4	3
5	5
6	8

n	F_n
7	13
8	21
9	34
10	55
11	89
12	144

¹ Leonardo Pisano, nazývaný Fibonacci, (1170? – 1240?), taliansky stredoveký matematik, ktorý sa stal známy svojou knihou *Liber Abaci – Kniha o počítadle* (vydanou v r. 1202), v ktorej zoznámil európsku civilizáciu s arabskou a indickou matematikou.

Binárne reťazce

BINÁRNE REŤAZCE
NEOBSAHUJÚCE
PODREŤAZEC '00'

V predchádzajúcej kapitole boli študované kombinatorické metódy, ktoré sú založené na niekoľkých jednoduchých princípoch a sú schopné riešiť jednoduchšie enumeračné úlohy. Existujú však mnohé enumeračné problémy, ktoré nie sú riešiteľné kombinatorickými metódami. Pre ilustráciu tejto skutočnosti študujeme problém enumerácie binárnych reťazcov danej dĺžky n , v ktorých sa nesmú vyskytovať dve nuly za sebou. Označme množinu takýchto reťazcov R_n , pre $n = 2, 3$, tieto množiny obsahujú binárne reťazce

$$\begin{aligned} R_2 &= \{11, 01, 10\} \\ R_3 &= \{111, 011, 101, 110, 010\} \\ R_4 &= \underbrace{\{1111, 0111, 1011, 1101, 0101\}}_{R_4^a = R_3 \cdot 1} \cup \underbrace{\{1110, 1010, 0110\}}_{R_4^b = R_2 \cdot 10} \end{aligned}$$

Množinu R_4 zostrojíme pomocou množín R_2 a R_3

$$R_4 = (R_3 \cdot 1) \cup (R_2 \cdot 10) \quad (5.3)$$

kde symbol $(R_3 \cdot 1)$ sa interpretuje tak, že reťazce z množiny R_3 sú rozšírené o symbol '1' z pravej strany. Analogickým spôsobom sa interpretuje aj druhý symbol $(R_2 \cdot 10)$ z pravej strany (5.3), ako rozšírenie reťazcov z R_2 o podreťazec '10' z pravej strany. Podmnožiny $(R_3 \cdot 1)$ a $(R_2 \cdot 10)$ sú disjunktné (prečo?), potom pre mohutnosť R_4 platí

$$|R_4| = |R_3 \cdot 1| + |R_2 \cdot 10| \Rightarrow |R_4| = |R_3| + |R_2|$$

Podrobnou analýzou môže byť ukázané, že formula (5.3) môže byť zovšeobecnená do tvaru

$$R_i = (R_{i-1} \cdot 1) \cup (R_{i-2} \cdot 10) \quad (5.4)$$

Táto formula nám poskytuje predpis, ako tvoriť binárne reťazce dĺžky i , ktoré neobsahujú podreťazec '00'. Pre mohutnosti množín z (5.4) platí

$$|R_i| = |R_{i-1}| + |R_{i-2}| \quad (i = 4, 5, 6, \dots) \quad (5.5)$$

kde počiatočné hodnoty mohutností sú $|R_2| = 3, |R_3| = 5$. Aby sme zjednodušili formuly, zavedieme označenie $a_i = |R_i|$, potom z (5.5) dostaneme **rekurentnú formulu**, ktorá určuje mohutnosti ďalších množín R_i

$$a_i = a_{i-1} + a_{i-2} \quad (i = 4, 5, 6, \dots) \quad (5.6)$$

pre $a_2 = 3, a_3 = 5$. Postupným použitím tejto formuly dostaneme číselné hodnoty veličín a_i , ktoré sú uvedené v tabuľke

i	a_i	i	a_i
2	3	7	34
3	5	8	55
4	8	9	89
5	13	10	144
6	21

Naším konečným cieľom je zostrojiť analytickú formulu $a_i = f(i)$, ktorá špecifikuje počet binárnych reťazcov dĺžky i , ktoré neobsahujú podreťazec '00'. Postupným aplikovaním rekurentnej formuly (5.4) dostaneme

i	a_i	i	a_i
2	a_2	7	$3a_2 + 5a_3$
3	a_3	8	$5a_2 + 8a_3$
4	$a_2 + a_3$	9	$8a_2 + 13a_3$
5	$a_2 + 2a_3$	10	$13a_2 + 21a_3$
6	$2a_2 + 3a_3$

Ak porovnáme v tejto tabuľke čísla pred počiatocnými koeficientmi a_2 a a_3 s Fibonacciho koeficientmi z tabuľky 5.2, dostaneme všeobecnú formulu pre a_n

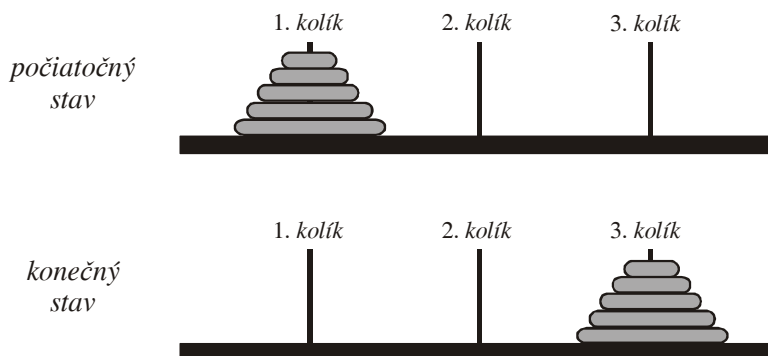
$$a_n = F_{n-3}a_2 + F_{n-2}a_3 \quad (\text{pre } n \geq 4) \quad (5.7)$$

Hanojské veže

ÉDOUARD LUCAS

Populárna hračka z konca 19. storočia, ktorá bola navrhnutá francúzskym matematikom Édouardom Lucasom (1842-1891). Princípy tejto hry sú vysvetlené na obr. 5.1.

OBRÁZOK 5.1.
HRA "HANOJSKÉ VEŽE"



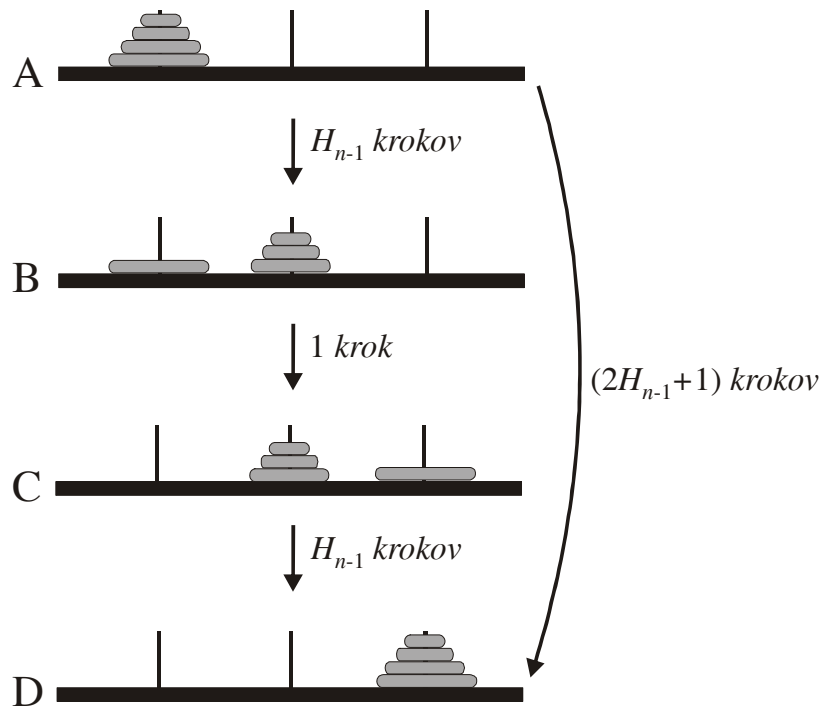
Hra "Hanojské veže" obsahuje základnú dosku, na ktorej sú umiestnené tri kolíky. Obsahuje n kruhových diskov s rôznym priemerom a otvorom v strede, pomocou ktorého sa dajú navlieknúť na kolík. *Povolené pozície* kruhových diskov sú také, že na kolíku nie je umiestnený väčší disk na menšom. Rozlišujeme dve pozície, východisková pozícia a konečná pozícia. Hra spočíva v úlohe pretransformovať počiatocný stav na konečný pomocou postupného premiestňovania diskov cez postupnosť povolených pozícií.

POPIS HRY

Hra obsahuje n diskov, ktoré sú v počiatocnej pozícii (stave) umiestnené na prvom kolíku. Daný stav sa nazýva prípustný vtedy, ak na ľubovoľnom kolíku nie je umiestnený väčší disk na menšom. Toto ohraničenie nám aj predpisuje aké ťahy (elementárne operácie prenesenia vrchného disku z kolíka na iný kolík) môžu byť použité, aby sme dosiahli konečný stav (cieľovú pozíciu), v ktorej sú všetky disky umiestnené na treťom kolíku. Našou úlohou je zistiť koľko potrebu-

jeme ťahov na to, aby sme v hre obsahujúcej n diskov pretransformovali počiatočný stav na konečný stav².

OBRÁZOK 5.2.
ENUMERÁCIA
POČTU KROKOV
PRE RIEŠENIE
HANOJSKÝCH VEŽÍ



Enumerácia počtu krokov potrebných k pretransformovaniu počiatočnej pozície (diagram A) na konečnú pozíciu (diagram D). Prvý medzistav (diagram B) je vytvorený tak, že pomocou H_{n-1} krokov presunieme $n-1$ diskov na druhý kolík, pričom najväčší disk zostáva na prvom kolíku. V ďalšom kroku (diagram C) presunieme najväčší disk na tretí kolík. Tento medzistav je pretransformovaný pomocou H_{n-1} krokov na konečný stav. To znamená, aby sme premiestnili n diskov z prvého kolíka na tretí kolík cez povolené pozície, musíme vykonať aspoň $2H_{n-1}+1$ krokov.

**REKURENTNÁ
FORMULA PRE
POČET KROKOV NA
RIEŠENIE
HANOJSKÝCH VEŽÍ**

Ukážeme jednoduchý postup pre konštrukciu rekurentnej formuly, ktorá špecifikuje minimálny počet krokov potrebných na to, aby sme pretransformovali počiatočnú pozíciu na konečnú pozíciu. Túto veličinu pre hru obsahujúcu n diskov označíme H_n . Postup je znázornený na obr. 5.2, kde sa predpokladá, že hru vieme riešiť pre $n-1$ diskov. Potom počiatočný stav A pretransformujeme pomocou H_{n-1} ťahov na medzistav B, v ktorom $n-1$ diskov je premiestnených na druhý kolík, pričom najväčší disk zostáva na pôvodnom prvom kolíku. Nasledujúci medzistav C dosiahneme tak, že najväčší disk premiestnime na tretí kolík. V poslednej časti hry dosiahneme koncový stav D pomocou H_{n-1} ťahov. Poznamenajme, že transformácie $A \rightarrow B$ a $C \rightarrow D$ sú z pohľadu hry obsahujúcej $n-1$ diskov ekvivalentné,

² Legenda, ktorá sprevádza hru „Hanojské veže“, hovorí o tom, že v budhistickom chráme, umiestnenom na tajnom mieste v džungli vo vietnamských horách, sa snažia mníši ukončiť túto hru obsahujúcu 64 zlatých diskov už mnoho storočí. Veria, že ak sa im podarí hru dokončiť (t. j. dosiahnuť konečný stav), nastane koniec sveta.

postup, ktorý vedie na prvú transformáciu je možné použiť aj k druhej transformácii. Týmto sme ukázali, že potrebný počet krokov na transformáciu A→D pre n diskov je určený jednoduchou rekurentnou formulou

$$H_n = 2H_{n-1} + 1 \quad (5.8)$$

s počiatočnou podmienkou $H_1 = 1$, ktorá špecifikuje počet ťahov potrebných na riešenie hry obsahujúcej jeden disk³.

ANALYTICKÁ
FORMULA NA
POČET KROKOV
NA RIEŠENIE
HANOJSKÝCH
VEŽÍ

Rekurentnú rovnicu (5.8) budeme riešiť pomocou iteračného postupu

$$\begin{aligned} H_n &= 2H_{n-1} + 1 \\ &= 2(2H_{n-2} + 1) + 1 = 2^2 H_{n-2} + 2 + 1 \\ &= 2^2 (2H_{n-3} + 1) + 2 + 1 = 2^3 H_{n-3} + 2^2 + 2 + 1 \\ &\dots\dots\dots \\ &= 2^{n-1} + 2^{n-2} + \dots + 2^1 + 2^0 \\ &= 2^n - 1 \end{aligned} \quad (5.9)$$

kde na záver sme použili formulu pre sumáciu prvých n členov geometrickej postupnosti

$$1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1} = \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

ktorá sa jednoducho dokáže tak, že ju vynásobíme členom $(q - 1)$ a vykonáme naznačené súčiny na ľavej strane. Toto bol priamy dôkaz formuly⁴ $H_n = 2^n - 1$, keď už poznáme riešenie rekurentnej formuly (5.8), môžeme opakovane dokázať túto formulu pomocou matematickej indukcie.

PRÍKLAD 5.4.

Enumeračnú metódu pre úlohy hanojských veží môžeme použiť aj pre implementáciu rekurzívneho algoritmu na riešenie tejto úlohy. Algoritmus obsahuje tri základné kroky:

1. krok: prenesenie $n-1$ diskov z prvého kolíka na druhý kolík,
2. krok: prenesenie jedného disku z prvého kolíka na tretí kolík,
3. krok: prenesenie $n-1$ diskov z druhého kolíka na tretí kolík.

Z týchto 3 krokov prvý a tretí sú rovnaké úlohy ako pôvodná, iba s menším počtom kolíkov. Druhý krok je elementárny, je to len presun jedného disku. Kroky 1. a 3. riešime tak, že ich znovu rozložíme do troch podkrokov, ale už s menším počtom diskov. Končíme vtedy, keď podobným rozkladom do 3 častí ako pri pôvodnej úlohe dostaneme už len elementárne kroky. Jednoduchá implementácia v Pasmale je znázornená v nasledujúcom algoritme:

³ Pre čitateľa, ktorý má problémy s akceptovaním hry obsahujúcej len jeden disk, môžeme počiatočnú podmienku formulovať pomocou $H_2 = 3$, ktorá špecifikuje počet ťahov pre dva disky. Prvý ťah premiestni menší disk na druhý kolík, druhý ťah premiestni väčší disk na tretí kolík, tretí ťah premiestni menší disk na tretí kolík.

⁴ Teraz sa môžeme vrátiť k mýtu z druhej poznámky pod čiarou. Minimálny počet ťahov, ktoré potrebujú mnísi na riešenie úlohy s 64 diskami je $2^{64} - 1 = 18446744073709551615 \approx 1.84 \times 10^{19}$. Pre jednoduchosť predpokladajme, že jeden ťah trvá jednu sekundu, potom na riešenie hry potrebujeme vyše 500 miliárd rokov, čo viac ako 30-násobne prekračuje súčasný odhad trvania nášho vesmíru.

ALGORITMUS 5.2.
HANOJSKÉ VEŽE

```

program TowerOfHanoi;
var n : integer;

procedure Hanoi(n,Tfrom,Tto,Tusing : integer);
begin if n > 0 then
    begin Hanoi(n-1,Tfrom,Tusing,Tto);
        writeln('move',Tfrom:1,' -->',Tto:1);
        Hanoi(n-1,Tusing,Tto,Tfrom);
    end;
end;

begin write('n =? ');
    readln(n);
    writeln;
    Hanoi(n,1,3,2)
end.

```

Enumerácia hesielHESLO S PÁRNYM
POČTOM NÚL

Predpokladajme pre názornosť, že vstup do počítačového systému je povolený heslom, ktoré má 10 číslic, pričom obsahuje párny počet núl. Tak napríklad reťazec 3214043201 môže byť použitý ako platné heslo, zatiaľ čo reťazec 1020034387 nie je platné heslo. Nech a_n je počet platných hesiel dĺžky n . Počiatočná hodnota nech je $a_1 = 9$, pretože existuje 10 číselných reťazcov, z ktorých jeden, '0' nie je platný. Odvodíme rekurentnú formulu pre a_n tak, že budeme študovať možnosť, ako vznikne platný reťazec dĺžky n z reťazcov dĺžky $n-1$. Existujú dva spôsoby tvorby platných reťazcov:

- (1) Platný reťazec dĺžky $n-1$ rozšírime o jedno nenulové číslo, toto rozšírenie môže byť urobené 9 rôznymi spôsobmi, t. j. príspevok k a_n má tvar $9a_{n-1}$.
- (2) Reťazec dĺžky $n-1$, ktorý nie je platný, je rozšírený o nulu. Tento spôsob tvorby reťazca vytvára z neplatného reťazca platný reťazec, pričom príspevok k a_n sa rovná počtu neplatných reťazcov dĺžky $n-1$. Pretože celkový počet reťazcov (platných a aj neplatných) dĺžky $n-1$ sa rovná 10^{n-1} , potom neplatných reťazcov dĺžky $n-1$ je $10^{n-1} - a_{n-1}$.

REKURENTNÁ
FORMULA POČTU
MOŽNÝCH HESIEL

Potom, celkový počet platných reťazcov dĺžky n je určený rekurentnou formulou

$$a_n = 9a_{n-1} + (10^{n-1} - a_{n-1}) = 8a_{n-1} + 10^{n-1} \quad (5.10)$$

Iteračným riešením tejto rovnice dostaneme

$$\begin{aligned}
 a_n &= 8a_{n-1} + 10^{n-1} \\
 &= 8(8a_{n-2} + 10^{n-2}) + 10^{n-1} = 8^2 a_{n-2} + 8 \cdot 10^{n-2} + 10^{n-1} \\
 &= 8^2 (8a_{n-3} + 10^{n-3}) + 8 \cdot 10^{n-2} + 10^{n-1} = 8^3 a_{n-3} + 8^2 \cdot 10^{n-3} + 8 \cdot 10^{n-2} + 10^{n-1}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= 8^3 (8a_{n-4} + 10^{n-4}) + 8^2 \cdot 10^{n-3} + 8 \cdot 10^{n-2} + 10^{n-1} = \\
 &= 8^4 a_{n-4} + 8^3 \cdot 10^{n-4} + 8^2 \cdot 10^{n-3} + 8 \cdot 10^{n-2} + 10^{n-1}
 \end{aligned}$$

ANALYTICKÁ
FORMULA POČTU
MOŽNÝCH HESIEL

Použitím formuly pre sumáciu geometrického radu získame analytickú formulu pre $f(n)$

$$\begin{aligned}
 a_n &= 8^{n-1} a_1 + 8^{n-2} \cdot 10^1 + 8^{n-3} \cdot 10^2 + \dots + 8 \cdot 10^{n-2} + 10^{n-1} \\
 &= 8^{n-1} a_1 + 8^{n-1} \left(1 + \frac{10}{8} + \frac{10^2}{8^2} + \dots + \frac{10^{n-1}}{8^{n-1}} \right) - 8^{n-1} \\
 &= \frac{8^n + 10^n}{2}
 \end{aligned}$$

Tento výsledok môže byť verifikovaný matematickou indukciou.

5.2 METÓDA „ROZDEĽUJ A PANUJ“

PODSTATNÁ JE
UNIFIKAČNÁ
(PANOVAČNÁ)
FÁZA

Metóda rozdeľuj a panuj patrí medzi efektívne prístupy k riešeniu niektorých typov rekurentných formúl. Predpokladajme, že rekurzívny algoritmus *rozdeľuje* problém dimenzie n na a podproblémov, pričom dimenzia podproblému nech je špecifikovaná zlomkom n/b . Predpokladajme taktiež, že potrebujeme $g(n)$ dodatočných operácií k tomu, aby sme v *unifikačnej* (panovačnej) fáze algoritmu pospájali riešenia podproblémov do celkového riešenia. Potom, ak $f(n)$ vyjadruje počet operácií potrebných na riešenie celkového problému dimenzie n , funkcia f je špecifikovaná formulou nazývanou **rekurentná formula rozdeľuj-a-panuj**⁵

$$f(n) = af(n/b) + g(n) \quad (5.11)$$

V nasledujúcich ilustračných príkladoch ukážeme aplikácie tejto metódy na riešenie problémov výpočtovej zložitosti niektorých jednoduchých algoritmov.

Binárne prehľadávanie

REKURENTNÁ
FORMULA PRE
POČET POROVNANÍ

Tento typ prehľadávania je založený na tom, že ak hľadáme nejaký element x v neklesajúcej postupnosti čísel $\{a_i\}_{i=1}^n$, v prvom kroku testujeme podmienku $x \leq a_{n/2}$; ak platí (neplatí), potom hľadáme element x v prvej (druhej) polovici postupnosti $\{a_i\}_{i=1}^{i=n/2}$ (v druhej polovici postupnosti $\{a_i\}_{i=n/2+1}^{i=n}$). Algoritmus vyžaduje vo všeobecnosti dve porovnania, prvé je porovnanie $x \leq a_{n/2}$, druhým porovnaním urč-

⁵ Odborná americká angličtina obsahuje množstvo názvov, ktoré nášmu uchu znejú veľmi exoticky a nekonvenčne. Zrejme nemá zmysel zavádzať pre túto americkú odbornú terminológiu našu špecifickú slovenskú terminológiu, ktorá by bola viac konvenčnejšia a menej exotická, avšak potom by sme museli vytvárať slovníky slovenskej odbornej terminológie s uvedením jej ekvivalentov vo svetových jazykoch.

jeme, či ešte vôbec ostávajú v prehl'adávanej časti postupnosti nejaké prvky. Potom, ak $f(n)$ je počet porovnaní potrebný na riešenie binárneho prehl'adávania postupnosti dimenzie n

$$f(n) = f(n/2) + 2 \quad (5.12)$$

kde pre jednoduchosť predpokladáme, že n je párne.

ZLOŽITOSŤ

Jednoduché riešenie rekurentnej rovnice (5.12), popisujúce časovú zložitosť binárneho prehl'adávania, získame za predpokladu, že dimenzia problému je $n = 2^k$, pričom $f(2) = 2$. Iteračným riešením (5.12) dostaneme

$$f(2^k) = 2k \quad (5.13)$$

To znamená, že časová zložitosť je lineárna vzhľadom k exponentu k . Veličina k je určená formulou $k = \log_2 n = \ln n / \ln 2$, potom približná formula pre zložitosť algoritmu má tvar

$$f(n) = o(\ln n) \quad (5.14)$$

ktorá je interpretovaná tak, že uvádzame len dominantnú funkčnú závislosť od dimenzie n , ktorá špecifikuje nárast zložitosti pri zväčšovaní n . Z (5.14) vyplýva, že zložitosť binárneho prehl'adávania rastie „pomaly“ ako $\ln n$, t. j. ešte pomalšie ako lineárna závislosť $o(n)$.

Hľadanie minimálneho prvku v postupnosti

PRINCÍP
ALGORITMU A
ZLOŽITOSŤ

Uvažujme neusporiadanú postupnosť $P = \{a_i\}_{i=1}^n$, našim cieľom je nájsť minimálny prvok

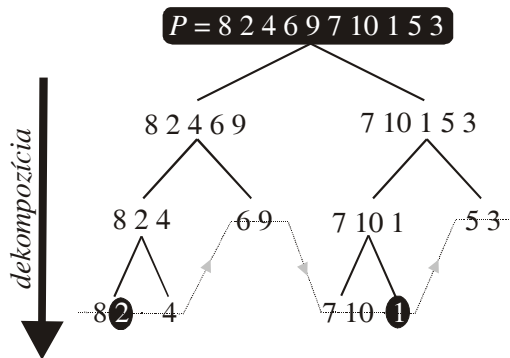
$$a_{\min} = \min_i \{a_i\} \quad (5.15)$$

Zložitosť (počet potrebných operácií – porovnaní) algoritmu pre riešenie tejto úlohy označíme $f(n)$. V prípade, že $n = 1$, potom $f(1) = 0$, t. j. nepotrebujeme žiadnu operáciu porovnania, element a_1 je automaticky minimálnym elementom.

Nech $n > 1$, potom postupnosť $\{a_i\}_{i=1}^n$ rozdelíme na dve polovice. Ak týmto delením pôvodnej postupnosti vznikne postupnosť, ktorá má dĺžku 2 alebo 1, potom jednoduchým porovnaním zistíme jej minimálny element a ten porovnáme s hľadaným minimálnym elementom celej postupnosti, ak je menší tak celkové riešenie nahradíme týmto aktuálnym riešením. Tento proces sa rekurzívne opakuje a je ukončený vtedy, keď sa dosiahla dĺžka postupnosti 1 alebo 2. Počtom porovnaní ale proces nie je efektívnejší ako sekvenčné prehl'adávanie. Ilustratívny príklad tohto algoritmu je znázornený na obr. 5.3, kde rekurzívne delíme postupnosť dĺžky 10.

Implementácia rekurzívneho algoritmu pre delenie postupností až na minimálnu dĺžku 1 alebo 2, je uvedená v pseudoPascal v Algoritme 5.3:

OBRÁZOK 5.3.
ZNÁZORNENIE
REKURZÍVNEHO
DELENIA
INTERVALU PRI
HĽADANÍ
MINIMÁLNEHO
PRVKU



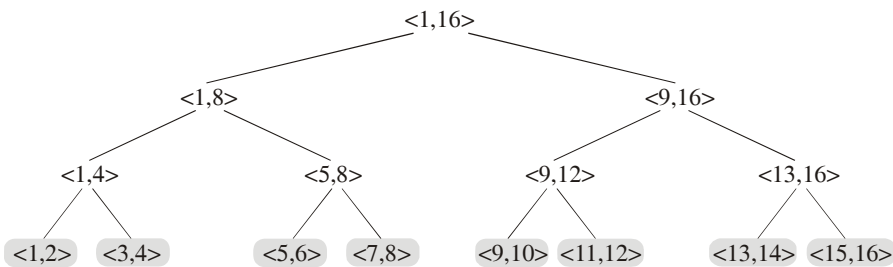
Znázornenie rekurzívneho delenia intervalu dĺžky 10, v prípade, že algoritmus vytvorí postupnosť dĺžky 1 alebo 2, tak túto testujeme či neobsahuje minimálny prvok (znázornené čiernymi elipsami).

ALGORITMUS 5.3.
REKURZÍVNE
DELENIE
INTERVALU PRI
HĽADANÍ
MINIMÁLNEHO
PRVKU

```

procedure divide( $i_q, i_r$  : integer);
begin  $\Delta := (i_r - i_q + 1) \text{ div } 2$ ;
       $j_r := i_q + \Delta - 1$ ;  $j_q := j_r + 1$ ;
       $\Delta_1 := j_r - i_q + 1$ ;  $\Delta_2 := i_r - j_q + 1$ ;
      if  $\Delta_1 \leq 2$  then
      begin test interval  $\langle a_{i_q}, a_{j_r} \rangle$  for min. elem. end;
      if  $\Delta_2 \leq 2$  then
      begin test interval  $\langle a_{j_q}, a_{i_r} \rangle$  for min. elem. end;
      if  $\Delta_1 > 2$  then divide( $i_q, j_r$ );
      if  $\Delta_2 > 2$  then divide( $j_q, i_r$ );
end;
    
```

OBRÁZOK 5.4.
REKURZÍVNY
ROZKLAD
INTERVALU



Rekurzívny rozklad intervalu $\langle 1,16 \rangle$ na elementárne intervaly dĺžky 2.

Táto rekurzívna procedúra postupne delí interval $\langle i_q, i_r \rangle$, kde $|i_r - i_q| \geq 2$, na dva podintervaly $\langle i_q, j_r \rangle$ a $\langle j_q, i_r \rangle$ tak, že $j_q = j_r + 1$. V prípade, že interval vyhovuje podmienke $|i_r - i_q| \leq 1$, potom delenie tohto intervalu už neprebíha, ale elementy postupnosti a_{i_q}, a_{i_r} sú testované, či ich minimálna hodnota nie je menšia ako aktuálna hodnota minima

$$\left(\min\{a_{i_q}, a_{i_r}\} < a_{\min}\right) \Rightarrow \left(a_{\min} = \min\{a_{i_q}, a_{i_r}\}\right) \quad (5.16)$$

Príklad delenia intervalu $\langle 1,16 \rangle$ algoritmom *divide* je znázornený na obr. 5.4.

NIE JE
EFEKTÍVNEJŠIE
AKO SEKVENČNÉ
VYHLADÁVANIE

Klasické riešenie tohto problému spočíva v jednoduchom algoritme, v ktorom každý člen postupnosti je porovnaný s minimálnym elementom postupnosti, jeho zložitosť je

$$f(n) = o(n) \quad (5.17)$$

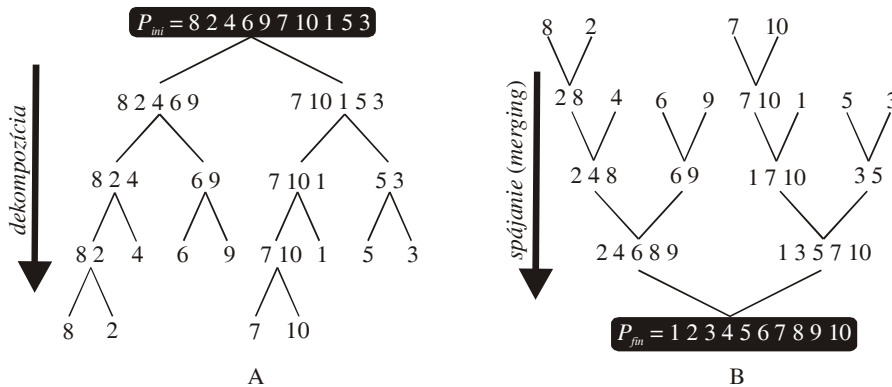
Použitím metódy „rozdeľuj a panuj“, založenej na rekurzívnom delení intervalu, zložitosť algoritmu sa žiaľ nemení.

Usporiadanie so spájaním (merge sort)

ROZDELÍME
POSTUPNOSŤ NA
PODPOSTUPNOSTI,
TIE REKURENTNE
USPORIADAME A
SPÁJAME

Cieľom tohto algoritmu je usporiadať postupnosť $P = \{a_i\}_{i=1}^n$ tak, aby bola neklesajúca, $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \dots$. Algoritmus rozdelí postupnosť P na dve polovice P_1 a P_2 , každá polovica sa nezávisle usporiada a tieto usporiadané podpostupnosti spojíme (mergujeme) do novej usporiadanej postupnosti. Algoritmus má rekurzívny charakter, v prvej fáze dochádza k rekurzívnemu deleniu postupnosti na polovičné časti, ak podpostupnosti obsahujú len jeden element, toto delenie sa zastaví a začne prebiehať opačné rekurzívne spájanie so súčasným usporiadaním, pozri obr. 5.5.

OBRÁZOK 5.5.
REPREZENTÁCIA
METÓDY
USPORIADANIA SO
SPÁJANÍM



Reprezentácia metódy usporiadania so spájaním. Diagram A znázorňuje prvú fázu algoritmu, v ktorej dochádza k postupnému rozkladu neusporiadanej postupnosti na časti, ktoré obsahujú po jednom alebo po dvoch objektoch. Diagram B vyjadruje druhú fázu algoritmu, keď dochádza k postupnému spájaniu fragmentov za súčasného usporiadania spojeného výsledku.

PRINCIPIÁLNE JE
„INTELEKTUÁLNE
SPÁJANIE“
S POROVNÁVANÍM
PRVKOV

Pre efektívnu implementáciu tohto algoritmu je dôležitá operácia spájania usporiadaných postupností do väčších usporiadaných postupností. Predpokladajme, že máme dve usporiadané postupnosti P_1 a P_2 , ktoré spojíme do novej usporiadanej postupnosti P , základné princípy algoritmu sú znázornené v tab. 5.3. V tejto tabuľke sú na čiernom podklade uvedené tie číslice, ktoré sú prenášané sprava do postupnosti P (ktorá bola pri zahájení algoritmu prázdna). Na záver algoritmu (riadok 6 v tabuľke), postupnosť P obsahuje spojené postupnosti P_1

a P_2 , v usporiadanom - neklesajúcom tvare.

Tabuľka 5.3. Usporiadané spájanie dvoch postupností $P_1=(2,3,5,6)$ a $P_2=(1,4)$

#	postupnosť P_1	postupnosť P_2	spojená postupnosť P	porovnanie
1	2 3 5 6	1 4		$1 < 2$
2	2 3 5 6	4	1	$2 < 4$
3	3 5 6	4	1 2	$3 < 4$
4	5 6	4	1 2 3	$4 < 5$
5	5 6		1 2 3 4	
6			1 2 3 4 5 6	

Z formulácie algoritmu spájania postupností vyplýva jeho dôležitá vlastnosť, že spojenie dvoch usporiadaných postupností P_1 a P_2 , dĺžky m resp. n , do usporiadanej postupnosti P , **vyžaduje menej ako $m+n$ porovnaní**. Táto vlastnosť popísaného algoritmu spájania vyplýva zo skutočnosti, že ak obe postupnosti sú usporiadané, potom k nájdeniu minimálneho prvku stačí porovnávať len prvé (najmenšie) elementy oboch postupností P_1 a P_2 .

REKURENTNÁ
FORMULA PRE
ODHAD
VÝPOČTOVEJ
ZLOŽITOSTI

Nech symbol $f(n)$ špecifikuje počet porovnaní, ktorý je potrebný, aby postupnosť $\{a_i\}_{i=1}^n$ bola usporiadaná do neklesajúcej postupnosti. Podľa algoritmu usporiadania so spájaním, postupnosť $\{a_i\}_{i=1}^n$ môžeme usporiadať tak, že ju rozdelíme na dve postupnosti $\{a_i\}_{i=1}^{n/2}$ a $\{a_i\}_{i=n/2+1}^n$. Tieto podpostupnosti sa usporiadajú a potom sa spoja do spoločnej usporiadanej postupnosti, pričom tento posledný krok vyžaduje maximálne $2(n/2) - 1$ porovnaní, potom

$$f(n) = 2f(n/2) + n - 1 \quad (5.18)$$

Táto rekurentná formula spolu s počiatočnou podmienkou $f(2) = 1$ tvorí základ pre odhad výpočtovej zložitosti algoritmu usporiadania so spájaním. Pre jednoduchosť položíme $n = 2^k$ a odpočet poslednej jednotky v (5.18) zanedbajme, potom iteračným riešením (5.18) dostaneme

$$\begin{aligned} f(2^k) &= 2f(2^{k-1}) + 2^k \\ &= 2(2f(2^{k-2}) + 2^{k-1}) + 2^k = 2^2 f(2^{k-2}) + 2 \cdot 2^k \\ &= 2^2(2f(2^{k-3}) + 2^{k-2}) + 2 \cdot 2^k = 2^3 f(2^{k-3}) + 3 \cdot 2^k \\ &\dots \\ f(2^k) &= 2^{k-1} f(2) + (k-1) \cdot 2^k = 2^{k-1} + (k-1) \cdot 2^k < k \cdot 2^k \end{aligned}$$

Na základe tohto výsledku môžeme zložitosť metódy usporiadania so spájaním odhadnúť takto

ZLOŽITOSŤ

$$f(n) = o(n \ln n) \quad (5.19)$$

Výpočtová zložitosť jednoduchých metód usporiadania je obvykle kvadratická

vzhľadom k veľkosti postupnosti, $f(n) = o(n^2)$, takže výsledok (5.19) možno pokladať za viac ako uspokojivý.

5.3 PRINCÍP INKLÚZIE A EXKLÚZIE

V teórii množín (pozri kap. 2.1 a formulu (2.17)) bola diskutovaná formula pre mohutnosť množiny špecifikovanej ako zjednotenie podmnožín A_1, A_2, \dots, A_n , uvedieme ju spolu s jej duálnou formou

MOHUTNOSŤ
MNOŽINY
POMOCO
ZJEDNOTENIA
PODMNOŽÍN

$$\begin{aligned} |A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| &= \sum_{i=1}^n |A_i| - \sum_{\substack{i,j=1 \\ (i < j)}}^n |A_i \cap A_j| + \sum_{\substack{i,j,k=1 \\ (i < j < k)}}^n |A_i \cap A_j \cap A_k| + \dots \\ &\quad (-1)^{n+1} |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n| \end{aligned} \quad (5.20a)$$

MOHUTNOSŤ
MNOŽINY
POMOCO
PRIENIKU
PODMNOŽÍN

$$\begin{aligned} |\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \dots \cap \bar{A}_n| &= |U| - \sum_{i=1}^n |A_i| + \sum_{\substack{i,j=1 \\ (i < j)}}^n |A_i \cap A_j| - \sum_{\substack{i,j,k=1 \\ (i < j < k)}}^n |A_i \cap A_j \cap A_k| + \dots \\ &\quad (-1)^n |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n| \end{aligned} \quad (5.20b)$$

kde U je univerzálna množina nad ktorou sú definované množiny A_i . Druhá formula je duálnou formou prvej formuly (5.20a) a pochádza zo vzťahu,

$$|\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \dots \cap \bar{A}_n| = |\overline{A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n}| = |U| - |A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| \quad (5.21)$$

kde pravá strana bola upravená použitím všeobecného De Morganovho vzťahu pre komplement zjednotenia množín a taktiež použitím jednoduchšej formuly pre mohutnosť komplementu množiny $|\bar{A}| = |U| - |A|$.

Postulujeme pre elementy univerza U vlastnosti p_1, p_2, \dots, p_n , potom vzhľadom k týmto vlastnostiam definujeme n množín $A_1, A_2, \dots, A_n \subset U$ tak, že elementy množiny A_i majú vlastnosť p_i (pre $i = 1, 2, \dots, n$)

$$A_i = \{x \in U; \text{vlastnosť}(x) = p_i\} \quad (5.22a)$$

Potom, zjednotenie $A_i \cup A_j$ obsahuje elementy, ktoré majú vlastnosť p_i **alebo** vlastnosť p_j . Analogicky, prienik $A_i \cap A_j$ obsahuje elementy, ktoré majú súčasne vlastnosť p_i **a** vlastnosť p_j . Táto terminológia je jednoducho zovšeobecniteľná aj pre prieniky alebo zjednotenia viac ako dvoch množín A_i . Komplement

$$\bar{A}_i = \{x \in U; \text{vlastnosť}(x) = \bar{p}_i\} \quad (5.22b)$$


obsahuje elementy, ktoré **nemajú** vlastnosť p_i , čo je označené symbolom \bar{p}_i . Podobne, ako v texte za (5.22a), zjednotenie $\bar{A}_i \cup \bar{A}_j$ obsahuje elementy, ktoré **nemajú** vlastnosť p_i **alebo** **nemajú** vlastnosť p_j . Prienik $\bar{A}_i \cap \bar{A}_j$ obsahuje elementy, ktoré **nemajú** súčasne vlastnosť p_i ani vlastnosť p_j .

Nech symbol $N(p_{i_1}, p_{i_2}, \dots, p_{i_k})$ špecifikuje počet elementov, ktoré majú súčasne vlastností $p_{i_1}, p_{i_2}, \dots, p_{i_k}$, potom tento symbol je určený ako mohutnosť prieniku množín $A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}$

$$N(p_{i_1}, p_{i_2}, \dots, p_{i_k}) = |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}| \quad (5.23)$$

Duálny tvar tejto formuly dostaneme zámennou p_i za \bar{p}_i

$$N(\bar{p}_{i_1}, \bar{p}_{i_2}, \dots, \bar{p}_{i_k}) = |\bar{A}_{i_1} \cap \bar{A}_{i_2} \cap \dots \cap \bar{A}_{i_k}| = |U| - |A_{i_1} \cup A_{i_2} \cup \dots \cup A_{i_k}| \quad (5.24)$$

VETA 5.1. 

Princíp inklúzie a exklúzie

$$N(\bar{p}_1, \bar{p}_2, \dots, \bar{p}_n) = |U| - \sum_{i=1}^n N(p_i) + \sum_{\substack{i,j=1 \\ (i < j)}}^n N(p_i, p_j) - \sum_{\substack{i,j,k=1 \\ (i < j < k)}}^n N(p_i, p_j, p_k) + \dots \quad (5.25)$$

$$(-1)^n N(p_1, p_2, \dots, p_n)$$

Táto veta je priamym dôsledkom formuly (5.20b).

PRÍKLAD 5.5.

Koľko riešení má rovnica

$$x_1 + x_2 + x_3 = 11$$

kde neznáme sú nezáporné celé čísla $x_1 \leq 3, x_2 \leq 4, x_3 \leq 6$?

Postulujeme tri podmienky, $p_1 = (x_1 > 3)$, $p_2 = (x_2 > 4)$ a $p_3 = (x_3 > 6)$. Použitím vety 5.1 celkový počet riešení je určený formulou

$$N(\bar{p}_1, \bar{p}_2, \bar{p}_3) = |U| - N(p_1) - N(p_2) - N(p_3) + N(p_1, p_2) + N(p_1, p_3) + N(p_2, p_3) - N(p_1, p_2, p_3) \quad (\clubsuit)$$

Postupne budeme určovať jednotlivé členy z pravej strany tejto formuly:

(1) $|U|$ = celkový počet nezáporných celočíselných riešení. Nech $0 \leq x_1 \leq 11$, potom x_2 a x_3 sú určené rovnicou $x_2 + x_3 = 11 - x_1 = p$, kde $0 \leq p \leq 11$. Rovnica $x_2 + x_3 = p$ má $p+1$ riešení $((0, p), (1, p-1), \dots, (p, 0))$. To znamená, že celkový počet riešení rovnice $x_1 + x_2 + x_3 = 11$ je

$$|U| = 12 + 11 + \dots + 1 = \frac{13 \cdot 12}{2} = 78$$

(2) $N(p_1)$ = počet riešení s $x_1 \geq 4$. Použijeme rovnaké argumenty ako v predšlom bode (1), potom celkový počet riešení je

$$N(p_1) = 8 + 7 + \dots + 1 = \frac{9 \cdot 8}{2} = 36$$

(3) $N(p_2)$ = počet riešení s $x_2 \geq 5$, potom celkový počet riešení je

$$N(p_2) = 7 + 6 + \dots + 1 = \frac{8 \cdot 7}{2} = 28$$

(4) $N(p_3)$ = počet riešení s $x_3 \geq 7$, potom celkový počet riešení je

$$N(p_3) = 5 + 4 + \dots + 1 = \frac{6 \cdot 5}{2} = 15$$

(5) $N(p_1, p_2)$ = počet riešení s $x_1 \geq 4$, $x_2 \geq 5$, potom celkový počet riešení je určený jednoduchou enumeráciou: $A_1=(4,5)$, $A_2=(4,6)$, $A_3=(4,7)$, $A_4=(5,5)$, $A_5=(5,6)$, $A_6=(6,5)$

$$N(p_1, p_2) = 6$$

(6) $N(p_1, p_3)$ = počet riešení s $x_1 \geq 4$, $x_3 \geq 7$, potom celkový počet riešení je určený jednoduchou enumeráciou: $A_1=(4,7)$

$$N(p_1, p_3) = 1$$

(7) $N(p_2, p_3)$ = počet riešení s $x_2 \geq 5$, $x_3 \geq 7$, k týmto podmienkam neexistujú riešenia

$$N(p_2, p_3) = 0$$

(8) $N(p_1, p_2, p_3)$ = počet riešení s $x_1 \geq 4$, $x_2 \geq 5$, $x_3 \geq 7$, k týmto podmienkam neexistujú riešenia

$$N(p_1, p_2, p_3) = 0$$

Dosadením týchto čiastkových výsledkov do (\clubsuit) dostaneme vyžadovaný počet riešení, ktoré spĺňajú podmienky $x_1 \leq 3, x_2 \leq 4, x_3 \leq 6$

$$N(\bar{p}_1, \bar{p}_2, \bar{p}_3) = 78 - 36 - 28 - 15 + 6 + 1 + 0 - 0 = 6$$

Eratostenovo sito⁶

KOLKO EXISTUJE
PRVOČÍSEL $\leq M$

Koľko existuje prvočísel, ktorých hodnota nie je väčšia ako M ? Pripomeňme, že každé zložené celé číslo $1 < c = \alpha\beta \dots \leq M$ (kde $\alpha, \beta, \dots > 1$ sú celé čísla) je deliteľné aspoň jedným takým prvočíslom, ktorého kvadrát nie je väčší ako M . Z tejto vlastnosti vychádza aj metóda nazývaná *Eratostenovo sito*. Nech prvočísla, ktoré vyhovujú podmienke $p_i \leq M$ tvoria množinu, obsahujúcu prvých k prvočísel, $\{p_1, p_2, \dots, p_k\}$. Množinu prvých $M-1$ kladných celých čísel označíme $C = \{2, 3, \dots, M\}$, kde sme zámerne vynechali 1, pretože 1 priamo z definície nie je prvočíslo. Metódu Eratostenovho sita vyjadríme pomocou kódu v pseudoPascalle, kde $q = \lfloor \sqrt{M} \rfloor$.

POSTUPNÉ
ODSTRAŇOVANIE

Po skončení algoritmu bude výsledná množina $C = \{p_1, p_2, \dots, p_k\}$ obsahovať len prvočísla, ktoré nie sú väčšie ako M . Hodnota $\text{mod}(a, b)$ sa nazýva „ a modulo b “. V algebre sa označuje „ $a \text{ mod } b$ “ a je to zvyšok po delení čísla a číslom b ; ($a \text{ mod } b$) = 0 práve vtedy, keď číslo a je deliteľné číslom b . V prvom kole ($i = 2$, prvé

⁶ Eratosthenes (276–194 p.n.l.) významný grécky vedec, matematik, geograf, astronóm a filozof, ktorý viedol známu starovekú knižnicu v Alexandrii, svojim súčasníkom bol známy svojou chronológiou starovekej histórie a zmeraním polomeru zemského glóbu.

DELITELNÝCH
ČÍSEL POMOCOU
MODULO DELENIA

preosievanie Eratosthenovým sitom) algoritmus odstraňuje z množiny C všetky čísla, ktoré sú deliteľné $p_1 = 2$, okrem tohto čísla samotného. Podobne, v druhom kole sa odstraňujú čísla z C , ktoré sú deliteľné druhým prvočíslom $p_2 = 3$, okrem neho samotného, atď. Po ukončení „preosievania“ množina C obsahuje prvočísla, ktoré nie sú väčšie ako zvolené číslo M , pozri tab. 5.4.

ALGORITMUS 5.4.
ERATOSTHE
-NOVO SITO

```
C := {2, 3, ..., M};
for i := 2 to q do
  if i ∈ C begin for j ∈ C ∧ (j > i) do
    if (mod(j, i) = 0) then C := C - {j}
  end;
```

PRÍKLAD 5.6.

Koľko prvočísel nie je väčších ako 100?

Použijeme princíp inklúzie a exklúzie (veta 5.1) na riešenie tejto úlohy. Postulujeme štyri vlastnosti:

$$P_1 = (\text{číslo je deliteľné } p_1 = 2), P_2 = (\text{číslo je deliteľné } p_2 = 3)$$

$$P_3 = (\text{číslo je deliteľné } p_3 = 5), P_4 = (\text{číslo je deliteľné } p_4 = 7)$$

Potom počet prvočísel, ktoré nie sú väčšie ako $M = 100$ je špecifikovaný výrazom

$$4 + N(\bar{P}_1, \bar{P}_2, \bar{P}_3, \bar{P}_4)$$

Použitím vety 5.1 dostaneme

$$\begin{aligned} N(\bar{P}_1, \bar{P}_2, \bar{P}_3, \bar{P}_4) &= 99 - N(P_1) - N(P_2) - N(P_3) - N(P_4) + N(P_1, P_2) + N(P_1, P_3) \\ &\quad + N(P_1, P_4) + N(P_2, P_3) + N(P_2, P_4) + N(P_3, P_4) - N(P_1, P_2, P_3) \\ &\quad - N(P_1, P_2, P_4) - N(P_1, P_3, P_4) - N(P_2, P_3, P_4) + N(P_1, P_2, P_3, P_4) \end{aligned}$$

Veličiny $N(\cdot)$ môžeme jednoducho vyjadriť takto: počet celých čísel, ktoré nie sú väčšie ako M a sú deliteľné podmnožinou prvočísel $\{2, 3, 5, 7\}$ je $\lfloor 100/x \rfloor$, t. j. *dolnou celou časťou* (kde $\lfloor 1.3 \rfloor = 1$ a $\lfloor 1.9 \rfloor = 1$) podielu $100/x$, kde x je súčin prvočísel z danej podmnožiny. Potom

Tabuľka 5.4. Prvočísla menšie ako 100

	2 ₁	3 ₂	4	5 ₃	6	7 ₄	8	9	10
11 ₅	12	13 ₆	14	15	16	17 ₇	18	19 ₈	20
21	22	23 ₉	24	25	26	27	28	29 ₁₀	30
31 ₁₁	32	33	34	35	36	37 ₁₂	38	39	40
41 ₁₃	42	43 ₁₄	44	45	46	47 ₁₅	48	49	50
51	52	53 ₁₆	54	55	56	57	58	59 ₁₇	60
61 ₁₈	62	63	64	65	66	67 ₁₉	68	69	70
71 ₂₀	72	73 ₂₁	74	75	76	77	78	79 ₂₂	80
81	82	83 ₂₃	84	85	86	87	88	89 ₂₄	90
91	92	93	94	95	96	97 ₂₅	98	99	100

$$\begin{aligned}
N(\bar{P}_1, \bar{P}_2, \bar{P}_3, \bar{P}_4) &= 99 - \left\lfloor \frac{100}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{100}{3} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{100}{5} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{100}{7} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{2 \cdot 3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{2 \cdot 5} \right\rfloor \\
&\quad + \left\lfloor \frac{100}{2 \cdot 7} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{3 \cdot 5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{3 \cdot 7} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{5 \cdot 7} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{100}{2 \cdot 3 \cdot 5} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{100}{2 \cdot 3 \cdot 7} \right\rfloor \\
&\quad - \left\lfloor \frac{100}{2 \cdot 5 \cdot 7} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{100}{3 \cdot 5 \cdot 7} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7} \right\rfloor \\
&= 99 - 50 - 33 - 20 - 14 + 16 + 10 \\
&\quad + 7 + 6 + 4 + 2 - 3 - 2 \\
&\quad - 1 - 0 + 0 \\
&= 21
\end{aligned}$$

To znamená, že existuje $4+21=25$ prvočísel, ktoré nie sú väčšie ako 100, pozri tab. 5.4.

Derangementálne permutácie

DERANGEMENTÁLNA
PERMUTÁCIA
= ŽIADEN INDEX NA
SVOJOM MIESTE
PODĽA PORADIA

Nech P je permutácia n objektov

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ r_1 & r_2 & \dots & r_n \end{pmatrix}$$

Permutácia P sa nazýva derangementálna vtedy a len vtedy, ak

$$\forall i (i \neq r_i)$$

Príkladom derangementálnej permutácie je $(2, 3, 4, 5, 1)$ pôvodných 5 objektov v základnom usporiadaní $(1, 2, 3, 4, 5)$. Naším cieľom je spočítať počet D_n derangementálnych permutácií n objektov. Postulujeme, že permutácia P má vlastnosť p_i (kde $i=1,2,\dots,n$), ak v permutácii v i -tej pozícii je splnená vlastnosť $i = r_i$ (t. j. táto pozícia je zafixovaná). Potom platí

$$D_n = N(\bar{p}_1, \bar{p}_2, \dots, \bar{p}_n)$$

použitím princípu inkluzie a exklúzie (5.25) je číslo D_n určené

$$\begin{aligned}
D_n &= n! - \sum_i N(p_i) + \sum_{i < j} N(p_i, p_j) - \sum_{i < j < k} N(p_i, p_j, p_k) + \dots \\
&\quad + (-1)^n N(p_1, p_2, \dots, p_n)
\end{aligned} \quad (\spadesuit)$$

Určíme jednotlivé veličiny $N(\cdot)$ z pravej strany:

- (1) $N(p_i) = (n-1)!$
- (2) $N(p_i, p_j) = (n-2)!$
- (3) $N(p_i, p_j, p_k) = (n-3)!$

.....
Vo všeobecnosti platí

$$N(p_{i_1}, p_{i_2}, \dots, p_{i_m}) = (n - m)!$$

Musíme ešte pristúpiť k sumácii týchto výrazov

$$\sum_i N(p_i) = \binom{n}{1} (n-1)!$$

$$\sum_{i < j} N(p_i, p_j) = \binom{n}{2} (n-2)!$$

Vo všeobecnosti platí

$$\sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_m} N(p_{i_1}, p_{i_2}, \dots, p_{i_m}) = \binom{n}{m} (n-m)!$$

Ak dosadíme tieto formuly do výrazu (♣) pre počet derangementálnych permutácií, po jednoduchých úpravách dostaneme konečný výraz pre D_n .

VETA 5.2.

Počet derangementálnych permutácií n objektov je určený

$$D_n = n! \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{1}{n!} \right) \quad (5.26)$$

PRAVDEPODOB-
NOSŤ NÁHODNEJ
GENERÁCIE
DERANGEMEN-
TÁLNEJ
PERMUTÁCIE

V rôznych aplikáciách je zaujímavá otázka, s akou pravdepodobnosťou pri náhodnej generácii permutácie n objektov dostaneme derangementálnu permutáciu. Táto pravdepodobnosť je určená pomerom $D_n/n!$, použitím (5.26) dostaneme jednoduchú formulu pre túto pravdepodobnosť

$$\frac{D_n}{n!} = \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{1}{n!} \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^{-1} \quad (5.27)$$

RECONTRES,
DE MONTMORT

Poznámka. Kartová hra *recontres* bola veľmi populárna vo Francúzsku v 17. a 18. storočí. Spočívala v tom, že 52 kariet (z ktorých bolo 26 párov rovnakých kariet) sa rozdalo a usporiadalo do dvoch radov pod sebou tak, že vždy dvojica kariet tvorila pár. Skóre hry sa počítalo podľa množstva rovnakých párov. Preto v r. 1708 francúzsky matematik Pierre Raymond de Montmort (1678–1719) riešil úlohu, s akou pravdepodobnosťou dostane hráč také karty, že neexistuje priradenie medzi dvojicami kariet. Ako vyplýva z (5.27), pravdepodobnosť udalosti, že hráč vytiahne dve rovnaké karty sa približne rovná $1 - (1/e) \approx 1 - 0,368 = 0,632$. Táto pomerne vysoká pravdepodobnosť (okolo 60 %) robila túto triviálnu hru zaujímavou v určitých kruhoch vtedajšej aristokracie staršieho veku.

ZHRNUTIE

REKURENTNÉ
FORMULY

Rekurentná formula pre postupnosť $\{a_n\}$ je rovnica, ktorá vyjadruje n -tý člen postupnosti a_n pomocou predchádzajúcich členov postupnosti, $a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_{n-k}$ (k je celé kladné číslo)

$$a_n = f(a_{n-k}, a_{n-k+1}, \dots, a_{n-1})$$

a počiatkových hodnôt prvých k elementov postupnosti, a_0, a_1, \dots, a_{k-1} . Postupnosť $\{a_n\}$ sa nazýva riešenie rekurentnej formuly ak jej jednotlivé členy vyhovujú tejto formule. Existuje úzky vzťah medzi rekurentnou formulou a rekúziou. Rekurzívny algoritmus zostrojuje pre danú hodnotu „premennej“ n riešenie pomocou riešení rovnakého problému pre menšie hodnoty premennej n . Rekurzívny algoritmus sa ukončí, keď sa dosiahnu hodnoty premennej n , pre ktoré riešenie už poznáme (napr. ako počiatkovú hodnotu).

ALGORITMY
„ROZDEĽUJ
A PANUJ“

Metóda rozdeľuj a panuj patrí medzi efektívne prístupy k riešeniu niektorých typov rekurentných formúl. Predpokladajme, že rekurzívny algoritmus rozdeľuje problém dimenzie n na a podproblémov, pričom dimenzia podproblému nech je špecifikovaná zlomkom n/b . Predpokladajme taktiež, že potrebujeme $g(n)$ dodatočných operácií k tomu, aby sme v unifikáčnej (panovačnej) fáze algoritmu pospájali riešenia podproblémov do celkového riešenia. Potom, ak $f(n)$ vyjadruje počet operácií potrebných na riešenie celkového problému dimenzie n , funkcia f je špecifikovaná formulou nazývanou rekurentná formula rozdeľuj-a-panuj

$$f(n) = af(n/b) + g(n)$$

METÓDA INKLÚZIE
A EXKLÚZIE

Metóda inklúzie a exklúzie je založená na známych množinovo-teoretických formulách pre kardinalitu zjednotenia množín, ktoré sú zovšeobecnené tak, že obsahujú aj komplementy jednotlivých podmnožín

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

$$|\bar{A} \cap \bar{B}| = |U| - |A| - |B| + |A \cap B|$$

kde U je univerzálna množina pomocou ktorej sú definované komplementy jednotlivých podmnožín. Obe formuly je možné jednoducho zovšeobecniť pomocou indukcie pre prípad troch a viacerých podmnožín. Princíp inklúzie a exklúzie je založený na jednoduchom prepise druhej formuly do tvaru

$$N(\bar{p}_A, \bar{p}_B) = |U| - N(p_A) - N(p_B) + N(p_A, p_B)$$

kde ľavá strana určuje počet elementov, ktoré súčasne nemajú vlastnosť A a B (nepatria do podmnožín A a B), jednotlivé výrazy na pravej strane určujú počty elementov, ktoré majú vlastnosť A , vlastnosť B , resp. súčasne vlastnosť A a B .

KLÚČOVÉ POJMY

rekurentné formuly
vzťah rekurentnej formuly a rekúzie
faktoriál rekurzívne
zložité úrokovanie
Fibonacciho čísla
Hanojské veže

algoritmus „rozdeľuj a panuj“
usporiadanie so spájaním-merge sort
metóda inklúzie a exklúzie
Eratosthenovo sito
derangementálna permutácia

CVIČENIA

5.1. Nájdite prvých päť členov postupnosti, z ktorých každá je definovaná rekurentnou formulou a počiatočnou podmienkou:

- (a) $a_n = 6a_{n-1}$, $a_0 = 2$,
- (b) $a_n = a_{n-1}^2$, $a_0 = 2$,
- (c) $a_n = a_{n-1} + 3a_{n-2}$, $a_0 = 1, a_1 = 2$,
- (d) $a_n = na_{n-1} + n^2a_{n-2}$, $a_0 = 1, a_1 = 1$,
- (e) $a_n = a_{n-1} + a_{n-3}$, $a_0 = 1, a_1 = 2, a_2 = 0$.

5.2. Nech $a_n = 2^n + 5 \cdot 3^n$, pre $n = 0, 1, 2, \dots$

- (a) nájdite a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 ,
- (b) ukážte, že $a_2 = 5a_1 - 6a_0$, $a_3 = 5a_2 - 6a_1$ a $a_4 = 5a_3 - 6a_2$,
- (c) ukážte, že $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}$, pre $n \geq 2$.

5.3. Ukážte, že postupnosť $\{a_n\}$ je riešením rekurentnej formuly

$$a_n = -3a_{n-1} + 4a_{n-2} \text{ ak}$$

- (a) $a_n = 0$,
- (b) $a_n = 1$,
- (c) $a_n = (-4)^n$,
- (d) $a_n = 2(-4)^n + 3$.

5.4. Do banky ste uložili 1000 EUR na 3 % ročný úrok.

- (a) Zostrojte rekurentnú formulu pre výpočet veľkosti vkladu,
- (b) zostrojte explicitnú formulu na veľkosť vkladu po n rokoch,
- (c) zistite, aká bude veľkosť vkladu po 100 rokoch.

5.5. Akú sumu v EUR musíte vložiť do banky na 3 % ročný úrok, aby ste si po dobu 15 rokov mohli koncom každého roka vyberať z banky 12 000 EUR tak, aby po 15 rokoch bol vklad úplne vybraný?

5.6. Koľko existuje binárnych reťazcov dĺžky 7, ktoré obsahujú párny počet núl (t. j. 0, 2, 4 a 6)?

5.7. V rámci metódy „rozdeľuj-a-panuj“ bola odvodená rekurentná formula $f(n) = 5f(n/2) + 3$, s počiatočnou podmienkou $f(1) = 7$. Nájdite $f(2^k)$, kde k je kladné celé číslo. Taktiež vyhodnoťte $f(n)$, pre $n \rightarrow \infty$.

5.8. Nájdite, koľko porovnaní hľadaného čísla s číslom v usporiadanej postupnosti je potrebných pre binárne prehľadávanie v postupnosti, ktorá obsahuje 64 elementov.

5.9. Predpokladajme, že $f(n) = f(n/3) + 1$, pričom n je deliteľné 3 a $f(1) = 1$.

Nájdite

- (a) $f(3)$,
- (b) $f(27)$,
- (c) $f(729)$.

5.10. Predpokladajme, že $f(n) = 2f(n/2) + 3$, pričom n je párne a $f(1) = 5$. Nájdite

jdite

- (a) $f(2)$,
- (b) $f(8)$,
- (c) $f(64)$,
- (d) $f(1024)$.

5.11. Nájdite $f(n)$, kde $n = 2^k$, funkcia f je určená rekurentnou reláciou $f(n) = f(n/2) + 1$, $f(1) = 1$. Ako sa správa funkcia f pre $n \rightarrow \infty$?

5.12. Nech na turnaji je 2^k družstiev, turnaj prebieha eliminačným spôsobom, t. j. do ďalšieho kola postupujú len víťazi z predchádzajúceho kola. Zostrojte rekurentnú funkciu pre počet vzájomných zápasov v turnaji a formulu, z ktorej počet zápasov spočítate naraz bez iterácií.

5.13. Nech funkcia f vyhovuje rekurentnej funkcii $f(n) = 2f(\sqrt{n}) + 1$, kde n je väčšie ako 1 a je odmocniteľné, počiatočná podmienka má tvar $f(2) = 1$. Nájdite

- (a) $f(16)$,
- (b) asymptotickú formulu pre $n \rightarrow \infty$.

5.14. Koľko elementov obsahuje zjednotenie $A_1 \cup A_2$, ak $|A_1| = 12$, $|A_2| = 18$, a platí

- (a) $A_1 \cap A_2 = \emptyset$,
- (b) $|A_1 \cap A_2| = 1$,
- (c) $|A_1 \cap A_2| = 6$,
- (d) $A_1 \subseteq A_2$.

5.15. Na fakulte je 345 študentov, ktorí si zapísali predmet Matematická analýza, 212 študentov, ktorí si zapísali predmet Diskrétna matematika a 188 študentov, ktorí si zapísali súčasne predmety Matematická analýza a Diskrétna matematika. Koľko študentov má zapísaný aspoň jeden z predmetov Matematická analýza alebo Diskrétna matematika?

- 5.16.** Zistite, koľko elementov obsahuje zjednotenie $A_1 \cup A_2 \cup A_3$, ak každá množina obsahuje 100 elementov, pričom
- (a) množiny sú po dvojiciach disjunktné,
 - (b) každá dvojica množín obsahuje 50 spoločných elementov a žiadny element, ktorý by sa súčasne nachádzal vo všetkých troch množinách,
 - (c) každá dvojica množín obsahuje 50 spoločných elementov a 25 elementov, ktoré sa nachádzajú súčasne vo všetkých troch množinách.
- 5.17.** Nájdite počet kladných celých čísel, ktoré nie sú väčšie ako 100 a ktoré nie sú súčasne deliteľné 7 ani 5.
- 5.18.** Nájdite počet kladných celých čísel, ktoré nie sú väčšie ako 100 a ktoré sú párne alebo sú kvadrátom nejakého celého čísla.
- 5.19.** Koľko binárnych reťazcov dĺžky 8 neobsahuje podreťazec '000000' ?
- 5.20.** V koši máme 100 jabĺčok, z ktorých je 20 červivých a 15 nahnitých. Nech v koši je 10 jabĺčok, ktoré sú červivé a nahnité, koľko jabĺčok v koši nie je ani červivých a ani nahnitých?
- 5.21.** Koľko nezáporných celočíselných riešení menších ako 6 má rovnica $x_1 + x_2 + x_3 = 13$?
- 5.22.** Napíšte všetky derangementy 4 objektov.

6 ALGEBRAICKÉ ŠTRUKTÚRY I

ALGEBRAICKÉ ŠTRUKTÚRY • GRUPOIDY • GRUPY • ZÁKLADNÉ VLASTNOSTI GRUPY • MORFIZMY

V tejto kapitole budeme študovať elementárne algebraické štruktúry s binárnou operáciou – pologrupy, monoidy a grupy. Špeciálna pozornosť bude venovaná základným vlastnostiam grúp, ktoré sú neobyčajne dôležité v rôznych aplikačných oblastiach matematiky, fyziky a informatiky.

6.1 BINÁRNE OPERÁCIE

ALGEBRAICKÁ
ŠTRUKTÚRA =
MNOŽINA A
PRAVIDLÁ

Jeden z častých prístupov v matematike je kombinovať prvky (elementy) množiny, pričom sa požadujú špeciálne vlastnosti kombinácie prvkov. Teória algebraických štruktúr študuje všeobecné vlastnosti takýchto systémov, ktoré obsahujú množinu prvkov, nad ktorou sú obvykle definované binárne operácie. Ako príklad takejto algebraickej štruktúry je množina celých čísel, nad ktorou je definovaná binárna operácia súčtu (alebo rozdielu, súčinu a pod.). Vo všeobecnosti môžeme povedať, že teória algebraických štruktúr obsahuje dve hlavné súčasti: množiny a pravidlá, pomocou ktorých sa z prvkov množín tvoria prvky taktiež z týchto množín.

DEFINÍCIA 6.1.
BINÁRNA
OPERÁCIA



Binárna operácia na množine X je funkcia

$$f : X \times X \rightarrow X \quad (6.1a)$$

ktorá dvom prvkom $x, y \in X$ jednoznačne priradí prvok $z = x * y = f(x, y) \in X$

$$\forall x \forall y \exists! z (z = x * y = f(x, y)) \quad (6.1b)$$

$\exists!x$

Pozn.: zápis $\exists!x$ označuje, že existuje práve jeden prvok x , ktorý spĺňa dané podmienky.

DEFINÍCIA 6.2.

GRUPOID

Usporiadaná dvojica $(X, *)$ obsahujúca množinu X a binárnu operáciu $*$ nad touto množinou tvorí najjednoduchšiu **algebraickú štruktúru** a často sa nazýva **grupoid**.

PRÍKLAD 6.1.

(1) Algebraická štruktúra $(\mathbb{Z}, +)$ obsahuje množinu celých čísel \mathbb{Z} a binárnu operáciu súčet nad touto množinou. Podobným spôsobom môžeme definovať ďalšie dve algebraické štruktúry $(\mathbb{Z}, -)$ a (\mathbb{Z}, \times) , ktoré sú založené na binárnych operáciách rozdiel, resp. súčin.

(2) Nech $X = \mathcal{P}(A)$ je potenčná množina pre množinu A . Operácia zjednotenia a prieniku priradí dvom podmnožinám z A nejakú podmnožinu z A

$$\cup: \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(A) \rightarrow \mathcal{P}(A)$$

$$\cap: \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(A) \rightarrow \mathcal{P}(A)$$

Potom existujú dve jednoduché algebraické štruktúry (X, \cup) a (X, \cap) .

BINÁRNA
OPERÁCIA
MULTIPLIKAČNOU
(CAYLEYHO)
TABUĽKOU

Binárna operácia $'*'$ môže byť špecifikovaná pomocou multiplikačnej tabuľky (ktorá sa v anglosaskej literatúre nazýva Cayleyho tabuľka). Napríklad pre $X = \{a, b, c, d\}$ táto tabuľka môže mať tvar

*	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	d	c	a	b
c	c	b	a	a
d	d	b	c	a

Riadky a stĺpce tejto tabuľky sú označené prvkami množiny X , potom riadok označený prvkom x a stĺpec označený prvkom y obsahuje výsledok binárnej operácie $x*y$.

DEFINÍCIA 6.3.
ASOCIATÍVNA
BINÁRNA
OPERÁCIA

(1) **Binárna operácia** $*$ sa nazýva **asociatívna** na množine X vtedy a len vtedy, ak pre každé $x, y, z \in X$

$$(x*y)*z = x*(y*z) \quad (6.2a)$$

alebo

$$f(f(x, y), z) = f(x, f(y, z)) \quad (6.2b)$$

KOMUTATÍVNA
BINÁRNA
OPERÁCIA

(2) Binárna operácia $*$ sa nazýva **komutatívna** na množine X vtedy a len vtedy, ak pre každé $x, y \in X$

$$x*y = y*x \quad (6.3a)$$

alebo

$$f(x, y) = f(y, x) \quad (6.3b)$$

NEUTRÁLNY
PRVOK

(3) Prvok $e \in X$ sa nazýva **neutrálny** vzhľadom k binárnej operácii $*$ na množine X vtedy a len vtedy, ak pre každé $x \in X$

$$x*e = e*x = x \quad (6.4a)$$

INVERZNÝ PRVOK

(4) Prvok $y \in X$ sa nazýva **inverzný** vzhľadom k prvku $x \in X$ a k binárnej operácii $*$ na množine X vtedy a len vtedy, ak

$$y*x = x*y = e \quad (6.4b)$$



Inverzný prvok y často označujeme symbolom x^{-1} , aby sme zdôraznili jeho vzťah k prvku x .

NEUTRÁLNY =
„JEDNOTKOVÝ“ ČI
„NULOVÝ“ PRVOK

V časti (3) tejto definície bol definovaný „neutrálly“ prvok. V prípade, že binárna operácia $*$ sa interpretuje ako súčin, potom neutrálly prvok sa nazýva „jednotkový“ prvok, ak je binárna operácia interpretovaná ako súčet, potom neutrálly prvok sa nazýva „nulový“ prvok.

PRÍKLAD 6.2.

(1) Pre algebraickú štruktúru $(\mathbb{Z}, +)$ neutrálly prvok je nula, pre každé celé číslo $x \in \mathbb{Z}$ platí podmienka (6.4a)

$$0 + x = x + 0 = x$$

Pre dané celé číslo $x \in \mathbb{Z}$ existuje prvok $(-x) \in \mathbb{Z}$, ktorý spĺňa podmienku (6.4b)

$$(-x) + x = x + (-x) = 0$$

Alternatívne označenie pre tento inverzný prvok je $x^{-1} = (-x)$.

(2) Pre algebraickú štruktúru (\mathbb{Z}, \times) neutrálly prvok je číslo jedna, pre každé celé číslo $x \in \mathbb{Z}$ platí

$$x \times 1 = 1 \times x = x$$

Môžeme si položiť otázku, či každý prvok $x \in \mathbb{Z}$ má inverzný prvok. Napríklad, položíme $x = 5$, potom inverzný prvok y vzhľadom k tomuto prvku je taký, čo vyhovuje podmienke

$$5 \times y = y \times 5 = 1$$

Táto podmienka nemá riešenie v množine celých čísel, formálne $\neg \exists (y \in \mathbb{Z})(5 \times y = y \times 5 = 1)$. Preto, v rámci algebraického systému (\mathbb{Z}, \times) nemá zmysel hovoriť o inverznom prvku vzhľadom k binárnej operácii 'súčin'.


(3) Študujeme algebraickú štruktúru $(\mathcal{P}(A), \cap, \cup)$, definovanú pre potenčnú množinu s dvoma binárnymi operáciami 'prieniik' a 'zjednotenie'. Neutrálly a inverzný prvok pre tento algebraický systém musíme zaviesť separátne pre operáciu zjednotenia resp. prieniiku. Každá z týchto operácií má svoj neutrálly prvok, pre každé $x \in \mathcal{P}(A)$

$$x \cap A = A \cap x = x, \quad x \cup \emptyset = \emptyset \cup x = x$$

To znamená, že pre binárnu operáciu prieniiku (zjednotenia) ako neutrálly prvok je množina A (prázdna množina \emptyset). Komplement $\bar{x} = A - x$ patrí do potenčnej množiny pre každé $x \in \mathcal{P}(A)$, $\forall (x \in \mathcal{P}(A)) \exists (y \in \mathcal{P}(A))(y = \bar{x})$. Takto definovaný komplement $\bar{x} = A - x$ nie je inverzný prvok vzhľadom k podmnožine $x \in \mathcal{P}(A)$

$$x \cap \bar{x} = \bar{x} \cap x = \emptyset, \quad x \cup \bar{x} = \bar{x} \cup x = A$$

pretože na pravých stranách nemáme neutrálne prvky pre danú binárnu operáciu.

VETA 6.1. 


Nech $*$ je binárna operácia na množine X . Ak existuje neutrálny prvok $e \in X$, potom tento neutrálny prvok existuje jednoznačne.

Predpokladajme, že existujú dva neutrálne prvky $e_1, e_2 \in X$, potom súčasne platí

$$e_1 * e_2 = e_2 * e_1 = e_1$$

$$e_2 * e_1 = e_1 * e_2 = e_2$$

preto musí platiť $e_1 = e_2$.

VETA 6.2. 

Nech $*$ je asociatívna binárna operácia na množine X , ktorá má neutrálny prvok $e \in X$. Ak pre každý prvok $x \in X$ existuje inverzný prvok, $x * x^{-1} = x^{-1} * x = e$, potom tento inverzný prvok existuje jednoznačne.

Predpokladajme, že x má dva inverzné prvky u a v , potom podľa (6.4a) platí

$$x * u = u * x = e$$

$$x * v = v * x = e$$

Potom $u = u * e = u * (x * v) = (u * x) * v = e * v = v$.

Poznamenajme, že v dôkaze jednoznačnosti inverzného prvku kľúčovú úlohu hrala podmienka asociatívnosti súčinu $*$, ak tento súčin nie je asociatívny, potom nevieme zabezpečiť túto jednoznačnosť inverzného prvku.

PRÍKLAD 6.3.

Budeme študovať binárnu operáciu $*$ nad množinou $X = \{a, b, c, d\}$, ktorá je určená multiplikačnou tabuľkou

*	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	d	c	a	a
c	c	b	a	d

Dokážeme, že takto definovaná binárna operácia nie je asociatívna.

$$b * (c * d) = b * d = a$$

$$(b * c) * d = a * d = d$$

to znamená, že pre tento konkrétny výber troch prvkov z množiny X sme dokázali

$$b * (c * d) \neq (b * c) * d$$

t. j. binárna operácia nie je asociatívna.

6.2 POLOGRUPY, MONOIDY A GRUPY

V tejto kapitole budeme študovať jednoduché algebraické štruktúry, ktoré obsahujú asociatívnu binárnu operáciu. Jedna z takýchto algebraických štruktúr je pologrupa.

DEFINÍCIA 6.4.
POLOGRUPA,
KOMUTATÍVNA =
ABELOVA



Nech G je neprázdna množina a $*$ je binárna operácia nad touto množinou. Algebraická štruktúra $(G, *)$ sa nazýva **pologrupa** vtedy a len vtedy, ak binárna operácia $*$ je asociatívna

$$(\forall x, y, z \in G)((x * y) * z = x * (y * z)) \quad (6.5)$$

Ak binárna operácia $*$ je aj komutatívna, potom algebraická štruktúra sa nazýva **komutatívna pologrupa** (alebo **Abelova¹ pologrupa**).

PRÍKLAD 6.4.

(1) Algebraické štruktúry $(\mathbb{N}, +)$, (\mathbb{N}, \times) sú komutatívne pologrupy. Binárne operácie súčtu a súčinu nad množinou celých čísel \mathbb{N} sú asociatívne a komutatívne. Tieto dve algebraické štruktúry môžeme zovšeobecniť na množinu \mathbb{R} reálnych čísel, potom štruktúry $(\mathbb{R}, +)$, (\mathbb{R}, \times) sú taktiež komutatívne pologrupy.

(2) Nech $A = \{a, b, c, \dots\}$ je konečná množina symbolov našej abecedy. Reťazce dĺžky n obsahujúce znaky tejto množiny tvoria n -násobný karteziánsky produkt A^n ; napríklad množina $A^2 = \{aa, ab, ac, \dots, ba, bb, bc, \dots\}$ obsahuje všetky reťazce dĺžky 2. Zjednotením týchto množín, $A^* = \{\varepsilon\} \cup A^1 \cup A^2 \cup \dots$, získame množinu, ktorá obsahuje všetky možné reťazce nad A , vrátane prázdneho reťazca ε . Nech $\alpha, \beta \in A^*$ sú dva reťazce, potom zavedieme binárnu operáciu „zreťazenia“, ktorá vytvorí nový reťazec $\gamma = (\alpha + \beta) \in A^*$. Príklad tejto operácie je spojenie reťazcov $\alpha = ab$ a $\beta = caa$ na nový reťazec $\gamma = \alpha + \beta = ab + caa = abcaa$. Táto binárna operácia je asociatívna a nekomutatívna ($\alpha + \beta \neq \beta + \alpha$, pre $\alpha \neq \beta$). Algebraická štruktúra $(A^*, +)$ je nekomutatívna pologrupa.

(3) Pre množinu $A = \{a, b, c\}$ definujme binárnu operáciu pomocou multiplikačnej tabuľky


*	a	b	c
a	a	b	c
b	b	c	a
c	c	a	b

Táto multiplikačná tabuľka je symetrická podľa hlavnej diagonály, z čoho plynie skutočnosť, že binárna operácia je komutatívna. Dôkaz asociatívnosti binárnej operácie je netriviálna záležitosť, pre všetky možné usporiadané trojice s opakovaním musíme dokázať, že platí zákon asociatívnosti

$$\forall (x, y, z \in A)(x * (y * z) = (x * y) * z),$$

¹ Niels Henrik Abel (1802–1829), nórsky matematik, prispel k teórii algebraických rovníc a nekonečných číselných radov. Predčasne umrel na tuberkulózu, rok po jeho smrti mu parížska Akadémia udelila Veľkú cenu za matematiku.

čo vyžaduje $3^3 = 27$ kontrol pre rôzne trojice prvkov. Potom, algebraická štruktúra $(A, *)$ je komutatívna pologrupa.

DEFINÍCIA 6.5.MONOID 

Pologrupa $(A, *)$ sa nazýva *monoid* vtedy a len vtedy, ak má neutrálny prvok.

PRÍKLAD 6.5.

(1) Algebraická štruktúra (\mathbb{N}_+, \times) , kde množina \mathbb{N}_+ obsahuje kladné celé čísla je monoid, existuje neutrálny (jednotkový) prvok '1', ktorý zachováva súčin $x * 1 = 1 * x = x$. Podobná algebraická štruktúra $(\mathbb{N}_+, +)$, ktorá je pologrupou, nie je monoid, pre operáciu súčet neexistuje v rámci množiny \mathbb{N}_+ neutrálny prvok '0' (pretože $0 \notin \mathbb{N}_+$), ktorý zachováva súčet $x + 0 = 0 + x = x$.

(2) V príklade 6.4.2 bola popísaná nekomutatívna pologrupa $(A^*, +)$ reťazcov z množiny A^* , ktorá obsahuje všetky možné reťazce znakov nad abecedou A , pričom táto množina obsahuje aj prázdny znak ε . Binárna operácia je definovaná ako spojenie dvoch reťazcov do nového reťazca. Táto algebraická štruktúra má prvok ε , ktorý je neutrálny vzhľadom k binárnej operácii spojenia reťazcov

$$\forall (x \in A^*) (\varepsilon + x = x + \varepsilon = x)$$

Preto, algebraická štruktúra $(A^*, +)$ je monoid.

(3) Algebraická štruktúra z príkladu 6.4.3 je monoid, neutrálny (jednotkový) prvok je prvok a , z multiplikačnej tabuľky vyplýva, že je neutrálny vzhľadom k zvolenej binárnej operácii

$$\forall (x \in A) (a * x = x * a = x)$$

(4) Uvažujme algebraické štruktúry (X, \cup) a (X, \cap) z príkladu 6.1.2, kde $X = \mathcal{P}(A)$ je potenčná množina pre množinu A . Obe tieto štruktúry sú pologrupy, pretože množinové operácie zjednotenia a prieniku sú asociatívne. Tieto štruktúry tvoria monoidy, pretože prvá (druhá) štruktúra má ako neutrálny prvok prázdnu množinu \emptyset (množinu A)

$$\forall (X \in \mathcal{P}(A)) (\emptyset \cup X = X \cup \emptyset = X)$$

$$\forall (X \in \mathcal{P}(A)) (A \cap X = X \cap A = X)$$

Mnohé algebraické štruktúry, ktoré majú asociatívnu binárnu operáciu a neutrálny prvok vzhľadom k tejto operácii (t. j. monoidy), majú ešte dodatočnú vlastnosť, ku každému prvku z množiny existuje inverzný prvok. Potom takýto monoid sa nazýva grupa. Algebraické štruktúry tohto typu našli široké uplatnenie nielen v mnohých oblastiach matematiky a informatiky, ale aj vo fyzike, chémii a pod.

DEFINÍCIA 6.6.**GRUPA** 

Monoid $(G, *)$ sa nazýva **grupa** vtedy a len vtedy, ak ku každému prvku $x \in G$ existuje inverzný prvok $x^{-1} \in G$. Platí teda, že algebraická štruktúra $(G, *)$ je **grupa** vtedy a len vtedy, ak sú splnené tieto tri podmienky:

- (1) binárna operácia $*$ je asociatívna,
- (2) existuje neutrálny prvok $e \in G$,
- (3) pre každé $x \in G$ existuje inverzný prvok $x^{-1} \in G$.

Mohutnosť množiny G sa nazýva rád grupy $(G, *)$, označuje sa $|G|$.

**NEUTRÁLNY A
INVERZNÝ PRVOK
JEDNOZNAČNE**

Pripomeňme, podľa vety 6.1 platí, že ak existuje neutrálny prvok, potom tento neutrálny prvok je určený jednoznačne; podobne, podľa vety 6.2 ak má algebraická štruktúra asociatívnu binárnu operáciu a neutrálny prvok, platí, že ak existuje ku každému prvku inverzný prvok, potom je určený jednoznačne. Obe tieto skutočnosti sú platné pre algebraickú štruktúru grupa, kde sa postulujú existencia neutrálného prvku a inverzného prvku.

PRÍKLAD 6.6.

(1) Algebraická štruktúra $(\mathbb{Z}, +)$, kde \mathbb{Z} je množina celých čísel, je komutatívna grupa. Binárna operácia súčet $+$ je asociatívna a komutatívna, číslo $0 \in \mathbb{Z}$ má charakter neutrálného prvku vzhľadom k operácii $+$, $0 + x = x + 0 = x$, pre každé číslo x ; podobne, pre každé číslo $x \in \mathbb{Z}$ existuje 'inverzné' číslo $(-x) \in \mathbb{Z}$ také, že $(-x) + x = x + (-x) = 0$.

(2) Nech algebraická štruktúra (\mathbb{R}_+, \times) , kde $\mathbb{R}_+ = (0, \infty)$ je množina kladných reálnych čísel, používa ako binárnu operáciu štandardný súčin. Táto algebraická štruktúra je komutatívna grupa, binárna operácia je asociatívna a komutatívna, existuje neutrálny prvok $1 \in \mathbb{R}_+$, $1 \times x = x \times 1 = x$, pre každý prvok x , a taktiež ku každému x existuje inverzný prvok $x^{-1} = 1/x$, pre ktorý platí $x \times (1/x) = (1/x) \times x = 1$.

(3) Nech algebraická štruktúra $(\mathbb{Z}, *)$ má binárnu operáciu definovanú vzt'ahom

$$x * y = x + y + 1$$

Dokážte, že táto štruktúra je grupa.

Binárna operácia $*$ je komutatívna. Dôkaz jej asociatívnosti je založený na podmienke, aby pre ľubovoľné $x, y, z \in \mathbb{Z}$ bola splnená rovnosť týchto dvoch formúl

$$(x * y) * z = (x + y + 1) * z = x + y + 1 + z + 1 = x + y + z + 2$$

$$x * (y * z) = x * (y + z + 1) = x + y + z + 1 + 1 = x + y + z + 2$$

Porovnaním ich pravých strán dostaneme, že binárna operácia $*$ je asociatívna na množine \mathbb{Z} . Neutrálny prvok $e \in \mathbb{Z}$ vyhovuje definičnej podmienke

$$e * x = x * e = x \Rightarrow e + x + 1 = x \Rightarrow e = -1$$

pre každé $x \in \mathbb{Z}$. To znamená, že prvok $(-1) \in \mathbb{Z}$ pôsobí ako neutrálny prvok na

množine \mathbb{Z} , pre každé $x \in \mathbb{Z}$ platí $(-1) * x = x * (-1) = x$. Na záver, zostrojíme pre každé $x \in \mathbb{Z}$ inverzný prvok $x^{-1} \in \mathbb{Z}$,

$$x * x^{-1} = x + x^{-1} + 1 = -1 \Rightarrow x^{-1} = -2 - x$$

Potom, pre každé $x \in \mathbb{Z}$ existuje inverzný prvok $x^{-1} = (-2 - x) \in \mathbb{Z}$, ktorý vyhovuje podmienke $x * x^{-1} = x^{-1} * x = e = -1$. Týmto sme dokázali, že algebraická štruktúra $(\mathbb{Z}, *)$ tvorí komutatívnu grupu.

VETA 6.3.

Ak algebraická štruktúra $(G, *)$ je grupa, potom existuje „krátenie“ zľava a sprava, pre každé $a, x, y \in G$ platí

(a) krátenie zľava

$$a * x = a * y \Rightarrow x = y \quad (6.6a)$$

(b) krátenie sprava

$$x * a = y * a \Rightarrow x = y. \quad (6.6b)$$

Predpokladajme, že platí $a * x = a * y$, existuje inverzný prvok a^{-1} , potom $a^{-1} * (a * x) = a^{-1} * (a * y) \Rightarrow (a^{-1} * a) * x = (a^{-1} * a) * y \Rightarrow x = y$. Podobne by sme dokázali aj krátenie sprava. Táto veta podstatne uľahčuje algebraické úpravy v teórii grúp, môžeme jednoducho krátiť prvky vo výrazoch, ktoré sa vyskytujú zľava alebo sprava.

VETA 6.4.

Ak algebraická štruktúra $(G, *)$ je grupa, potom pre ľubovoľné $a, b \in G$ platí

(a) rovnica $a * x = b$ má jednoznačné riešenie $x = a^{-1} * b$,

(b) rovnica $x * a = b$ má jednoznačné riešenie $x = b * a^{-1}$.

Nech platí $a * x = b$, postupnými úpravami dostaneme

$$a * x = b \Rightarrow a^{-1} * (a * x) = a^{-1} * b \Rightarrow (a^{-1} * a) * x = a^{-1} * b \Rightarrow x = a^{-1} * b$$

Jednoznačnosť tohto riešenia vyplýva zo skutočnosti, že inverzný prvok a^{-1} existuje jednoznačne. Podobným spôsobom získame riešenie aj druhej rovnice.

VETA 6.5.

Ak algebraická štruktúra $(G, *)$ je grupa, potom v multiplikačnej tabuľke binárnej operácie $*$ sa v každom riadku alebo stĺpci vyskytuje každý prvok z G práve len raz.

V multiplikačnej tabuľke si vyberme jeden riadok a dva rôzne stĺpce (pozri obr. 6.1). Predpokladajme, že $a * x = a * y$, použijeme vetu 6.3 o krátení, potom predpoklad môžeme zjednodušiť do tvaru $x = y$, čo je však v spore s tým, že stĺpce majú byť rôzne. Týmto sme dokázali, že v každom riadku multiplikačnej tabuľky sa nemôžu opakovať prvky grupy. Dôkaz pre stĺpce je podobný.

OBRÁZOK 6.1.
MULTIPLIKAČNÁ
TABUĽKA BINÁRNEJ
OPERÁCIE *
GRUPY

Multiplikačná tabuľka binárnej operácie * grupy $(G, *)$. V tabuľke je vybraný riadok patriaci prvku a a dva stĺpce patriace prvkom x a y , pričom $x \neq y$.

V MULTIPLIKAČNEJ
TABUĽKE GRUPY
SA V RIADKU
ALEBO STĽPCI
NEOPAKUJÚ PRVKY

Z vety 6.5 vyplýva jednoduché kritérium toho, či algebraická štruktúra $(G, *)$ je grupa, ak v príslušnej multiplikačnej tabuľke sa v nejakom riadku alebo stĺpci opakujú prvky, potom štruktúra $(G, *)$ nie je grupa. Poznamenajme však, skutočnosť, že v tabuľke v každom stĺpci alebo riadku sa neopakujú prvky, nie je postačujúcim dôvodom k tomu, aby štruktúra $(G, *)$ bola grupou.

DEFINÍCIA 6.7.

PODGRUPA 

Hovoríme, že algebraická štruktúra $(H, *)$ je **podgrupa** grupy $(G, *)$ vtedy a len vtedy, ak $H \subseteq G$ a $(H, *)$ je grupa, čo budeme zapisovať $(H, *) \subseteq (G, *)$.

TRIVIÁLNE
PODGRUPY =
JEDNOTKOVÝ
PRVOK A SAMOTNÁ
GRUPA

Poznamenajme, že ak $(H, *) \subseteq (G, *)$, potom obe štruktúry sú grupy a obe binárne operácie sú rovnaké. Každá grupa má aspoň dve **triviálne podgrupy**. Prvá je s množinou $H = \{e\}$ a druhá s množinou $H = G$, všetky ostatné podgrupy (ak existujú) nazývame netriviálne.

VETA 6.6.
(LAGRANGEOVA)



Nech $(H, *) \subseteq (G, *)$, potom rád množiny $|G|$ je deliteľný rádom podmnožiny $|H|$, teda existuje také kladné celé číslo k , že $|G| = k|H|$

$$((H, *) \subseteq (G, *)) \Rightarrow \exists k (|G| = k|H|) \quad (6.7)$$

Nebudeme dokazovať túto vetu, jej dôkaz vyžaduje mnoho ďalších pomocných pojmov, čo presahuje rámec tejto príručky. Je zaujímavá tým, že nám poskytuje jednoduché kritérium toho, či nejaká podmnožina H môže tvoriť podgrupu. Ako vyplýva z vety podiel $|G|/|H|$ musí byť kladné celé číslo; ak nie je, potom H nemôže tvoriť podgrupu grupy $(G, *)$.

Nasledujúca veta rieši problém ako efektívne verifikovať, či grupa $(H, *)$ je podgrupa grupy $(G, *)$.

VETA 6.7.

Nech algebraická štruktúra $(G, *)$ je grupa a nech $H \subseteq G$ je konečná podmnožina. Algebraická štruktúra $(H, *)$ je podgrupou vtedy a len vtedy, ak $\forall (x, y \in H)(x * y \in H)$, t. j. podmnožina H je uzavretá vzhľadom k binárnej operácii $*$.

Dôkaz tejto vety spočíva v tom, že vychádzajúc z jej predpokladov ukážeme, že pre každý prvok množiny H existuje v tejto množine aj jeho inverzný prvok. Nech $x \in H$, potom v dôsledku uzavretosti H vzhľadom k operácii $*$ platí $x^n \in H$, pre každé kladné číslo n . Pretože mohutnosť H je konečná, v mocninách x^n sa musia opakovať členy. Nech pre $r > s$ platí $x^r = x^s$, alebo $x^s x^{r-s} = x^s$. Použijeme zákon krátenia zľava (veta 6.3), dostaneme

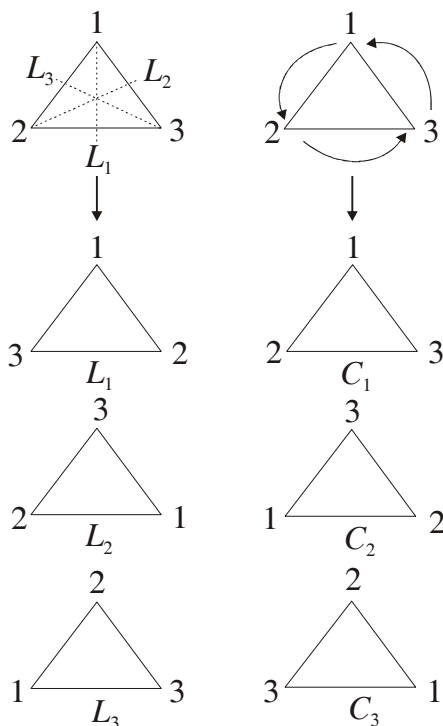
$$x^{r-s} = e$$

Týmto sme dokázali, že množina H obsahuje neutrálny prvok. Taktiež platí

$$x * x^{r-s-1} = x^{r-s} = e$$

potom prvok x má inverzný prvok x^{r-s-1} . Týmto sme dokázali, že pre každý prvok $x \in H$ existuje inverzný prvok v H .

OBRÁZOK 6.2.
PRVKY SYMETRIE
ROVNOSTRAN-
NÉHO
TROJUHOLNÍKA



Prvky symetrie rovnostranného trojuholníka, ktorého vrcholy sú označené číslicami 1, 2 a 3. V ľavom stĺpci sú uvedené tri operácie symetrie L_1 , L_2 a L_3 spočívajúce v zrkadlení podľa uvedených priamok, ktoré prechádzajú vrcholom a polia protiľahlú stranu. V pravom stĺpci sú uvedené tri operácie symetrie C_1 , C_2 a C_3 , ktoré spočívajú v rotácii trojuholníka okolo ťažiska proti smeru hodinových ručičiek o 0 stupňov, 120 stupňov a 240 stupňov.

PRÍKLAD 6.7.

Zavedieme grupu obsahujúcu geometrické transformácie rovnostranného trojuholníka, ktorá sa nazýva **dihedrálna grupa**. V chémii je veľmi populárna, popisuje symetrické vlastnosti niektorých molekúl.

Uvažujme rovnostranný trojuholník, ktorého vrcholy sú označené číslicami 1, 2 a 3, pozri obr. 6.2. Množina prvkov obsahuje 6 **operácií symetrie**, z ktorých tri sú reflexie L_1, L_2, L_3 a rotácie C_1, C_2, C_3 . Ak základnú pozíciu trojuholníka vyjadríme pomocou postupnosti (123), potom aplikácie operácií symetrie na túto postupnosť špecifikujú výsledný transformovaný trojuholník

$$L_1(123) = (132), L_2(123) = (321), L_3(123) = (213), \\ C_1(123) = (123), C_2(123) = (312), C_3(123) = (231)$$

Potom môžeme zostrojiť multiplikačnú tabuľku

*	C_1	C_2	C_3	L_1	L_2	L_3
C_1	C_1	C_2	C_3	L_1	L_2	L_3
C_2	C_2	C_3	C_1	L_3	L_1	L_2
C_3	C_3	C_1	C_2	L_2	L_3	L_1
L_1	L_1	L_2	L_3	C_1	C_2	C_3
L_2	L_2	L_3	L_1	C_3	C_1	C_2
L_3	L_3	L_1	L_2	C_2	C_3	C_1

Z multiplikačnej tabuľky plynie, že táto množina operácií má prvok C_1 , ktorý môžeme klasifikovať ako neutrálny. Z multiplikačnej tabuľky taktiež zistíme, či pre každú operáciu symetrie existuje inverzný prvok

$$C_1^{-1} = C_1, C_2^{-1} = C_3, C_3^{-1} = C_2 \\ L_1^{-1} = L_1, L_2^{-1} = L_2, L_3^{-1} = L_3$$

Podobným spôsobom môžeme dokázať, že binárna operácia súčinu týchto operácií symetrie je asociatívna. Potom, algebraická štruktúra $(D_3 = \{L_1, L_2, L_3, C_1, C_2, C_3\}, *)$ je grupa.

Grupa permutácií

SYMETRICKÁ GRUPA

Ukážeme, že množina permutácií n objektov reprezentovaných množinou $A = \{1, 2, \dots, n\}$ pri vhodnej definícii binárnej operácie $*$ tvorí **symetrickú grupu** $(S_n = \{P_1, P_2, \dots\}, *)$, kde S_n je množina tvorená všetkými permutáciami n objektov. Permutácie boli už špecifikované v kapitole 4.2. Permutáciu P môžeme chápať ako bijektívne zobrazenie $P: A \rightarrow A$, ktoré každému objektu $i \in A$ priradí objekt $p_i \in A$, pričom z podmienky bijektívnosti vyplýva podmienka $\forall (i, j \in A) (i \neq j \Rightarrow p_i \neq p_j)$. Permutáciu P vyjadríme formulou

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{pmatrix}$$

alebo v kompaktnej forme tak, že vynecháme horný riadok ako redundantný

$$P = (p_1 \ p_2 \ \dots \ p_n)$$

Množina S_n obsahuje všetky možné permutácie n objektov, jej mohutnosť je $|S_n| = n!$

Binárna operácia $*$ zobrazuje z dvoch permutácií novú permutáciu

$$*: S_n \times S_n \rightarrow S_n$$

Nech $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{pmatrix}$ a $P' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ p'_1 & p'_2 & \dots & p'_n \end{pmatrix}$ sú dve permutácie, ich súčin $P'' = P * P'$ je definovaný tak, že ak horný riadok v P' preusporiadame tak, aby bol totožný s dolným riadkom permutácie P , potom dolný riadok takto upravenej permutácie špecifikuje permutáciu P''

$$\begin{aligned} P'' = P * P' &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ p'_1 & p'_2 & \dots & p'_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & \dots & p_n \\ p''_1 & p''_2 & \dots & p''_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ p''_1 & p''_2 & \dots & p''_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Príklad takto definovaného súčinu permutácií je ukázaný na obr. 6.3. Súčin dvoch permutácií môžeme interpretovať ako kompozíciu dvoch zobrazení P a P' .

OBRÁZOK 6.3.
SÚČIN DVOCH
PERMUTÁCIÍ

$$\begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \\ \downarrow \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

Znázornenie súčinu dvoch permutácií $(3 \ 2 \ 1) * (2 \ 1 \ 3)$. Dolný riadok ilustruje alternatívnu možnosť konštrukcie súčinu permutácií tak, že horný riadok pravej permutácie upravíme do poradia špecifikovaného druhým riadkom pravej permutácie. Dolný riadok takto upravenej permutácie reprezentuje výsledok súčinu.

**SÚČIN PERMUTÁCIÍ
JE ASOCIATÍVNY**

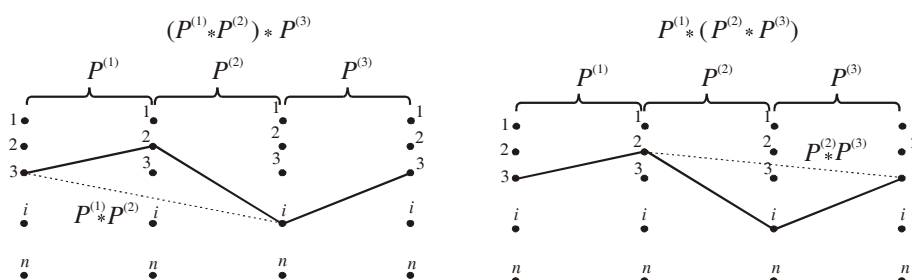
Binárna operácia súčinu dvoch permutácií musí byť asociatívnou operáciou, pre súčin ľubovoľných troch permutácií P_1, P_2, P_3 platí

$$P_1 * (P_2 * P_3) = (P_1 * P_2) * P_3$$

Ľahko sa presvedčíme pomocou obrázka 6.4, že táto podmienka je splnená. Problém existencie inverznej permutácie je riešiteľný jednoduchou „inverziou“

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{pmatrix} \Rightarrow P^{-1} = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & \dots & p_n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}$$

OBRÁZOK 6.4.
DŔKAZ
ASOCIATÍVNOSTI
BINÁRNEJ
OPERÁCIE SÚČINU
NAD
PERMUTÁCIAMI



Dôkaz asociatívnosti binárnej operácie súčinu nad permutáciami. Ľavý (pravý) diagram znázorňuje zátvorkovanie $(P_1 * P_2) * P_3$, kde výsledok prvého súčinu je reprezentovaný prerušovanou čiarou $(P_1 * (P_2 * P_3))$, kde výsledok druhého súčinu je reprezentovaný prerušovanou čiarou. V oboch prípadoch, výsledné zložené zobrazenie je totožné.

PRÍKLAD 6.8.

Zostrojte multiplikačnú tabuľku permutácií troch objektov. Jednotlivé permutácie označíme takto

$$P_1 = (123), P_2 = (231), P_3 = (312), \\ P_4 = (132), P_5 = (321), P_6 = (213)$$

Potom multiplikačná tabuľka pre tieto permutácie má tvar

*	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
P_1	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
P_2	P_2	P_3	P_1	P_5	P_6	P_4
P_3	P_3	P_1	P_2	P_6	P_4	P_5
P_4	P_4	P_6	P_5	P_1	P_3	P_2
P_5	P_5	P_4	P_6	P_2	P_1	P_3
P_6	P_6	P_5	P_4	P_3	P_2	P_1

Z tejto tabuľky vyplýva, že neutrálny prvok je permutácia P_1 , inverzné permutácie sú určené takto

$$P_1^{-1} = P_1, P_2^{-1} = P_3, P_3^{-1} = P_2, P_4^{-1} = P_4, P_5^{-1} = P_5, P_6^{-1} = P_6$$

Potom podmnožina $S'_3 = \{P_1, P_2, P_3\} \subset S_3$ tvorí podgrupu $(S'_3, *) \subseteq (S_3, *)$.

6.3 MORFIZMY

Porovnajme grupy z príkladov 6.7 a 6.8, ktoré majú úplne odlišnú interpretáciu, prvá grupa obsahuje prvky symetrie priestorovej dihedralnej grupy, zatiaľ čo druhá grupa obsahuje permutácie 3 objektov. Ich multiplikačné tabuľky majú tvar

*	C_1	C_2	C_3	L_1	L_2	L_3	*	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
C_1	C_1	C_2	C_3	L_1	L_2	L_3	P_1	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
C_2	C_2	C_3	C_1	L_3	L_1	L_2	P_2	P_2	P_3	P_1	P_5	P_6	P_4
C_3	C_3	C_1	C_2	L_2	L_3	L_1	P_3	P_3	P_1	P_2	P_6	P_4	P_5
L_1	L_1	L_2	L_3	C_1	C_2	C_3	P_4	P_4	P_6	P_5	P_1	P_3	P_2
L_2	L_2	L_3	L_1	C_3	C_1	C_2	P_5	P_5	P_4	P_6	P_2	P_1	P_3
L_3	L_3	L_1	L_2	C_2	C_3	C_1	P_6	P_6	P_5	P_4	P_3	P_2	P_1

Podrobným porovnaním týchto tabuliek zistíme, že ak medzi tabuľkami urobíme priradenie jednotlivých prvkov takto

$$C_1 \leftrightarrow P_1, C_2 \leftrightarrow P_3, C_3 \leftrightarrow P_2, L_1 \leftrightarrow P_4, L_2 \leftrightarrow P_5, L_3 \leftrightarrow P_6$$

potom multiplikačné tabuľky sú totožné. Preto môžeme povedať, že aj grupy $(D_3, *)$ a $(S_3, *)$ sú si podobné.

DEFINÍCIA 6.8. IZOMORFIMUS



Hovoríme, že medzi grupami $(G, *)$ a (G', \circ) existuje **izomorfimus** (alebo, že grupy sú **izomorfné**), čo značíme $(G, *) \cong (G', \circ)$, vtedy a len vtedy, ak existuje bijekcia $f : G \rightarrow G'$, pre ktorú platí

$$\forall (x, y \in G) (f(x * y) = f(x) \circ f(y)) \quad (6.8)$$

PRÍKLAD 6.9.

Uvažujme dve grupy, $(\mathbb{R}, +)$ a (\mathbb{R}_+, \times) , kde $\mathbb{R}_+ = (0, \infty)$ je množina kladných reálnych čísel. Dokážte, že funkcia $f(x) = 2^x$ definuje izomorfizmus medzi týmito dvoma grupami, $(\mathbb{R}, +) \cong (\mathbb{R}_+, \times)$.

Funkcia $f(x) = 2^x$ je rýdzo rastúca, čiže je aj 1-1-značná. Funkcia má zaujímavú vlastnosť, $(\forall x, y \in \mathbb{R}) f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$, pomocou ktorej sa jednoducho zostrojí izomorfizmus medzi grupami, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$

VETA 6.8.



Ak $f : G \rightarrow G'$ je izomorfizmus medzi grupami $(G, *)$ a (G', \circ) , potom

- (1) Ak e je neutrálny prvok v grupe $(G, *)$, potom $f(e)$ je neutrálny prvok v grupe (G', \circ) .
- (2) Grupa $(G, *)$ je komutatívna vtedy a len vtedy, ak (G', \circ) je komutatívna grupa.
- (3) Ak x^{-1} je inverzný prvok vzhľadom k prvku x v grupe $(G, *)$, potom $f(x^{-1})$ je inverzný prvok vzhľadom k prvku $f(x)$ v grupe (G', \circ) .
- (4) Inverzné zobrazenie $f^{-1} : G' \rightarrow G$ definuje izomorfizmus z grupy (G', \circ) do grupy $(G, *)$.
- (5) Ak $(H, *)$ je podgrupa grupy $(G, *)$, potom (H', \circ) , kde $H' = \{f(x); x \in H\}$, je podgrupa grupy (G', \circ) a $(H, *) \cong (H', \circ)$.

IZOMORFIZMUS
ZACHOVÁVA NAPR.
KOMUTATÍVNOSŤ

Táto veta nám pomáha zistiť, či medzi grupami $(G, *)$ a (G', \circ) existuje izomorfizmus. Napríklad, ak grupa $(G, *)$ je komutatívna a grupa (G', \circ) nie je komutatívna, potom medzi týmito grupami nemôže existovať izomorfizmus. Vo všeobecnosti teda platí, že ak chceme zistiť, že dve grupy nie sú izomorfné, musíme nájsť takú vlastnosť prvej grupy, ktorá sa nevyskytuje v druhej grupe.

PRÍKLAD 6.10.

Dokážte, že ak $A = \{a, b\}$, potom monoidy $(\mathcal{P}(A), \cup)$ a $(\mathcal{P}(A), \cap)$ sú izomorfné. (Izomorfizmus monoidov definujeme rovnako ako pre grupy.)

Potenčná množina má tvar $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$. Multiplikačné tabuľky pre tieto monoidy majú tvar

\cup	\emptyset	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{a, b\}$
\emptyset	\emptyset	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{a, b\}$
$\{a\}$	$\{a\}$	$\{a\}$	$\{a, b\}$	$\{a, b\}$
$\{b\}$	$\{b\}$	$\{a, b\}$	$\{b\}$	$\{a, b\}$
$\{a, b\}$	$\{a, b\}$	$\{a, b\}$	$\{a, b\}$	$\{a, b\}$

\cap	\emptyset	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{a, b\}$
\emptyset	\emptyset	\emptyset	\emptyset	\emptyset
$\{a\}$	\emptyset	$\{a\}$	\emptyset	$\{a\}$
$\{b\}$	\emptyset	\emptyset	$\{b\}$	$\{b\}$
$\{a, b\}$	\emptyset	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{a, b\}$

1-1-značná funkcia $f: \mathcal{P}(A) \rightarrow \mathcal{P}(A)$, ktorá zobrazuje prvú tabuľku na druhú má tvar

$$f(\emptyset) = \{a, b\}, f(\{a\}) = \{a\}, f(\{b\}) = \{b\}, f(\{a, b\}) = \emptyset$$

Potom medzi monoidami $(\mathcal{P}(A), \cup)$ a $(\mathcal{P}(A), \cap)$ existuje izomorfizmus.

DEFINÍCIA 6.9.
HOMOMORFIZMUS



Hovoríme, že medzi algebraickými štruktúrami $(G, *)$ a (G', \circ) existuje **homomorfizmus** vtedy a len vtedy, ak existuje zobrazenie $f: G \rightarrow G'$, ktoré zachováva relevantné vlastnosti štruktúry, ako neutrálne a inverzné prvky, a pre binárne operácie platí

$$\forall (x, y \in G) (f(x * y) = f(x) \circ f(y)) \quad (6.9)$$

BEZ BIJEKTÍVNOSTI
MÔŽEME STRÁCAŤ
DETAILY

Ak medzi dvoma algebraickými štruktúrami existuje izomorfizmus, potom tieto štruktúry sú „skoro totožné“. Ak odstránime podmienku bijektívnosti funkcie $f: G \rightarrow G'$, potom táto „skoro totožnosť“ sa stráca, druhá algebraická štruktúra (G', \circ) už nemusí mať všetky detaily prvej štruktúry.

PRÍKLAD 6.11.

Uvažujme množinu $A = \{a, b, c\}$, množina A^* obsahuje všetky možné reťazce prvkov a, b, c (vrátane prázdneho reťazca ε). Potom algebraická štruktúra $(A^*, *)$, kde binárna operácia $*$ reprezentuje spájanie reťazcov, je monoid (existuje neutrálny prvok reprezentovaný prázdny reťazcom ε). Nech existuje funkcia $f: A^* \rightarrow \mathbb{N}$, kde \mathbb{N} je množina nezáporných celých čísel, táto funkcia je

definovaná takto

$$f(x) = \text{dĺžka reťazca } x$$

Ukážte, že toto zobrazenie f je homomorfizmus z $(A^*, *)$ na $(\mathbb{N}, +)$.

Z definície funkcie f vyplýva, že platí

$$f(x * y) = f(x) + f(y)$$

t. j. dĺžka spojeného reťazca $x * y$ sa rovná súčtu dĺžok jeho zložiek x a y . Táto funkcia evidentne nie je bijekcia, aj keď neutrálny prvok sa zobrazením zachováva.

ZHRNUTIE

BINÁRNA OPERÁCIA

Binárna operácia na množine X je predpis (funkcia)

$$f : X \times X \rightarrow X$$

ktorá dvom prvkom $x, y \in X$ jednoznačne priradí prvok $z = x * y = f(x, y) \in X$. Binárna operácia môže byť asociatívna, komutatívna. **Prvok** $e \in X$ sa nazýva **neutrálly** vzhľadom k binárnej operácii $*$ na množine X vtedy a len vtedy, ak pre každé $x \in X$

$$x * e = e * x = x$$

Prvok $y \in X$ sa nazýva **inverzný** vzhľadom k prvku $x \in X$ a k binárnej operácii $*$ na množine X vtedy a len vtedy, ak

$$y * x = x * y = e$$

Inverzný prvok y často označujeme symbolom x^{-1} , aby sme zdôraznili jeho vzťah k prvku x .

ALGEBRAICKÁ ŠTRUKTÚRA

Usporiadaná dvojica $(G, *)$ obsahujúca množinu G a binárnu operáciu $*$ nad touto množinou sa nazýva **algebraická štruktúra**.

Algebraická štruktúra $(G, *)$ sa nazýva **pologrupa** vtedy a len vtedy, ak binárna operácia $*$ je asociatívna. Ak binárna operácia $*$ je aj komutatívna, potom algebraická štruktúra sa nazýva komutatívna pologrupa.

Pologrupa $(G, *)$ sa nazýva **monoid** vtedy a len vtedy, ak má neutrálny prvok.

GRUPA

Monoid $(G, *)$ sa nazýva grupa, ak ku každému prvku $x \in G$ existuje inverzný prvok $x^{-1} \in G$. Platí teda, že algebraická štruktúra $(G, *)$ je **grupa** vtedy, ak sú splnené tieto tri podmienky: (1) binárna operácia $*$ je asociatívna, (2) existuje neutrálny prvok $e \in G$, (3) pre každé $x \in G$ existuje inverzný prvok $x^{-1} \in G$.

ZÁKLADNÉ
VLASTNOSTI
GRUPY

Ak algebraická štruktúra $(G, *)$ je grupa, potom existuje „krátenie“ zľava a sprava, pre každé $a, x, y \in G$ platí: (a) krátenie zľava $a * x = a * y \Rightarrow x = y$ a (b) krátenie sprava $x * a = y * a \Rightarrow x = y$.

V multiplikačnej tabuľke grupy G , ktorá znázorňuje binárnu operáciu $*$ sa v každom riadku alebo stĺpci vyskytuje každý element z G práve len raz.

Algebraická štruktúra $(H, *)$ je **podgrupa** grupy $(G, *)$ vtedy, ak $H \subseteq G$ a $(H, *)$ je grupa, čo sa zapisuje takto $(H, *) \subseteq (G, *)$.

MORFIZMY

Medzi grupami $(G, *)$ a (G', \circ) existuje **homomorfizmus** vtedy a len vtedy, ak existuje zobrazenie $f : G \rightarrow G'$, ktoré zachováva binárnu operáciu,

$$\forall (x, y \in G)(f(x * y) = f(x) \circ f(y)).$$

Medzi grupami $(G, *)$ a (G', \circ) existuje **izomorfizmus** (alebo, že grupy sú **izomorfne**), čo značíme $(G, *) \cong (G', \circ)$, vtedy, ak existuje 1-1-značné zobrazenie $f : G \rightarrow G'$, ktoré zachováva binárnu operáciu,

$$\forall (x, y \in G)(f(x * y) = f(x) \circ f(y)).$$

KLÚČOVÉ POJMY

<i>algebraické štruktúry</i>	<i>komutatívna pologrupa</i>
<i>grupoidy</i>	<i>Abelova pologrupa</i>
<i>grupy</i>	<i>monoid</i>
<i>základné vlastnosti grupy</i>	<i>krátenie zľava</i>
<i>morfizmy</i>	<i>krátenie sprava</i>
<i>binárna operácia</i>	<i>podgrupa</i>
<i>existuje práve jeden prvok $x, \exists!x$</i>	<i>triviálne podgrupy</i>
<i>multiplikačná (Cayleyho) tabuľka</i>	<i>Lagrangeova veta</i>
<i>asociatívna binárna operácia</i>	<i>rád grupy</i>
<i>komutatívna binárna operácia</i>	<i>dihedrálna grupa</i>
<i>neutrálny prvok</i>	<i>grupa permutácií</i>
<i>inverzný prvok</i>	<i>symetrická grupa</i>
<i>„jednotkový“ prvok</i>	<i>súčin permutácií</i>
<i>„nulový“ prvok</i>	<i>izomorfizmus</i>
<i>pologrupa</i>	<i>homomorfizmus</i>

CVIČENIA

6.1. Pre každý uvedený prípad rozhodnite, či symbol $x * y$ špecifikuje binárnu operáciu na množine A . Ak nie, tak vysvetlite prečo.

- (a) $x * y = x - y$, $A = \mathbb{R}_+ = (0, \infty)$.
- (b) $x * y = x + y$, pre $A = \mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$.
- (c) $x * y = x^y$, $A = \mathbb{R}_+ = (0, \infty)$.
- (d) $x * y = \text{maximálny spoločný deliteľ } x \text{ a } y$, $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 24\}$.

6.2. Nech binárna operácia na množine \mathbb{R} obsahujúcej reálne čísla je definovaná ako rozdiel, $x * y = x - y$. Rozhodnite, či táto operácia je

- (a) asociatívna,
- (b) komutatívna,
- (c) existuje neutrálny prvok.

6.3. Nech A je konečná množina a nech pre túto množinu A je binárna operácia definovaná pomocou multiplikačnej tabuľky. Na základe čoho je možné rozhodnúť pomocou tejto tabuľky, či

- (a) binárna operácia je komutatívna,
- (b) existuje neutrálny prvok.

6.4. Nech binárna operácia nad potenčnou množinou $X = \mathcal{P}(A)$ je definovaná ako prienik množín, $(\forall x, y \in \mathcal{P}(A))(x * y = x \cap y)$, rozhodnite:

- (a) Je binárna operácia komutatívna?
- (b) Čo je neutrálny prvok?
- (c) Ktoré prvky majú inverzné prvky (ak existujú)?

6.5. Nech $X = \mathcal{P}(A)$, binárna operácia nad touto množinou je definovaná ako symetrický rozdiel $(\forall x, y \in \mathcal{P}(A))(x * y = (x - y) \cup (y - x))$. Použite Vennove diagramy na odôvodnenie odpovedí na nasledujúce otázky:

- (a) Je operácia $*$ binárna operácia?
- (b) Je táto operácia komutatívna?
- (c) Je táto operácia asociatívna?
- (d) Existuje neutrálny prvok v množine X ?
- (e) Ak existuje neutrálny prvok, existuje potom ku každému prvku $x \in \mathcal{P}(A)$ inverzný prvok $x^{-1} \in \mathcal{P}(A)$?

6.6. Nech množina $X = \{a, b, c, d\}$, binárna operácia pre túto množinu je definovaná pomocou multiplikačnej tabuľky

*	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>
<i>a</i>	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>
<i>b</i>	<i>b</i>	<i>d</i>	<i>a</i>	<i>a</i>
<i>c</i>	<i>c</i>	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>d</i>
<i>d</i>	<i>d</i>	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>

- (a) Je táto operácia asociatívna?
 (b) Je táto operácia komutatívna?

6.7. Nech X je neprázdna množina a binárna operácia je definovaná vzťahom $x * y = x$, pre každé $x, y \in X$.

- (a) Dokážte, že algebraická štruktúra $(X, *)$ je pologrupa.
 (b) Rozhodnite, či táto algebraická štruktúra je monoid.

6.8. Nech dve algebraické štruktúry $(X, *)$ a (Y, \circ) sú grupy. Definujte nad karteziánskym súčinom $X \times Y$ binárnu operáciu takto

$$(x_1, y_1) \bullet (x_2, y_2) = (x_1 * x_2, y_1 \circ y_2)$$

pre každé $x_1, x_2 \in X$ a $y_1, y_2 \in Y$.

- (a) Ukážte, že \bullet je binárna operácia na $X \times Y$.
 (b) Ako je definovaný neutrálny prvok na $X \times Y$?
 (c) Ako je definovaný inverzný prvok $(x, y)^{-1}$?
 (d) Dokážte, že algebraická štruktúra $(X \times Y, \bullet)$ je grupa.

6.9. Nech $(\mathbb{N}, *)$ je algebraická štruktúra, kde \mathbb{N} je množina obsahujúca nezáporné celé čísla. Binárna operácia je definovaná takto

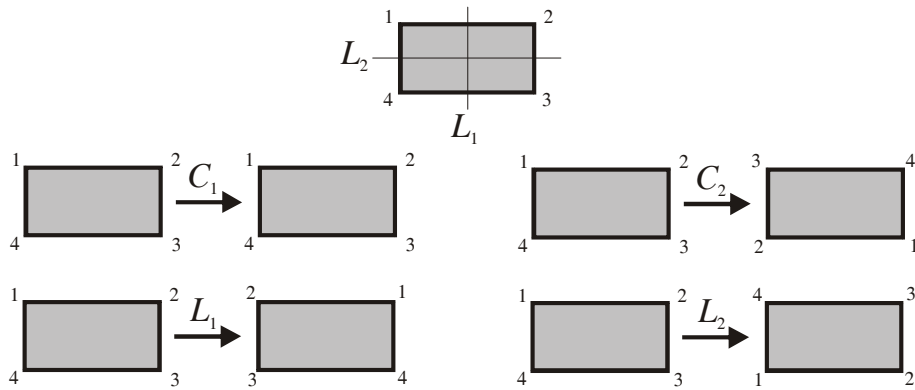
$$x * y = \max\{x, y\}$$

- (a) Dokážte, že algebraická štruktúra $(\mathbb{N}, *)$ je pologrupa.
 (b) Rozhodnite, či $(\mathbb{N}, *)$ je monoid.

6.10. Uvažujme neštvorcový obdĺžnik, ktorého vrcholy sú označené číslicami 1, 2, 3 a 4.

Tento obdĺžnik má štyri operácie symetrie

- C_1 : rotácia o 0° stupňov okolo stredy obdĺžnika,
 C_2 : rotácia o 180° stupňov okolo stredy obdĺžnika,
 L_1 : reflexia priamkou L_1 a
 L_2 : reflexia priamkou L_2 .



Na lepšie pochopenie týchto prvkov symetrie ich budeme špecifikovať ich aplikáciou na postupnosť (1,2,3,4)

$$\begin{aligned}
 C_1(1,2,3,4) &= (1,2,3,4) \\
 C_2(1,2,3,4) &= (3,4,1,2) \\
 L_1(1,2,3,4) &= (2,1,4,3) \\
 L_2(1,2,3,4) &= (4,3,2,1)
 \end{aligned}$$

Pre takto definované prvky môžeme zostrojiť ich kompozíciu (binárnu operáciu), napríklad

$$C_2 * L_1(1,2,3,4) = C_2(L_1(1,2,3,4)) = C_2(2,1,4,3) = (4,3,2,1) = L_2$$

- (a) Zostavte multiplikačnú tabuľku pre kompozíciu dvoch operácií symetrie.
- (b) Dokážte, že algebraická štruktúra $(A = \{C_1, C_2, L_1, L_2\}, *)$ je grupa.

PODMONOID

6.11. Pred riešením tohto príkladu je potrebné dedefinovať pojem „podmonoid“ v duchu teórie grúp. Nech algebraická štruktúra $(X, *)$ je monoid, potom algebraická štruktúra $(X', *)$ je taktiež monoid, ak X' je neprázdna podmnožina X , $X' \subseteq X$. Hovoríme, že $(X', *)$ je podmonoid, $(X', *) \subseteq (X, *)$. Nech $(X, *)$ je komutatívny monoid. Ukážte, že množina idempotentných prvkov $X' = \{x; (x \in X) \wedge (x * x = x)\}$ tvorí algebraickú štruktúru $(X', *)$, ktorá je podmonoid.

STRED GRUPY

6.12. Nech algebraická štruktúra $(X, *)$ je grupa. Stred tejto štruktúry je definovaný ako podmnožina X , ktorá obsahuje prvky komutujúce so všetkými prvkami X , $X_{center} = \{x; (x \in X) \wedge (\forall y (x * y = y * x))\}$. Dokážte, že algebraická štruktúra $(X_{center}, *)$ je podgrupa grupy $(X, *)$, $(X_{center}, *) \subseteq (X, *)$.

7 ALGEBRAICKÉ ŠTRUKTÚRY

II

BOOLOVA ALGEBRA • BOOLOVE FUNKCIE • LOGICKÉ SIETE • MINIMALIZÁCIA BOOLOVÝCH VÝRAZOV

Táto kapitola sa bude zaoberať jednou z najdôležitejších štruktúr diskkrétnej matematiky – Boolovou algebrou a Boolovými funkciami. Ukážeme jednoduché aplikčné možnosti tejto teórie pri návrhu logických obvodov a ich minimalizácii do tvaru, ktorý obsahuje minimum „súčiastok“ pomocou Quinovej a McCluskeyho metódy.

7.1 BOOLOVA ALGEBRA

Elektronické obvody v počítačoch a v podobných zariadeniach sú charakterizované binárnymi vstupmi a výstupmi (rovnajúcimi sa 0 alebo 1), transformácia vstupu na výstup sa uskutočňuje prostredníctvom elektronického obvodu, ktorý tvorí jadro tohto „transformačného“ zariadenia, pozri obr. 7.1. Elektronický obvod môže byť formálne simulovaný tzv. Boolovou¹ funkciou, ktorá transformuje m vstupných binárnych premenných na n výstupných binárnych premenných.

OBRÁZOK 7.1.
ELEKTRONICKÝ
OBVOD
S BINÁRNymi
VSTUPMI



Znázornenie elektronického obvodu, ktorý má m binárnych vstupov a n binárnych výstupov. Činnosť elektronického obvodu spočíva v transformácii binárnych vstupných hodnôt na binárne výstupné hodnoty.

¹ George Boole (1815–1864), anglický matematik, ktorý sa svojou knihou *The Laws of Thought* (1854) zaslúžil o moderný rozvoj výrokovej logiky ako špeciálnej oblasti algebry, ktorá je nazvaná jeho menom – Boolova algebra.

BOOLOVE FUNKCIE
A BOOLOVA
ALGEBRA

Všeobecná definícia Boolovej funkcie je $f : \{0,1\}^m \rightarrow \{0,1\}^n$, táto funkcia transformuje binárny vektor dĺžky m na binárny vektor dĺžky n . Môžeme si položiť otázku, ako realizovať túto Boolovu funkciu, aby mala vopred špecifikované vlastnosti? Tento problém je realizovaný pomocou Boolovej algebry, ktorá pomocou premenných s 0-1 ohodnotením (t. j. binárnych) premenných a pomocou dvoch elementárnych algebraických operácií a jednej unárnej algebraickej operácie je schopná dostatočne všeobecne modelovať Boolove funkcie s vopred špecifikovanými vlastnosťami. Poznamenajme, že Boolova algebra má dva známe modely, prvým je výroková logika a druhým algebra teórie množín. Pretože obe tieto zdanlivo odlišné disciplíny majú rovnakú „metateóriu“, existuje medzi zákonmi výrokovej logiky a formulami teórie množín „dualizmus“, pomocou ktorého ku každému zákonu výrokovej logiky priradíme jednoznačne formulu teórie množín a naopak. Dobrým ilustratívnym príkladom tohto dualizmu sú De Morganove formuly, ktoré vo výrokovej logike a v teórii množín majú tvary

$$\neg(p \wedge q) \equiv (\neg p \vee \neg q) \Leftrightarrow \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

$$\neg(p \vee q) \equiv (\neg p \wedge \neg q) \Leftrightarrow \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

V týchto formulách, vo výrokovej logike unárna logická spojka negácie má ekvivalent v teórii množín v unárnej algebraickej operácii doplnku, a podobne, vo výrokovej logike binárne spojky konjunkcie a disjunkcie majú ekvivalenty v teórii množín v binárnych algebraických operáciách prieniku resp. zjednotenia. Na záver je potrebné poznamenať, že výroková spojka ekvivalentnosti má v teórii množín ekvivalent v relácii rovnosti. Tieto priradenia vo výrokovej logike a v teórii množín môžeme zosumarizovať takto

výrokové premenné $p, q, r, \dots \Leftrightarrow$ množiny A, B, C, \dots

spojka negácie $\neg \Leftrightarrow$ operácia doplnku $\overline{\quad}$

spojka konjunkcie $\wedge \Leftrightarrow$ operácia prieniku \cap

spojka disjunkcie $\vee \Leftrightarrow$ operácia zjednotenia \cup

spojka ekvivalentnosti $\equiv \Leftrightarrow$ relácia rovnosti $=$

„DUALIZMUS“
VÝROKOVEJ
LOGIKY A TEÓRIE
MNOŽÍN



DEFINÍCIA 7.1.
BOOLOVA
ALGEBRA



Boolova algebra je algebraická štruktúra špecifikovaná usporiadanou 6-ticou $(B, +, \cdot, \overline{\quad}, \mathbf{0}, \mathbf{1})$, kde $B = \{a, b, \dots, x, y, \dots\}$ je neprázdna množina prvkov (premenných Boolovej algebry), ktorá obsahuje dva špeciálne odlíšené prvky – konštanty $\mathbf{0}, \mathbf{1} \in B$ a nad ktorou sú definované binárne operácie súčinu a súčtu

$$\cdot : B \times B \rightarrow B \quad (7.1a)$$

$$+ : B \times B \rightarrow B \quad (7.1b)$$

a unárna operácia komplementu

$$\overline{\quad} : B \rightarrow B \quad (7.1c)$$

ktoré vyhovujú týmto podmienkam

(1) komutatívnosť:

$$x \cdot y = y \cdot x, \quad x + y = y + x \quad (7.1d)$$

(2) asociatívnosť:

$$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z), \quad (x + y) + z = x + (y + z) \quad (7.1e)$$

(3) distributívnosť:

$$x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z), \quad x + (y \cdot z) = (x + y) \cdot (x + z) \quad (7.1f)$$

(4) vlastnosť konštanty $\mathbf{0}$:

$$x = x + \mathbf{0}, \quad x \cdot \bar{x} = \mathbf{0} \quad (7.1g)$$

(5) vlastnosť konštanty $\mathbf{1}$:

$$x = x \cdot \mathbf{1}, \quad x + \bar{x} = \mathbf{1} \quad (7.1h)$$

ALTERNATÍVNE
NOTÁCIE
BOOLOVEJ
ALGEBRY

V literatúre existuje mnoho alternatívnych notácií Boolovej algebry. Napríklad operácia súčinu sa alternatívne vyjadruje symbolmi \wedge alebo $*$, podobne, operácia súčtu symbolmi \vee alebo \oplus . Na zjednodušenie notácie budeme vynechávať symbol súčinu, formulu $x \cdot y$ budeme zjednodušene písať ako xy . Druhá formula z (7.1f) sa nazýva tiež distributívny zákon, ako je tomu pri klasickom počítaní s číslami, aj keď pre klasický súčet a súčin čísel by táto formula neplatila. Z formúl (7.1g-h) vyplýva, že konštanta $\mathbf{1}$ ($\mathbf{0}$) má úlohu neutrálneho prvku pre súčin (súčet). Z bežného pohľadu na formuly (7.1g-h) by niekto mohol odvodiť záver, že výraz \bar{x} je inverzná formula pre x . Pripomeňme si, že v kapitole 6 bol inverzný prvok definovaný pomocou vlastnosti $x \cdot x^{-1} = e$, kde e je neutrálny prvok, teda by muselo platiť $x \cdot \bar{x} = \mathbf{1}$, avšak podľa pravej formuly (7.1g) platí $x \cdot \bar{x} = \mathbf{0}$, z čoho vyplýva, že výraz \bar{x} nemá vlastnosti inverzného prvku (tak vzhľadom k operácii súčtu, ako aj súčinu).

\bar{x} NEMÁ
VLASTNOSTI
INVERZNÉHO
PRVKU

PRÍKLAD 7.1.

Najjednoduchšia Boolova algebra (s veľkým významom v informatike a v logike) je založená na dvojprvkovej množine $B = \{0,1\}$. Binárne operácie súčinu, súčtu a unárna operácia komplementu sú pomocou multiplikačných tabuliek definované takto

+	0	1	·	0	1	b	\bar{b}
0	0	1	0	0	0	0	1
1	1	1	1	0	1	1	0

Jednoducho sa môžeme presvedčiť, že pre takto špecifikované operácie sú splnené podmienky (7.1a-h), t. j. algebraická štruktúra $(B, +, \cdot, \bar{\cdot}, \mathbf{0}, \mathbf{1})$ je Boolova algebra.

PRÍKLAD 7.2.

Nech $A = \{a, b, c, \dots\}$ je neprázdna množina, položme $B = \mathcal{P}(A)$. Operácie \cdot a $+$ sú realizované pomocou množinových operácií \cap resp. \cup , operácia komplementu je realizovaná ako množinový komplement vzhľadom k množine A , $\bar{x} = A - x$. Potom platí:

- (a) binárne operácie sú asociatívne, komutatívne,
- (b) medzi binárnymi operáciami platia distributívne zákony,
- (c) prázdna množina \emptyset má vlastnosti neutrálneho prvku pre operáciu \cup

$$(\forall X \in B)(X \cup \emptyset = \emptyset \cup X = X)$$

(d) množina A má vlastnosti neutrálneho prvku pre operáciu \cap
 $(\forall X \in B)(X \cap A = A \cap X = X)$

(e) pre každé $X \in B$ existuje komplement $\bar{X} \in B$ taký, že

$$(\forall X \in B)(X \cap \bar{X} = \emptyset)$$

$$(\forall X \in B)(X \cup \bar{X} = A)$$

To znamená, že podmienky (7.1a-h) sú splnené, t. j. algebraická štruktúra $(\mathcal{P}(A), \cup, \cap, \bar{\cdot}, \emptyset, A)$ je Boolova algebra.

PRÍKLAD 7.3.

Nech $B = \{p, q, r, \dots\}$ je množina výrokových formúl, ktorá je uzavretá vzhľadom k binárnym operáciám konjunkcie (\wedge), disjunkcie (\vee) a k unárnej operácii negácie (\neg). Pre túto množinu je definovaná aj relácia ekvivalentnosti \equiv , dve formuly sú ekvivalentné vtedy a len vtedy, ak majú rovnakú pravdivostnú interpretáciu (sú logicky ekvivalentné). Z množiny B vyberieme formulu – kontradikciu (napr. $p \wedge \neg p$) a označíme ju symbolom $\mathbf{0}$; podobne formula – tautológia (napr. $p \vee \neg p$) je označená symbolom $\mathbf{1}$. To znamená, že symboly $\mathbf{0}$ a $\mathbf{1}$ patria do množiny B . Pre každú formulu p platia tieto vzťahy

$$p \vee \mathbf{0} = \mathbf{0} \vee p = p$$

$$p \wedge \mathbf{1} = \mathbf{1} \wedge p = p$$

Pretože logické spojky konjunkcie a disjunkcie sú komutatívne a asociatívne, a pre tieto operácie platia taktiež distributívne zákony, podmienky z definície 7.1 sú splnené, t. j. algebraická štruktúra $(B, \vee, \wedge, \neg, \mathbf{0}, \mathbf{1})$ tvorí Boolovu algebru.

7.2 VLASTNOSTI BOOLOVEJ ALGEBRY

V úvodnej časti kapitoly 7.1 bol zmienený princíp duality medzi algebrou teórie množín a výrokovou logikou. Ukážeme, že tento princíp je aplikovateľný aj pre rôzne Boolove algebry.

DUÁLNA FORMA

$$\cdot \rightarrow +, + \rightarrow \cdot$$


$$\mathbf{0} \rightarrow \mathbf{1}, \mathbf{1} \rightarrow \mathbf{0}$$



Postulujeme nejakú rovnosť, ktorá je odvoditeľná z axióm Boolovej algebry a je v nej teda platná. Duálnu formu rovnosti dostaneme tak, že urobíme zmenu symbolov


$$\cdot \rightarrow +, + \rightarrow \cdot, \mathbf{0} \rightarrow \mathbf{1} \text{ a } \mathbf{1} \rightarrow \mathbf{0}$$

Napríklad, uvažujme vždy (pre ľubovoľné x, y) platnú formulu Boolovej algebry, $(\bar{x} + y) \cdot x \cdot \bar{y} = \mathbf{0}$, duálny tvar tejto formuly je $(\bar{x} \cdot y) + x + \bar{y} = \mathbf{1}$. Axiómy Boolovej algebry (7.1d-h) sú uvedené po dvojiciach duálnych formúl. To znamená, že ak v rámci Boolovej algebry odvodíme nejakú formulu, tak potom aj jej duálna forma je odvoditeľná pomocou postupu, ktorý je „duálny“ k postupu prvej formuly.

VETA 7.1. 


(Princíp duality). Každá veta Boolovej algebry je taktiež vetou aj v duálnej forme.

V predchádzajúcej kapitole bola dokázaná veľmi všeobecná veta 6.1 o jednoznačnosti neutrálneho prvku. Tento dôkaz bol založený na predpoklade existencie neutrálneho prvku, rovnaký dôvod môže byť použitý aj pre dôkaz jednoznačnosti neutrálnych prvkov **1** a **0**.

VETA 7.2. 

Neutrálne prvky **1** a **0** existujú jednoznačne.

Podobne sa dá dokázať aj jednoznačnosť existencie inverzných prvkov v Boolovej algebri.

VETA 7.3. 

Pre každý prvok $x \in B$ existuje jednoznačne prvok $\bar{x} \in B$ taký, že $x \cdot \bar{x} = \mathbf{0}$ a $x + \bar{x} = \mathbf{1}$ (t. j. sú splnené podmienky 7.1g-h).

VETA 7.4.

Nech $(B, +, \cdot, \bar{}, \mathbf{0}, \mathbf{1})$ je Boolova algebra, potom platia tieto formuly

(1) Involutívnosť komplementu

$$(\forall x \in B)(\overline{\bar{x}} = x) \quad (7.2a)$$

(2) Idempotentnosť

$$(\forall x \in B)(x \cdot x = x) \quad (7.2b)$$

$$(\forall x \in B)(x + x = x) \quad (7.2c)$$

(3) De Morganove zákony

$$(\forall x, y \in B)(\overline{x + y} = \bar{x} \cdot \bar{y}) \quad (7.2d)$$

$$(\forall x, y \in B)(\overline{x \cdot y} = \bar{x} + \bar{y}) \quad (7.2e)$$

(4) Nulitnosť (univerzálne ohraničenia)

$$(\forall x \in B)(x + \mathbf{1} = \mathbf{1}) \quad (7.2f)$$

$$(\forall x \in B)(x \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}) \quad (7.2g)$$

(5) Absorpcia

$$(\forall x, y \in B)(x + (x \cdot y) = x) \quad (7.2h)$$

$$(\forall x, y \in B)(x \cdot (x + y) = x) \quad (7.2i)$$

(6) Komplementary konštant

$$\bar{\mathbf{0}} = \mathbf{1} \quad (7.2j)$$

$$\bar{\mathbf{1}} = \mathbf{0} \quad (7.2k)$$

(7) Vlastnosti konštant vzhľadom k binárnym operáciám

$$\mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}, \mathbf{0} + \mathbf{1} = \mathbf{1}, \mathbf{1} + \mathbf{0} = \mathbf{1}, \mathbf{1} + \mathbf{1} = \mathbf{1} \quad (7.2l)$$

$$\mathbf{0} \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}, \mathbf{0} \cdot \mathbf{1} = \mathbf{0}, \mathbf{1} \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}, \mathbf{1} \cdot \mathbf{1} = \mathbf{1} \quad (7.2m)$$

Dôkaz týchto vlastností prenecháme na cvičenie.

7.3 BOOLOVE FUNKCIE²

V úvode k tejto kapitole bola Boolova funkcia definovaná ako funkcia nad binárnymi premennými $\{0,1\}$. Tento pomerne zjednodušený pohľad na Boolovu funkciu bude teraz rozšírený tak, aby koncepcia Boolovej funkcie bola časťou Boolovej algebrы. Základný pojem pre definíciu Boolovej funkcie je pojem Boolovej premennej. Použijeme analogický prístup, aký sa používa pre definíciu reálnej premennej, je to veličina, ktorá môže nadobúdať hodnoty z množiny reálnych čísel.

DEFINÍCIA 7.2.
BOOLOVA
PREMENNÁ,
KOMPLEMENT

A LITERÁL 

Nech $(B, +, \cdot, \bar{}, \mathbf{0}, \mathbf{1})$ je Boolova algebra. Potom,

- (1) **Boolova premenná** je taká premenná, ktorá nadobúda hodnoty z množiny B ,
- (2) **komplement premennej** x , označený \bar{x} , je taká premenná, ktorej hodnota sa rovná komplementu hodnoty premennej x (t. j. ak $x = b \in B$, potom $\bar{x} = \bar{b} \in B$,
- (3) **literál** je Boolova premenná x alebo jej komplement \bar{x} .

V ďalšom texte budeme používať notáciu, ktorá umožní rozlíšiť literál

$$x^e = \begin{cases} x & (\text{pre } e = 1) \\ \bar{x} & (\text{pre } e = 0) \end{cases} \quad (7.3)$$

Podobne ako pre reálnu premennú, aj Boolova premenná môže byť kombinovaná do tvaru Boolových formúl použitím binárnych operácií súčinu, súčtu a komplementu.

DEFINÍCIA 7.3.
BOOLOVA
FORMULA



Nech $(B, +, \cdot, \bar{}, \mathbf{0}, \mathbf{1})$ je Boolova algebra. Potom **Boolova formula**, obsahujúca Boolove premenné x_1, x_2, \dots, x_n , je definovaná takto:

- (1) konštanty $\mathbf{0}$ a $\mathbf{1}$ sú Boolove formuly,
- (2) Boolove premenné x_1, x_2, \dots, x_n sú Boolove formuly,
- (3) ak X a Y sú Boolove formuly, potom aj výrazy $(X \cdot Y)$, $(X + Y)$, \bar{X} a \bar{Y} sú Boolove formuly.

V ďalšom texte budeme používať konvenciu, že ak bude jasné o akú formulu sa jedná, tak termín 'Boolova formula' budeme skracovať na 'formula'. Podobne ako vo výrokovej logike, môžeme si definovať rastúcu prioritu operácií takto: (1) súčet, (2) súčin a (3) komplement. Napríklad, formulu $((x \cdot y) + z)$ môžeme pomocou tejto konvencie vyjadriť v zjednodušenom tvare bez zátvoriek $x \cdot y + z$.

² Poznamenajme, že v tejto kapitole používame terminológiu prevzatú z výrokovej logiky. Tento „zlozvyk“ informatikov (ktorý je často tvrdo kritizovaný matematikmi) snáď sa dá odôvodniť už viac ako 50. ročnou literatúrou o použití Boolovej algebrы a Boolových funkcií v informatike, kde sa obvykle prezentujú ako určitá forma výrokovej logiky.

Ďalej, podobne ako v štandardnej algebre, budeme vynechávať znak súčiny, na príklad predchádzajúci ilustračný príklad má tvar $xy + z$.

PRÍKLAD 7.4. Zjednodušte formulu $((x + y) \cdot (\bar{x} + \bar{y}))$.

Použitím distributívneho zákona a (7.1g-h)

$$\begin{aligned} ((x + y) \cdot (\bar{x} + \bar{y})) &= (x \cdot \bar{x}) + (x \cdot \bar{y}) + (y \cdot \bar{x}) + (y \cdot \bar{y}) \\ &= \underbrace{x\bar{x}}_0 + x\bar{y} + y\bar{x} + \underbrace{y\bar{y}}_0 = x\bar{y} + \bar{x}y \end{aligned}$$

DEFINÍCIA 7.4.
EKVIVALENTNOSŤ



Dve Boolove formuly $\varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_n)$ a $\varphi_2(x_1, x_2, \dots, x_n)$ sú **ekvivalentné**, $\varphi_1 = \varphi_2$, vtedy a len vtedy, ak jedna formula je pomocou konečného počtu aplikácií axióm Boolovej algebry pretransformovaná na druhú formulu.

DEFINÍCIA
EKVIVALENTNOSTI
BOOLOVÝCH
FORMÚL POMOCOU
TABULIEK

Existuje aj druhá alternatívna forma definície ekvivalencie dvoch Boolových formúl pomocou tabuliek ich funkčných hodnôt

#	x_1	x_2	x_n	$\varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_n)$	$\varphi_2(x_1, x_2, \dots, x_n)$
1	0	0	0	u_1	v_1
2	0	0	0	u_2	v_2
...
2^n	1	1	1	u_{2^n}	v_{2^n}

Potom ekvivalencia dvoch formúl je určená podmienkou $\forall i (u_i = v_i)$, alebo

$$(\varphi_1 = \varphi_2) \equiv_{def} \forall i (u_i = v_i)$$

Podľa príkladu 7.4 formuly $\varphi_1 = (x + y) \cdot (\bar{x} + \bar{y})$ a $\varphi_2 = x\bar{y} + \bar{x}y$ sú ekvivalentné, pretože druhú formulu získame z prvej použitím konečného počtu aplikácií axióm Boolovej algebry, potom $\varphi_1 = \varphi_2$.

Konečne sa dostávame k definícii Boolovej funkcie $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ako Boolovej formuly, ktorá obsahuje premenné x_1, x_2, \dots, x_n . Napríklad

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1(x_2 + \bar{x}_3)$$

DEFINÍCIA 7.5.
BOOLOVA FUNKCIA



Nech $(B, +, \cdot, \bar{}, \mathbf{0}, \mathbf{1})$ je Boolova algebra.

- (1) **Boolova funkcia** $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ premenných x_1, x_2, \dots, x_n je zobrazenie $f: B^n \rightarrow B$, pričom $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ je špecifikovaná ako Boolova formula.
- (2) Všetky Boolove **formuly**, ktoré sú navzájom **ekvivalentné**, definujú rovnakú funkciu (im odpovedajúce **funkcie** sú si **rovné**).

EKVIVALENTNÉ
BOOLOVE
FORMULY
→ ROVNAKÁ
BOOLOVA FUNKCIA

Z tejto definície vyplýva, že ekvivalentné Boolove formuly špecifikujú rovnakú Boolovu funkciu. Napríklad, máme dve funkcie

$$f : B^2 \rightarrow B \quad f(x_1, x_2) = x_1(\bar{x}_1 + x_2)$$

$$g : B^2 \rightarrow B \quad g(x_1, x_2) = x_1x_2$$

Použitím distributívneho zákona ľahko dokážeme, že formuly sú ekvivalentné, $x_1(\bar{x}_1 + x_2) = x_1x_2$, potom funkcie f a g sú si rovné.

EKVIVALENCIA CEZ
„KANONICKÚ“
REPREZENTÁCIU
BOOLOVEJ
FUNKCIE

Pretože Boolova funkcia môže byť vyjadrená mnohými rôznymi formulami, ktoré sú navzájom ekvivalentné, vzniká otázka, ako efektívne rozhodnúť, či dve Boolove formuly sú ekvivalentné, alebo či dve Boolove funkcie sú si rovné. Namiesto transformácie jednej formuly na druhú uvedieme „kanonickú“ reprezentáciu Boolovej funkcie, podľa ktorej môžeme jednoducho rozhodnúť, či dve Boolove funkcie sú si rovné alebo nie.

DEFINÍCIA 7.6.

SÚČINOVÁ
KLAUZULA



Súčinová klauzula premenných x_1, x_2, \dots, x_n je Boolova formula, ktorá obsahuje súčin n literálov (t. j. premennú alebo jej komplement) pre každú premennú.

Ako príklad súčinovej klauzuly premenných x_1, x_2, x_3 sú tieto formuly: $x_1x_2x_3$, $x_1x_2\bar{x}_3$, $x_1\bar{x}_2x_3$, $\bar{x}_1\bar{x}_2x_3$, \dots , $\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3$. Ak použijeme formalizmus x^e , potom súčinová klauzula premenných x_1, x_2, \dots, x_n , ktorá je špecifikovaná binárnym vektorom $e = (e_1, e_2, \dots, e_n)$, má tvar

$$l_e = x_1^{e_1} x_2^{e_2} \dots x_n^{e_n} \quad (7.4)$$

Napríklad, pre $e = (11011)$ súčinová klauzula má tvar

$$l_{(11011)} = x_1^1 x_2^1 x_3^0 x_4^1 x_5^1 = x_1 x_2 \bar{x}_3 x_4 x_5$$

Pretože binárnym vektorom $e = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ je 2^n , potom aj rôznych súčinných klauzúl je 2^n .

DEFINÍCIA 7.7.

SÚČTOVÁ
KLAUZULA



Súčtová klauzula premenných x_1, x_2, \dots, x_n je Boolova formula, ktorá obsahuje súčet n literálov (t. j. premennú alebo jej komplement) pre každú premennú.


Podobne ako pre súčinnú klauzulu, môžeme aj súčtovú klauzulu pre premenné x_1, x_2, \dots, x_n špecifikovať binárnym vektorom $e = (e_1, e_2, \dots, e_n)$

$$L_e = x_1^{e_1} + x_2^{e_2} + \dots + x_n^{e_n} \quad (7.5)$$

Pre $e = (10100)$ súčtová klauzula má tvar

$$L_e = x_1^1 + x_2^0 + x_3^1 + x_4^0 + x_5^0 = x_1 + \bar{x}_2 + x_3 + \bar{x}_4 + \bar{x}_5$$

Pretože každá súčtová klauzula premenných x_1, x_2, \dots, x_n je špecifikovaná binárnym vektorom $e = (e_1, e_2, \dots, e_n)$, potom počet súčtových klauzúl je taktiež 2^n .


DISJUNKTÍVNA
NORMÁLNA FORMA
DNF 

Týmto sa dostávame k formulácii hlavného výsledku tejto kapitoly, že každá Boolova funkcia môže byť jednoznačne vyjadrená ako sumácia súčinových klauzúl (tento tvar sa nazýva vo výrokovej logike *disjunktívna normálna forma*, DNF).

PRÍKLAD 7.5.

Vyjadrite Boolovu funkciu $x_1x_2(x_1 + x_3)$ pomocou súčtu súčinových klauzúl (DNF).

$$\begin{aligned} x_1x_2(x_1 + x_3) &= x_1x_2x_1 + x_1x_2x_3 \\ &= \underbrace{x_1x_1}_{x_1}x_2 + x_1x_2x_3 = x_1x_2 + x_1x_2x_3 \\ &= x_1x_2\mathbf{1} + x_1x_2x_3 = x_1x_2(x_3 + \bar{x}_3) + x_1x_2x_3 \\ &= \underbrace{x_1x_2x_3 + x_1x_2x_3}_{x_1x_2x_3} + x_1x_2\bar{x}_3 \\ &= x_1x_2x_3 + x_1x_2\bar{x}_3 \end{aligned}$$

VETA 7.5. 

Každá Boolova funkcia $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, ktorá sa identicky nerovná nule, môže byť špecifikovaná ako suma súčinových klauzúl

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \dots, x_n) &= \sum_{e \in \{0,1\}^n} f(e_1, e_2, \dots, e_n) x_1^{e_1} x_2^{e_2} \dots x_n^{e_n} \\ &= \sum_e f(e_1, e_2, \dots, e_n) l_{(e_1, e_2, \dots, e_n)} \\ &= \sum_e f(e) l_e \tag{7.6} \\ &= \sum_{\substack{e \\ f(e)=1}} l_{(e)} \end{aligned}$$

KONŠTRUKTÍVNY
DŮKAZ VETY 7.5.

Presný dôkaz tejto vety vykonaný pomocou matematickej indukcie je pomerne zdĺhavý, preto ho nebudeme uvádzať. Naznačíme jednoduchý konštruktívny dôkaz. Boolova funkcia $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ je vlastne špecifikovaná jej funkčnými hodnotami $f(e_1, e_2, \dots, e_n)$ pre všetky hodnoty binárneho vektora $e = (e_1, e_2, \dots, e_n)$. Hovoríme, že funkcia f je špecifikovaná tabuľkou funkčných hodnôt, ktorá obsahuje 2^n riadkov, napríklad

#	$e = (e_1, e_2, \dots, e_n)$	$l_{(e_1, e_2, \dots, e_n)}$
1	(00.....00)	0
2	(00.....01)	1
.....		
i	$(e_1^{(i)}, e_2^{(i)}, \dots, e_n^{(i)})$	10
.....		
2^n	(11.....11)	0

Posledný stĺpec obsahuje funkčné hodnoty, ktorými je špecifikovaná daná Boolova funkcia (v danom prípade sme si ich zvolili náhodne). Súčinová klauzula $l_{(e_1, e_2, \dots, e_n)}(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1^{e_1} x_2^{e_2} \dots x_n^{e_n}$ má zaujímavú vlastnosť, jej funkčná hodnota sa rovná **1** len pre $(x_1, x_2, \dots, x_n) = (e_1, e_2, \dots, e_n)$, kde $e_i \in \{0, 1\}$, pre všetky iné prípady je funkčná hodnota rovná **0**

$$l_{(e_1, e_2, \dots, e_n)}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{cases} \mathbf{1} & (\text{pre } (x_1, x_2, \dots, x_n) = (e_1, e_2, \dots, e_n)) \\ \mathbf{0} & (\text{pre } (x_1, x_2, \dots, x_n) \neq (e_1, e_2, \dots, e_n)) \end{cases} \quad (7.7)$$

To znamená, že pre konštrukciu (7.6) sú pre nás dôležité len funkčné hodnoty **1**, funkčné hodnoty **0** nie sú podstatné pre náš konštruktívny dôkaz. Zostrojíme Boolovu formulu ako sumáciu týchto klauzúl (t. j. v DNF tvare)

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{\substack{e \\ (f(e)=1)}} f(e_1, e_2, \dots, e_n) l_{(e_1, e_2, \dots, e_n)} \quad (7.8)$$

Z konštrukcie tejto Boolovej funkcie vyplýva, že jej funkčné hodnoty sú špecifikované tabuľkou funkčných hodnôt Boolovej funkcie $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$. To znamená, že Boolove funkcie $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ a $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ sú ekvivalentné, t. j. pre ľubovoľnú sadu argumentov majú rovnaké funkčné hodnoty. Týmto sme zavřili jednoduchý intuitívny konštruktívny dôkaz vety 7.5.

NEJEDNOZNAČ-
NOSŤ
PERMUTÁCIE
ARGUMENTOV

Poznamenajme, že DNF tvar Boolovej funkcie je určený jednoznačne až na permutácie argumentov v súčtových klauzulách, alebo až na permutácie súčtových klauzúl. Táto nejednoznačnosť DNF tvaru vyplýva zo skutočnosti, že binárne operácie súčtu a súčinu sú komutatívne. Môžeme teda konštatovať, že DNF sú základné charakteristiky (niečo ako odtlačky prstov alebo zloženie DNA) Boolových funkcií. Aby sme odstránili prípadné nejednoznačnosti, zapisujeme DNF v tzv. kanonickom tvare, t. j. jednotlivé argumenty sa zapisujú postupne podľa rastúceho indexu (tým sme odstránili nejednoznačnosti v dôsledku komutatívnosti súčinu) a potom jednotlivé súčinové klauzuly sú písané v poradí rastúcej číselnej hodnoty „indexu“ $e = (e_1, e_2, \dots, e_n)$.

PRÍKLAD 7.6.

Zostrojte Boolovu funkciu $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$ v tvare DNF.

Podľa vety 7.5 DNF tvar tejto funkcie je

$$f(x_1, x_2) = f(\mathbf{0}, \mathbf{0}) \bar{x}_1 \bar{x}_2 + f(\mathbf{0}, \mathbf{1}) \bar{x}_1 x_2 + f(\mathbf{1}, \mathbf{0}) x_1 \bar{x}_2 + f(\mathbf{1}, \mathbf{1}) x_1 x_2$$

kde jednotlivé funkčné hodnoty sú uvedené v tabuľke

#	x_1	x_2	$f(x_1, x_2)$
1	0	0	0
2	0	1	1
3	1	0	1
4	1	1	1

Potom funkcia f má tvar

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) &= \mathbf{0}\bar{x}_1\bar{x}_2 + \mathbf{1}\bar{x}_1x_2 + \mathbf{1}x_1\bar{x}_2 + \mathbf{1}x_1x_2 \\ &= \bar{x}_1x_2 + x_1\bar{x}_2 + x_1x_2 \end{aligned}$$

Lahko dokážeme, že takto definovaná funkcia $f(x_1, x_2) = \bar{x}_1x_2 + x_1\bar{x}_2 + x_1x_2$ je ekvivalentná pôvodnej Boolovej funkcii $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) &= \bar{x}_1x_2 + x_1\bar{x}_2 + x_1x_2 = \bar{x}_1x_2 + x_1\bar{x}_2 + x_1x_2 + x_1x_2 = \\ &= \underbrace{(\bar{x}_1 + x_1)}_1 x_2 + x_1 \underbrace{(\bar{x}_2 + x_2)}_1 = x_1 + x_2 \end{aligned}$$

PRÍKLAD 7.7.

Zostrojte Boolovu funkciu $f(x_1, x_2, x_3) = x_2x_3 + x_1x_3$ v tvare DNF.

Táto Boolova funkcia je určená tabuľkou funkčných hodnôt

#	x_1	x_2	x_3	x_2x_3	x_1x_3	$x_2x_3 + x_1x_3$
1	0	0	0	0	0	0
2	0	0	1	0	0	0
3	0	1	0	0	0	0
4	0	1	1	1	0	1
5	1	0	0	0	0	0
6	1	0	1	0	1	1
7	1	1	0	0	0	0
8	1	1	1	1	1	1

Potom funkcia $f(x_1, x_2, x_3)$ (uvažujeme len jednotkové funkčné hodnoty) má DNF tvar

$$f(x_1, x_2, x_3) = \bar{x}_1x_2x_3 + x_1\bar{x}_2x_3 + x_1x_2x_3$$


Použijeme duálny princíp z vety 7.1, veta 7.5 má potom tento duálny tvar

VETA 7.6. 

Každá Boolova funkcia $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, ktorá sa identicky nerovná jednotke, môže byť špecifikovaná ako súčin sumačných klauzúl

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \dots, x_n) &= \prod_e (f(e_1, e_2, \dots, e_n) + x_1^{\bar{e}_1} + x_2^{\bar{e}_2} + \dots + x_n^{\bar{e}_n}) \\ &= \prod_e (f(e_1, e_2, \dots, e_n) + L_{(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n)}) \\ &= \prod_e (f(e) + L_{\bar{e}}) \\ &= \prod_{\substack{e \\ (f(e)=0)}} (L_{\bar{e}}) \end{aligned} \tag{7.9}$$

kde $\bar{e} = (\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n) = (1 - e_1, 1 - e_2, \dots, 1 - e_n)$.

KONJUNKTÍVNA
NORMÁLNA
FORMA,
KNF 

Táto veta reprezentuje hlavný duálny výsledok tejto kapitoly, že každá Boolova funkcia môže byť jednoznačne vyjadrená ako súčin súčtových klauzúl (tento tvar sa nazýva vo výrokovej logike *konjunktívna normálna forma*, KNF).

PRÍKLAD 7.8.

Vyjadrite $f(x_1, x_2) = x_1(x_1 + x_2)$ v KNF tvare.

V prvom kroku zostrojíme tabuľku funkčných hodnôt tejto Boolovej funkcie

#	x_1	x_2	$x_1 + x_2$	$x_1(x_1 + x_2)$
1	0	0	0	0
2	0	1	1	0
3	1	0	1	1
4	1	1	1	1

Použitím (7.9) dostaneme Boolovu funkciu $f(x_1, x_2) = x_1(x_1 + x_2)$ v KNF

$$\begin{aligned}
 f(x_1, x_2) &= \left(\underbrace{f(\mathbf{0}, \mathbf{0})}_0 + x_1 + x_2 \right) \cdot \left(\underbrace{f(\mathbf{0}, \mathbf{1})}_0 + x_1 + \bar{x}_2 \right) \cdot \\
 &\quad \cdot \left(\underbrace{f(\mathbf{1}, \mathbf{0})}_1 + \bar{x}_1 + x_2 \right) \cdot \left(\underbrace{f(\mathbf{1}, \mathbf{1})}_1 + \bar{x}_1 + \bar{x}_2 \right) \\
 &= (x_1 + x_2) \cdot (x_1 + \bar{x}_2)
 \end{aligned}$$

DNF KEĎ JE VIAC
NÚL

KNF KEĎ JE VIAC
JEDNOTIEK

Z tohto príkladu vyplýva, že pre konštrukciu KNF sú dôležité nulové funkčné hodnoty danej Boolovej funkcie. Táto vlastnosť je duálna k vlastnosti DNF, kde sú relevantné jednotkové funkčné hodnoty Boolovej funkcie. Z tohto faktu vyplýva skutočnosť, že si zvolíme DNF tvar Boolovej funkcie vtedy, keď tabuľka obsahuje v prevažnej miere nulové funkčné hodnoty, KNF si zvolíme vtedy, keď tabuľka obsahuje v prevažnej miere jednotkové funkčné hodnoty. V prípade, že tabuľka obsahuje rovnaký počet nulových a jednotkových funkčných hodnôt, z pohľadu „zložitosti“ konštrukcie je jedno, aký tvar Boolovej funkcie sme zvolili.

PRÍKLAD 7.9.

Zostrojte KNF Boolovej funkcie $f(x_1, x_2, x_3) = (\bar{x}_1 + x_2) \cdot (\bar{x}_1 + \bar{x}_3)$.

Tabuľka funkčných hodnôt má tvar

#	x_1	x_2	x_3	\bar{x}_1	\bar{x}_3	$\bar{x}_1 + x_2$	$\bar{x}_1 + \bar{x}_3$	$(\bar{x}_1 + x_2) \cdot (\bar{x}_1 + \bar{x}_3)$
1	0	0	0	1	1	1	1	1
2	0	0	1	1	0	1	1	1
3	0	1	0	1	1	1	1	1
4	0	1	1	1	0	1	1	1
5	1	0	0	0	1	0	1	0
6	1	0	1	0	0	0	0	0
7	1	1	0	0	1	1	1	1
8	1	1	1	0	0	1	0	0

Využívame len tri riadky s nulovou výslednou funkčnou hodnotou, KNF má potom tvar

$$f(x_1, x_2, x_3) = (\bar{x}_1 + x_2 + x_3) \cdot (\bar{x}_1 + x_2 + \bar{x}_3) \cdot (\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \bar{x}_3)$$

7.4 SPÍNACIE OBVODY

SPÍNAČ

Mnohé elektronické zariadenia, ako sú napr. počítače, telefónne ústredne, zariadenia na riadenie dopravy, obsahujú ako časť spínacie obvody. Spínač môže byť chápaný ako taký spoj v obvode, ktorý ak je uzavretý, potom ním prechádza elektrický prúd, v opačnom prípade, ak je otvorený, elektrický prúd ním neprechádza. Spínač môžeme znázorniť takto:



Predpokladajme, že v spínacom obvode máme spínač A. Stav tohto spínača označíme premennou x . Ak $x = 1$ ($x = 0$), potom spínač A je zopnutý (vypnutý) a obvod je uzavretý (otvorený).

O trochu zložitejší prípad spínacieho obvodu obsahuje dva spínače A_1 a A_2



Hovoríme, že v tomto prípade sú spínače zapojené *sériovo*. Nech x_1 a x_2 sú premenné popisujúce stavy spínačov A_1 resp. A_2 , ak sa tieto premenné rovnajú 1, potom daný obvod je uzavretý. Ak čo len jedna z premenných je rovná 0, tak je obvod otvorený. Nech $f(x_1, x_2)$ je funkcia, ktorej hodnota sa rovná 1 (0) pre tie hodnoty x_1 a x_2 , ktoré umožňujú (znemožňujú) tok prúdu. Táto funkcia môže byť chápaná ako binárna funkcia $f: \{0,1\}^2 \rightarrow \{0,1\}$, ktorej funkčné hodnoty sú určené tabuľkou

#	x_1	x_2	$f(x_1, x_2)$
1	0	0	0
2	0	1	0
3	1	0	0
4	1	1	1

Z tejto tabuľky vyplýva, že funkcia f je vyjadrená ako súčin premenných x_1 a x_2

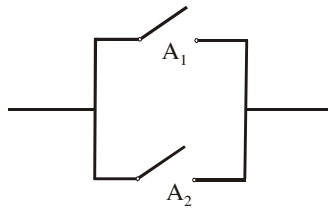
$$f(x_1, x_2) = x_1 x_2 \quad (7.12)$$

Táto funkcia je definovaná nad Boolovou algebrou $(\{0,1\}, +, \cdot, \bar{}, 0, 1)$, t. j. premenné patria do množiny $\{0,1\}$.

SPÍNAČE
ZAPOJENÉ
SÉRIOVO
– SÚČIN
PREMENNÝCH

Nový druh spínacieho obvodu, ktorý je podobný sériovému obvodu (7.11), ale v paralelnom zapojení, má tvar

SPÍNAČE
ZAPOJENÉ
PARALELNE
– SÚČET
PREMENNÝCH



(7.13)

Podobne ako v predchádzajúcom príklade (7.11), nech spínače A_1 a A_2 sú popísané premennými x_1 a x_2 , tento obvod je popísaný funkciou $g(x_1, x_2)$ nad Boolovou algebrou $(\{0,1\}, +, \cdot, \bar{}, 0, 1)$, ktorá je špecifikovaná tabuľkou

#	x_1	x_2	$g(x_1, x_2)$
1	0	0	0
2	0	1	1
3	1	0	1
4	1	1	1

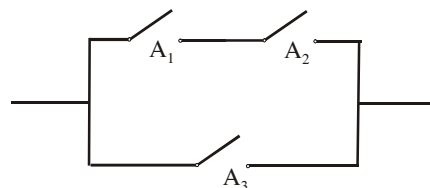
Potom funkcia $g(x_1, x_2)$ je špecifikovaná ako súčet premenných

$$g(x_1, x_2) = x_1 + x_2 \quad (7.14)$$

ktorá je definovaná nad Boolovou algebrou $(\{0,1\}, +, \cdot, \bar{}, 0, 1)$

SPÍNACIE FUNKCIE Funkcie, ktoré podobne ako (7.12) a (7.14) popisujú stav spínacieho obvodu pomocou stavov spínačov, zaradených do daného obvodu, nazývame **spínacie funkcie**. Majme n spínačov, ktorých stavy sú špecifikované premennými x_1, x_2, \dots, x_n . Spínacia funkcia $f: \{0,1\}^n \rightarrow \{0,1\}$ popisuje správanie sa spínacieho obvodu pre všetky možné (2^n) stavy spínačov. Ako už bolo ukázané na predchádzajúcich ilustračných príkladoch, funkcia f môže byť reprezentovaná Boolovou formulou a teda aj Boolovou funkciou.

Nasledujúci príklad spínacieho obvodu bude zložitejší spínací obvod, ktorý obsahuje tri spínače v sériovo-paralelnom zapojení



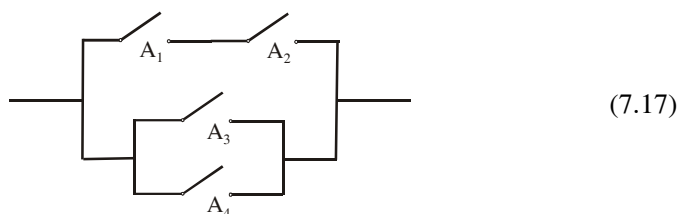
(7.15)

Nech jednotlivé spínače A_1, A_2 a A_3 sú špecifikované premennými x_1, x_2 resp. x_3 . Nech funkcia $f(x_1, x_2)$ popisuje vlastnosti hornej časti obvodu, ktorý obsahuje dva sériovo zapojené spínače A_1 a A_2 . Pomocou predchádzajúceho príkladu

(7.11) funkcia, ktorá špecifikuje takýto obvod má tvar $f_1(x_1, x_2) = x_1 x_2$. Celkový obvod potom môžeme zložiť z dvoch paralelných podštruktúr, horná je reprezentovaná funkciou $f_1(x_1, x_2) = x_1 x_2$ a dolná je reprezentovaná funkciou $f_2(x_3) = x_3$. Spojením týchto dvoch funkcií pomocou (7.14) dostaneme Boolovu funkciu celého spínacieho obvodu (7.15)

$$f(x_1, x_2, x_3) = f_1(x_1, x_2) + f_2(x_3) = x_1 x_2 + x_3 \quad (7.16)$$

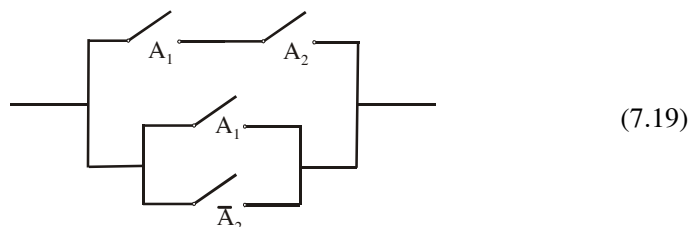
PRÍKLAD 7.10. Zostrojte spínaciu funkciu f spínacieho zariadenia



Nech x_1, x_2, x_3 a x_4 sú premenné označujúce stavy spínačov A_1, A_2, A_3 resp. A_4 . Potom celková spínacia funkcia zariadenia má tvar $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$. V prvom kroku určíme pomocné spínacie funkcie $f_1(x_1, x_2)$ a $f_2(x_3, x_4)$, ktoré sú priradené hornej časti obsahujúcej spínače A_1, A_2 resp. dolnej časti obsahujúcej spínače A_3, A_4 . Tieto funkcie sú určené spínacími funkciami (7.12) a (7.14), $f_1(x_1, x_2) = x_1 x_2$ resp. $f_2(x_3, x_4) = x_3 + x_4$. Hľadaná spínacia funkcia má potom tvar

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = f_1(x_1, x_2) + f_2(x_3, x_4) = x_1 x_2 + x_3 + x_4 \quad (7.18)$$

PRÍKLAD 7.11. Zostrojte spínaciu funkciu f zariadenia, ktoré vznikne malou modifikáciou spínacieho zariadenia (7.17)



kde pôvodné spínače A_1 a A_3 sú teraz spolu spriahnuté, t. j. oba sú súčasne zapnuté alebo vypnuté (preto sú oba označené A_1). Ďalšie dva pôvodné spínače A_2 a A_4 sú teraz spolu taktiež spriahnuté, ale opačným spôsobom, t. j. ak je jeden spínač zapnutý, druhý je vypnutý a naopak (preto sú oba označené A_2 a \bar{A}_2). Spínaciu funkciu takto špecifikovaného zariadenia ľahko zostrojíme pomocou spínacej funkcie (7.18) pôvodného spínacieho zariadenia, keď položíme $x_3 = x_1$ a $x_4 = \bar{x}_2$

$$g(x_1, x_2) = f(x_1, x_2, x_1, \bar{x}_2) = x_1 x_2 + x_1 + \bar{x}_2 \quad (7.20)$$

Tabuľka funkčných hodnôt tejto spínacej funkcie má tvar

x_1	x_2	\bar{x}_2	$x_1 x_2$	$x_1 x_2 + x_1 + \bar{x}_2$
0	0	1	0	1
0	1	0	0	0
1	0	1	0	1
1	1	0	1	1

Ak použijeme vetu 7.6, zostrojíme Boolovu funkciu v tvare KNF, ktorá simuluje túto tabuľku, z ktorej si vyberieme riadok s nulovou funkčnou hodnotou, potom $f(x_1, x_2) = x_1 + \bar{x}_2$. Spínacie zariadenie (7.19) má túto zjednodušenú spínaciu funkciu

$$g(x_1, x_2) = x_1 + \bar{x}_2 \quad (7.21)$$

Lahko dokážeme, že funkcie (7.20) a (7.21) sú si rovné

$$g(x_1, x_2) = x_1 x_2 + x_1 + \bar{x}_2 = \left(\underbrace{x_2 + 1}_1 \right) x_1 + \bar{x}_2 = 1x_1 + \bar{x}_2 = x_1 + \bar{x}_2$$

PRÍKLAD 7.12.

Budeme riešiť veľmi praktickú úlohu, ktorej riešenie je pre mnohých z nás záhadou. Predstavme si schodište, na začiatku a konci ktorého sú umiestnené stenové vypínače S_1 a S_2 , pomocou ktorých zapneme alebo vypneme svetlo nad schodišťom. Hlavná požiadavka je taká, aby sa na jednom konci mohlo svetlo buď vypnúť, ak na druhom konci je zapnuté, alebo zapnúť, ak je na druhom konci vypnuté. Túto podmienku môžeme formulovať alternatívne tak, že ak sú oba spínače S_1 a S_2 vypnuté alebo zapnuté, potom zariadením nepreteká prúd, ale stačí, aby bolo zapnuté práve jedno, potom zariadením preteká prúd, čo môžeme vyjadriť touto tabuľkou

S_1	S_2	prúd
zapnuté	zapnuté	nie
zapnuté	vypnuté	áno
vypnuté	zapnuté	áno
vypnuté	vypnuté	nie

Predpokladajme, že vypínače S_1 a S_2 sú realizované pomocou dvoch spínačov A_1 a A_2 . Ak použijeme premenné x_1 a x_2 , ktoré označujú stavy spínačov A_1 a A_2 , potom vyššie uvedená tabuľka môže byť prepísaná do tvaru

x_1	x_2	$f(x_1, x_2)$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Podľa vety 7.5, táto tabuľka špecifikuje Boolovu funkciu v DNF

$$f(x_1, x_2) = \bar{x}_1 x_2 + x_1 \bar{x}_2 \quad (7.22)$$

Spínací obvod s takto špecifikovanou spínacou funkciou má tvar

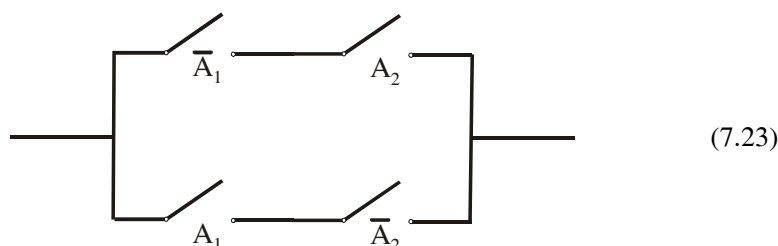
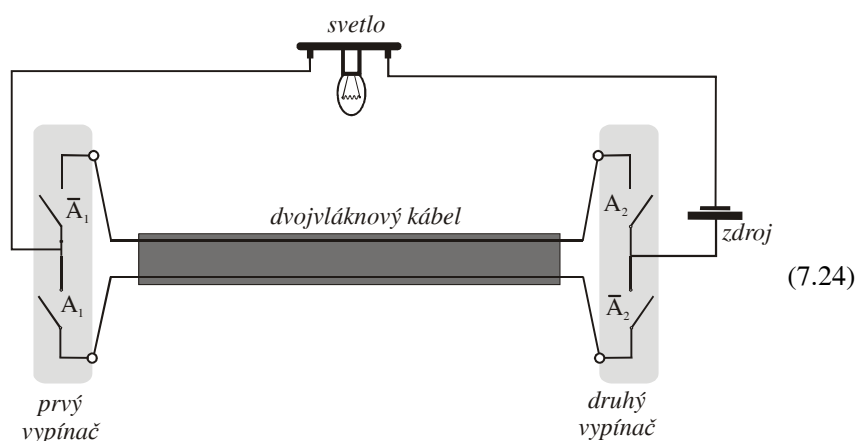


Diagram (7.24) znázorňuje realizáciu tohto spínacieho obvodu, kde vytieňované oblasti tvoria stenové vypínače, ktoré sú spojené dvojvláknovým káblom.



Tento jednoduchý príklad demonštruje užitočnosť teórie spínacích obvodov vybudovanej pomocou Boolových funkcií. Vyriešili sme praktický príklad, ako realizovať zapínanie a vypínanie svetla na schodišti (alebo na dlhej chodbe) tak, že každým vypínačom môžeme svetlo zapnúť alebo vypnúť, nezávisle od polohy druhého vypínača.

7.5 LOGICKÉ OBVODY

MCCULLOCH A
PITTS: ĽUBOVOLNÁ
BOOLOVA FUNKCIA
SIMULOVANÁ
OBVODOM
(NEURÓNOVOU
SIEŤOU)

Na tomto mieste je vhodné pripomenúť³ si pioniersku prácu McCullocha a Pittsa z r. 1943, v ktorej boli formulované teoretické základy neurónových sietí s logickými neurónmi a ktorá je v súčasnosti pokladaná za jednu z prvých prác, na základe ktorých vznikol nový informatický vedný odbor *umelá inteligencia*. Autori dokázali, že ľubovoľná Boolova funkcia môže byť simulovaná pomocou obvodu (neurónovej siete) obsahujúceho elementárne obvody – neuróny, ktoré simulujú disjunktívne a konjunktívne klauzuly. V prípade logických obvodov sa jedná o abstrakciu, ktorá ignoruje vnútornú architektúru neurónov a postuluje

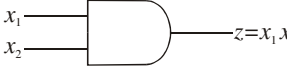
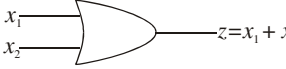
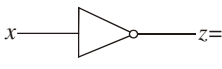
³ Pozri náš učebný text *Matematická logika* [11], kapitola 4.

existenciu elementárnych logických brán pre operácie disjunkcie, konjunkcie a negácie.

V tejto kapitole sa budeme zaoberať logickými obvodmi, ktoré tvoria základné funkčné jednotky v počítačoch. Logické obvody obsahujú logické brány typu disjunkcie, konjunkcie a negácie, pozri tab. 7.1.

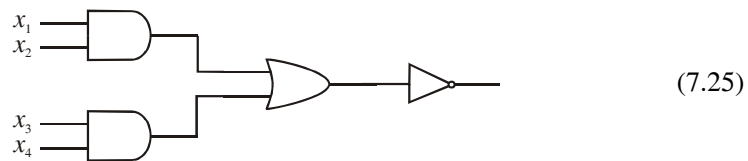
LOGICKÉ BRÁNY
KONJUNKCIE
DISJUNKCIE
NEGÁCIE

Tabuľka 7.1. Logické brány

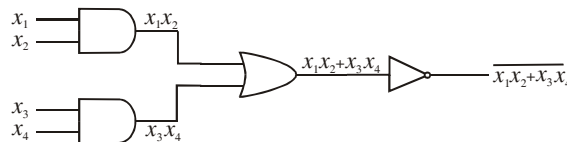
logická brána konjunkcie	logická brána disjunkcie	logická brána negácie																																				
																																						
<table border="1" style="margin: auto;"> <thead> <tr> <th>x_1</th> <th>x_2</th> <th>$x_1 x_2$</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr> <tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr> </tbody> </table>	x_1	x_2	$x_1 x_2$	0	0	0	0	1	0	1	0	0	1	1	1	<table border="1" style="margin: auto;"> <thead> <tr> <th>x_1</th> <th>x_2</th> <th>$x_1 + x_2$</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr> <tr><td>1</td><td>0</td><td>1</td></tr> <tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr> </tbody> </table>	x_1	x_2	$x_1 + x_2$	0	0	0	0	1	1	1	0	1	1	1	1	<table border="1" style="margin: auto;"> <thead> <tr> <th>x_1</th> <th>\bar{x}_1</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>0</td><td>1</td></tr> <tr><td>1</td><td>0</td></tr> </tbody> </table>	x_1	\bar{x}_1	0	1	1	0
x_1	x_2	$x_1 x_2$																																				
0	0	0																																				
0	1	0																																				
1	0	0																																				
1	1	1																																				
x_1	x_2	$x_1 + x_2$																																				
0	0	0																																				
0	1	1																																				
1	0	1																																				
1	1	1																																				
x_1	\bar{x}_1																																					
0	1																																					
1	0																																					

Tak konjunktívna, ako aj disjunktívna brána má dva binárne vstupy a jeden binárny výstup, jednoduchšia brána negácie má jeden binárny vstup a jeden binárny výstup.

PRÍKLAD 7.13. Zostrojte Boolovu funkciu pre logický obvod



Použitím tabuľky 7.1 jednotlivé spoje tohto logického obvodu ohodnotíme takto



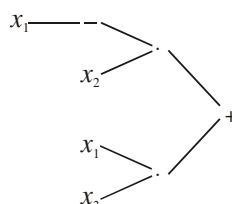
To znamená, že Boolova funkcia priradená tomuto obvodu má tvar

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \overline{x_1 x_2 + x_3 x_4}$$

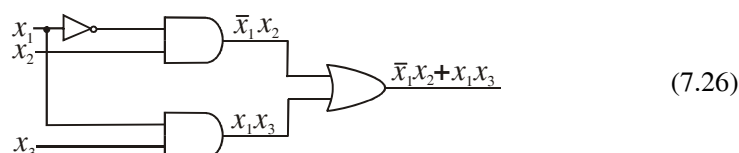
PRÍKLAD 7.14. Zostrojte logický obvod, ktorý simuluje Boolovu funkciu

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \bar{x}_1 x_2 + x_1 x_3.$$

Na ilustráciu zostrojíme syntaktický strom tejto funkcie



Logický obvod zostrojíme jednoducho z tohto syntaktického stromu, ktorý interpretuje Boolovu funkciu $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \bar{x}_1x_2 + x_1x_3$, tak, že jednotlivé vrcholy znázorňujúce algebraické operácie nahradíme príslušnými logickými bránami



Sumátor binárnych čísel

Technika logických obvodov je aplikovateľná ku konštrukcii súčtu dvoch kladných celých čísel, ktoré sú v binárnej reprezentácii. Táto konštrukcia obsahuje tri etapy.

POLOSUMÁTOR

Prvá etapa spočíva v návrhu logického obvodu (nazývaného *polosumátor*), ktorý sčíta dve jednotbitové čísla x a y a výsledkom je binárne číslo zložené z bitových komponentov

$$\begin{array}{r} x \\ y \\ \hline c \quad s \end{array} \quad (7.27)$$

Uvedieme tabuľku všetkých prípadov tejto schémy, ktoré môžu nastať

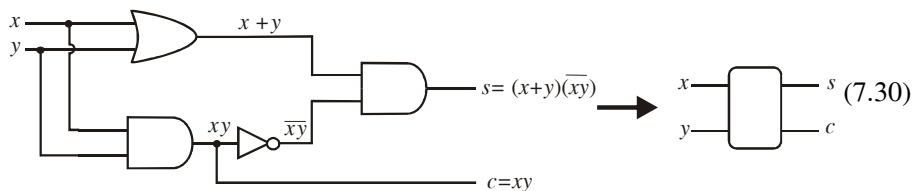
vstup		výstup	
x	y	c	s
0	0	0	0
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	0

Ak použijeme vetu 7.5, výstupné premenné z tejto tabuľky sú určené pomocou sumácie klauzúl (v DNF tvare)

$$s = f(x, y) = \bar{x}y + x\bar{y} = (x + y)(\bar{x} + \bar{y}) = (x + y)(\overline{xy}) \quad (7.29a)$$

$$c = g(x, y) = xy \quad (7.29b)$$

kde pri konštrukcii alternatívnej pravej strany Boolovej funkcie f bol použitý distributívny zákon.



DVOJITÝ SUMÁTOR *Druhá etapa* konštrukcie sumátora spočíva v konštrukcii logického obvodu (nazývaného *dvojitý sumátor*) pre sčítanie troch jednobitových čísel

$$\begin{array}{r} x \\ y \\ \hline z \\ u \ v \end{array} \quad (7.31)$$

Všetky možné prípady tejto schémy sú uvedené v tabuľke

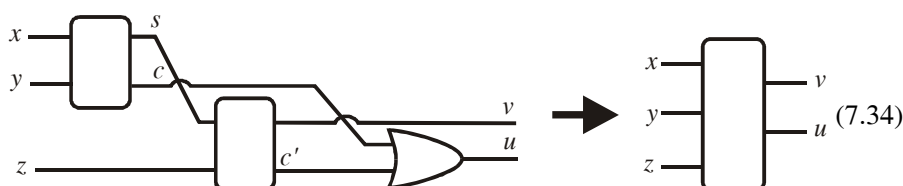
vstup			výstup	
x	y	z	u	v
0	0	0	0	0
0	0	1	0	1
0	1	0	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	1	0
1	1	1	1	1

Analýzou tejto tabuľky by sme zostrojili DNF Boolove funkcie pre výstupy u a v a tieto by sme sa snažili vyjadriť pomocou pomocných funkcií (7.29) z polovičného sumátora. Takto by sme dospeli k obvodu, ktorý simuluje sumáciu (7.31) pomocou polosumátora. Tento program, napriek jeho priamočiarosti, nie je algebraicky jednoduchý, preto ho nahradíme intuitívnym prístupom, ktorý je založený na prepise (7.31) pomocou dvoch medzikrokov

$$\begin{array}{r} x \\ y \\ \hline c \ s \\ z \\ \hline u \ v \end{array} \quad (7.33)$$

kde bitové komponenty medzivýsledku $c \ s$ sú spočítané pomocou polosumátora. Druhá sumácia je taktiež realizovaná pomocou polosumátora, avšak pri konštrukcii bitového komponentu u musíme zahrnúť aj bitový medzivýsledok c' (vzniká pri výpočte v ako druhý výstupný komponent polosumátora), ktorý použijeme pre výpočet výstupného bitového komponentu u ako súčtu c a c' (poznamenajme, že z podstaty študovaného problému vyplýva, že c a c' súčasne obsahujú maximálne len jeden jednotkový komponent, takže pri ich súčte nevzniká prenos bitu do ďalšej pozície). Tento heuristický pohľad na uskutočnenie sumácie troch jednobitových čísel (7.31) pomocou jeho prepisu do tvaru (7.33) môže

byť jednoducho vyjadrený týmto logickým obvodom, ktorý už využíva blok pre polosumátor špecifikovaný v (7.30)



POLOSUMÁTOR
A DVOJITÝ
SUMÁTOR NA
SUMÁCIU ČÍSEL
ĽUBOVOĽNEJ
DĹŽKY

Záverečná tretia etapa využije dvojitý sumátor (ako blok) na realizáciu sčítania dvoch n -bitových čísel ľubovoľnej dĺžky n . Ako ilustračný príklad študujme sčítanie dvoch trojbitových čísel

$$\begin{array}{r} x_0 \ x_1 \ x_2 \\ y_0 \ y_1 \ y_2 \\ \hline u_0 \ u_1 \ u_2 \ u_3 \end{array} \quad (7.35)$$

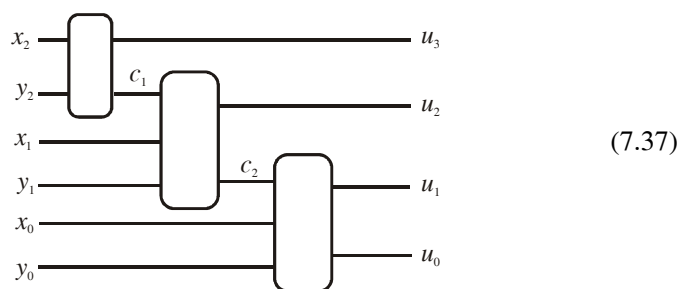
kde idúc postupne, z pravej do ľavej strany, uskutočňujeme sumáciu pomocou blokov polosumátora (PS) a dvojitého sumátora (DS)

$$(u_3, c_1) = PS(x_2, y_2) \quad (7.36a)$$

$$(u_2, c_2) = DS(x_1, y_1, c_1) \quad (7.36b)$$

$$(u_1, u_0) = DS(x_0, y_0, c_2) \quad (7.36c)$$

Túto postupnosť príkazov môžeme diagramaticky reprezentovať ako logický obvod s polosumátorom a s dvoma dvojitými sumátormi



Pomocou blokov pre polosumátor a dvojitý sumátor môžeme zostrojiť logický obvod na sumáciu dvoch digitálnych čísel ľubovoľnej dĺžky.

7.6 OPTIMALIZÁCIA LOGICKÝCH OBVODOV

AKO DOSTAŤ
MINIMÁLNY POČET
LITERÁLOV?

Efektívnosť logických obvodov závisí od počtu a prepojení ich logických brán. Proces návrhu logického obvodu začína návrhom tabuľky špecifikujúcej Boolovu funkciu, ktorá transformuje vstupné binárne veličiny na výstupné binárne veličiny. Boolova funkcia je zostrojená podľa vety 7.5 pomocou súčtu konjunktívnych klauzúl. Aj keď je tento prístup ku konštrukcii Boolovej funkcie

všeobecný, veta 7.5 nezaručuje optimálnosť zostrojenej funkcie. Pod optimálnosťou rozumieme to, že Boolova funkcia, ktorá simuluje danú tabuľku funkčných hodnôt pre všetky kombinácie vstupných hodnôt je definovaná formulou s minimálnym počtom literálov.

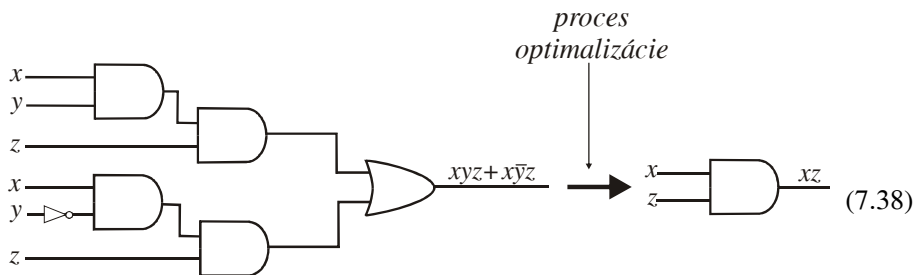
Uvažujme logický obvod, ktorý má výstup 1 vtedy a len vtedy, ak $x = y = z = 1$ alebo ak $x = z = 1$ a $y = 0$. Formula Boolovej funkcie zostrojená podľa vety 7.5, ktorá simuluje tento logický obvod má tvar $f(x, y, z) = xyz + x\bar{y}z$, môže byť podstatne zjednodušená takto

$$f(x, y, z) = xyz + x\bar{y}z = x(y + \bar{y})z = x \cdot 1 \cdot z = xz$$

To znamená, že táto formula xz , ktorá obsahuje dva literály, je ekvivalentná s pôvodnou formulou obsahujúcou 6 literálov; môžeme teda povedať, že optimálny tvar Boolovej funkcie $f(x, y, z) = xyz + x\bar{y}z$ je nová funkcia $g(x, z) = xz$, ktorá má podstatne menej literálov.

OPTIMÁLNY TVAR
BOOLOVEJ
FUNKCIE →
OPTIMÁLNY
LOGICKÝ OBVOD

Tento jednoduchý príklad dostatočne jasne ukazuje dôležitosť hľadania optimálneho tvaru Boolovej funkcie, pôvodne zostrojeného podľa vety 7.5, ak má táto slúžiť ako podklad pre návrh logického obvodu. Optimálny tvar Boolovej funkcie môže v špeciálnych prípadoch podstatne zjednodušiť navrhovaný logický obvod. Ako ilustračný príklad budeme študovať logické obvody priradené Boolovej funkcii $f(x, y, z) = xyz + x\bar{y}z$ a jej optimálnej forme $g(x, z) = xz$



Logický obvod zostrojený pomocou optimálneho tvaru (vpravo), obsahujúceho minimálny počet literálov je podstatne jednoduchší ako logický obvod (vľavo), ktorý obsahuje šesť logických hradiel.

Quinova a McCluskeyho metóda

ALTERNATÍVNE
KARNAUGHOVE
MAPY

Táto metóda patrí medzi moderné prístupy k optimalizácii Boolových funkcií, jej hlavnou prednosťou pred ostatnými klasickými prístupmi k tomuto optimalizačnému problému (napr. známej metóde Karnaughových máp) je jej konceptuálna jednoduchosť a priamočiara algoritmickejšia realizovateľnosť.

Quinova a McCluskeyho metóda bude ilustrovaná konkrétnym prípadom optimalizácie jednoduchej Boolovej funkcie

$$f(x, y, z) = xyz + x\bar{y}z + \bar{x}yz + \bar{x}\bar{y}z + \bar{x}\bar{y}\bar{z} \tag{7.39}$$

Každá súčinová klauzula (pozri definíciu 7.6 a formulu (7.4)) môže byť pre 3 premenné reprezentovaná bitovým reťazcom $e = (e_1, e_2, e_3) \in \{0,1\}^3$

$$l_e(x, y, z) = x^{e_1} y^{e_2} z^{e_3} \rightarrow (e_1, e_2, e_3) \quad (7.40)$$

QUINE⁴,
MCCLUSKEY⁵

kde $\xi^e = \xi$, ak $e = 1$, $\xi^e = \bar{\xi}$, ak $e = 0$, pre $\xi = x, y, z$. Pre takto definovanú binárnu reprezentáciu môžeme použiť metriku Hammingovej vzdialenosti ku kvantifikácii podobnosti medzi binárnymi vektormi. Nech $e_i = (e_1^{(i)}, e_2^{(i)}, \dots, e_n^{(i)})$ a $e_j = (e_1^{(j)}, e_2^{(j)}, \dots, e_n^{(j)})$ sú dve binárne reprezentácie klauzúl, potom

$$d_H(e_i, e_j) = \sum_{k=1}^n |e_k^{(i)} - e_k^{(j)}| \quad (7.41)$$

HAMMINGOVA
VZDIALENOSŤ PRE
PODOBNOŠŤ
BINÁRNYCH
VEKTOROV

Táto vzdialenosť pre binárne vektory nám špecifikuje počet polôh, v ktorých sa binárne vektory vzájomne odlišujú. Napríklad, ak Hammingova vzdialenosť medzi dvoma binárnymi vektormi je 2, potom tieto vektory sa navzájom odlišujú na dvoch miestach binárneho reťazca.

Každá Boolova formula v DNF forme je 1-1-značne reprezentovaná pomocou množiny bitových reťazcov, ktoré sú priradené jednotlivým klauzulám študovanej formuly. Pre ilustračný príklad (7.39) táto množina obsahuje 5 binárnych reťazcov dĺžky 3

$$U_f = \{(111), (101), (011), (001), (000)\} \quad (7.42)$$

Táto možnosť reprezentovať Boolovu funkciu v DNF forme pomocou množiny binárnych vektorov vyplýva zo skutočnosti, že operácia sumácie je komutatívna a asociatívna, čiže nezáleží v akom poradí sčítame jednotlivé klauzuly v Boolovej funkcii.

DVE KLAUZULY
SČÍTANÉ DO
JEDNÉHO ČLENU,
AK SA LÍŠIA ICH
BINÁRNE REŤAZCE
PRÁVE V JEDNEJ
POLOHE

Dve klauzuly z množiny U_f môžu byť vzájomne sčítané do jedného súčinového člena vtedy a len vtedy ak sa líšia ich binárne reťazce práve v jednej polohe, čiže ak ich vzájomná Hammingova vzdialenosť sa rovná 1. Napríklad, z množiny (7.42) vyberieme prvú a druhú klauzulu, ich binárne reprezentácie (111) a (101) sa líšia len hodnotou binárnej premennej v druhej polohe, $d_H(111, 101) = 1$. Tieto dve klauzuly sú sčítané takto

$$xyz + x\bar{y}z = x \underbrace{(y + \bar{y})}_1 z = xz \quad (7.43a)$$

V binárnej reprezentácii tento proces zjednodušenia formálne vyjadríme takto

⁴ Willard Van Orman Quine (1908–2000), americký logik a filozof. Patril medzi najvplyvnejších filozofov 20. storočia. Jeho fundamentálne príspevky k teórii vedomostí, matematickej logike, teórii množín a k filozofii logiky a jazyka sú stále aktuálne a zdrojom inšpirácie pre filozofov, logikov a matematikov. Jeho článok *New Foundations for Mathematical Logic* (1937) zásadným spôsobom ovplyvnil rozvoj matematickej logiky.

⁵ Edward J. McCluskey (1929), jedna z vedúcich osobností súčasnej americkej počítačovej vedy. Zaslúžil sa o oddelenie počítačovej vedy od elektrotechniky. Pomohol počítačovej vede ustanoviť sa ako samostatná disciplína, ktorá má svoj špecifický predmet výskumu – počítače. Jeho vedecké aktivity sú veľmi rozsiahle, od počítačových architektúr po testovanie a návrh logických obvodov.

$$(111) + (101) = \text{sum}((111), (101)) = (1\#1) \quad (7.43b)$$

„PRÁZDNY“
SYMBOL ‘#’

kde bol použitý nový „prázdný“ symbol ‘#’, ktorý reprezentuje prázdne miesto v binárnej reprezentácii nového súčinnového členu xz , pozri (7.43a). Takto zostrojené nové „klauzuly“ obsahujúce jeden symbol ‘#’ tvoria množinu

$$U_f^{(1)} = \{(1\#1), (\#11), (\#01), (0\#1), (00\#)\} \quad (7.44)$$

V ďalšej etape vytvárame z množiny $U_f^{(1)}$ novú množinu $U_f^{(2)}$. Tá obsahuje „klauzuly“ s dvoma prázdny symbolmi ‘#’, ktoré boli vytvorené operáciou súčtu klauzúl z množiny $U_f^{(1)}$

$$U_f^{(2)} = \{(\#\#1)\} \quad (7.45)$$

Proces sčítania „klauzúl“ obsahujúcich symboly ‘#’ musí byť podrobnejšie špecifikovaný:

SČÍTAŤ MÔŽEME
LEN TAKÉ DVE
KLAUZULY ČO
MAJÚ NA
ROVNAKÝCH
MIESTACH #

- Sčítať môžeme len také dve „klauzuly“, ktoré obsahujú rovnaký počet symbolov ‘#’, pričom tieto symboly v oboch použitých klauzulách musia byť umiestnené v rovnakých polohách v oboch binárnych reprezentáciách.
- „Klauzuly“, ktoré vyhovujú podmienke (a) môžeme sčítať len vtedy, ak ich binárne komponenty sa líšia len v jednej polohe.

Uvažujme dve klauzuly $e_i = (e_1^{(i)}, e_2^{(i)}, \dots, e_n^{(i)})$ a $e_j = (e_1^{(j)}, e_2^{(j)}, \dots, e_n^{(j)})$, ktoré chceme sčítať. Podľa podmienky (a) musí existovať taká množina indexov $I \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$, že

$$(\forall k \in I) (e_k^{(i)} = e_k^{(j)} = \#) \text{ a } (\forall k \notin I) (e_k^{(i)}, e_k^{(j)} \in \{0, 1\}) \quad (7.46)$$

Ako príklad uvedieme dvojicu klauzúl $e_i = (11\#0\#11)$ a $e_j = (11\#0\#10)$, pre množinu indexov $I = \{3, 5\}$ platia obe podmienky. V prípade, že takáto množina neexistuje, potom klauzuly $e_i = (e_1^{(i)}, e_2^{(i)}, \dots, e_n^{(i)})$ a $e_j = (e_1^{(j)}, e_2^{(j)}, \dots, e_n^{(j)})$ nemôžu byť použité v procese sčítania klauzúl. Zavedieme zovšeobecnenú Hammingovu vzdialenosť pre klauzuly, ktoré vyhovujú podmienke (a)

$$d_H(e_i, e_j) = \sum_{k \notin I} |e_k^{(i)} - e_k^{(j)}| \quad (7.47)$$

t. j. v sumácii sú aktívne len binárne členy. Potom podmienka (b) požaduje, aby Hammingova vzdialenosť medzi klauzulami bola rovná 1.

Zavedieme operátor \mathcal{A} , ktorý špecifikuje prechod množiny $U_f^{(k)}$ na množinu $U_f^{(k+1)}$

$$U_f^{(k+1)} = \mathcal{A}(U_f^{(k)}) \quad (7.48)$$

Musí existovať také kladné celé číslo n , že tento proces tvorby nových množín je

ETAPY PROCESU
TVORBY NOVÝCH
KLAUZÚL Z
PÔVODNEJ
MNOŽINY –
PRIDÁVAME
KLAUZULY S #

ukončený, t. j. platí $U_f^{(n+1)} = \mathcal{A}(U_f^{(n)}) = \emptyset$. Rekurentný proces (7.48) je inicializovaný množinou $U_f^{(0)} = U_f$. Môžeme hovoriť o etapách procesu tvorby nových klauzúl z pôvodnej (počiatočnej) množiny klauzúl. V 1. etape vytvoríme procesom sčítania dvoch klauzúl z množiny $U_f^{(0)} = U_f$ klauzuly s jedným prázdny symbolom '#', v 2. etape vytvoríme z množiny $U_f^{(1)}$ klauzuly s dvoma symbolmi '#'. Tento rekurentný proces je ukončený vtedy, ak operátor \mathcal{A} aplikovaný na množinu $U_f^{(n)}$ produkuje prázdnu množinu, t. j. $\mathcal{A}(U_f^{(n)}) = \emptyset$.

Ako ilustračný príklad rekurentnej tvorby množín $U_f^{(k)}$ použijeme množinu (7.42), výsledky je možné uviesť vo forme tabuľky

0. etapa			1. etapa			2. etapa		
1	(111)		1	(1,2)	(1#1)	1	(1,3), (2,4)	(##1)
2	(101)		2	(1,3)	(#11)			
3	(011)		3	(2,4)	(#01)			
4	(001)		4	(3,4)	(0#1)			
5	(000)		5	(4,5)	(00#)			

V stĺpcoch pre prvú a druhú etapu sú uvedené aj dvojice indexov klauzúl z predchádzajúceho stĺpca, ktoré boli použité v sumačnom procese. V druhej etape existuje aj druhá možnosť (1,2), (3,4), teda (1#1) a (0#1), ktorá tiež produkuje (##1).

„POKRYTIE“ -
RELÁCIA
ČIASTOČNÉHO
USPORIADANIA

Stojíme pred úlohou, ako vybrať taký minimálny počet klauzúl zostrojených v prvej alebo v ďalších etapách, ktoré sú odvoditeľné zo všetkých pôvodných klauzúl z množiny $U_f^{(0)} = U_f$. Na presnú špecifikáciu tohto posledného kroku Quinovej a McCluskeyho metódy musíme zaviesť nový pojem „pokrytie“. Klauzula e' **pokrýva** klauzulu e , formálne $e' \subseteq e$, vtedy a len vtedy, ak platí pre každé $i=1,2,\dots,n$ práve jedna z týchto podmienok

1. $(e'_i = 1) \Rightarrow (e_i = 1)$
 2. $(e'_i = 0) \Rightarrow (e_i = 0)$
 3. $(e'_i = \#) \Rightarrow (e_i \in \{0,1,\#\})$
- (7.49)

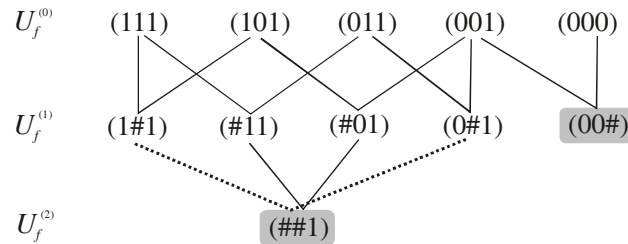
Pre ilustráciu tejto relácie uvedieme jednoduchý ilustračný príklad, ktorý vyhovuje týmto podmienkam

0	1	#	1	#	0	1	0	1	e
0	1	#	1	#	#	1	0	#	e'

Lahko sa presvedčíme, že ide o **reláciu čiastočného usporiadania** nad množinou vektorov $e \in \{0,1,\#\}^n$ (pozri kapitolu 3.2). Potom množina klauzúl, ktorá vznikne zjednotením množín $U_f^{(0)}$, $U_f^{(1)}$, $U_f^{(2)}$, ...

$$\tilde{U}_f = U_f^{(0)} \cup U_f^{(1)} \cup U_f^{(2)} \cup \dots$$

je čiastočne usporiadaná a diagramaticky znázornená Hasseho diagramom



Z tohto diagramu vyplýva, že má 5 maximálnych klauzúl (klauzuly patriace do množiny $U_f^{(0)}$) a dve minimálne klauzuly $(##1)$ a $(00#)$, ktoré sú na Hasseho diagrame zvýraznené.

Pre každú klauzulu e obsahujúcu aspoň jeden prázdny symbol, $e \in U_f^{(1)} \cup U_f^{(2)} \cup \dots$, zostrojíme množinu $U(e) \subseteq U_f$, ktorá obsahuje všetky pôvodné klauzuly (neobsahujúce prázdne symboly #), ktoré sú pokryté klauzulou e

$$U(e) = \{e' ; (e' \in U_f) \wedge (e \subseteq e')\} \quad (7.50)$$

Na lepšie pochopenie tejto množinovej koncepcie uvedieme príklady tejto množiny vychádzajúce z vyššie uvedeného Hasseho diagramu

$$U(1\#1) = \{(111), (101)\}$$

$$U(\#11) = \{(111), (011)\}$$

$$U(\#01) = \{(101), (001)\}$$

$$U(0\#1) = \{(011), (001)\}$$

$$U(00\#) = \{(001), (000)\}$$

$$U(##1) = \{(1,1,1), (101), (011), (001)\}$$

kde posledné dve klauzuly sú označené ako minimálne.

CIEĽOM JE VYBRAŤ
MINIMÁLNE
KLAUZULY, ABY
POKRYLI PÔVODNÚ
MNOŽINU

Naším cieľom je vybrať také minimálne klauzuly, ktoré pokrývajú pôvodné klauzuly z množiny $U_f^{(0)}$. Množinu týchto minimálnych klauzúl označíme V , potom v rámci tejto množiny hľadáme takú podmnožinu $\tilde{V} \subseteq V$, ktorej klauzuly plne pokrývajú množinu $U_f^{(0)}$

$$\bigcup_{e \in \tilde{V}} U(e) = U_f \quad (7.51)$$

Podmnožina \tilde{V} je určená podmienkou minimálnosti počtu literálov, $[\tilde{V}]$, ktoré obsahuje

$$\tilde{V} = \arg \min_{V' \subseteq V} [V'] \quad (7.52)$$

EXPONENCIÁLNY
RAST ZLOŽITOSTI

Riešenie tohto optimalizačného problému je pre malý počet premenných (približne do päť) obvykle zvládnuteľný ručne tak, že preberieme všetky možnosti, ktoré pokrývajú množinu U_f . Na väčšie problémy môže byť použitá metóda prehľadávania do hĺbky, ktorá systematicky preskúma všetky možnosti. Žiaľ, tento prístup je nepoužiteľný pre niekoľko desiatok premenných, v dôsledku exponenciálneho rastu zložitosti. V praxi sa používajú rôzne heuristické metódy, ktoré poskytujú kvalitné suboptimálne riešenie, ktoré sa často rovná optimálnemu riešeniu. V ďalšej časti tejto kapitoly budeme diskutovať veľmi jednoduchú metódu uskutočnenia optimálneho pokrytia pôvodných maximálnych klauzúl (bez prázdnych symbolov #), ktorú zo súčasného pohľadu na algoritmy môžeme nazvať „greedy“ metóda.

V tomto konkrétnom príklade ide o extrémne jednoduchý problém, môžeme vybrať obe minimálne klauzuly (##1) a (00#), ktoré pokrývajú pôvodné klauzuly. Potom môžeme písať Boolovu funkciu (7.39) v ekvivalentnom tvare

$$f(x, y, z) = z + \bar{x}\bar{y}$$

čo reprezentuje podstatné zjednodušenie (optimalizáciu) pôvodnej Boolovej funkcie (7.39), ktorej počet literálov klesol z 15 na 3.

PRÍKLAD 7.15.
„GREEDY“ METÓDA

Quinova a McCluskeyho metóda pôvodne nevyužívala algoritmus prehľadávania do hĺbky, ale bola založená na heuristickom prístupe naformulovanom v podobe tabuliek, ktorý v súčasnosti nazývame „greedy“ metóda. Uvažujme Boolovu funkciu

$$f(w, x, y, z) = wxy\bar{z} + w\bar{x}yz + \bar{w}xyz + w\bar{x}y\bar{z} + \bar{w}x\bar{y}z + \bar{w}\bar{x}y\bar{z}$$

V nasledujúcej tabuľke je znázornený postup vytvárania všetkých možných sumácií medzi klauzulami (v binárnej reprezentácii) k tejto Boolovej funkcie

0. etapa			1. etapa			2. etapa		
1	(1110)		1	(1,4)	(1#10)	1	(3,6),(5,7)	(0##1)
2	(1011)		2	(2,4)	(101#)		alternatívne	
3	(0111)		3	(2,6)	(#011)		(3,5),(6,7)	
4	(1010)		4	(3,5)	(01#1)			
5	(0101)		5	(3,6)	(0#11)			
6	(0011)		6	(5,7)	(0#01)			
7	(0001)		7	(6,7)	(00#1)			

V 0. etape máme zoznam všetkých klauzúl z Boolovej funkcie, množina $U_f^{(0)}$ má tvar

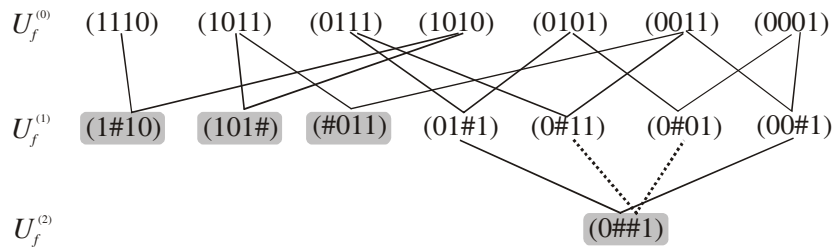
$$U_f^{(0)} = \{(1110), (1011), (0111), (1010), (0101), (0011), (0001)\}$$

V 1. etape vytvoríme sumáciami nové klauzuly, ktoré obsahujú jeden prázdny znak # (tieto klauzuly sú uvedené v šiestom stĺpci vyššie uvedenej tabuľky

$$U_f^{(1)} = \mathcal{A}(U_f^{(0)}) = \{(1#10), (101#), (#011), (01#1), (0#11), (0#01), (00#1)\}$$

V 2. etape vytvoríme množinu $U_f^{(2)} = \mathcal{A}(U_f^{(1)}) = \{(0##1)\}$. Tá obsahuje už len jednu klauzulu (0##1), ktorá vznikla dvoma alternatívnymi spôsobmi, súčtom

klauzúl 5 a 6 resp. 4 a 7 zo 6. stĺpca. Hasseho diagram má tvar



Teraz stojíme pred problémom ako vybrať taký minimálny počet klauzúl, ktoré nám budú pokrývať celú pôvodnú množinu klauzúl. V prvom kroku vyberieme takú minimálnu klauzulu, ktorá pokrýva najväčší počet maximálnych klauzúl. V prípade, že existuje niekoľko rovnocenných minimálnych klauzúl, ktoré pokrývajú rovnaký počet maximálnych klauzúl, tak vyberieme takú minimálnu klauzulu, ktorá má minimálny počet literálov. V tomto prvom kroku vyberieme minimálnu klauzulu (0##1), ktorá pokrýva štyri maximálne klauzuly. Táto možnosť je znázornená na nasledujúcej tabuľke:

minimálne klauzuly	maximálne (pôvodne) klauzuly						
	(1110)	(1011)	(0111)	(1010)	(0101)	(0011)	(0001)
(1#10)	1			1			
(101#)		1		1			
(#011)		1				1	
(0##1)			1		1	1	1

V ďalšom kroku máme dve alternatívne možnosti, a to výber minimálnej klauzuly (1#10) alebo výber minimálnej klauzuly (101#). V oboch prípadoch tieto minimálne klauzuly pokrývajú dve maximálne klauzuly, pretože majú rovnaký počet literálov, tak sú rovnocenné. Predpokladajme, že vyberieme prvú možnosť, potom predchádzajúca tabuľka má tvar:

minimálne klauzuly	maximálne (pôvodne) klauzuly						
	(1110)	(1011)		(1010)			
(1#10)	1			1			
(101#)		1		1			
(#011)		1					
(0##1)							

Ak z tejto tabuľky odstránime novo pokryté klauzuly, potom sa tabuľka ďalej zjednoduší do tvaru:

minimálne klauzuly	maximálne (pôvodne) klauzuly						
		(1011)					
(1#10)							
(101#)		1					
(#011)		1					
(0##1)							

Na záver máme dve rovnocenné možnosti výberu minimálnych klauzúl (101#) resp. (#011), vybrali sme prvú možnosť (101#), tým sme dokázali, že sedem maximálnych klauzúl môže byť pokrytých pomocou troch minimálnych klauzúl (0##1), (1#10) a (101#), ktoré majú dohromady osem literálov. Ekvivalentný (minimálny) tvar Boolovej funkcie určený týmito klauzulami je

$$f_1(w, x, y, z) = \bar{w}z + wy\bar{z} + w\bar{x}y$$

Ak by sme vybrali druhú alternatívnu možnosť (#011), potom alternatívny tvar minimálnej Boolovej funkcie je

$$f_2(w, x, y, z) = \bar{w}z + wy\bar{z} + \bar{x}yz$$

ZHRNUTIE

BOOLOVA ALGEBRA

Boolova algebra je algebraická štruktúra špecifikovaná usporiadanou 6-ticou $(B, +, \cdot, \bar{}, \mathbf{0}, \mathbf{1})$, kde $B = \{a, b, \dots, x, y, \dots\}$ je neprázdna množina elementov (premených Boolovej algebry), ktorá obsahuje dva špeciálne odlišené elementy - konštanty $\mathbf{0}, \mathbf{1} \in B$ a nad ktorou sú definované binárne operácie súčinu a súčtu (ktoré sú komutatívne a asociatívne a platia medzi nimi distributívne zákony)

$$\cdot : B \times B \rightarrow B \quad (7.1a)$$

$$+ : B \times B \rightarrow B \quad (7.1b)$$

a unárna operácia komplementu

$$\bar{} : B \rightarrow B \quad (7.1c)$$

Konštanty $\mathbf{0}$ a $\mathbf{1}$ vyhovujú podmienkam $x = x + \mathbf{0}$, $x \cdot \bar{x} = \mathbf{0}$, $x = x \cdot \mathbf{1}$ a $x + \bar{x} = \mathbf{1}$.

Boolova algebra má dve známe realizácie: algebru množín a výrokovú logiku.

BOOLOVE FUNKCIE

Nech $(B, +, \cdot, \bar{}, \mathbf{0}, \mathbf{1})$ je Boolova algebra. Potom **Boolova formula**, obsahujúca Boolove premenné x_1, x_2, \dots, x_n , je definovaná takto: (1) konštanty $\mathbf{0}$ a $\mathbf{1}$ sú Boolove formuly, (2) Boolove premenné x_1, x_2, \dots, x_n sú Boolove formuly, (3) ak X a Y sú Boolove formuly, potom aj výrazy $(X \cdot Y)$, $(X + Y)$, \bar{X} a \bar{Y} sú Boolove formuly.

Nech $(B, +, \cdot, \bar{}, \mathbf{0}, \mathbf{1})$ je Boolova algebra. Boolova funkcia $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ premených x_1, x_2, \dots, x_n je zobrazenie $f : B^n \rightarrow B$, pričom $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ je špecifikovaná ako Boolova formula. Všetky Boolove formuly, ktoré sú navzájom ekvivalentné, definujú rovnakú funkciu.

Každá Boolova funkcia $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, môže byť špecifikovaná ako suma súčinných klauzúl

$$\begin{aligned}
 f(x_1, x_2, \dots, x_n) &= \sum_e f(e_1, e_2, \dots, e_n) x_1^{e_1} x_2^{e_2} \dots x_n^{e_n} \\
 &= \sum_e f(e_1, e_2, \dots, e_n) l_{(e_1, e_2, \dots, e_n)} \\
 &= \sum_e f(e) l_e
 \end{aligned}$$

Každá Boolova funkcia $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, môže byť špecifikovaná ako súčin sumačných klauzúl

$$\begin{aligned}
 f(x_1, x_2, \dots, x_n) &= \prod_e (f(e_1, e_2, \dots, e_n) + x_1^{\bar{e}_1} + x_2^{\bar{e}_2} + \dots + x_n^{\bar{e}_n}) \\
 &= \prod_e (f(e_1, e_2, \dots, e_n) + L_{(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n)}) \\
 &= \prod_e (f(e) + L_{\bar{e}})
 \end{aligned}$$

kde $\bar{e} = (\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n) = (1 - e_1, 1 - e_2, \dots, 1 - e_n)$

LOGICKÉ SIETE

V pionierskej práci McCullocha a Pittsa z r. 1943 boli formulované teoretické základy neurónových sietí s logickými neurónmi. Práca je v súčasnosti pokladaná za jednu prvých prác, na základe ktorých vznikol nový infromatický vedný odbor **umelá inteligencia**. Autori dokázali, že ľubovoľná Boolova funkcia môže byť simulovaná pomocou obvodu (neurónovej siete) obsahujúcej elementárne obvody – neuróny, ktoré simulujú disjunktívne a konjunktívne klauzuly. V prípade logických obvodov sa jedná o abstrakciu, ktorá ignoruje vnútornú architektúru neurónov a postuluje existenciu elementárnych logických brán pre operácie disjunkcie, konjunktie a negácie.

MINIMALIZÁCIA BOOLOVÝCH VÝRAZOV

Efektívnosť logického obvodu závisí od počtu a prepojení jeho logických brán. Proces návrhu logického obvodu začína návrhom tabuľky špecifikujúcej Boolovu funkciu, ktorá transformuje vstupné binárne veličiny na výstupné binárne veličiny. Boolova funkcia je zostrojená pomocou súčtu konjunktívnych klauzúl. Aj keď je tento prístup ku konštrukcii Boolovej funkcie všeobecný, nezaručuje optimálnosť zostrojenej funkcie. Pod optimálnosťou rozumieme to, že Boolova funkcia, ktorá simuluje danú tabuľku funkčných hodnôt pre všetky kombinácie vstupných hodnôt, má minimálny počet literálov.

Quinova a McCluskeyho metóda patrí medzi moderné prístupy k optimalizácii Boolových funkcií, jej hlavnou prednosťou pred ostatnými klasickými prístupmi k tomuto optimalizačnému problému (napr. známej metóde Karnaughových máp) je jej konceptuálna jednoduchosť a priamočiara algoritimizovateľnosť.

KLÚČOVÉ POJMY

<i>Boolova algebra</i>	<i>súčinová klauzula</i>
<i>Boolove funkcie</i>	<i>súčtová klauzula</i>
<i>logické siete</i>	<i>disjunktívna normálna forma (DNF)</i>
<i>minimalizácia Boolových výrazov</i>	<i>konjunktívna normálna forma (KNF)</i>
<i>„dualizmus“ výrokovkej logiky a teórie množín</i>	<i>spínacie obvody</i>
<i>komutatívnosť</i>	<i>sériové zapojenie – súčin premenných</i>
<i>asociatívnosť</i>	<i>paralelné zapojenie – súčet premenných</i>
<i>distributívnosť</i>	<i>spínacie funkcie</i>
<i>vlastnosť konštanty 0</i>	<i>logické obvody</i>
<i>vlastnosť konštanty 1</i>	<i>McCulloch a Pitts</i>
<i>alternatívne notácie Boolovej algebry</i>	<i>umelá inteligencia</i>
<i>multiplikačné tabuľky</i>	<i>logická brána konjunkcie</i>
<i>duálna forma rovnosti</i>	<i>logická brána disjunkcie</i>
<i>jednoznačnosť neutrálnych a inverzných prvkov</i>	<i>logická brána negácie</i>
<i>involutívnosť komplementu</i>	<i>sumátor binárnych čísel</i>
<i>idempotentnosť</i>	<i>polosumátor</i>
<i>De Morganove zákony</i>	<i>dvojitý sumátor</i>
<i>nulitosť</i>	<i>optimalizácia logických obvodov</i>
<i>absorpcia</i>	<i>Quinova a McCluskeyho metóda</i>
<i>komplementy konštant</i>	<i>Karnaughove mapy</i>
<i>Boolova premenná</i>	<i>Hammingova vzdialenosť</i>
<i>literál</i>	<i>„prázdny“ symbol ‘#’</i>
<i>Boolova formula</i>	<i>„pokrytie“ klauzúl</i>
<i>ekvivalentnosť formúl</i>	<i>minimálne klauzuly</i>
<i>– pomocou tabuliek</i>	<i>„greedy“ metóda</i>
	<i>Hasseho diagram</i>

CVIČENIA

7.1. Aká je hodnota Boolovej premennej, ktorá je určená podmienkou

- (a) $x \cdot \mathbf{1} = \mathbf{0}$,
- (b) $x + x = \mathbf{0}$,
- (c) $x \cdot \mathbf{1} = x$,
- (d) $x + \bar{x} = \mathbf{1}$,
- (e) $x \cdot \bar{x} = \mathbf{0}$.

7.2. Zostrojte tabuľku funkčných hodnôt Boolovej funkcie

- (a) $f(x, y, z) = \bar{x}y$,
- (b) $f(x, y, z) = x + yz$,

$$(c) f(x, y, z) = x\bar{y} + \overline{xyz}.$$

7.3. Znázornite Boolove funkcie $f(x, y, z)$ z cvičenia 7.2 na 3-rozmernej kocke tak, že hodnoty 1 (0) budú reprezentované na kocke čiernym (bielym) bodom.

7.4. Pre ktoré hodnoty x a y platí $xy = x + y$?

7.5. Zostrojte tabuľku všetkých možných binárnych Boolových funkcií a identifikujte v nej známe Boolove binárne operácie súčinu a súčtu. Vyjadrite ostatné binárne operácie pomocou súčtu, súčinu a komplementu.

7.6. Niekedy je výhodné v Boolovej algebre definovať novú binárnu operáciu označenú symbolom \oplus , jej tabuľka funkčných hodnôt má tvar

\oplus	0	1
0	0	1
1	1	0

Poznamenajme, že vo výrokovej logike, podobná logická spojka je označovaná „exkluzívna disjunkcia“ (XOR). Zjednodušte tieto výrazy

- (a) $x \oplus \mathbf{0}$,
- (b) $x \oplus \mathbf{1}$,
- (c) $x \oplus x$,
- (d) $x \oplus \bar{x}$.

7.7. Dokážte, že platia rovnosti

- (a) $x \oplus y = (x + y)(\overline{xy})$,
- (b) $x \oplus y = \bar{x}y + x\bar{y}$.

7.8. Zostrojte duálne výrazy k týmto Boolovým rovnostiam

- (a) $x + \bar{x} = \mathbf{1}$,
- (b) $\bar{x}\bar{y}(x + y) = \mathbf{0}$,
- (c) $xyz + \bar{x}y\bar{z} = ((x + z)z + \bar{x}\bar{z})y$.

7.9. Dokážte, že duálny tvar $f_d(x_1, x_2, \dots, x_n)$ k Boolovej funkcii $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ vyhovuje podmienke $f_d(x_1, x_2, \dots, x_n) = \overline{f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)}$.

7.10. Zostrojte Boolovu funkciu $f(x, y, z)$ vo forme sumy súčinových klauzúl k premenným x, y a z , ktorá má hodnotu **1** vtedy a len vtedy, ak

- (a) $x = y = \mathbf{0}, z = \mathbf{1}$,
- (b) $x = \mathbf{0}, y = \mathbf{1}, z = \mathbf{0}$,
- (c) $y = z = \mathbf{1}$.

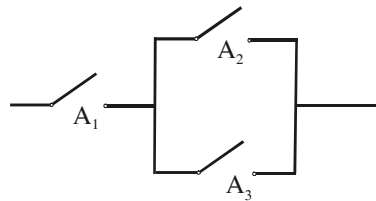
7.11. Zostrojte Boolovu funkciu $f(x, y, z)$ vo forme sumy súčinových klauzúl k premenným x, y a z , ktorá je ekvivalentná s funkciou

- (a) $F(x, y, z) = x + y + \bar{z}$,

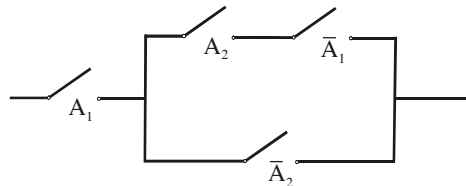
(b) $F(x, y, z) = x\bar{z}$.

7.12. Zostrojte spínacie funkcie pre spínacie obvody

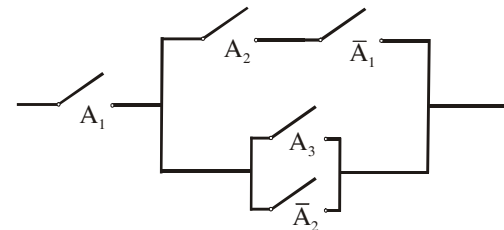
(a)



(b)



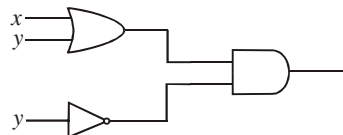
(c)



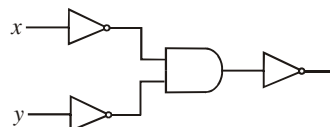
7.13. Ústredné kúrenie v rodinnom dome je riadené tromi termostatmi, ktoré sú umiestnené v každej izbe domu. Termostaty sú nastavené na $18\text{ }^\circ\text{C}$, pričom z dôvodu šetrenia energiou sa požaduje, aby systém ústredného kúrenia bol zapnutý keď teplota aspoň v dvoch izbách je menšia ako $18\text{ }^\circ\text{C}$, v opačnom prípade je systém vypnutý. Navrhňte spínačový systém, ktorý prijíma signály z termostatov a ktorý riadi ústredné kúrenie. Pokúste sa minimalizovať navrhnutý systém, aby bol čo najjednoduchší.

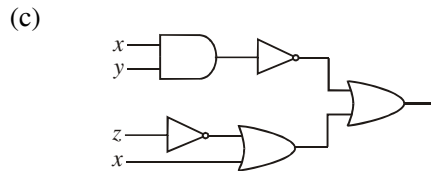
7.14. Zostrojte tabuľku výstupov logických obvodov

(a)



(b)

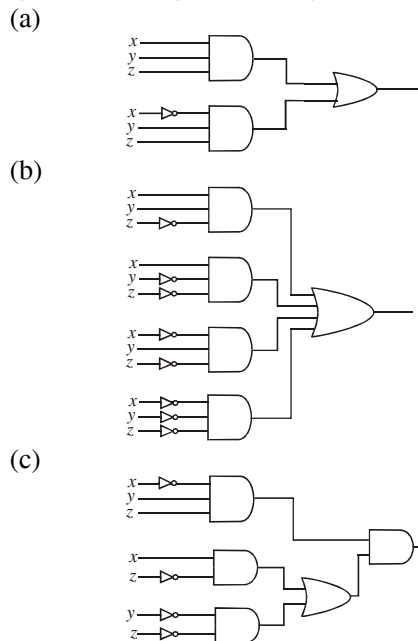




7.15. Zostrojte logické obvody, ktoré simulujú Boolove funkcie

- (a) $\bar{x} + y$,
- (b) $\overline{(x + y)}x$,
- (c) $xyz + \bar{x}\bar{y}\bar{z}$,
- (d) $\overline{(\bar{x} + z)(y + \bar{z})}$.

7.16. Zjednodušte logické obvody



7.17. Pomocou Quinovej a McCluskeyho metódy nájdite optimálne výrazy k Boolovým funkciám

- (a) $wxyz + wx\bar{y}z + wx\bar{y}\bar{z} + w\bar{x}y\bar{z} + w\bar{x}\bar{y}z$,
- (b) $wxy\bar{z} + wx\bar{y}z + w\bar{x}yz + \bar{w}x\bar{y}z + \bar{w}\bar{x}y\bar{z} + \bar{w}\bar{x}\bar{y}z$,
- (c) $wxyz + wx\bar{y}\bar{z} + wx\bar{y}z + w\bar{x}\bar{y}z + w\bar{x}y\bar{z} + \bar{w}\bar{x}y\bar{z} + \bar{w}\bar{x}\bar{y}z$.

8 MATICOVÁ ALGEBRA I

DEFINÍCIA MATICE • ŠPECIÁLNE MATICE • MATICOVÁ ALGEBRA • HODNOSŤ MATICE • INVERZNÁ MATICA

Táto kapitola sa bude zaoberať základmi maticovej algebry – definíciou matice, špeciálnymi maticami, maticovou algebrou, hodnotou matice a špecifikáciou inverznej matice. Budú diskutované algoritmické problémy násobenia matíc, ukážeme jednoduchý algoritmus na nájdenie optimálneho zátvorkovania reťazca súčiny matíc.

8.1 DEFINÍCIA MATICE

UKÁŽKA POUŽITIA
MATICE

V mnohých prípadoch dáta majú štruktúru dvojrozmernej tabuľky, ktorá má m riadkov a n stĺpcov. Jednoduchý príklad dát tohto druhu je tabuľka, ktorá pre päť študentov označených A , B , C , D a E obsahuje známky v bodoch (v rozsahu 0 až 100) z predmetov Matematika, Logika a Programovanie.

		predmet		
		Matematika	Logika	Programovanie
študent	A	88	98	67
	B	75	91	73
	C	92	81	75
	D	98	100	98
	E	55	61	82

Riadky tejto tabuľky sú priradené jednotlivým študentom, zatiaľ čo stĺpce sú priradené predmetom. Na priesečníku daného riadku (študent – predmet) je uvedený počet bodov, ktoré získal daný študent pre daný predmet. Ak z tejto tabuľky odstránime redundantný popis riadkov a stĺpcov, dostávame matematickú štruktúru,

$$A = \begin{pmatrix} 88 & 98 & 67 \\ 75 & 91 & 73 \\ 92 & 81 & 75 \\ 98 & 100 & 98 \\ 55 & 61 & 82 \end{pmatrix} \quad (8.1)$$

DEFINÍCIA 8.1.
MATICA, TYP
MATICE



Nech $I = \{1, 2, \dots, m\}$ je množina riadkových indexov a $J = \{1, 2, \dots, n\}$ je množina stĺpcových indexov, pričom m a n sú kladné celé čísla, $m, n \geq 1$. **Maticou** nazývame množinu obsahujúcu $m \cdot n$ čísel, ktoré sú špecifikované riadkovým (i) a stĺpcovým (j) indexom

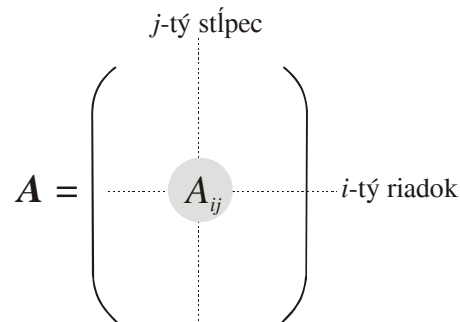
$$A = \{A_{ij} ; i \in I, j \in J\} \quad (8.2)$$

Typ matice je usporiadaná dvojica kladných prirodzených čísel, ktoré sú rovné mohutnostiam množín indexov I a J

$$t(A) = (m, n) \quad (8.3)$$

Štruktúra matice A môže byť jednoducho znázornená pomocou tabuľky, ktorá obsahuje m riadkov a n stĺpcov, pričom na priesečníku i -tého riadku a j -tého stĺpca je umiestnený prvok A_{ij} , pozri obr. 8.1. a formulu (8.1).

OBRÁZOK 8.1.
ZNÁZORNENIE
MATICE



Znázornenie matice A pomocou tabuľky, ktorá obsahuje m riadkov a n stĺpcov.

Niekedy sa používa aj „skratkové“ označenie pre maticu $A = (A_{ij})$, pričom sa implicitne predpokladá počet riadkov a stĺpcov tejto matice.

PRÍKLAD 8.1.

Určite typ matice:

(a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $t(A) = (2, 2)$.

(b) $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $t(A) = (2, 3)$.

$$(c) \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 2 \end{pmatrix}, t(\mathbf{B}) = (1,4).$$

$$(d) \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, t(\mathbf{X}) = (3,1).$$

Základná terminológia

ŠTVORCOVÁ
A OBDĽŽNIKOVÁ M. (1) Ak $m=n$, matica sa nazýva **štvorcová**, v opačnom prípade sa matica nazýva **obdĺžniková**.

HLAVNÁ
DIAGONÁLA (2) Prvky A_{ii} matice \mathbf{A} sa nazývajú **diagonálne**, všetky diagonálne prvky tvoria (**hlavnú**) **diagonálu** matice, pozri obr. 8.2.

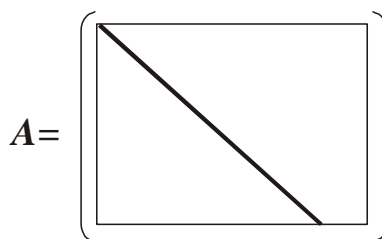
NULOVÁ MATICA (3) Ak všetky prvky matice sú nuly, potom sa matica nazýva **nulová matica**.

DIAGONÁLNA
MATICA (4) Štvorcová matica, ktorá mimo diagonály má nulové prvky a na diagonále má aspoň jeden nenulový prvok sa nazýva **diagonálna matica**.

JEDNOTKOVÁ
MATICA \mathbf{E} (5) Špeciálny prípad diagonálnej matice je **jednotková matica** (budeme ju značiť \mathbf{E}), kde všetky diagonálne prvky sú jednotky

$$A_{ij} = \begin{cases} 1 & (\text{pre } i = j) \\ 0 & (\text{pre } i \neq j) \end{cases}$$

OBRÁZOK 8.2.
ZNÁZORNENIE
DIAGONÁLNYCH
PRVKOV V MATICI

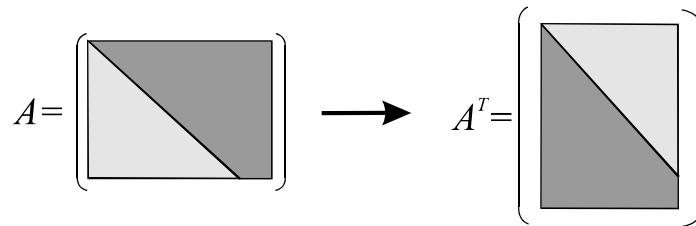


Znázornenie diagonálnych prvkov v matici \mathbf{A} , ktorá je typu $t(\mathbf{A}) = (m,n)$. Diagonála začína v prvku A_{11} a končí v prvku A_{mm} (ak $m \leq n$), alebo v prvku A_{nn} (ak $m > n$). V prípade, že matica je štvorcová ($m = n$), potom diagonála začína v ľavom hornom rohu a končí v pravom dolnom rohu matice.

TRANSPONOVANÁ
MATICA (6) Nech \mathbf{A} je matica typu $t(\mathbf{A}) = (m,n)$, potom matica **transponovaná** k tejto matici, označená \mathbf{A}^T , sa vytvorí z matice \mathbf{A} tak, že vzájomne zameníme stĺpce za riadky a naopak, potom $t(\mathbf{A}^T) = (n,m)$ (pozri obr. 8.3). Názorne hovoríme, že matica \mathbf{A}^T vznikla z matice \mathbf{A} jej preklopením (otočením o 180°) okolo diagonály. Transponovaná matica je ilustrovaná príkladom

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

OBRÁZOK 8.3.
VZNIK
TRANSPONOVANEJ
MATICE A^T



Schematické znázornenie vzniku transponovanej matice A^T pootočením pôvodnej matice A okolo diagonály.

SYMETRICKÁ
MATICA

(7) Štvorcová matica sa nazýva **symetrická matica**, ak platí $A^T=A$. Jednoduchý príklad symetrickej matice je

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

TROJUHOLNÍKOVÁ
MATICA

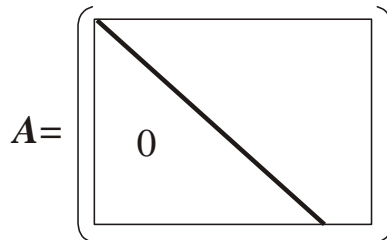
(8) Matica A typu (m,n) sa nazýva **trojuholníková matica**¹, ak pod diagonálou má nulové prvky a na diagonále má nenulové prvky (pozri obr. 8.4)

$$a_{ij} = \begin{cases} 0 & (\text{pre } i > j, \text{ pod diagonálou sú nulové prvky}) \\ \neq 0 & (\text{pre } i = j, \text{ na diagonále sú nenulové prvky}) \end{cases}$$

Ilustračný príklad trojuholníkovej matice je

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

OBRÁZOK 8.4.
SCHEMATICKÉ
ZNÁZORNENIE
TROJUHOLNÍKOVEJ
MATICE



Schematické znázornenie trojuholníkovej matice, ktorej prvky na diagonále sú nenulové a pod diagonálou má len nulové prvky.

RIADKOVÝ VEKTOR
STĹPCOVÝ VEKTOR

(9) Ak matica A typu $t(A) = (m,n)$ má počet riadkov (m) alebo počet stĺpcov (n) rovný 1, potom takáto špeciálna matica sa nazýva **riadkový vektor** ($m = 1$) resp. **stĺpcový vektor** ($n = 1$). Príklady riadkovej a stĺpcovej matice sú

¹ V anglickej literatúre sa bežne ako trojuholníková matica berie iba matica typu (n,n) .

$$\mathbf{B} = (0 \quad -1 \quad 2), \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Aplikáciou operácie transpozície, stĺpcový vektor sa mení na riadkový vektor a naopak, pre predchádzajúce dve matice dostaneme

$$\mathbf{B}^T = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}^T = (0 \quad 1 \quad -1)$$

Pomocou riadkových alebo stĺpcových vektorov môžeme vyjadriť každú maticu ako „kompozíciu“ týchto elementárnych matíc. Nech \mathbf{A} je matica (8.1) typu $t(\mathbf{A}) = (5,3)$. Definujme päť riadkových vektorov

$$\mathbf{r}_1 = (88 \quad 98 \quad 67)$$

$$\mathbf{r}_2 = (75 \quad 91 \quad 73)$$

$$\mathbf{r}_3 = (92 \quad 81 \quad 75)$$

$$\mathbf{r}_4 = (98 \quad 100 \quad 98)$$

$$\mathbf{r}_5 = (55 \quad 61 \quad 82)$$

a tri stĺpcové vektory

$$\mathbf{s}_1 = \begin{pmatrix} 88 \\ 75 \\ 92 \\ 98 \\ 55 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{s}_2 = \begin{pmatrix} 98 \\ 91 \\ 81 \\ 100 \\ 61 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{s}_3 = \begin{pmatrix} 67 \\ 73 \\ 75 \\ 98 \\ 82 \end{pmatrix}$$

Pomocou týchto vektorov vyjadríme maticu \mathbf{A} (8.1) dvoma alternatívnymi spôsobmi takto

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{r}_1 \\ \mathbf{r}_2 \\ \mathbf{r}_3 \\ \mathbf{r}_4 \\ \mathbf{r}_5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A} = (\mathbf{s}_1 \quad \mathbf{s}_2 \quad \mathbf{s}_3).$$

8.2 OPERÁCIE NAD MATICAMI

Nad maticami je možné definovať rôzne binárne operácie, pomocou ktorých sa definuje tzv. algebra matíc, ktorá podstatne uľahčuje a zefektívňuje ich aplikácie v matematike.

DEFINÍCIA 8.2.
 MATICE SA
 ROVNAJÚ

 α -NÁSOBOK
 MATICE

 SÚČET, SÚČIN
 MATÍC


(1) Nech matice $A = (A_{ij})$ a $B = (B_{ij})$ sú rovnakého typu, $t(A) = t(B) = (m, n)$. Hovoríme, že tieto matice sa **rovnajú**, $A = B$, vtedy a len vtedy, ak

$$\forall (i \in I) \forall (j \in J) (A_{ij} = B_{ij}) \quad (8.4)$$

(2) Nech matice $A = (A_{ij})$ a $B = (B_{ij})$ sú rovnakého typu, $t(A) = t(B) = (m, n)$. Hovoríme, že matica B je **α -násobkom** matice A , $B = \alpha A$, vtedy a len vtedy, ak

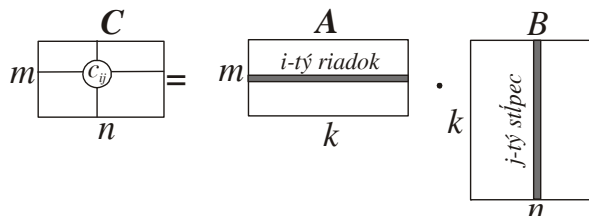
$$\forall (i \in I) \forall (j \in J) (B_{ij} = \alpha A_{ij}) \quad (8.5)$$

(3) Nech matice $A = (A_{ij})$, $B = (B_{ij})$ a $C = (C_{ij})$ sú rovnakého typu, $t(A) = t(B) = t(C) = (m, n)$. Hovoríme, že matica C je **súčtom** matíc A a B , $C = A + B$, vtedy a len vtedy, ak

$$\forall (i \in I) \forall (j \in J) (C_{ij} = A_{ij} + B_{ij}) \quad (8.6)$$

(4) Nech matica $A = (A_{ij})$ je typu $t(A) = (m, k)$, matica $B = (B_{ij})$ je typu $t(B) = (k, n)$ a matica $C = (C_{ij})$ je typu $t(C) = (m, n)$. Hovoríme, že matica C je **súčinom** matíc A a B , $C = AB$, vtedy a len vtedy, ak

$$\forall (i \in I) \forall (j \in J) \left(C_{ij} = \sum_{p=1}^k A_{ip} B_{pj} = A_{i1} B_{1j} + A_{i2} B_{2j} + \dots + A_{ik} B_{kj} \right) \quad (8.7)$$

OBRÁZOK 8.5.
 SÚČIN MATÍC


Znázornenie súčinu matíc $C = AB$ pomocou súčinu riadkového vektora matice A a stĺpcového vektora matice B .

Najzložitejšia binárna operácia je súčin (násobenie) dvoch matíc. Definícia (8.7) súčinu dvoch matíc A a B môže byť podstatne zjednodušená použitím riadkových vektorov matice A a stĺpcových vektorov matice B (pozri obr. 8.5). Nech r_i je i -tý riadkový vektor matice A a s_j je j -tý stĺpcový vektor matice B , potom prvok C_{ij} je zadaný takto

$$C_{ij} = r_i \cdot s_j = (A_{i1} \ A_{i2} \ \dots \ A_{ik}) \begin{pmatrix} B_{1j} \\ B_{2j} \\ \dots \\ B_{kj} \end{pmatrix} = \sum_{p=1}^k A_{ip} B_{pj} \quad (8.8)$$

PRÍKLAD 8.2.

Násobenie matíc

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},$$

 Definujme riadkové vektory matice A a stĺpcové vektory matice B

$$r_1 = (1 \ 2), \quad r_2 = (-1 \ 3)$$

$$s_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, s_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Potom prvky matice $C = AB$ sú určené takto

$$C_{11} = r_1 \cdot s_1 = (1 \ 2) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = (1)(-1) + (2)(1) = 1$$

$$C_{12} = r_1 \cdot s_2 = (1 \ 2) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = (1)(0) + (2)(2) = 4$$

$$C_{21} = r_2 \cdot s_1 = (-1 \ 3) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = (-1)(-1) + (3)(1) = 4$$

$$C_{22} = r_2 \cdot s_2 = (-1 \ 3) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = (-1)(0) + (3)(2) = 6$$

Potom súčin AB je určený

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$$

Podobným spôsobom zostrojíme aj maticu BA

$$BA = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & 8 \end{pmatrix}$$

SÚČIN MATÍC
NIE JE
KOMUTATÍVNY

Vo všeobecnosti platí, že **súčin matíc nie je komutatívna operácia** (pozri príklad 8.2)

$$AB \neq BA \quad (8.9a)$$

Ďalšia dôležitá vlastnosť je, že jednotková matica E pôsobí ako „jednotka“ pre maticový súčin

$$EA = AE = A \quad (8.9b)$$

ZÁKLADNÉ
VLASTNOSTI
SÚČTU A SÚČINU
MATÍC

Základné vlastnosti súčtu a súčinu matíc možno zosumarizovať do tvaru tzv. „maticovej algebry“:

(1) Súčet matíc je komutatívny

$$A+B = B+A \quad (8.10a)$$

(2) Súčet a súčin je asociatívny

$$A+(B+C)=(A+B)+C, \quad A(BC)=(AB)C \quad (8.10b)$$

(3) Súčin je distributívny vzhľadom k súčtu matíc

$$(A+B)C=AC+BC \quad (8.11a)$$

$$A(B+C)=AB+AC \quad (8.11b)$$

$$(\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A \quad (8.11c)$$

$$\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B \quad (8.11d)$$

(4) Asociatívnosť a komutatívnosť operácie násobenia násobku matíc číslom a asociatívnosť vzhľadom k operácii násobenia násobku čísla a matice

$$A(\alpha B)=\alpha(AB) \quad (8.12a)$$

$$\alpha(\beta A)=(\alpha\beta)A \quad (8.12b)$$

Algoritmus pre násobenie matíc

Nech matica $A = (A_{ij})$ je typu $t(A) = (m, k)$, matica $B = (B_{ij})$ je typu $t(B) = (k, n)$ a matica $C = (C_{ij})$ je typu $t(C) = (m, n)$. Podľa definície 8.2 prvky matice C sú určené vzťahom (8.7), ktorý môže slúžiť aj ako algoritmický podklad pre implementáciu programu pre násobenie dvoch matíc (pozri algoritmus 8.1 napísaný v pseudokóde Pascalu).

ALGORITMUS 8.1. NÁSOBENIE MATÍC

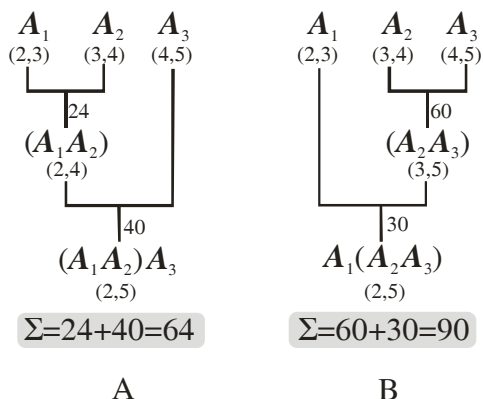
```

procedure matrix_multiplication(A,B,C : matrices);
for i:=1 to m do
for j:=1 to n do
begin sum:=0;
      for p:=1 to k do sum:=sum+A[i,p]*B[p,j];
      C[i,j]:=sum;
end;
  
```

ZLOŽITOSŤ ALGORITMU ÚMERNE n^3

Vypočítať jeden prvok C_{ij} podľa (8.7) vyžaduje k súčinov a $(k-1)$ súčtov (vyššie uvedený algoritmus má pre $p=1$ zbytočný súčet, čo je vyvážené jednoduchosťou pseudokódu). Pretože matica C má mn prvkov, potom algoritmus vyžaduje kmn súčinov a $(k-1)mn$ súčtov. Môžeme teda konštatovať, že zložitosť algoritmu rastie úmerne n^3 , pričom sa predpokladá, že dimenzie matíc sú si rovné, $k = m = n$. Je prekvapujúce, že už tak jednoduchý algoritmus ako tento môže byť akcelerovaný. V 60-tych rokoch minulého storočia bol navrhnutý algoritmus, ktorého zložitosť rastie $n^{\sqrt{7}}$, pretože $\sqrt{7} < 3$, tento nový algoritmus je o trochu efektívnejší ako náš algoritmus 8.1. Tento vylepšený algoritmus sa stáva efektívnejším ako klasický algoritmus 8.1 až pre dimenzie matíc rádovo tisíc.

OBRÁZOK 8.6. SÚČIN TROCH MATÍC PRE DVE RÔZNE ZÁTVORKOVANIA



Výpočet súčinu troch matíc pre dve rôzne zátvorkovania. V prvom prípade A je potrebných 64 súčinov, zatiaľ čo v druhom prípade B je potrebných 90 súčinov. To znamená, že na výpočet súčinu troch daných matíc musíme preferovať zátvorkovanie $(A_1A_2)A_3$, ktoré vyžaduje menej elementárnych súčinov než ako druhé zátvorkovanie $A_1(A_2A_3)$.

Problém násobenia reťazca matíc

NÁSOBENIE MATÍC
JE ASOCIATÍVNE,
ALE OD
ZÁTVORKOVANIA
ZÁVISÍ POČET
OPERÁCIÍ

Pretože násobenie matíc je asociatívna operácia, nezáleží na zátvorkovaní jednotlivých medzivýsledkov. Tak napríklad pre výpočet súčiny troch matíc $A_1 A_2 A_3$ existujú dva rôzne spôsoby zátvorkovania, avšak v dôsledku asociativity súčiny matíc musí platiť $(A_1 A_2) A_3 = A_1 (A_2 A_3)$. Preto by sme sa mohli domnievať, že z pohľadu algoritmickej tohto problému výpočtu súčiny reťazca matíc (ktorých dimenzie sú také, že ich súčin existuje) je irelevantný spôsob zátvorkovania. Žiaľ nie je to pravda, aj keď výsledná matica je invariantná vzhľadom k zátvorkovaniu, numerická náročnosť (napríklad celkový počet elementárnych súčinov maticových prvkov) výpočtu je už závislá od spôsobu zátvorkovania. Zvoľme tieto jednoduché typy matíc: $t(A_1) = (2, 3)$, $t(A_2) = (3, 4)$ a $t(A_3) = (4, 5)$. Výpočet súčinov týchto troch matíc je znázornený na obr. 8.6. Z tohto jednoduchého ilustračného príkladu vyplýva, že na výpočet súčiny reťazca matíc existuje optimálne zátvorkovanie medzivýsledkov, ktoré poskytuje minimálny počet elementárnych súčinov pre výpočet celého reťazca matíc.

AKO ZÁTVORKOVAŤ,
ABY POČET
SÚČINOV ČÍSEL
BOL MINIMÁLNY?

Uvažujme n matíc A_1, A_2, \dots, A_n , ktoré sú typu $t(A_i) = (p_i, q_i)$, pričom pre susedné matice A_i a A_{i+1} musia byť splnené podmienky, aby existoval ich súčin, $q_i = p_{i+1}$, kde typ súčiny týchto matíc je $t(A_i A_{i+1}) = (p_i, q_{i+1})$. Na výpočet maticového súčiny $A_i A_{i+1}$ je potrebných

$$m(A_i A_{i+1}) = p_i \times q_i \times q_{i+1} \quad (8.13)$$

elementárnych súčinov. Týmto sme dospeli k formulácii nasledujúceho problému: **Ako určiť zátvorkovanie súčiny n matíc $A_1 A_2 \dots A_n$ tak, aby počet elementárnych súčinov pri výpočte súčiny tohto reťazca matíc bol minimálny?**

V prvom kroku upriamime našu pozornosť na enumeračný problém určenia počtu rôznych zátvorkovaní reťazca matíc $A_1 A_2 \dots A_n$. Označme počet možných zátvorkovaní reťazca matíc $A_1 A_2 \dots A_n$ symbolom $P(n)$. Vytváranie zátvorkovania môžeme uskutočniť jednoduchým rekurentným spôsobom. Nech U_k je množina, ktorá obsahuje reťazce k matíc pre rôzne zátvorkovania, kde $k = 1, 2, \dots, n-1$. Potom množinu U_n vytvoríme tak, že pre všetky možné dvojice podmnožín U_{n-k} a U_k vytvoríme možné zátvorkovanie

$$U_n = \overbrace{U_1 U_{n-1}} \cup \overbrace{U_2 U_{n-2}} \cup \dots \cup \overbrace{U_{n-2} U_2} \cup \overbrace{U_{n-1} U_1} \quad (8.14)$$

Potom počet rôznych zátvorkovaní reťazca n matíc je

$$P(n) = \begin{cases} 1 & (\text{pre } n = 1) \\ \sum_{k=1}^{n-1} P(k) P(n-k) & (\text{pre } n \geq 2) \end{cases} \quad (8.15a)$$

Bolo ukázané, že počet zátvorkovaní je určený pomocou binomického koeficientu

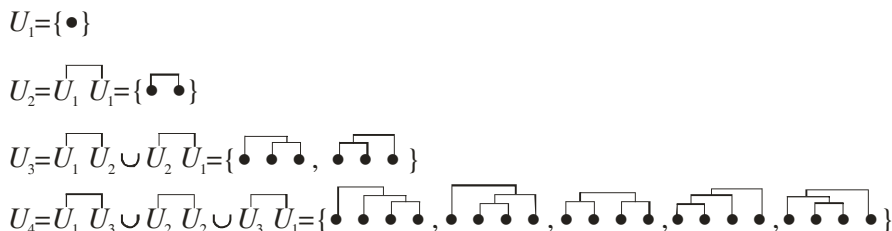
$$P(n) = \frac{1}{n} \binom{2(n-1)}{n-1} = \frac{(2n-2)!}{(n)!(n-1)!} \quad (8.15b)$$

Prvé hodnoty $P(n)$ sú

$$P(1) = 1, P(2) = 1, P(3) = 2, P(4) = 5, P(5) = 14, \dots$$

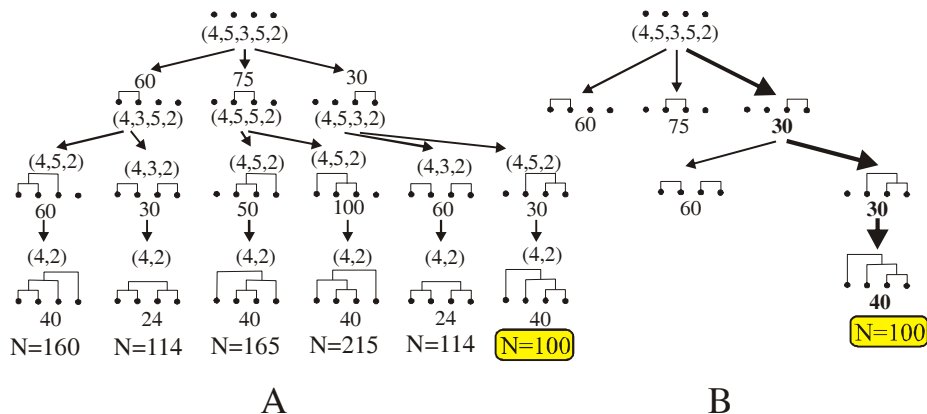
Na obrázku 8.7 je znázornený rekurentný postup konštrukcie množín U_1, U_2, U_3 a U_4 .

OBRAZOK 8.7.
REKURENTNÝ
POSTUP
KONŠTRUKCIE
ZÁTVORKOVANÍ
PRI NÁSOBENÍ
VIACERÝCH MATÍC



Rekurentný postup konštrukcie prvých štyroch množín U_1, U_2, U_3 a U_4 .

OBRAZOK 8.8.
ÚPLNÝ STROM
RIEŠENÍ
ZÁTVORKOVANIA
A POSTUP
„GREEDY“
ALGORITMU



(A) Ľavý obrázok vyjadruje metódu prehľadávania do hĺbky pre konštrukciu úplného stromu riešení. Vo vrchole tohto stromu je reťazec matíc $A_1A_2A_3A_4$ bez zátvorkovania. Na ďalšej úrovni si vždy zvolíme dvojicu susedných matíc A_iA_{i+1} pre ktoré vykonáme súčin (reprezentovaný spojku \sqcap), výsledný počet elementárnych súčinov je uvedený pod každým reťazcom matíc. Tento proces opakujeme tak dlho, až sú vykonané súčiny dvojíc matíc (v tomto prípade tri). Každá vetva stromu riešení nám špecifikuje jedno možné zátvorkovanie pôvodného reťazca matíc, jej výsledné ohodnotenie N je tvorené sumou počtu elementárnych súčinov na každej úrovni stromu. Zo stromu vyplýva, že optimálne zátvorkovanie je $(A_1(A_2(A_3A_4)))$, ktoré obsahuje minimálny počet elementárnych súčinov $N=100$. (B) Pravý obrázok vznikol ako výsek ľavého úplného stromu riešení a reprezentuje podstatu „greedy“ algoritmu, ktorá podstatne redukuje veľkosť stromu riešení. Na každej úrovni vyberieme lokálne minimálnu možnosť súčiny susedných matíc. Týmto spôsobom strom riešení má len jednu úplnú vetvu, ktorá reprezentuje výsledné riešenie „greedy“ algoritmu, v našom prípade celkové ohodnotenie tejto vetvy je $N=100$, čo je výsledok totožný s presným riešením z celkového stromu riešení.

HEURISTIKA
„GREEDY“

Konštrukciu optimálneho zátvorkovania budeme realizovať pomocou jednoduchšej heuristiky, ktorá sa nazýva „greedy“ algoritmus. Pre hľadanie optimálneho zátvorkovania spočíva jeho podstata v tom, že postupne v danej etape vyberieme také zátvorky, ktoré poskytujú minimálny výsledok, tento postup opakujeme tak

dlho, až zostrojíme kompletne zátvorkovanie celého reťazca $A_1 A_2 \dots A_n$. Tento postup budeme ilustrovať pomocou reťazca súčinu štyroch matíc $A_1 A_2 A_3 A_4$, ktorých typy nech sú špecifikované takto

$$t(A_1) = (4,5), t(A_2) = (5,3), t(A_3) = (3,5), t(A_4) = (5,2)$$

Pre tieto matice vytvoríme postupnosť dimenzií matíc (predpokladáme, že podmienky $q_i = p_{i+1}$ pre existenciu súčinu matíc $A_i A_{i+1}$ sú splnené) $(4,5,3,5,2)$, ktorá sa v priebehu algoritmu využíva na výpočet aktuálneho počtu elementárnych súčinov, pozri obr. 8.8. V texte, ktorý sprevádza tento obrázok, sú špecifikované aj základné myšlienky „greedy“ algoritmu. Z uvedeného ilustračného príkladu vyplýva, že aj napriek jednoduchosti tohto algoritmu je v tomto prípade výsledok totožný s optimálnym výsledkom, čo ale v podobných prípadoch nemusí platiť.

EFEKTÍVNOSŤ
„GREEDY“
HEURISTIKY

Na záver tejto podkapitoly poznamenajme, že heuristika „greedy“ je veľmi efektívna, v mnohých prípadoch nám umožňuje jednoducho a rýchlo získať riešenie, ktoré nie je vzdialené od optimálneho riešenia. Možno konštatovať, že patrí medzi najefektívnejšie heuristiky, ako približne riešiť zložité kombinatorické problémy.

Binárne matice

Matica A , ktorá obsahuje len binárne prvky 0-1 sa nazýva binárna matica. Algebraické operácie nad takýmito maticami sú založené na logických spojkách konjunkcie a disjunkcie

$$a \wedge b = \begin{cases} 1 & (\text{ak } a = b = 1) \\ 0 & (\text{ináč}) \end{cases} \quad (8.16a)$$

$$a \vee b = \begin{cases} 1 & (\text{ak } a = 1 \text{ alebo } b = 1) \\ 0 & (\text{ináč}) \end{cases} \quad (8.16b)$$

Nad binárnymi maticami definujeme tri binárne operácie:

KONJUNKCIA

(1) Nech $A = (A_{ij})$ a $B = (B_{ij})$ sú binárne matice rovnakého typu $t(A) = t(B) = (m,n)$, potom matica $C = (C_{ij})$ sa nazýva **konjunkcia matíc A a B**, $C = A \wedge B$, jej maticové prvky sú

$$\forall (i \in I) \forall (j \in J) (C_{ij} = A_{ij} \wedge B_{ij}) \quad (8.17)$$

DISJUNKCIA

(2) Nech $A = (A_{ij})$ a $B = (B_{ij})$ sú binárne matice rovnakého typu $t(A) = t(B) = (m,n)$, potom matica $C = (C_{ij})$ sa nazýva **disjunkcia matíc A a B**, $C = A \vee B$, jej maticové prvky sú

$$\forall (i \in I) \forall (j \in J) (C_{ij} = A_{ij} \vee B_{ij}) \quad (8.18)$$

SÚČIN BINÁRNYCH
MATÍC

(3) Nech binárna matica $A = (A_{ij})$ je typu $t(A) = (m,k)$, binárna matica $B = (B_{ij})$ je typu $t(B) = (k,n)$ a binárna matica $C = (C_{ij})$ je typu $t(C) = (m,n)$. Hovoríme, že matica C je **súčinom** matíc A a B , $C = A \otimes B$, jej maticové prvky sú

$$\forall (i \in I) \forall (j \in J) (C_{ij} = (A_{i1} \wedge B_{1j}) \vee (A_{i2} \wedge B_{2j}) \vee \dots \vee (A_{ik} \wedge B_{kj})) \quad (8.19)$$

MOCNINA
ŠTVORCOVEJ
BINÁRNEJ MATICE

Pretože súčin binárnych matíc je asociatívna operácia, môžeme definovať r -tú mocninu štvorcovej binárnej matice $A = (A_{ij})$, kde r je kladné celé číslo $r > 1$

$$A^r = \underbrace{A \otimes A \otimes \dots \otimes A}_{r\text{-krát}} \quad (8.20)$$

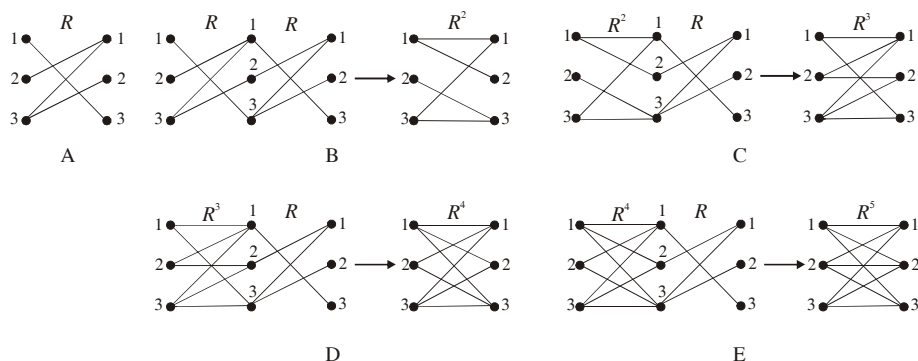
MOCNINA AKO
KOMPOZÍCIA
RELÁCIÍ

Ako interpretovať operácie nad binárnymi maticami? Binárna matica môže byť chápaná ako maticová reprezentácia binárnej relácie $R \subseteq X \times X$, kde $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. Prvok $A_{ij} \neq 0$ implikuje, že usporiadaná dvojica $(x_i, x_j) \in R$ (pozri kapitolu 3.1). Jednoduchými úvahami je možné dokázať, že matica $A^2 = A \otimes A$ je reprezentáciou kompozície $R^2 = R \circ R$. Formulu (8.19) prepíšeme do tvaru

$$\forall (i \in I) \forall (j \in J) \left(C_{ij} = \max \min \{A_{ik}, B_{kj}\} \right) \quad (8.21)$$

kde sme použili formuly $a \wedge b = \min\{a, b\}$ a $a \vee b = \max\{a, b\}$ (pozri kapitolu 11 v učebnom texte *Matematická logika* [11]). Ak porovnáme (8.21) s definíciou kompozície dvoch binárnych relácií (3.8), dospejeme k záveru, že definícia súčnu binárnej matice (8.19) je formálne totožná s kompozíciou $R^2 = R \circ R$. Pomocou grafovej interpretácie relácie R a jej mocnín (pozri obr. 8.9) môžeme potom alternatívne interpretovať n -té mocniny matice A tak, že ak má jednotkový prvok v pozícii (i, j) , potom existuje postupnosť n hrán z i -tého vrcholu grafu do j -tého vrcholu grafu.

OBRÁZOK 8.9.
MOCNINY RELÁCIE
 R



Grafová reprezentácia relácie R (diagram A) a jej mocnín R^2 (diagram B), R^3 (diagram C), R^4 (diagram D) a R^5 (diagram E). Diagramy B – E obsahujú aj rekurentnú tvorbu relácií R^n z predchádzajúceho výsledku R^{n-1} .

PRÍKLAD 8.3.

Nech A a B sú binárne matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Zostrojte súčin $A \otimes B$.

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \otimes \mathbf{B} &= \begin{pmatrix} (1 \wedge 1) \vee (0 \wedge 0) & (1 \wedge 1) \vee (0 \wedge 1) & (1 \wedge 0) \vee (0 \wedge 1) \\ (0 \wedge 1) \vee (1 \wedge 0) & (0 \wedge 1) \vee (1 \wedge 1) & (0 \wedge 0) \vee (1 \wedge 1) \\ (1 \wedge 1) \vee (0 \wedge 0) & (1 \wedge 1) \vee (0 \wedge 1) & (1 \wedge 0) \vee (0 \wedge 1) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \vee 0 & 1 \vee 0 & 0 \vee 0 \\ 0 \vee 0 & 0 \vee 1 & 0 \vee 1 \\ 1 \vee 0 & 1 \vee 0 & 0 \vee 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

PRÍKLAD 8.4. Zostrojte všetky mocniny matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

V prvom kroku spočítame \mathbf{A}^2

$$\mathbf{A}^2 = \mathbf{A} \otimes \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Postupne v ďalších krokoch spočítame vyššie mocniny matice

$$\mathbf{A}^3 = \mathbf{A}^2 \otimes \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}^4 = \mathbf{A}^3 \otimes \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}^5 = \mathbf{A}^4 \otimes \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Poznamenajme, že tieto mocniny matice \mathbf{A} môžeme jednoducho určiť pomocou grafovej interpretácie relácie R , pozri obr. 8.9. Potom vyššie mocniny matice \mathbf{A} sú určené

$$\forall (n \geq 5) \left(\mathbf{A}^n = \mathbf{A}^5 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

8.3 HODNOSŤ MATICE

Hodnosť matice \mathbf{A} je celé kladné číslo označené $h(\mathbf{A})$, ktoré patrí medzi dôležité charakteristiky matíc. Než pristúpime k definícii tejto veličiny, zavedieme ďalší dôležitý pojem lineárnej závislosti/nezávislosti stĺpcových (riadkových) vektorov. Pre jednoduchosť budeme tieto úvahy uskutočňovať pre stĺpcové vektory, automaticky budú platiť aj pre riadkové vektory, a naopak.

DEFINÍCIA 8.3.
LINEÁRNE ZÁVISLÉ
VEKTORY

Nech $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ je n stĺpcových (riadkových) vektorov z \mathbb{R}^p (t. j. vektory majú p prvkov). Hovoríme, že tieto vektory sú *lineárne závislé* vtedy a len vtedy, ak existujú také koeficienty (čísla) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, z ktorých je aspoň jeden nenulový,



aby ich lineárna kombinácia bola rovná nulovému vektoru $\mathbf{0}$

$$\alpha_1 \mathbf{a}_1 + \alpha_2 \mathbf{a}_2 + \dots + \alpha_n \mathbf{a}_n = \mathbf{0} \quad (8.22)$$

VETA 8.1.

Stĺpcové (riadkové) vektory $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ sú lineárne závislé práve vtedy, ak jeden z nich môžeme vyjadriť ako lineárnu kombináciu ostatných vektorov, napr.

$$\mathbf{a}_1 = \beta_2 \mathbf{a}_2 + \dots + \beta_n \mathbf{a}_n \quad (8.23)$$

Dôkaz tejto vety je veľmi jednoduchý. Na základe definície 8.3 z predpokladu lineárnej závislosti vektorov $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ vyplýva, že aspoň jeden koeficient je nenulový. Predpokladajme, že $\alpha_1 \neq 0$, potom (8.22) môžeme upraviť do tvaru

$$\mathbf{a}_1 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \mathbf{a}_2 - \dots - \frac{\alpha_n}{\alpha_1} \mathbf{a}_n$$

Týmto sme dokázali, že z predpokladu $\alpha_1 \neq 0$ vyplýva (8.23), čím je dôkaz zavŕšený.

VETA 8.2.

Stĺpcové (riadkové) vektory $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ sú *lineárne nezávislé* vtedy a len vtedy, ak

$$\alpha_1 \mathbf{a}_1 + \alpha_2 \mathbf{a}_2 + \dots + \alpha_n \mathbf{a}_n = \mathbf{0} \quad (8.24)$$

len pre nulové koeficienty, $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$.

Táto veta je jednoduchým dôsledkom definície 8.3.

PRÍKLAD 8.5.

Majme trojicu stĺpcových vektorov

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ľahko dokážeme, že tieto vektory sú lineárne nezávislé. Uvažujme podmienku (8.24) z vety 8.2.

$$\alpha_1 \mathbf{a}_1 + \alpha_2 \mathbf{a}_2 + \alpha_3 \mathbf{a}_3 = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Porovnaním posledných vektorov dostaneme, že $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$. To znamená, že táto lineárna kombinácia sa rovná nulovému stĺpcovému vektoru len pre nulové koeficienty, potom podľa vety 8.2 vektory sú lineárne nezávislé.

DEFINÍCIA 8.4.

HODNOSŤ

Hovoríme, že matica A má *stĺpcovú (riadkovú) hodnotu* rovnú k vtedy a len vtedy, ak má maximálne k lineárne nezávislých stĺpcových (riadkových) vektorov.

$$h_{s(r)}(A) = k \quad (8.25)$$

VETA 8.3.

Pre každú maticu A typu $t(A) = (m, n)$ riadková a stĺpcová hodnota sú rovnaké, pričom hodnota je zdola ohraničená 0 (pre nulové matice) a zhora ohraničená minimálnou hodnotou m a n

$$0 \leq h_s(A) = h_r(A) = h(A) \leq \min\{m, n\} \quad (8.26)$$

PRÍKLAD 8.6.

Majme maticu

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Riadkové vektory tejto matice majú tvar

$$r_1 = (1 \ 1 \ 1), r_2 = (0 \ 1 \ 1), r_3 = (0 \ 0 \ 1)$$

Študujme lineárnu kombináciu

$$\alpha_1(1 \ 1 \ 1) + \alpha_2(0 \ 1 \ 1) + \alpha_3(0 \ 0 \ 1) = (0 \ 0 \ 0)$$

Koefficienty sú určené rovnicami

$$\alpha_1 = 0$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 0$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0$$

Postupným riešením tohto systému dostaneme riešenie $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$. To znamená, že riadkové vektory sú lineárne nezávislé, maximálny počet lineárne nezávislých vektorov je 3, t. j. riadková hodnosť matice je 3.

Stĺpcové vektory matice A sú

$$s_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, s_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, s_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ich lineárna kombinácia sa rovná nulovému stĺpcovému vektoru

$$\beta_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Koefficienty sú určené rovnicami


$$\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = 0$$

$$\beta_2 + \beta_3 = 0$$

$$\beta_3 = 0$$

Riešením tohto systému dostaneme $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0$. To znamená, že stĺpcové vektory sú lineárne nezávislé, čiže matica má stĺpcovú hodnosť 3.

Týmto sme dokázali, že matica A má stĺpcovú a riadkovú hodnosť 3, čiže hodnosť matice je 3, $h(A) = 3$.

DEFINÍCIA 8.5.
EKVIVALENTNÉ
MATICE 

Hovoríme, že matice A a B sú *ekvivalentné*, $A \sim B$, vtedy a len vtedy, ak majú rovnakú hodnosť, $h(A) = h(B)$.

VETA 8.4.



Nech matica \mathbf{B} vznikne z matice \mathbf{A} pomocou jednej z týchto 4 operácií:

- (1) vzájomnou výmenou poradia dvoch riadkov (stĺpcov),
- (2) vynásobením riadku (stĺpca) nenulovým číslom,
- (3) pripočítaním riadku (stĺpca) k inému riadku (stĺpcu),
- (4) vynechaním riadku (stĺpca), ktorý buď obsahuje len nulové prvky alebo je lineárnou kombináciou ostatných riadkov (stĺpcov).

Potom matice \mathbf{A} a \mathbf{B} sú ekvivalentné, $h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{B})$.

Jednotlivé kroky z tejto vety budeme ilustrovať pomocou matice $\mathbf{A} = (s_1, s_2, \dots, s_n)$, kde s_i je i -tý stĺpcový vektor:

- (1) Výmena poradia dvoch stĺpcov

$$\mathbf{A} = (s_1, \dots, s_i, \dots, s_j, \dots, s_n) \rightarrow \mathbf{B} = (s_1, \dots, s_j, \dots, s_i, \dots, s_n)$$

- (2) Stĺpec je vynásobený číslom $\alpha \neq 0$

$$\mathbf{A} = (s_1, \dots, s_i, \dots, s_n) \rightarrow \mathbf{B} = (s_1, \dots, \alpha s_i, \dots, s_n)$$

- (3) Vynechaním stĺpca, ktorý je buď lineárnou kombináciou ostatných stĺpcov alebo je nulový

$$\mathbf{A} = (s_1, \dots, s_{i-1}, s_i, s_{i+1}, \dots, s_n) \rightarrow \mathbf{B} = (s_1, \dots, s_{i-1}, s_{i+1}, \dots, s_n)$$

- (4) K stĺpcu pripočítame iný stĺpec

$$\mathbf{A} = (s_1, \dots, s_i, \dots, s_j, \dots, s_n) \rightarrow \mathbf{B} = (s_1, \dots, s_i, \dots, s_j + s_i, \dots, s_n)$$

Podobné znázornenie elementárnych operácií môže byť vykonané aj pre riadkové vektory matice \mathbf{A} .

Dôkaz vety 8.4 vyplýva priamo zo skutočnosti, že 4 povolené operácie nad riadkami alebo stĺpcami matice nemenia jej hodnotu, t. j. zachovávajú počet lineárne nezávislých riadkových a aj stĺpcových vektorov.

VETA 8.5.



Trojuholníková matica \mathbf{A} typu $t(\mathbf{A}) = (m, n)$, kde $m \leq n$, má hodnotu

$$h(\mathbf{A}) = m \tag{8.27}$$

Pri dôkaze tejto vety pre jednoduchosť predpokladajme, že trojuholníková matica \mathbf{A} má rovnaký počet riadkov a stĺpcov, $m = n$. Vyjadríme ju pomocou riadkových vektorov

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{r}_1 \\ \mathbf{r}_2 \\ \dots \\ \mathbf{r}_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1m} \\ 0 & A_{22} & \dots & A_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & A_{mm} \end{pmatrix}$$

Pripomeňme, že jej diagonálne prvky $A_{ii} \neq 0$. Študujme lineárnu kombináciu jej riadkových vektorov, ktorú položíme rovnú riadkovému nulovému vektoru $\mathbf{0}$

$$\alpha_1 \mathbf{r}_1 + \alpha_2 \mathbf{r}_2 + \dots + \alpha_m \mathbf{r}_m = \mathbf{0}$$

Koeficienty sú určené systémom rovníc

$$\begin{aligned}\alpha_1 A_{11} &= 0 \\ \alpha_1 A_{12} + \alpha_2 A_{22} &= 0 \\ &\dots\dots\dots \\ \alpha_1 A_{1m} + \alpha_2 A_{2m} + \dots + \alpha_m A_{mm} &= 0\end{aligned}$$

Pretože, ako už bolo poznamenané, diagonálne prvky trojuholníkovej matice sú nenulové, $A_{ii} \neq 0$, systém môžeme postupne riešiť, dostaneme

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_m = 0$$

Týmto sme dokázali, že riadky trojuholníkovej matice sú lineárne nezávislé, čiže platí $h(A) = m$.

STANOVENIE HODNOSTI MATICE

Veta 8.5 v kombinácii s vetou 8.4 umožňuje implementáciu efektívneho algoritmu pre stanovenie hodnoty matice. Pre danú maticu A budeme pomocou vety 8.4 vykonávať také elementárne transformácie (ktoré nemenia jej hodnotu), aby výsledná matica bola trojuholníková, potom pomocou vety 8.5 hodnota výslednej matice sa rovná počtu riadkov.

PRÍKLAD 8.7.

Nech matica A má tvar

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. krok. Vykonáme také elementárne transformácie, ktoré budú viesť k zániku nenulového prvku 2 v prvom stĺpci pod diagonálou. Tretí riadok vynásobíme číslom -1 a potom k tomuto riadku pripočítame prvý riadok

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ \textcircled{2} & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2. krok. Vykonáme vynulovanie prvkov pod diagonálou v druhom stĺpci. Štvrtý riadok vynásobíme číslom -1 a potom k tretiemu a k štvrtému riadku pripočítame druhý riadok

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3. krok. V tomto poslednom kroku vynecháme štvrtý riadok, ktorý obsahuje len nulové prvky

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$


Postupnými elementárnymi úpravami sme pretransformovali pôvodnú maticu A na trojuholníkovú maticu, ktorá obsahuje tri riadky, potom

$$h(A)=3$$

Pri týchto úpravách treba dať pozor na prípad, kedy by sme dostali maticu, ktorá má pod diagonálou nuly a na diagonále tiež nulu, ale v tom istom riadku má ešte nenulové prvky, potom treba prehodiť stĺpce, aby na diagonále bol nenulový prvok.


8.4 INVERZNÁ MATICA

Nech A je štvorcová matica typu $t(A) = (n, n)$, existencia takej matice B , pre ktorú platí $AB = BA = E$, kde E je jednotková matica typu $t(A) = (n, n)$, nie je zaručená pre ľubovoľnú štvorcovú maticu, ale len pre určité špeciálne matice, ktoré nazývame regulárne matice.

DEFINÍCIA 8.6.
REGULÁRNA
MATICA 


Štvorcová matica A , typu $t(A) = (n, n)$, sa nazýva **regulárna** vtedy a len vtedy, keď pre jej hodnotu platí $h(A) = n$.

Z definície regulárnej matice plynie, že tak stĺpcové ako aj riadkové vektory sú lineárne nezávislé. Môžeme teda parafrázovať definíciu regulárnej matice takto: štvorcová matica A je regulárna vtedy a len vtedy, ak jej riadkové (stĺpcové) vektory sú lineárne nezávislé. Tento pohľad na regulárnosť matice A nám bude nápomocný, keď budeme hľadať pomocou determinantov (pozri 9. kapitolu) algebraické kritérium regulárnosti.

DEFINÍCIA 8.7.
INVERZNÁ MATICA 

Matica A^{-1} sa nazýva **inverznou maticou** vzhľadom k regulárnej matici A vtedy a len vtedy, ak spĺňa podmienku $AA^{-1} = A^{-1}A = E$.

Definícia inverznej matice v mnohom pripomína definíciu 3.16 inverznej funkcie, kde sa požaduje, aby funkcia bola bijektívna. Možno konštatovať, že analógiu k tejto podmienke v teórii matíc je podmienka regulárnosti.

VETA 8.6. 

Pre regulárnu maticu A existuje práve jedna inverzná matica A^{-1} .

Tento dôkaz jednoznačnosti inverznej matice vykonáme nepriamo. Budeme predpokladať, že vzhľadom k regulárnej matici A existujú dve rôzne inverzné matice označené B a C

$$AB = BA = E \quad (\spadesuit)$$

$$AC = CA = E \quad (\clubsuit)$$

Zo vzťahu (\clubsuit) vyberieme $BA = E$, ktorý vynásobíme sprava maticou C , dostaneme

$$BA = E \Rightarrow \underbrace{BAC}_E = \underbrace{EC}_C \Rightarrow \underbrace{BE}_B = C \Rightarrow B = C$$

VETA 8.7.



Inverzná matica vyhovuje vzťahom

$$(A^{-1})^{-1} = A \quad (8.28a)$$

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} \quad (8.28b)$$

Vzťah (8.28a) vyplýva priamo z definičnej podmienky $AA^{-1} = A^{-1}A = E$, ktorú môžeme interpretovať tak, že matica A je inverznou maticou k matici A^{-1} , t. j. musí platiť $(A^{-1})^{-1} = A$.

Vzťah (8.28b) dokážeme pomocou vzťahu $(B^{-1}A^{-1}) \cdot AB = E$. Počítajme: $(B^{-1}A^{-1}) \cdot AB = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}EB = (B^{-1}E)B = B^{-1}B = E$. Týmto sme dokázali, že súčin $B^{-1}A^{-1}$ dáva výsledky, aké by dávala matica $(AB)^{-1}$. Pretože podľa vety 8.6 inverzná matica existuje jednoznačne, tak potom relácia (8.28b) určuje inverznú maticu jednoznačne.

KONŠTRUKCIA
INVERZNEJ MATICE

Zostávajúcu časť tejto kapitoly venujeme metóde konštrukcie inverznej matice, ktorá je veľmi podobná metóde stanovenia hodností matice. Budeme študovať dvojicu matíc $(A|E)$, nad maticami tejto dvojice budeme vykonávať postupnosť elementárnych operácií z vety 8.4 tak, že vybraná elementárna operácia je súčasne aplikovaná na obe matice, pričom sa snažíme používať také elementárne operácie, ktoré transformujú ľavú maticu A na jednotkovú maticu E . Každá elementárna transformácia aplikovaná na nejakú maticu X je vyjadriteľná pomocou súčinu matíc BX , formálne

$$X \xrightarrow{\text{ele.transf.}} X' = BX$$

Keď dvojicu $(A|E)$ transformujeme postupnosťou n elementárnych transformácií určených maticami B_1, B_2, \dots, B_n , dostaneme

$$(A|E) \rightarrow (B_n \dots B_2 B_1 A | B_n \dots B_2 B_1 E)$$

Ako už bolo povedané, tieto elementárne transformácie sú vykonané s cieľom transformácie matice A na jednotkovú maticu

$$\underbrace{B_n \dots B_2 B_1}_A A = E \Rightarrow A^{-1} = B_n \dots B_2 B_1$$

Potom dostaneme

$$(A|E) \rightarrow \left(\underbrace{B_n \dots B_2 B_1 A}_E \mid \underbrace{B_n \dots B_2 B_1 E}_{A^{-1}} \right) \rightarrow (E|A^{-1})$$

Postupnosť elementárnych transformácií rozdelíme na tri etapy:

1. etapa – nulovanie maticových prvkov pod diagonálou (podobne ako v metóde stanovenia hodnoty matice),
2. etapa – nulovanie maticových prvkov nad diagonálou,
3. etapa – násobenie riadkov číslami tak, aby na diagonále zostali len jednotkové prvky.

V prípade, že táto postupnosť nie je vykonateľná (napr. dostaneme nulový riadok), procedúru transformácie ukončíme, pretože matice nie je regulárna (teda ani invertibilná). Naznačený spôsob konštrukcie inverznej matice môže byť použitý ako konštruktívny dôkaz vety 8.6, bez diskusie podmienky jednoznačnosti inverznej matice.

PRÍKLAD 8.8.

Nájdite inverznú maticu k matici

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Zostrojíme dvojicu matíc

$$X_0 = \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

V prvej etape vykonáme takú elementárnu operáciu, ktorá nuluje prvok pod diagonálou, vykonáme elementárnu operáciu ep_1 , že druhý riadok vynásobíme -2 a k takto upravenému druhému riadku pripočítame prvý riadok

$$ep_1 : r_2 = -2r_2 + r_1$$

Dvojica X_0 sa pretransformuje na X_1

$$X_1 = \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & -2 \end{array} \right)$$

V druhej etape budeme nulovať prvky nad diagonálou, vykonáme elementárnu operáciu ep_2 , že k prvému riadku pripočítame druhý riadok

$$ep_2 : r_1 = r_1 + r_2$$

Dvojica X_1 sa pretransformuje na X_2

$$X_2 = \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & -4 & 1 & -2 \end{array} \right)$$

V tretej etape prvý riadok vynásobíme $1/2$ a druhý riadok vynásobíme $-1/4$, dostaneme finálnu dvojicu

$$X_3 = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1/4 & 1/2 \end{array} \right)$$

$\underbrace{\hspace{1.5cm}}_E$
 $\underbrace{\hspace{1.5cm}}_{A^{-1}}$

Potom inverzná matice má tvar

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1/4 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Lahko sa presvedčíme, že táto matica je inverzná

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1/4 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

$$A^{-1}A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1/4 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

ZHRNUTIE

DEFINÍCIA MATICE Nech $I = \{1, 2, \dots, m\}$ je množina riadkových indexov a $J = \{1, 2, \dots, n\}$ je množina stĺpcových indexov, pričom m a n sú kladné celé čísla, $m, n \geq 1$. **Maticou** nazývame množinu obsahujúcu $m \cdot n$ čísel (celočíselných, racionálnych alebo reálnych), ktoré sú špecifikované riadkovým (i) a stĺpcovým (j) indexom

$$A = \{A_{ij} ; i \in I, j \in J\}$$

Typ matice je usporiadaná dvojica kladných prirodzených čísel, ktoré sú rovné mohutnostiam množín indexov I a J , $t(A) = (m, n)$. Matice A môže byť jednoducho znázornená pomocou tabuľky, ktorá obsahuje m riadkov a n stĺpcov, pričom na priesečníku i -tého riadku a j -tého stĺpca je umiestnený element A_{ij} .

MATICOVÁ
ALGEBRA

Pre matice definujeme tieto základné algebraické operácie

(1) Nech matice $A = (A_{ij})$ a $B = (B_{ij})$ sú rovnakého typu, $t(A) = t(B) = (m, n)$. Hovoríme, že tieto **matice sa rovnajú**, $A = B$, ak

$$\forall (i \in I) \forall (j \in J) (A_{ij} = B_{ij})$$

(2) Nech matice $A = (A_{ij})$ a $B = (B_{ij})$ sú rovnakého typu, $t(A) = t(B) = (m, n)$. Hovoríme, že matica B je **α -násobkom matice A** , $B = \alpha A$, ak

$$\forall (i \in I) \forall (j \in J) (B_{ij} = \alpha A_{ij})$$

(3) Nech matice $A = (A_{ij})$, $B = (B_{ij})$ a $C = (C_{ij})$ sú rovnakého typu, $t(A) = t(B) = t(C) = (m, n)$. Hovoríme, že matica C je **súčtom matíc A a B** , $C = A + B$, ak

$$\forall (i \in I) \forall (j \in J) (C_{ij} = A_{ij} + B_{ij})$$

(4) Matica $A = (A_{ij})$ je typu $t(A) = (m, k)$, matica $B = (B_{ij})$ je typu $t(B) = (k, n)$ a matica $C = (C_{ij})$ je typu $t(C) = (m, n)$. Hovoríme, že matica C je **súčinom matíc A a B** , $C = AB$, ak

$$\forall (i \in I) \forall (j \in J) \left(C_{ij} = \sum_{p=1}^k A_{ip} B_{pj} = A_{i1} B_{1j} + A_{i2} B_{2j} + \dots + A_{ik} B_{kj} \right)$$

Pre takto definované algebraické operácie platí algebra matíc, podľa ktorej súčin matíc je nekomutatívna a asociatívna operácia, zatiaľ čo súčet matíc je komuta-

tívna a asociatívna operácia. Súčin matíc je distributívna operácia vzhľadom na súčet matíc, a operácia násobenia matice číslom je asociatívna vzhľadom na operáciu súčinu matíc.

HODNOSŤ MATICE Matica A má **stĺpcovú (riadkovú) hodnotu** rovnú k vtedy a len vtedy, ak má maximálne k lineárne nezávislých stĺpcových (riadkových) vektorov, $h_{s(r)}(A) = k$.

Pre každú maticu A typu $t(A) = (m, n)$ riadková a stĺpcová hodnota sú rovnaké, pričom hodnota je zdola ohraničená 0 (pre nulové matice) a zhora ohraničená minimálnou hodnotou m a n , $0 \leq h_s(A) = h_r(A) = h(A) \leq \min\{m, n\}$.

Trojuholníková matica A typu $t(A) = (m, n)$, pričom $m \leq n$, má hodnotu $h(A) = m$. Táto jednoduchá veta nám umožňuje zostrojiť jednoduchý algoritmus pre zistenie hodnoty matice, ktorý je založený na postupnom nulovaní elementov ležiacich pod hlavnou diagonálou.

INVERZNÁ MATICA Nech A je regulárna matica. Matica B sa nazýva **inverzná matica** (vzhľadom k matici A) vtedy a len vtedy, ak spĺňa podmienku $AB = BA = E$, túto maticu značíme A^{-1} .

Inverzná matica A^{-1} môže byť zostrojená z pôvodnej matice A pomocou jednoduchšej metódy, ktorá pripomína stanovenie hodnoty matice. V prvej etape nulujeme elementy pod hlavnou diagonálou a v druhej etape nulujeme elementy nad hlavnou diagonálou. Cieľom tejto transformácie je prepísať maticu A na jednotkovú maticu. Novým rysom algoritmu je, že sa súčasne vykonáva aj nad maticou, ktorá pôvodne bola jednotková, postupnosťou operácií je táto matica pretransformovaná na inverznú maticu.

KLÚČOVÉ POJMY

definícia matice

špeciálne matice

maticová algebra

hodnota matice

inverzná matica

typ matice

štvorcová a obdĺžniková matica

hlavná diagonála

nulová matica

diagonálna matica

jednotková matica E

transponovaná matica

symetrická matica

trojuholníková matica

riadkový vektor

stĺpcový vektor

rovnosť matíc

α -násobok matice

súčet matíc

súčin matíc

zátvorkovanie súčinu matíc

„greedy“ algoritmus

konjunkcia, disjunkcia, súčin binárnych matíc

mocniny relácie R

lineárne závislé vektory

lineárna kombinácia vektorov

stĺpcová (riadková) hodnota

ekvivalentné matice

regulárna matica

konštrukcia inverznej matice

CVIČENIA

8.1. Stanovte typ matice a jej názov

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$,

(b) $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$,

(c) $(1 \ 2 \ 1 \ -1)$,

(d) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

8.2. Nájdite hodnoty a, b, c a d tak, aby platilo

$$\begin{pmatrix} 3a & -b \\ c & 2d+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

8.3. Rozhodnite o pravdivosti týchto tvrdení:

(a) $\{\mathbf{A}; \mathbf{A} \text{ je jednotková matica}\} \subset \{\mathbf{A}; \mathbf{A} \text{ je symetrická matica}\}$,

(b) $\{\mathbf{A}; \mathbf{A} \text{ je symetrická matica}\} \subset \{\mathbf{A}; \mathbf{A} \text{ je diagonálna matica}\}$,

(c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \{\mathbf{A}; \mathbf{A} \text{ je jednotková matica}\}$,

(d) $\{\mathbf{A}; \mathbf{A} \text{ je štvorcová matica}\} \subset \{\mathbf{A}; \mathbf{A} \text{ je diagonálna matica}\}$,

(e) $\{\mathbf{A}; \mathbf{A} \text{ je jednotková matica}\} \subset \{\mathbf{A}; \mathbf{A} \text{ je diagonálna matica}\}$.

8.4. (a) Zostrojte matice $\mathbf{A} = (A_{ij})$, $\mathbf{B} = (B_{ij})$ a $\mathbf{C} = (C_{ij})$, typu $(3,2)$, pre ktoré platí

$$A_{ij} = i - j, \quad B_{ij} = i - 2j, \quad C_{ij} = 4i + 3j.$$

(b) Zostrojte maticu $\mathbf{A} = (A_{ij})$ typu $(4,4)$, ktorá je symetrická a má tieto vlastnosti:

$$A_{ii} = i^2, \quad A_{13} = A_{24} = 0, \quad A_{14} = 3, \quad A_{12} = A_{23} = A_{11} + A_{22}, \quad A_{34} = A_{23} - A_{14}.$$

(c) Zostrojte maticu, ktorá je súčasne riadkovým a stĺpcovým vektorom.

(d) Nájdite x a y pre maticu

$$\mathbf{A} = (A_{ij}) = \begin{pmatrix} x+y & 10 \\ 2x-y & 4 \end{pmatrix}$$

$$\text{pre } A_{11} = A_{22} \text{ a } A_{12} = A_{21}/2.$$

8.5. Zostrojte transponované matice k maticiam

$$(a) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, (b) (-1 \ 1 \ 2), (c) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, (d) \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

8.6. Pre matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

vypočítajte matice (ak existujú)

- (a) $2\mathbf{A}$,
- (b) $\mathbf{A} + \mathbf{B}$,
- (c) $\mathbf{A} + \mathbf{C}$,
- (d) \mathbf{AC} ,
- (e) \mathbf{CB} ,
- (f) $\mathbf{C}^T \mathbf{B}$.

8.7. Pre maticu $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ riešte rovnicu

$$2\mathbf{X} + \mathbf{B} = \mathbf{E}$$

kde \mathbf{X} je matica typu (2,2) a \mathbf{E} je jednotková matica typu (2,2).

8.8. Pre riadkové vektory \mathbf{u} a \mathbf{v} spočítajte \mathbf{uv}^T (ak existuje) pre

- (a) $\mathbf{u} = (1 \ 2 \ 0 \ -1)$, $\mathbf{v} = (0 \ -2 \ 0 \ 2)$,
- (b) $\mathbf{u} = (1 \ 2 \ 1)$, $\mathbf{v} = (-1 \ 1 \ 2)$,
- (c) $\mathbf{u} = (1 \ 0 \ -1)$, $\mathbf{v} = (-1 \ 1 \ 2)$.

8.9. Dokážte, že pre $\mathbf{u} = (u_1 \ u_2 \ \dots \ u_n)$ platí $\mathbf{uu}^T \geq 0$, pričom rovnosť platí len pre nulový vektor.

8.10. Pre každú dvojicu matíc \mathbf{A} a \mathbf{B} určite ich typ a či súčin matíc existuje, ak existuje, tak ho vypočítajte.

$$(a) \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$(b) \mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$(c) \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & -5 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 1 \\ 3 & -3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

8.11. Nech $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ a $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, vypočítajte

- (a) $\mathbf{A} + 2\mathbf{B}$,
- (b) $3\mathbf{A} - 6\mathbf{B}$,
- (c) \mathbf{AB} ,
- (d) \mathbf{A}^2 ,
- (e) \mathbf{BA} ,
- (f) $\mathbf{B}(\mathbf{AB})$,
- (g) $(\mathbf{AB})\mathbf{A}$,
- (h) $\mathbf{A}(\mathbf{A}-\mathbf{B})$,
- (i) $\mathbf{A}^T\mathbf{B}$,
- (j) $(\mathbf{AB})^T$.

8.12. Nech $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ a $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ sú diagonálne matice, vypočítajte

\mathbf{AB} , \mathbf{BA} , \mathbf{A}^2 a \mathbf{B}^2 .

8.13. Nájdite greedy algoritmom také zátvorkovanie produktu týchto matíc, aby sa vykonal čo možno najmenší počet elementárnych súčinov (greedy algoritmus nezaisťuje globálne minimum).

- (a) Nech matice majú typ $t(\mathbf{A}_1) = (4,5)$, $t(\mathbf{A}_2) = (5,8)$, $t(\mathbf{A}_3) = (8,3)$ a $t(\mathbf{A}_4) = (3,2)$.
- (b) Nech matice majú typ $t(\mathbf{A}_1) = (2,3)$, $t(\mathbf{A}_2) = (3,8)$, $t(\mathbf{A}_3) = (8,2)$, $t(\mathbf{A}_4) = (2,5)$, $t(\mathbf{A}_5) = (5,4)$.

8.14. Ukážte, že ak \mathbf{A} je štvorcová matica, potom $\mathbf{A} + \mathbf{A}^T$ je symetrická matica.

8.15. Dokážte tieto vlastnosti transponovanej matice:

- (a) $(\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}$,
- (b) $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T$,
- (c) $(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T$.

8.16. Stanovte hodnotu matic

$$(a) A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$(b) A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

(c) pre ktoré hodnoty p , má matica $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ p & -1 \end{pmatrix}$ hodnotu 1,

$$(d) A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

(e) pre ktoré hodnoty parametrov p a q má matica $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ p & 1 & 1 & 1 \\ q & 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$

hodnotu 2.

8.17. Nájdite inverznú maticu (ak existuje) k matici:

$$(a) A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -6 \\ -1 & 1 & 2 \\ -3 & 5 & 3 \end{pmatrix},$$

$$(b) A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix},$$

$$(c) A = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix},$$

$$(d) A = \begin{pmatrix} -4 & 8 \\ -1 & 3 \end{pmatrix},$$

$$(e) A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 3 \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} \text{(f)} \quad \mathbf{A} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \\ \text{(g)} \quad \mathbf{A} &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}, \\ \text{(h)} \quad \mathbf{A} &= \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

8.18. Dokážte matematickou indukciou formulu $(\mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 \dots \mathbf{A}_n)^{-1} = \mathbf{A}_n^{-1} \dots \mathbf{A}_2^{-1} \mathbf{A}_1^{-1}$.

8.19. Nech \mathbf{A} , \mathbf{B} a \mathbf{C} sú štvorcové matice rovnakého typu (n, n) . Dokážte, že ak \mathbf{A} je regulárna matica, potom zo vzťahu $\mathbf{AB} = \mathbf{AC}$ vyplýva $\mathbf{B} = \mathbf{C}$.

8.20. Ukážte, že ak \mathbf{A} a \mathbf{B} sú štvorcové matice rovnakého typu (n, n) a \mathbf{A} je regulárna matica, potom $(\mathbf{A}^{-1} \mathbf{BA})^2 = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}^2 \mathbf{A}$.

8.21. Ukážte, že ak \mathbf{A} a \mathbf{B} sú štvorcové matice rovnakého typu (n, n) a \mathbf{A} je regulárna matica, potom $(\mathbf{A}^{-1} \mathbf{BA})^n = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}^n \mathbf{A}$, pre každé kladné celé číslo n .

8.22. Nech \mathbf{A} je regulárna matica, ukážte, že $(\mathbf{A}^n)^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^n$

8.23. Nech matice \mathbf{A} a \mathbf{B} majú blokovú štruktúru

$$\mathbf{A} = \left(\begin{array}{cc|cc} 4 & 2 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & -3 & 0 & -2 & 3 \end{array} \right) \quad \text{a} \quad \mathbf{B} = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & -1 \\ \hline 3 & -2 & 0 \\ -1 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Potom ich formálne môžeme písať v tvare

$$\mathbf{A} = (\mathbf{A}_1 \quad \mathbf{A}_2) \quad \text{a} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_1 & \mathbf{B}_2 \\ \mathbf{B}_3 & \mathbf{B}_4 \end{pmatrix}$$

Vypočítajte \mathbf{AB} a ukážte

$$\mathbf{AB} = (\mathbf{A}_1 \mathbf{B}_1 + \mathbf{A}_2 \mathbf{B}_3 \quad \mathbf{A}_1 \mathbf{B}_2 + \mathbf{A}_2 \mathbf{B}_4)$$

Ukážte taktiež

$$\mathbf{B}^T = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_1^T & \mathbf{B}_3^T \\ \mathbf{B}_2^T & \mathbf{B}_4^T \end{pmatrix}$$

8.24. Nech $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ a $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ sú binárne matice, zostrojte

- (a) $A \wedge B$,
- (b) $A \vee B$,
- (c) $A \otimes B$.

8.25. Nech $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ a $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ sú binárne matice, zostrojte

- (a) $A \wedge B$,
- (b) $A \vee B$,
- (c) $A \otimes B$.

8.26. Nech A je binárna matica, dokážte $A \wedge A = A$ a $A \vee A = A$.

9 Maticová algebra II

SÚSTAVA LINEÁRNYCH ROVNÍC • FROBENIOVA VETA •
GAUSSOVA ELIMINAČNÁ METÓDA • DETERMINANTY •
CRAMEROVO PRAVIDLO

Táto kapitola sa zaoberá sústavami lineárnych rovníc, špecifikáciou existencie riešenia pomocou Frobeniovej vety, jednoduchým algoritmom na konštrukciu riešenia sústavy pomocou Gaussovej eliminačnej metódy. Na záver kapitoly sú študované determinanty a ich aplikácia k nájdeniu riešenia sústavy lineárnych rovníc pomocou Cramerovho pravidla.

9.1 SÚSTAVA LINEÁRNYCH ROVNÍC

SÚSTAVA
LINEÁRNYCH
ROVNÍC

Sústavu lineárnych rovníc, ktorá obsahuje m rovníc o n neznámych budeme zapisovať v tvare

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \dots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \tag{9.1}$$

Zavedením matic

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix} \tag{9.2}$$

MATICA SÚSTAVY,
VEKTOR
NEZNÁMYCH,
VEKTOR PRAVÝCH
STRÁN

prepíšeme sústavu (9.1) do kompaktného maticového tvaru

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \tag{9.3}$$

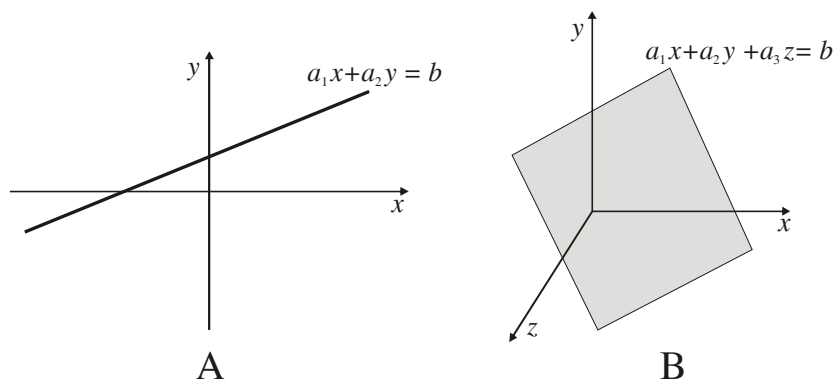
kde \mathbf{A} sa nazýva *matice sústavy*, \mathbf{x} sa nazýva *vektor neznámych* a \mathbf{b} sa nazýva *vektor pravých strán*.

RIEŠENIE SÚSTAVY **Riešenie** sústavy (9.1) môže byť reprezentované stĺpcovým vektorom

$$\mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \dots \\ c_n \end{pmatrix} \quad (9.4)$$

ktorý keď dosadíme do (9.1), t. j. za x_i dosadíme c_i , dostaneme maticovú identitu $\mathbf{A}\mathbf{c} = \mathbf{b}$.

OBRÁZOK 9.1.
GEOMETRICKÁ
INTERPRETÁCIA
ROVNICE



Geometrická interpretácia rovnice zo sústavy lineárnych rovníc pre (A) $n = 2$, rovnica je interpretovaná priamkou, (B) $n = 3$, rovnica je interpretovaná rovinou.

POČET RIEŠENÍ

Geometrická interpretácia rovníc zo sústavy (9.1) je znázornená na obr. 9.1. Riešenie sústavy je potom určené prienikom týchto geometrických útvarov priradených jednotlivým rovniciam z (9.1). Označme „nadrovinu“ priradenú i -tej lineárnej rovnici z (9.1) symbolom σ_i , potom riešenie je zadané ich prienikom

$$\mathcal{X} = \sigma_1 \cap \sigma_2 \cap \dots \cap \sigma_m \quad (9.5)$$

Z geometrického pohľadu vyplýva, že prienik (9.5) buď obsahuje (i) len jeden prvok, (ii) má nekonečne mnoho prvkov, alebo (iii) je prázdny. V prípade, že množina \mathcal{X} je prázdna, potom sústava nemá riešenie (môžeme povedať, že sústava (9.1) je kontradiktórna). V prípade (i) sústava má práve jedno riešenie, ktoré je jednoznačne určené sústavou rovníc (porovnaj príklad 9.1). V druhom prípade (ii) existuje nekonečne mnoho riešení, ktoré tvoria „podrovinu“. Táto kvalitatívna diskusia riešení sústavy lineárnych rovníc bude precizovaná v ďalšej časti tejto kapitoly.

Jeden z hlavných cieľov teórie sústav lineárnych rovníc je rozhodnúť, za ktorých podmienok sústavy majú alebo nemajú riešenie a v prípade, že ho majú, tak ako ho zostrojiť.

Za predpokladu, že matica sústavy \mathbf{A} je regulárna, riešenie sústavy lineárnych rovníc má tento explicitný tvar

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} \quad (9.5)$$

PRÍKLAD 9.1.

Nájdite riešenie sústavy

$$2x_1 + 4x_2 = 1$$

$$x_1 + 4x_2 = 2$$

pomocou inverznej matice.

Zavedieme matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Pomocou týchto matíc prepíšeme túto sústavu do maticového tvaru (9.3).
V príklade 8.8 bola zostrojená inverzná matica vzhľadom k \mathbf{A}

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1/4 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Použitím (9.5) zostrojíme riešenie sústavy v tvare

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1/4 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3/4 \end{pmatrix}$$

POČET RIEŠENÍ

Budeme študovať tri elementárne príklady, ktoré sú inštruktívne pre pochopenie geometrickej interpretácie lineárnych rovníc a s ním úzko súvisiaceho problému počtu riešení:

1 RIEŠENIE

(1) Sústava lineárnych rovníc

$$x_1 + x_2 = 1$$

$$x_1 - x_2 = 0$$

má práve jedno riešenie $\mathbf{x} = (1/2, 1/2)^T$, geometrická interpretácia je znázornená na obr. 9.2, diagram A.

NEKONEČNE VEĽA RIEŠENÍ

(2) Sústava lineárnych rovníc

$$x_1 + x_2 = 1$$

$$-x_1 - x_2 = -1$$

má nekonečne mnoho riešení, ktoré môžeme vyjadriť napr. vektorom $\mathbf{x} = (t, 1-t)^T$, $\forall t \in \mathbb{R}$, geometrická interpretácia je znázornená na obr. 9.2, diagram B.

NEMÁ RIEŠENIE

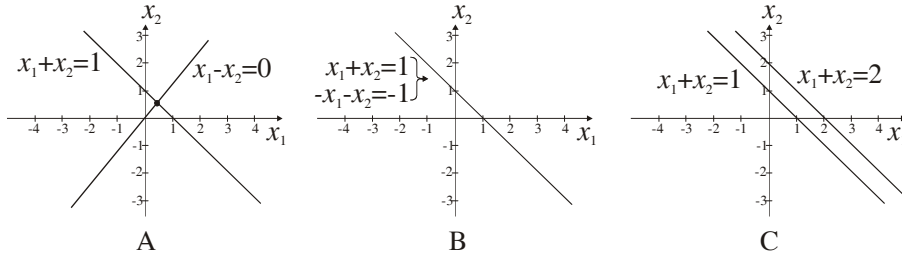
(3) Sústava lineárnych rovníc

$$x_1 + x_2 = 1$$

$$x_1 + x_2 = 2$$

nemá riešenie, rovnice sú vo vzájomnom spore, geometrická interpretácia je znázornená na obr. 9.2, diagram C.

OBRÁZOK 9.2.
GEOMETRICKÉ
ZNÁZORNENIE
SÚSTAV – JEDNO
RIEŠENIE,
NEKONEČNE
MNOHO, ŽIADNE



Geometrické znázornenie troch rôznych sústav lineárnych rovníc pre $n = 2$. Diagram A znázorňuje prípad, v ktorom sú priamky rôznobežné, ich priesečník jednoznačne určuje práve jedno riešenie sústavy. Diagram B znázorňuje situáciu, keď obe priamky sú totožné, ich prienik je reprezentovaný priamkou, existuje nekonečne mnoho riešení, ktoré ležia na priamke. Diagram C znázorňuje situáciu, keď priamky sú rôzne ale rovnobežné, čiže ich prienik je prázdny, neexistuje žiadne riešenie.

ROZŠÍRENÁ
MATICA

Definujeme **rozšírenú maticu** (sústavy) A' tak, že matica sústavy A je rozšírená o stĺpcový vektor pravej strany

$$A' = (A, b) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right)$$

Pomocou hodností matice sústavy A a rozšírenej matice A' môžeme stanoviť, kedy sústava lineárnych rovníc má alebo nemá riešenie.

VETA 9.1.
(FROBENIOVA
VETA¹)

Sústava lineárnych rovníc $Ax = b$ pre $t(A)=(m,n)$ má riešenie vtedy a len vtedy, ak

$$h(A) = h(A') \quad (9.6)$$

Pričom, podrobnejšou analýzou tejto podmienky zistíme, že

- (1) ak $h(A) \neq h(A')$, potom sústava nemá riešenie,
- (2) ak $h(A) = h(A') = n$, potom sústava má práve jedno riešenie,
- (3) ak $h(A) = h(A') < n$, potom sústava má nekonečne mnoho riešení.

Táto veta patrí medzi fundamentálne teoretické výsledky teórie lineárnych rovníc, špecifikuje nutné a postačujúce podmienky pre existenciu riešenia. Jej dôkaz je pomerne zdĺhavý a vyžaduje ďalšie pojmy z lineárnej algebry, preto ho nebudeme uvádzať. Séria troch nasledujúcich príkladov ilustruje jednotlivé prípady z Frobeniovej vety. Výsledky týchto príkladov je potrebné porovnať s textom za príkladom 9.1, kde sú uvádzané aj riešenia diskutovaných sústav lineárnych rovníc.

¹ Ferdinand Georg Frobenius (1849–1917) bol nemecký matematik, jeden zo zakladateľov teórie grup.

PRÍKLAD 9.2. Riešme sústavu lineárnych rovníc

$$x_1 + x_2 = 1$$

$$x_1 - x_2 = 0$$

Matica koeficientov a rozšírená matica majú tvar

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}' = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{array} \right)$$

Hodnosti týchto matíc vyhovujú podmienke

$$h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{A}') = 2$$

To znamená, že sústava má práve jedno riešenie, $\mathbf{x} = (1/2, 1/2)^T$.

PRÍKLAD 9.3. Riešme sústavu lineárnych rovníc

$$x_1 + x_2 = 1$$

$$-x_1 - x_2 = -1$$

Matica koeficientov a rozšírená matica majú tvar

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}' = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{array} \right)$$

Hodnosti týchto matíc vyhovujú podmienke

$$h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{A}') = 1 < 2$$

To znamená, že sústava má nekonečne mnoho riešení, $\mathbf{x} = (t, 1-t)^T, \forall t \in \mathbb{R}$.

PRÍKLAD 9.4. Riešme sústavu lineárnych rovníc

$$x_1 + x_2 = 1$$

$$x_1 + x_2 = 2$$

Matica sústavy a rozšírená matica majú tvar

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}' = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{array} \right)$$

Hodnosti týchto matíc vyhovujú podmienke

$$h(\mathbf{A}) = 1 \neq h(\mathbf{A}') = 2$$

To znamená, že sústava nemá riešenie.

EXISTUJE
RIEŠENIE?
HODNOSŤ
ROZŠÍRENEJ
MATICE

Frobeniova veta nám len hovorí či sústava $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ má, alebo nemá riešenie, ale v prípade, že riešenie existuje, nedáva nám návod ako ho nájsť. Jej aplikácia vyžaduje stanovenie hodností tak matice koeficientov \mathbf{A} , ako aj rozšírenej matice \mathbf{A}' . Stanovenie hodností môže byť uskutočnené súčasne tak, že stanovíme hodnosť rozšírenej matice, pričom nebudeme používať elementárne operácie výmeny stĺpcových vektorov (menovite stĺpcového vektora pravých strán \mathbf{b} so stĺpcovými vektormi matice sústavy, a taktiež, aj stĺpcových vektorov z matice \mathbf{A} samotnej). Týmto sa vyhneme zbytočným problémom s korektnou interpretáciou získaného

riešenia (napr. označenie neznámych môže byť vzájomne poprehadzované). Naviac, upravená rozšírená matica v trojuholníkovom tvare je vhodná na konštrukciu riešenia pomocou metódy spätných substitúcií. Tento prístup tvorí obsah Gaussovej eliminačnej metódy (GEM), ktorá patrí k najefektívnejším algoritmom pre riešenie sústavy lineárnych rovníc.

Gaussova² eliminačná metóda riešenia sústavy lineárnych rovníc

POVOLENÉ
OPERÁCIE →
TROJUHLNÍKOVÝ
TVAR

Nad rozšírenou maticou A' sa vykonáva postupnosť nasledujúcich elementárnych operácií nad jej riadkami:

- (1) výmena dvoch riadkov,
- (2) vynásobenie riadku nenulovým číslom a
- (3) pripočítanie násobku vybraného riadku k inému riadku.

Cieľom týchto úprav je pretransformovať rozšírenú maticu na trojuholníkový tvar. Riešenie získame z takto upravenej rozšírenej matice metódou spätných substitúcií.

PRÍKLAD 9.5.

Použitím Gaussovej eliminačnej metódy riešte sústavu

$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 &= 3 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &= 12 \end{aligned}$$

Rozšírená matica má tvar

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 12 \end{array} \right)$$

1. krok. Vykonáme vynulovanie prvkov pod diagonálou v prvom stĺpci

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 0 \\ \boxed{1} & 2 & -1 & 3 \\ \boxed{2} & 1 & 1 & 12 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & 3 & -6 \\ 0 & -4 & 0 & -12 \end{array} \right)$$

Túto operáciu vykonáme tak, že druhý riadok matice vynásobíme -2 a tretí riadok vynásobíme -1 a potom k týmto riadkom pripočítame prvý riadok.

2. krok. Vykonáme vynulovanie prvku pod diagonálou v druhom stĺpci

² Carl Friedrich Gauss (1777–1855), nemecký matematik, ktorý je pokladaný za jedného z najväčších matematikov v histórii. Už ako žiak elementárnej školy (v dnešnej terminológii je to 1. až 4. ročník základnej školy) objavil formulu pre súčet prvých n prirodzených čísel, $1 + 2 + \dots + n = n(n+1)/2$. Týmto výsledkom fascinoval svojho učiteľa, ktorý, aby mal pokoj od žiakov, často im dával úlohy typu spočítať napr. prvých 100 prirodzených čísel.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & 3 & -6 \\ 0 & -4 & 0 & -12 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & 3 & -6 \\ 0 & 7 & 0 & 21 \end{array} \right)$$

kde sme tretí riadok vynásobili $-7/4$, potom k tretiemu riadku pripočítame druhý riadok

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & 3 & -6 \\ 0 & 7 & 0 & 21 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & 3 & 15 \end{array} \right)$$

Posledná matica znamená, že pôvodná sústava rovníc bola pretransformovaná do tvaru

$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + x_3 &= 0 \\ -7x_2 + 3x_3 &= -6 \\ 3x_3 &= 15 \end{aligned}$$

Z poslednej rovnice dostaneme $x_3 = 5$, dosadením tohto výsledku do predposlednej rovnice dostaneme $x_2 = 3$, dosadením týchto výsledkov do prvej rovnice dostaneme $x_1 = 2$.

PRÍKLAD 9.6.

Použitím Gaussovej eliminačnej metódy riešte sústavu

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 5x_3 + 3x_4 &= 5 \\ x_1 + x_2 + 4x_3 + 3x_4 &= 7 \\ x_1 + 3x_3 + 2x_4 &= 4 \\ x_2 + x_3 + x_4 &= 3 \end{aligned}$$

Rozšírená matica má tvar

$$A' = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 5 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 4 & 3 & 7 \\ 1 & 0 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \end{array} \right)$$

1. krok, nulujeme prvky v 1. stĺpci pod diagonálou

$$\begin{aligned} &\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 5 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 4 & 3 & 7 \\ 1 & 0 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 5 & 3 & 5 \\ -2 & -2 & -8 & -6 & -14 \\ -2 & 0 & -6 & -4 & -8 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 5 & 3 & 5 \\ 0 & -3 & -3 & -3 & -9 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & -3 \end{array} \right) \\ &\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 5 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \end{array} \right) \end{aligned}$$

(i) Vynásobíme 2. a 3. riadok rozšírenej matice číslom -2

(ii) K druhému a tretiemu riadku pripočítame prvý riadok

(iii) Posledné tri riadky sú lineárne závislé, tak napr. 2. a 3. riadok získame vynásobením 4. riadku číslom -3 resp. -1 , môžeme teda vynechať 2. a 3. riadok.

Procedúra stanovenia hodnosti rozšírenej matice končí, získali sme trojuholníkovú maticu. Rozšírenú maticu môžeme prepísať do tvaru sústavy lineárnych rovníc

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 5x_3 + 3x_4 &= 5 \\ x_2 + x_3 + x_4 &= 3 \end{aligned}$$

Máme dve rovnice pre štyri neznáme, t. j. dve neznáme môžu byť charakterizované ako voľné parametre, $x_3 = u$, $x_4 = v$, potom upravenú sústavu prepíšeme do formálneho tvaru dvoch lineárnych rovníc pre dve neznáme

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 &= 5 - 5u - 3v \\ x_2 &= 3 - u - v \end{aligned}$$

Dosadením druhej rovnice do prvej dostaneme konečné riešenie pre neznámu x_1

$$x_1 = 0.5(5 - 5u - 3v + (3 - u - v)) = 4 - 3u - 2v$$

Stĺpcový vektor riešenia má tvar

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 4 - 3u - 2v \\ 3 - u - v \\ u \\ v \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{a}} - u \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{b}} - v \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{c}} = \mathbf{a} - u\mathbf{b} - v\mathbf{c}$$

Môžeme teda uzavrieť, že sústava má nekonečne mnoho riešení, ktoré tvoria množinu

$$\mathcal{X} = \{\mathbf{a} - u\mathbf{b} - v\mathbf{c}; u, v \in \mathbb{R}\}$$

Ak napríklad položíme $u = v = 1$, potom vektor riešenia má tvar

$$\mathbf{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{a}} - \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{b}} - \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{c}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dosadením týchto hodnôt neznámych do riešenej sústavy lineárnych rovníc získame identity, t. j. riešenie je korektné.


Homogénna sústava lineárnych rovníc

HOMOGÉNNA
SÚSTAVA $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$

Ak stĺpcový vektor pravých strán je nulový, potom sústava (9.3) sa nazýva homogénna

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{0} \tag{9.7}$$

Homogénna sústava má vždy tzv. triviálne riešenie, $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, sústava (9.7) potom je automaticky splnená. Môžeme si položiť otázku, kedy existuje netriviálne riešenie (keď aspoň jedna neznáma je nenulová). Tento problém je taktiež riešený Frobeniovou vetou 9.1.

VETA 9.2. 

Homogénna sústava lineárnych rovníc má netriviálne riešenie vtedy a len vtedy, ak hodnosť matice koeficientov je menšia ako počet neznámych

$$h(A) < n \quad (9.8)$$

Jednoduchý dôsledok tejto vety je, že ak hodnosť matice sa rovná počtu neznámych, $h(A) = n$, potom homogénna sústava má len triviálne „nulové“ riešenie.

PRÍKLAD 9.7.

Hľadáme riešenie homogénnej sústavy rovníc

$$2x_1 - x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 0$$

$$x_1 + x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 0$$

$$x_1 + 3x_3 + 2x_4 = 0$$

$$x_2 + x_3 + x_4 = 0$$

Budeme hľadať hodnosť matice koeficientov tejto sústavy (pozri príklad 9.6)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 & 3 \\ 1 & 1 & 4 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 & 3 \\ -2 & -2 & -8 & -6 \\ -2 & 0 & -6 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 & 3 \\ 0 & -3 & -3 & -3 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

To znamená, že $h(A) = 2 < 4$, t. j. sústava má nekonečne mnoho netriviálnych riešení. Pomocou trojuholníkovej matice, ktorá je ekvivalentná s pôvodnou matiou koeficientov, zostrojíme ekvivalentnú homogénnu sústavu lineárnych rovníc

$$2x_1 - x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 0$$

$$x_2 + x_3 + x_4 = 0$$

Táto sústava obsahuje 2 rovnice pre 4 neznáme, potom napríklad x_3 a x_4 môžu byť zvolené ako voľné parametre, $x_3 = u$ a $x_4 = v$, pre $u, v \in \mathbb{R}$. Z poslednej rovnice ekvivalentnej sústavy dostaneme $x_2 = -u - v$, ak tento výsledok dosadíme do prvej rovnice, získame $x_1 = -3u - 2v$. Vektor neznámych má tvar

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -3u - 2v \\ -u - v \\ u \\ v \end{pmatrix} = -u \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{a}} - v \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{b}} = -u\mathbf{a} - v\mathbf{b}$$

Ak položíme $u = v = 0$, potom dostávame triviálne riešenie (nulový vektor), ak položíme napríklad $u = v = -1$, dostaneme netriviálne riešenie

$$\mathbf{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{a}} + \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{b}} = \mathbf{a} + \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Množinu riešení potom môžeme vyjadriť takto

$$\mathcal{X} = \{-u\mathbf{a} - v\mathbf{b}; u, v \in \mathbb{R}\}$$

PRÍKLAD 9.8.

Nájdite riešenie homogénnej sústavy

$$2x_1 - 3x_2 + x_3 = 0$$

$$x_1 + 2x_2 - x_3 = 0$$

$$2x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

Stanovíme hodnotu matice sústavy (pozri príklad 9.5)

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & -7 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$


Hodnota matice koeficientov $h(\mathbf{A}) = 3$, čo je aj počet neznámych, t. j. homogénna sústava má len triviálne riešenie. O tejto skutočnosti sa ľahko presvedčíme, keď pomocou trojuholníkovej matice zostrojíme ekvivalentnú homogénnu sústavu

$$2x_1 - 3x_2 + x_3 = 0$$

$$-7x_2 + 3x_3 = 0$$

$$3x_3 = 0$$

Z poslednej rovnice dostaneme, že $x_3 = 0$, dosadením tohto výsledku do druhej rovnice dostaneme $x_2 = 0$, ak oba tieto výsledky dosadíme do prvej rovnice, dostaneme $x_1 = 0$. Týmto sme ukázali na konkrétnom príklade, že ak hodnota matice sústavy sa rovná počtu neznámych, $h(\mathbf{A}) = n$, homogénna sústava má len triviálne riešenie. Tieto úvahy môžeme zosumarizovať do nasledujúcej vety.

VETA 9.3. 

Homogénna sústava lineárnych rovníc má buď len jedno triviálne riešenie, a to vtedy a len vtedy, ak $h(\mathbf{A}) = n$, alebo má nekonečne veľa netriviálnych riešení vtedy a len vtedy, ak $h(\mathbf{A}) < n$.

9.2 DETERMINANTY

Nech \mathcal{A} je množina všetkých možných matíc. Hodnota matice môžeme formálne chápať ako zobrazenie množiny matíc \mathcal{A} na množinu kladných celých čísel

DETERMINANT $h: \mathcal{A} \rightarrow \{1, 2, \dots\}$

Analogicky, pod pojmom **determinant** budeme rozumieť zobrazenie množiny štvorcových matic $\mathcal{A}_n \subset \mathcal{A}$ na množinu reálnych čísel

$$\det: \mathcal{A}_n \rightarrow \mathcal{R} \quad (9.9)$$

Determinant matice $A \in \mathcal{A}_n$ budeme označovať symbolom $|A|$, je to reálne číslo z \mathcal{R} priradené štvorcovej matici A .

PERMUTÁCIA Prv než pristúpime k definícii determinantu uvedieme základné skutočnosti o permutáciách (pozri taktiež kapitolu 6.2, text za príkladom 6.7). **Permutáciu** P priradenú n objektom budeme vyjadrovať symbolom

$$P = (p_1, p_2, \dots, p_n)$$

kde prvky p_1, p_2, \dots, p_n sú prirodzené čísla z množiny $\{1, 2, \dots, n\}$, ktoré vyhovujú podmienke

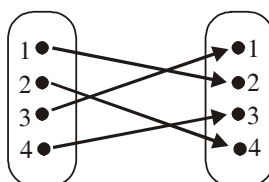
$$i \neq j \Rightarrow p_i \neq p_j$$

Ako ilustračný príklad tohto pojmu uvedieme permutáciu štyroch objektov

$$P = (2, 4, 1, 3)$$

Permutáciu interpretujeme, ako 1-1-značné zobrazenie množiny obsahujúcej prvých n kladných celých čísel na seba, grafická ilustrácia permutácie je znázornená na obr. 9.3.

OBRÁZOK 9.3.
PERMUTÁCIA AKO
BIJEKCIA



Znázornenie permutácie 4 objektov ako bijekcie objektov na seba.

Celkový počet permutácií n objektov je $n!$, tieto permutácie tvoria symetrickú grupu (množinu) permutácií S_n .

POČET INVERZIÍ Ku každej permutácii môžeme priradiť nezáporné celé číslo, ktoré sa nazýva **počet inverzií**: hovoríme, že prvky p_i a p_j tvoria inverziu v permutácii $P = (p_1, \dots, p_i, \dots, p_j, \dots, p_n)$, vtedy a len vtedy, ak platí

$$i < j \Rightarrow p_i > p_j$$

Celkový počet inverzií v permutácii P je označený $I(P)$.

PRÍKLAD 9.9. Zostrojte všetky permutácie pre $n = 2$ a $n = 3$, charakterizujte každú permutáciu počtom inverzií.

Permutácie pre $n = 2$ majú tvar

$$P = (1, 2), \quad I(P) = 0$$

$$P = (2, 1), \quad I(P) = 1$$

Permutácie pre $n=3$ majú tvar

$$P = (1, 2, 3), \quad I(P) = 0$$

$$P = (1, 3, 2), \quad I(P) = 1 \quad (3 > 2)$$

$$P = (2, 1, 3), \quad I(P) = 1 \quad (2 > 1)$$

$$P = (2, 3, 1), \quad I(P) = 2 \quad (2 > 1, 3 > 1)$$

$$P = (3, 1, 2), \quad I(P) = 2 \quad (3 > 1, 3 > 2)$$

$$P = (3, 2, 1), \quad I(P) = 3 \quad (3 > 2, 3 > 1, 2 > 1)$$

DEFINÍCIA 9.1.
DETERMINANT



Nech $A = (A_{ij})$ je štvorcová matica typu (n, n) , **determinant** tejto matice je

$$|A| = \sum_{P \in S_n} (-1)^{I(P)} A_{1p_1} A_{2p_2} \dots A_{np_n} \quad (9.10)$$

kde sumácia obsahuje všetky možné permutácie z S_n . Alternatívne označenie determinantu je $\det(A)$ alebo $D(A)$.

PRÍKLAD 9.10.

Determinant matice

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

je podľa definície určený takto

$$\begin{aligned} |A| &= \sum_{P \in S_2} (-1)^{I(P)} A_{1p_1} A_{2p_2} \\ &= (-1)^{I(1,2)} A_{11} A_{22} + (-1)^{I(2,1)} A_{12} A_{21} \\ &= A_{11} A_{22} - A_{12} A_{21} \end{aligned}$$

Diagramatická interpretácia výpočtu determinantu matice typu 2×2

$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix} = A_{11} A_{22} - A_{12} A_{21} \quad (9.11)$$

kde šípka smerujúca zľava doprava (sprava doľava) reprezentuje kladný (záporný) súčin maticových prvkov.

PRÍKLAD 9.11.
SARRUSOVO
PRAVIDLO

Determinant matice

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}$$

je podľa definície určený v tvare, ktorý môžeme jednoducho vyjadriť pomocou diagramatickej interpretácie (**Sarrusovo pravidlo**)



$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} = A_{11}A_{22}A_{33} + A_{12}A_{23}A_{31} + A_{13}A_{21}A_{32} - (9.12) \\
 - A_{13}A_{22}A_{31} - A_{11}A_{23}A_{32} - A_{12}A_{21}A_{33}$$

kde šípky označujú súčiny maticových prvkov s rovnakou znamienkovou konvenciou ako v predchádzajúcom prípade. **Pozor, neplatí pre matice väčšie ako $t(3,3)$!**

Základné vlastnosti determinantov

(1) Nech A je štvorcová matica, potom

$$|A| = |A^T| \quad (9.13)$$

Dôsledok tejto vlastnosti je, že ľubovoľná vlastnosť, ktorá platí pre riadky determinantu musí platiť aj pre jeho stĺpce (a naopak).

(2) Nech A je štvorcová matica a nech matica B vznikne z A výmenou dvoch stĺpcov (riadkov)

$$A = (s_1, \dots, s_i, \dots, s_j, \dots, s_n) \rightarrow B = (s_1, \dots, s_j, \dots, s_i, \dots, s_n)$$

potom

$$|B| = -|A| \quad (9.14a)$$

Nech matica A obsahuje dva rovnaké stĺpce v polohe i a j

$$A = (s_1, \dots, s_i, \dots, s_{j-1}, s_i, s_{j+1}, \dots, s_n)$$

Potom jednoduchým dôsledkom vlastnosti (9.14a) je, že determinant tejto matice je nulový

$$|A| = 0 \quad (9.14b)$$

(3) Nech A je štvorcová matica a nech matica B vznikne z A tak, že jeden stĺpec (riadok) vynásobíme číslom α

$$A = (s_1, \dots, s_i, \dots, s_n) \rightarrow B = (s_1, \dots, \alpha s_i, \dots, s_n)$$

potom

$$|B| = \alpha |A| \quad (9.15)$$

Dôsledok tejto vlastnosti je, že ak matica A obsahuje nulový stĺpec (riadok), potom determinant matice je nulový.

(4) Nech A je štvorcová matica a nech matica B vznikne z A tak, že násobok vybraného stĺpca (riadku) pripočítame k inému stĺpcu (riadku)

$$A = (s_1, \dots, s_i, \dots, s_j, \dots, s_n) \rightarrow B = (s_1, \dots, s_i + \alpha s_j, \dots, s_j, \dots, s_n)$$

potom

$$|B| = |A| \quad (9.16)$$

(5) Nech A je štvorcová matica a nech pre jej vybraný stĺpec platí $s_i = s'_i + s''_i$


$$A = (s_1, \dots, s'_i + s''_i, \dots, s_n)$$

potom

$$|\mathbf{A}| = |\mathbf{A}'| + |\mathbf{A}''| \quad (9.17)$$

kde matica \mathbf{A}' (\mathbf{A}'') vznikne z pôvodnej matice tak, že i -tý stĺpec s_i je nahradený stĺpcovým vektorom s'_i (s''_i)

$$\mathbf{A}' = (s_1, \dots, s'_i, \dots, s_n), \quad \mathbf{A}'' = (s_1, \dots, s''_i, \dots, s_n)$$

VETA 9.4. 

Nech \mathbf{A} je štvorcová matica typu $n \times n$. $|\mathbf{A}| \neq 0$ vtedy a len vtedy, ak $h(\mathbf{A}) = n$.

Dôsledkom tejto vety je, že štvorcová matica \mathbf{A} má nenulový determinant vtedy a len vtedy, ak jej hodnosť sa rovná počtu riadkov

$$(|\mathbf{A}| \neq 0) \equiv (h(\mathbf{A}) = n)$$

PRÍKLAD 9.12.

Dokážte, že vektory $\mathbf{a}_1 = (1 \ 2 \ 3)$, $\mathbf{a}_2 = (0 \ 1 \ -1)$ a $\mathbf{a}_3 = (-1 \ 1 \ 1)$ sú lineárne nezávislé.

Tieto vektory môžeme formálne chápať ako riadkové vektory matice \mathbf{A} typu 3×3

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Na základe dôsledku prechádzajúcej vety vieme, že ak sa nám podarí dokázať, že determinant tejto matice je nenulový, potom $h(\mathbf{A}) = 3$, t. j. jej riadkové vektory sú lineárne nezávislé. Determinant matice spočítame Sarrusovým pravidlom

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 7$$

PRÍKLAD 9.13.

Dôsledok vety 9.4 o tom, že tri riadkové (stĺpcové) vektory \mathbf{a} , \mathbf{b} a \mathbf{c} rovnakého typu $(1,3)$ sú lineárne závislé vtedy a len vtedy, ak z nich zostrojený determinant matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \\ \mathbf{c} \end{pmatrix}$$

je nulový, $|\mathbf{A}| = 0$, bude použitý na určenie roviny σ v 3-rozmernom priestore, ktorá je určená bodmi A , B a C , ktoré sú reprezentované riadkovými vektormi (pozri obr. 9.4)

$$\mathbf{a} = (a_1 \ a_2 \ a_3), \quad \mathbf{b} = (b_1 \ b_2 \ b_3) \quad \text{a} \quad \mathbf{c} = (c_1 \ c_2 \ c_3)$$

Ak všeobecný bod X , reprezentovaný vektorom $\mathbf{x} = (x_1 \ x_2 \ x_3)$, leží v rovine σ , potom vektor $\overline{AX} = \mathbf{x} - \mathbf{a}$ môže byť vyjadrený ako lineárna kombinácia vektorov $\overline{AC} = \mathbf{c} - \mathbf{a}$ a $\overline{AB} = \mathbf{b} - \mathbf{a}$, t. j. tieto tri vektory sú lineárne závislé

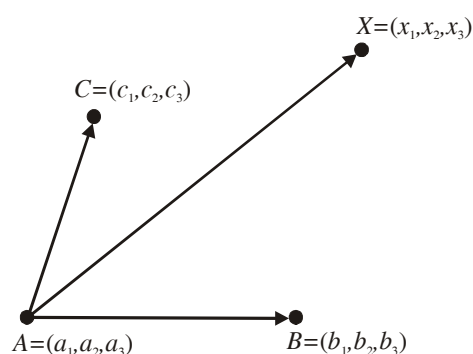
$$\begin{vmatrix} \mathbf{x} - \mathbf{a} \\ \mathbf{c} - \mathbf{a} \\ \mathbf{b} - \mathbf{a} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 - a_1 & x_2 - a_2 & x_3 - a_3 \\ c_1 - a_1 & c_2 - a_2 & c_3 - a_3 \\ b_1 - a_1 & b_2 - a_2 & b_3 - a_3 \end{vmatrix} = 0$$

vypočítaním tohto determinantu pomocou Sarrusovho pravidla dostaneme lineárnu rovnicu vzhľadom k premenným x_1, x_2 a x_3


$$ax_1 + bx_2 + cx_3 + d = 0$$

kde a, b, c a d sú koeficienty rovnice popisujúcej rovinu σ .

OBRÁZOK 9.4.
LINEÁRNA
ZÁVISLOSŤ
VEKTOROV



Rovina σ je určená 3 bodmi A, B a C , ktoré neležia na priamke. Ak bod X leží v rovine σ , potom riadkové vektory $(\mathbf{c} - \mathbf{a})$, $(\mathbf{b} - \mathbf{a})$ a $(\mathbf{x} - \mathbf{a})$ ležia taktiež v rovine σ a preto musia byť lineárne závislé.

VETA 9.5. 

Nech A je štvorcová trojuholníková matica (v tomto prípade nevyžadujeme, aby každý diagonálny prvok bol nenulový)

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ 0 & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

Determinant matice sa rovná súčinu jej diagonálnych prvkov

$$|A| = A_{11}A_{22}\dots A_{nn} \quad (9.18)$$

Dôkaz tejto vety vychádza z diskusie formuly (9.10), ktorá špecifikuje determinant pre ľubovoľnú štvorcovú maticu. Každá neidentická permutácia $P = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ má aspoň jeden prvok p_i , pre ktorý platí $p_i < i$. Z vlastnosti trojuholníkovej matice vyplýva vlastnosť $A_{i, p_i} = 0$. Potom v rozvoji (9.10) je aktívna len permutácia identity $P = (1, 2, \dots, n)$, ktorá poskytuje práve súčin diagonálnych prvkov z (9.18).

Ako jednoduchý dôsledok tejto vety je, že determinant jednotkovej matice E sa rovná jednej

$$|E| = 1 \quad (9.19)$$

Veta 9.5 umožňuje zostrojiť efektívny algoritmus na výpočet determinantov ľubovoľnej dimenzie n (pripomeňme, že v príkladoch 9.10 a 9.11 sme odvodili špeciálne formuly pre výpočet determinantov, keď $n = 2$ a $n = 3$). Žiaľ, tieto formuly nie sú zovšeobecniteľné pre $n > 3$, takže je dôležité mať k dispozícii algoritmus pre výpočet determinantu pre ľubovoľné n . Použijeme jednoduchý algoritmus, ktorý je veľmi podobný algoritmu stanovenia hodnoty matice a ktorý je založený na vlastnostiach determinantov (9.13-17). To znamená, že nad stĺpcami a riadkami budeme vykonávať jednoduché elementárne operácie tak, aby sme dostali trojuholníkovú maticu (t. j. nulujeme prvky pod diagonálou). Na rozdiel od stanovenia hodnoty matice, pri tomto výpočte determinantu jeho hodnota sa môže meniť, tak napríklad po transpozícii dvoch stĺpcov (riadkov) dochádza k zmene znamienka determinantu, alebo ak riadok vynásobíme číslom α , tak potom pred determinant musíme vytknúť číslo $1/\alpha$. To znamená, že súčasťou algoritmu musí byť aj premenná, v ktorej sa kumuluje táto zmena numerickej hodnoty determinantu v priebehu aplikácií elementárnych operácií.

PRÍKLAD 9.14.

Vypočítajte determinant matice s $n = 4$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & 3 \\ -1 & 3 & -2 & 4 \\ 2 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Postup transformácie determinantu na trojuholníkový tvar je prezentovaný na tejto schéme:

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & 3 \\ -1 & 3 & -2 & 4 \\ 2 & -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -6 & 5 \\ 0 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -6 & 5 \\ 0 & 0 & 18 & -12 \\ 0 & 0 & -8 & 8 \end{vmatrix} = \\ &= 6 \cdot 8 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -6 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 6 \cdot 8 \cdot 3 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -6 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -2/3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 6 \cdot 8 \cdot 3 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -6 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -2/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 \end{vmatrix} = \\ &= 6 \cdot 8 \cdot 3 \left(1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{3} \right) = 48 \end{aligned}$$


Transformáciu rozvrhne na jednotlivé kroky:

1. krok, transformácia $A_1 \rightarrow A_2$ vynuluje vyznačené prvky pod diagonálou v 1. stĺpci.

2. krok, transformácia $A_2 \rightarrow A_3$ vynuluje vyznačené prvky pod diagonálou v 2. stĺpci.
3. krok, transformácia $A_3 \rightarrow A_4$ vykonáva prípravné úpravy 3. a 4. riadku tak, aby sa mohol vynulovať vyznačený prvok pod diagonálou v 3. stĺpci; z 3. (4.) riadku je vytknuté číslo 6 (8), tieto čísla sú uvedené aj pred determinantom.
4. krok, transformácia $A_4 \rightarrow A_5$ vynásobí tretí riadok číslom $1/3$, pred determinant sa vytkne inverzná hodnota tohto čísla.
5. krok, transformácia $A_5 \rightarrow A_6$ vykoná po prípravných predchádzajúcich dvoch krokoch vynulovanie prvku pod diagonálou v 3. stĺpci, výsledok je, že sme dostali trojuholníkovú maticu.
6. krok, hodnota determinantu je vypočítaná ako súčin diagonálnych prvkov matice krát kumulované čísla pred determinantom, ktoré vznikli ako dôsledok aplikácie elementárnych pravidiel.

Možno dokázať, že tento algoritmus patrí medzi najefektívnejšie prístupy k výpočtu determinantu. V prípade, že pri nulovaní prvkov pod diagonálou sa nám aj na diagonále vygenerovala nula, potom algoritmus môžeme ukončiť, výsledná hodnota determinantu je $|A| = 0$.

Bez dôkazu uvedieme dôležitú vetu o determinante súčinu dvoch matíc:

VETA 9.6. 

Nech A a B sú štvorcové matice rovnakého typu $t(A) = t(B) = (n, n)$, potom determinant súčinu týchto matíc sa rovná súčinu ich determinantov

$$|AB| = |A| \cdot |B| \quad (9.20)$$

Ako jednoduchý dôsledok tejto vety je formula pre determinant inverznej matice A^{-1} , ktorá vyhovuje podmienke $AA^{-1} = E$, použitím formuly (9.20) dostaneme

$$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|} \quad (9.21)$$

Ak tento výsledok spojíme s vetou 9.4, potom determinant inverznej matice $|A^{-1}|$ existuje vtedy a len vtedy, ak hodnosť matice A sa rovná jej dimenzii n z typu $t(A) = (n, n)$, t. j. $h(A) = n$.

VETA 9.7. 

Matica A je **regulárna** vtedy a len vtedy, ak jej determinant je nenulový

$$|A| \neq 0 \quad (9.22)$$

Jedna zo základných aplikácií determinantov (pre malé dimenzie n) je ich použitie k riešeniu sústavy lineárnych rovníc

$$Ax = b \quad (\clubsuit)$$

ktorý má štvorcovú a regulárnu maticu koeficientov A (t. j. $|A| \neq 0$). Maticu A vyjadríme pomocou stĺpcových vektorov, potom sústavu (\clubsuit) môžeme prepísať do tvaru

$$(s_1, s_2, \dots, s_n) \mathbf{x} = \mathbf{b} \Rightarrow \mathbf{b} = \sum_{k=1}^n x_k s_k \quad (\spadesuit)$$

Označme symbolom A_i maticu, ktorá vznikne z matice A tak, že jej i -tý stĺpec nahradíme stĺpcovým vektorom konštantných členov \mathbf{b}

$$A_i = (s_1, \dots, s_{i-1}, \mathbf{b}, s_{i+1}, \dots, s_n)$$

Budeme počítat' determinant tejto matice

$$\begin{aligned} |A_i| &= |s_1, \dots, s_{i-1}, \mathbf{b}, s_{i+1}, \dots, s_n| = \left| s_1, \dots, s_{i-1}, \sum_{k=1}^n x_k s_k, s_{i+1}, \dots, s_n \right| = \\ &= \sum_{k=1}^n x_k \underbrace{|s_1, \dots, s_{i-1}, s_k, s_{i+1}, \dots, s_n|}_{=0 \text{ pre } k \neq i} = x_i |A| \end{aligned}$$

kde sme použili vlastnosť (9.17) a (9.14b). Za predpokladu, že A je regulárna matica, z poslednej rovnice vyplýva riešenie sústavy lineárnych rovníc v explicitnom tvare, tento poznatok sformulujeme ako vetu.

VETA 9.8.
(CRAMEROVO³
PRAVIDLO)



Sústava lineárnych rovníc $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, kde A je regulárna matica, má riešenie

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n), \text{ kde } x_i = \frac{|A_i|}{|A|} \quad (\text{pre } i = 1, 2, \dots, n) \quad (9.23)$$

PRÍKLAD 9.15.

Nájdite riešenie sústavy lineárnych rovníc pomocou Crameroveho pravidla

$$2x_1 - 3x_2 + x_3 = 1$$

$$x_1 + 2x_2 - x_3 = 0$$

$$2x_1 + x_2 + x_3 = -1$$

Zostrojíme jednotlivé determinanty z (9.23)

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 12, \quad |A_1| = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2, \\ |A_2| &= \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -6, \quad |A_3| = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -10 \end{aligned}$$

Potom riešenie je

$$x_1 = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}, \quad x_2 = \frac{-6}{12} = -\frac{1}{2}, \quad x_3 = \frac{-10}{12} = -\frac{5}{6}$$

³ V r. 1750 toto pravidlo bolo formulované švajčiarskym fyzikom Gabrielom Cramerom.

ZHRNUTIE

SÚSTAVA LINEÁRNYCH ROVNÍC	<p>Sústava lineárnych rovníc, ktorá obsahuje m rovníc o n neznámych môže byť pomocou matíc prepísaná do kompaktného tvaru</p> $Ax = b$ <p>kde A sa nazýva <i>matica koeficientov</i>, x sa nazýva <i>vektor neznámych</i> a b sa nazýva <i>vektor pravých strán</i>. Riešenie tejto sústavy je reprezentované stĺpcovým vektorom c, ktorý keď dosadíme do sústavy lineárnych rovníc, $x = c$, dostaneme maticovú identitu $Ac = b$.</p>
GEOMETRICKÁ INTERPRETÁCIA	<p>Geometrická interpretácia sústavy lineárnych rovníc je založená na predstave, že každá lineárna rovnica zo sústavy špecifikuje „nadrovinu“ v priestore neznámych premenných, prienik týchto nadrovin špecifikuje spoločné riešenie sústavy lineárnych rovníc.</p>
FROBENIOVA VETA	<p>Frobeniova veta hovorí, že sústava lineárnych rovníc má riešenie práve vtedy, ak hodnosť matice koeficientov sa rovná hodnosti rozšírenej matice (ktorá vznikne z matice koeficientov rozšírením o stĺpcový vektor pravých strán). Podľa tejto vety, sústava lineárnych rovníc buď má práve jedno riešenie, nekonečne mnoho riešení, alebo nemá žiadne riešenie.</p>
GAUSSOVA ELIMINAČNÁ METÓDA	<p>Gaussova eliminačná metóda je efektívny algoritmus pre riešenie sústavy lineárnych rovníc, obsahuje tieto elementárne kroky: (1) transpozíciu dvoch riadkov, (2) vynásobenie riadku nenulovým číslom a (3) pripočítanie násobku vybraného riadku k inému riadku. Cieľom týchto elementárnych transformácií je pretransformovať rozšírenú maticu na trojuholníkový tvar. Riešenie získame z takto upravenej rozšírenej matice metódou spätných substitúcií.</p>
DETERMINANT MATICE	<p>Ku každej štvorcovej matici môžeme priradiť reálne číslo, ktoré sa nazýva determinant matice. Všeobecná definícia determinantu má tvar</p> $ A = \sum_{P \in S_n} (-1)^{l(P)} A_{1p_1} A_{2p_2} \dots A_{np_n}$ <p>kde A je štvorcová matica typu (n, n) a sumácia prebieha nad všetkými permutáciami n objektov. Ak má štvorcová matica trojuholníkový tvar (pod hlavnou diagonálou má nulové elementy), potom determinant takejto matice sa rovná súčinu jej diagonálnych elementov. Táto vlastnosť sa dá využiť pre numerický výpočet determinantov, vykonávame nad maticou také transformácie, ktoré zachovávajú jej determinant, ale transformujú ju postupne na trojuholníkový tvar. Na záver determinant spočítame ako súčin diagonálnych elementov trojuholníkovej matice.</p>
CRAMEROVO PRAVIDLO	<p>Sústava lineárnych rovníc, ktorej matica koeficientov je štvorcová a regulárna, môže byť riešená pomocou Cramerovho pravidla, ktoré využíva tak determinant matice koeficientov, ako aj determinanty matíc, ktoré vznikli z matice koeficientov náhradou vybraného stĺpca vektorom konštantných členov.</p>

KLÚČOVÉ POJMY

sústava lineárnych rovníc
 Frobeniova veta
 Gaussova eliminačná metóda
 determinant
 Cramerovo pravidlo
 matica sústavy
 vektor neznámych
 vektor pravých strán
 riešenie sústavy

geometrická interpretácia rovnice
 počet riešení (jedno, nekonečne veľa,
 žiadne)
 rozšírená matica
 homogénna sústava lineárnych rovníc
 permutácia
 Sarrusovo pravidlo
 lineárna závislosť vektorov
 výpočet determinantov

CVIČENIA

9.1. Definujte maticu koeficientov A , stĺpcový vektor neznámych x a stĺpcový vektor pravých strán b pre sústavy

$$(a) \begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ 2x_1 - x_2 = 0 \end{cases}$$

$$(b) \begin{cases} x_2 = 1 \\ x_1 = 0 \end{cases}$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

$$(c) \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 1 \end{cases}$$

$$x_1 - x_2 - x_3 = -1$$

$$(d) x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = 1$$

9.2. Pomocou inverznej matice riešte sústavu rovníc

$$2x + 2y - 6z = 4$$

$$-x + y + 2z = 3$$

$$-3x + 5y + 3z = -1$$

9.3. Pomocou Gaussovej eliminačnej metódy riešte sústavy lineárnych rovníc

$$x + y + z = 2$$

$$(a) \begin{cases} 2x - 2y - z = 2 \\ 3x + y - 2z = -2 \end{cases}$$

$$3x + y - 2z = -2$$

$$\begin{aligned} & 2x + 2y + z = 4 \\ \text{(b)} \quad & x - y - z = 2 \\ & 3x + y = 6 \\ \\ & 2x_1 - x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 5 \\ \text{(c)} \quad & x_1 + x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 7 \\ & x_1 + 3x_3 + 2x_4 = 4 \\ & x_2 + x_3 + x_4 = 3 \\ \\ & 2x - 3y = -4 \\ \text{(d)} \quad & x + 2y = 5 \\ & -4x + 6y = 8 \\ \\ & 3x - 2y + z = -4 \\ \text{(e)} \quad & x + y + 2z = 2 \\ \\ & x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ \text{(f)} \quad & 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0 \end{aligned}$$

9.4. Vypočítajte determinanty matíc:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad \mathbf{A} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \text{(b)} \quad \mathbf{A} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \text{(c)} \quad \mathbf{A} &= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 4 & 2 & 5 & -1 \\ 3 & 1/2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ \text{(d)} \quad \mathbf{A} &= \begin{pmatrix} \sin \alpha & -\cos \alpha \\ \cos \alpha & \sin \alpha \end{pmatrix} \\ \text{(e)} \quad \mathbf{A} &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

9.5. Zistite pomocou determinantu, či sústava lineárnych vektorov je lineárne závislá alebo nezávislá.

(a) $\mathbf{a}_1 = (0, 1, 2), \mathbf{a}_2 = (1, 1, 1), \mathbf{a}_3 = (-1, 0, 1)$

(b) $\mathbf{a}_1 = (1, 1, -2), \mathbf{a}_2 = (p, 1, 0), \mathbf{a}_3 = (-1, 1, 1)$

9.6. Pomocou Cramerovho pravidla riešte tieto sústavy lineárnych rovníc

$$x_1 + x_2 + x_3 = 6$$

(a) $x_1 - x_2 + x_3 = 2$

$$x_1 + x_2 - x_3 = 0$$

$$x_1 + x_4 = 5$$

(b) $x_1 + x_2 = 3$

$$x_2 - x_3 = -1$$

$$x_3 + x_4 = 7$$

(c) sústava rovníc z príkladu 9.2.

10 TEÓRIA GRAFOV I

DEFINÍCIA GRAFU • ZÁKLADNÉ POJMY • PODGRAF • CESTY A
KRUŽNICE V GRAFE • ORIENTOVANÉ GRAFY • EULEROVSKÝ
ŤAH • HAMILTONOVSKÁ KRUŽNICA

Teória grafov je relatívne mladá matematická disciplína, ktorá je často využívaná aj pre svoju názornosť. Nejde ale o grafy ako priebehy funkcií, ale o grafy ako štruktúry, kde vrcholy sú prepojené (orientovanými alebo neorientovanými) hranami. Veľa problémov aj z praktického života môže byť formulovaných ako úlohy teórie grafov. V tejto kapitole si uvedieme základné pojmy z tejto teórie. Špeciálne sa budeme venovať tomu, ako sa dá po hranách prechádzať grafom, ako sa dá využiť eulerovský ťah prechádzajúci každou hranou práve raz či hamiltonovská kružnica prechádzajúca každým vrcholom.

10.1 ÚVODNÉ POZNÁMKY

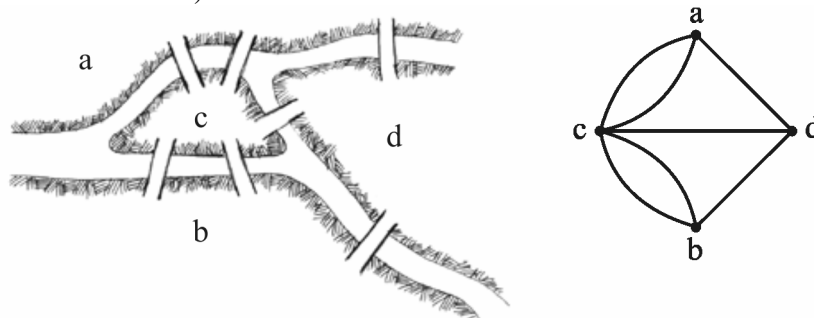
EULER A MOSTY KRÁLOVCA

Teória grafov ako matematická disciplína vznikla v 18. storočí hlavne zásluhou švajčiarskeho matematika Leonarda Eulera¹. Ako prvý príklad aplikácie teórie grafov ukážeme jeho riešenie slávneho problému mostov v Královci (vtedy Königsberg v Prusku, teraz Kaliningrad v Rusku). Toto mesto malo 7 mostov, ktoré spájali brehy rieky a 2 ostrovy. Niektorých obyvateľov mesta zaujal problém, či existuje taká prechádzka mestom, aby každý most prešli práve raz a vrátili sa domov. *Leonhard Euler* riešil problém nahradením brehov a ostrovov (spojitých území) vrcholmi a mostov hranami, čím vytvoril graf s násobnými hranami. Úlo-

¹ Leonhard Euler (1707–1783) bol synom kalvínskeho kňaza v Bazileji vo Švajčiarsku. Na želanie svojho otca tam v 13. rokoch začal študovať na univerzite teológiu. Pod vplyvom učiteľa matematiky Bernoulliho zo slávnej rodiny matematikov začal aj Euler študovať matematiku, a vo svojich 16. rokoch úspešne ukončil univerzitné vzdelanie. Na pozvanie Petra Veľkého pracoval 14 rokov v Akadémii v Petrohrade, potom bol 25 rokov v Berlínskej Akadémii, aby sa na koniec života vrátil do Petrohradu. Euler bol neuveriteľne tvorivý vo všetkých oblastiach matematiky, najmä teórii čísel, kombinatorike a analýze, rovnako ako v jej aplikáciách, napr. v hudbe a stavbe lodí. Napísal 1100 publikácií, trvalo ešte 47 rokov po jeho smrti, kým ich všetky uverejnili. Mal 13 detí, dokázal pracovať a súčasne hýpať deti na kolenách. Posledných 17 rokov života bol slepý, ale vďaka fantastickej pamäti to nespomalilo jeho prácu, svoje výsledky diktoval. Publikácia jeho súhrnného diela má viac ako 75 zväzkov.

hou teraz bolo nájsť taký uzavretý ťah v grafe, aby obsahoval každú hranu práve raz. Euler dokázal, že pre danú úlohu je tento problém neriešiteľný (príslušnú vetu uvedieme neskôr).

OBRÁZOK 10.1.
MOSTY V
KRÁLOVCI A ICH
REPREZENTÁCIA
POMOCOU GRAFU



Mosty v Královci a ich reprezentácia pomocou grafu. Úloha je prejsť po všetkých mostoch práve raz a vrátiť sa domov. Tento problém nemá riešenie – ak z nejakého vrcholu chceme vyjsť a aj sa doňho vrátiť vždy inou hranou a pritom použiť všetky hrany, musí vrchol byť spojený s párnym počtom hrán. To musí platiť pre všetky vrcholy.

APLIKÁCIE –
TLAČENÉ SPOJE,
CHEMICKÉ
VZORCE, SIETE

Okrem uvedeného „zábavného problému“ existujú aj veľmi užitočné aplikácie grafov – napr. pomocou teórie grafov sa dá rozhodnúť, či obvod môže byť vyrobený ako plošný tlačенý spoj. V chémii sú chemické molekuly reprezentované grafmi, pomocou nich sa dajú odlišiť tzv. izoméry, t. j. molekuly, ktoré majú rovnaké chemické zloženie, ale odlišujú sa svojou priestorovou štruktúrou. Grafmi sa reprezentujú aj počítačové alebo transportné siete, kde sa grafovo-teoretické algoritmy využívajú na nájdenie najkratšej cesty.

VRCHOLY, HRANY,
ORIENTOvané
GRAFY,
MULTIGRAFY

Grafy pozostávajú z vrcholov (alebo, inak povedané, uzlov) a hrán spájajúcich tieto vrcholy. Podľa druhov hrán, ktoré môžu dvojice vrcholov spájať (inak povedané, sú s nimi incidentné), sa rozlišujú *orientované*, *neorientované* a *zmiešané grafy* (obsahujú iba hrany so šípkami, neobsahujú hrany so šípkami, obsahujú tak hrany so šípkami ako aj bez nich) alebo *multigrafy* (obsahujúce násobné hrany, reprezentujúce napr. násobné väzby v molekulách). Šípkou sa pritom označuje smer hrany, teda z ktorého vrcholu vychádza (počiatočný vrchol) a do ktorého vrcholu vchádza (koncový vrchol). Taký graf napríklad môže byť použitý na zobrazenie výsledkov športového turnaja, kde vrcholy sú súťažiaci a kde šípka je orientovaná od porazeného k víťazovi (alebo naopak), a hrana bez šípky označuje remízu. Pod grafom bez prívlastku bežne chápeme neorientovaný graf. Budeme sa ďalej zaoberať iba konečnými grafmi, ktoré majú konečný počet vrcholov a hrán.

DEFINÍCIA 10.1.
NEORIENTOvaný
GRAF



Neorientovaný graf $G=(V,E)$ je definovaný pomocou neprázdnej množiny vrcholov $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ a množiny $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ neorientovaných hrán, pričom každá hrana $e \in E$ je reprezentovaná neusporiadanou dvojicou vrcholov z V , $e = \{v, v'\} \subseteq V$.

Neorientovaný graf napr. môže popisovať železničnú alebo telefónnu sieť.

DEFINÍCIA 10.2.
ORIENTOVANÝ
GRAF


Orientovaný graf $G=(V,E)$ je definovaný pomocou množiny vrcholov $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ a množiny $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\} \subseteq V \times V$ hrán, pričom každá hrana $e \in E$ je reprezentovaná usporiadanou dvojicou $e = (v, v') \in V \times V$. Hovoríme, že hrana $e = (v, v')$ je orientovaná z vrcholu v do vrcholu v' .

NÁSOBNÉ HRANY,
MULTIPLICITA

Hrany v grafe môžu byť špecifikované ako **násobné hrany**. Budeme predpokladať, že definícia grafu je rozšírená o ohodnotenie hrán kladným celým číslom, $f : E \rightarrow \{1, 2, \dots\}$. Potom, ak $f(e) = 1$, hovoríme, že hrana e je jednoduchá, v opačnom prípade, ak $f(e) \geq 2$, hovoríme, že hrana e je násobná, jej **multiplacita** je špecifikovaná číslom $f(e)$, pozri obr. 10.2. Možnosť zavedenia násobných hrán približuje matematickú koncepciu grafu k niektorým prírodovedným aplikáciám. Napríklad, matematické modelovanie štruktúrneho vzorca v chémii vyžaduje použitie grafu s násobnými hranami (pripomeňme, že chemická štruktúrna formula obsahuje aj násobné väzby – dvojnú a trojnú, ktoré sú dobre formalizovateľné pomocou násobných hrán grafu).

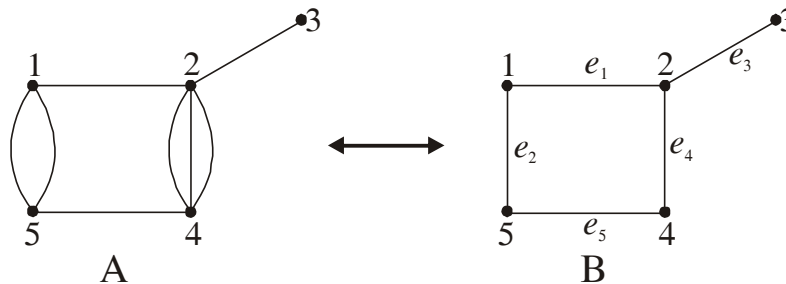
OBRÁZOK 10.2.
GRAF
S NÁSOBNÝMI
HRANAMI


Diagram A znázorňuje graf s násobnými hranami $\{1,5\}$ a $\{2,4\}$, diagram B znázorňuje graf s množinou hrán $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$, kde zobrazenie f je špecifikované takto: $f(e_1) = 1$, $f(e_2) = 2$, $f(e_3) = 1$, $f(e_4) = 3$, $f(e_5) = 1$.

PSEUDOGRAF

Pseudograf je taký graf, ktorý neobsahuje orientované hrany, ale ktorý môže obsahovať násobné hrany alebo slučky (slučka je hrana, ktorá je vychádzajúca a vchádzajúca do rovnakého vrcholu). Aj keď terminológia nie je ustálená, väčšinou sa používa rozdelenie podľa tab. 10.1

Tabuľka 10.1. Názvy grafov podľa typu hrán

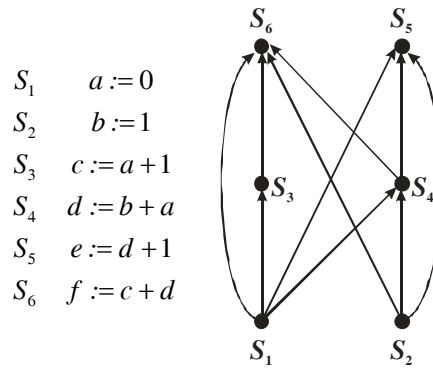
Typ	Hrany	Násobné hrany povolené	Slučky povolené
obyčajný graf	neorientované	nie	nie
multigraf	neorientované	áno	nie
pseudograf	neorientované	áno	áno
orientovaný graf	orientované	nie	áno
orientovaný multigraf	orientované	áno	áno

Grafy sa využívajú v najrôznejších oblastiach vedy a techniky. V ekológii napríklad orientované hrany môžu predstavovať, ktorý druh je potravou iného druhu.

APLIKÁCIE:
PSYCHOLÓGIA,
ANTROPOLOGIA,
SÚŤAŽE

Ako už bolo uvedené vyššie, chemická štruktúrna formula je formálne reprezentovaná neorientovaným grafom s násobnými hranami. V psychológii sa grafy využívajú na znázornenie, kto je koho priateľom, alebo na znázornenie dominancie, v antropológii na znázornenie príbuzenských vzťahov, v súťažiach na výsledky turnajov a napr. pri počítačoch na znázornenie časového poradia úloh alebo toho, ktoré úlohy môžu byť spustené súčasne.

OBRÁZOK 10.3.
GRAF PLÁNOVANIA
UDALOSTÍ



Príklad grafu plánovania udalostí. Graf ukazuje, že príkaz S_5 nemôže byť vykonaný pred príkazmi S_1 , S_2 , a S_4 , ale dvojice príkazov $\{S_1, S_2\}$, $\{S_3, S_4\}$ a $\{S_5, S_6\}$ môžu byť spracované paralelne.

GRAF PLÁNOVANIA
UDALOSTÍ – PRE
PARALELNÉ
SPRACOVANIE

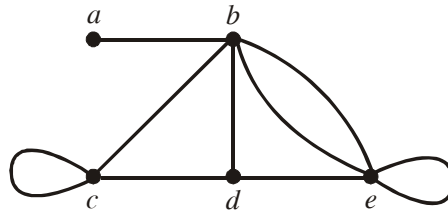
Počítačové programy môžu byť rýchlejšie spracované pri súčasnom spracovaní niektorých príkazov. Je dôležité nevykonať príkaz, ktorý vyžaduje výsledky ešte nevykonaných príkazov. Závislosť príkazov na predchádzajúcich príkazoch môže byť reprezentovaná orientovaným grafom. Každý príkaz je reprezentovaný vrcholom, a z jedného vrcholu do druhého ide hrana, keď príkaz reprezentovaný druhým vrcholom nemôže byť spracovaný pred príkazom reprezentovaným prvým vrcholom. Budeme tiež požadovať, že premenná sa nemôže zároveň meniť a byť používaná v inom príkaze. Taký graf voláme *graf plánovania udalostí* (precedence graph), príklad grafu pre počítačový program je na obr. 10.3. Ukazuje, že príkaz S_5 nemôže byť vykonaný pred príkazmi S_1 , S_2 , a S_4 .

10.2 NIEKTORÉ ZÁKLADNÉ DEFINÍCIE

SUSEDNÉ
VRCHOLY, HRANA
INCIDENTNÁ
S VRCHOLMI,
STUPEŇ VRCHOLU

Dva vrcholy u a v v neorientovanom grafe G sa volajú *susedné* (adjacent, neighbours) v G , keď $\{u, v\}$ je hrana grafu G . Keď $e = \{u, v\}$, o hrane e sa hovorí, že je *incidentná* (incident) s vrcholmi u a v . O hrane e sa tiež hovorí, že *spája* vrcholy u a v . *Stupeň vrcholu* v neorientovanom grafe je rovný počtu hrán s ním incidentných, s výnimkou faktu, že slučka na vrchole prispieva dvakrát k stupňu vrcholu. Stupeň vrcholu v sa označuje $deg(v)$. Stupne vrcholov sú ilustrované na obr. 10.4.

OBRÁZOK 10.4.
STUPNE
VRCHOLOV GRAFU




Stupne vrcholov grafu na tomto obrázku sú nasledujúce: $deg(a) = 1$, $deg(b) = 5$, $deg(c) = 4$, $deg(d) = 3$, $deg(e) = 5$

IZOLOVANÝ
VRCHOL

Vrchol stupňa 0 sa volá **izolovaný**; taký vrchol nie je spojený zo žiadnym iným vrcholom. Keď sčítame stupne všetkých vrcholov grafu, každá hrana grafu prispieva k súčtu dvojkou. Súčet stupňov vrcholov je teda dvojnásobkom počtu hrán. Pre neorientovaný graf (môže mať aj násobné hrany a slučky) s $|E|$ hranami teda platí

$$2|E| = \sum_{v \in V} deg(v) \quad (10.1)$$

VETA 10.1. 

Neorientovaný graf má párný počet vrcholov nepárneho stupňa.

Dôkaz: Nech V_1 a V_2 sú množiny vrcholov párneho, resp. nepárneho stupňa neorientovaného grafu $G=(V,E)$. Potom

$$2|E| = \sum_{v \in V} deg(v) = \sum_{v \in V_1} deg(v) + \sum_{v \in V_2} deg(v) \quad (10.2)$$

Pretože $deg(v)$ je párne pre $v \in V_1$, prvý člen na pravej strane je párný. Súčet na pravej strane musí byť tiež párný, pretože ľavá strana je párna. Preto aj druhý člen na pravej strane musí byť párný. Pretože všetky sčítance tejto sumy sú nepárne, aby vytvorili párne číslo, musí ich byť párný počet. ■

VSTUPNÝ A
VÝSTUPNÝ
STUPEŇ VRCHOLU

Orientované hrany sa vyjadrujú pomocou usporiadanej dvojice vrcholov, napr. (u,v) pre orientovanú hranu smerujúcu z vrcholu u (začiatocného vrcholu) do vrcholu v (koncového vrcholu). V grafe s orientovanými hranami pomenujeme **vstupný stupeň vrcholu** v počet hrán, ktoré majú vrchol v ako koncový vrchol. Túto hodnotu označujeme $deg^-(v)$. Ako **výstupný stupeň vrcholu**, $deg^+(v)$, označíme počet hrán, ktoré z vrcholu v vychádzajú, teda ho majú ako začiatocný vrchol.

VETA 10.2.



Nech $G = (V,E)$ je graf s orientovanými hranami. Potom

$$|E| = \sum_{v \in V} deg^+(v) = \sum_{v \in V} deg^-(v) \quad (10.3)$$

Dôkaz: Pretože každá orientovaná hrana má svoj vstupný a výstupný vrchol, prispieva rovnako jednotkou k sumám vstupných a výstupných stupňov vrcholov, ktoré sa potom rovnajú počtu orientovaných hrán. ■

POSTUPNOSŤ
STUPŇOV
VRCHOLOV GRAFU

Pre daný neorientovaný graf nie je zložitá nájsť stupne jeho vrcholov a zoradiť ich ľubovoľne do postupnosti, napríklad podľa indexov vrcholov. Naopak, keď je daná konečná postupnosť celých nezáporných čísel s_1, s_2, \dots, s_n , je otázka, či mô-

– HAVLOVA
A HAKIMIHO VETA

žeme zostrojiť graf s vrcholmi, ktoré majú poporiadku stupne rovné týmto číslam, keď postupujeme po indexoch vrcholov. Ak áno, postupnosť voláme **grafová postupnosť**. Aby postupnosť bola grafová, musí pre každý index i platiť $s_i \leq n-1$ a samozrejme aj $\sum_{i=1}^n s_i$ je párne číslo. Nutná a postačujúca podmienka je vyjadrená v Havlovej vete (tiež sa niekedy volá Hakimiho veta, podľa autora, ktorý prišiel na rovnaký výsledok nezávisle o 7 rokov neskôr):

VETA 10.3.



Nech je daná nerastúca postupnosť nezáporných celých čísel pre $n \geq 3$

$$s_1, s_2, \dots, s_n, \tag{10.4}$$

kde $1 \leq s_1 \leq n-1$. Postupnosť (10.4) je grafová práve vtedy, keď je grafová tiež postupnosť

$$s_2 - 1, s_3 - 1, \dots, s_{s_1+1} - 1, s_{s_1+2}, \dots, s_n \tag{10.5}$$

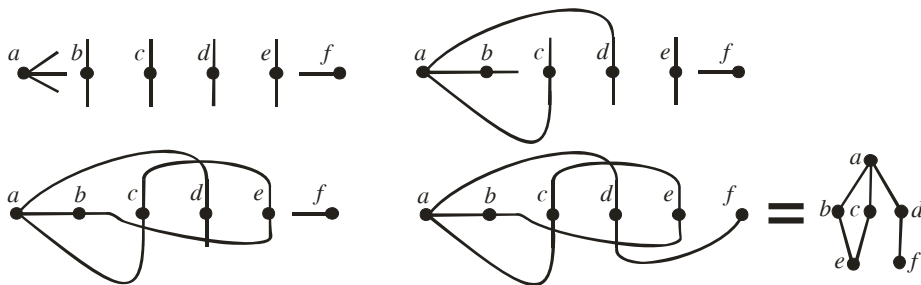
KONŠTRUKCIA
GRAFU PRE
GRAFOVÚ
POSTUPNOSŤ

Vetu nebudeme dokazovať. Táto veta môže byť použitá rekurzívne k zisteniu, či dlhšia postupnosť je grafová. Základný prípad je, že postupnosť 0 je grafová. Keď v akomkoľvek štádiu rekurzie je ľubovoľný prvok novej postupnosti záporný, ani pôvodná postupnosť nie je grafová. Poznamenajme, že skrátené postupnosti môžu vyžadovať preusporiadanie podľa veľkosti, kým sa na ne veta znova použije. Veta sa dá použiť aj pre konštrukciu grafu pre množinu vrcholov s danými stupňami. Keď je postupnosť grafová, zoberieme prvý vrchol o stupni s_1 a spojíme ho hranami s s_1 ďalšími vrcholmi. Podobne postupujeme s ďalšími vrcholmi. Touto konštrukciou vytvorený graf nemusí byť jediný pre množinu vrcholov s danými stupňami, postupnosť môže odpovedať aj veľa iným neizomorfným grafom.

Ako príklad kontroly, či je postupnosť grafová, si môžeme uviesť postupnosť 3,2,2,2,2,1. Tú zmeníme odobratím prvého čísla – trojky a odpočítaním jednotiek od nasledujúcich troch čísel na postupnosť 1,1,1,2,1, tú usporiadame, dostaneme 2,1,1,1,1, odobratím prvého čísla – dvojky a odpočítaním dvoch jednotiek dostávame 0,0,1,1,1, tú usporiadame, dostaneme 1,1,0,0,0, odobratím prvého čísla – jednotky a odpočítaním jednotky od ďalšieho čísla dostávame 0,0,0,0,0. Teda postupnosť je grafová.

Graf odpovedajúci tejto postupnosti zostavíme ako na obr. 10.5.

OBRÁZOK 10.5.
KONŠTRUKCIA
GRAFU PRE
GRAFOVÚ
POSTUPNOSŤ

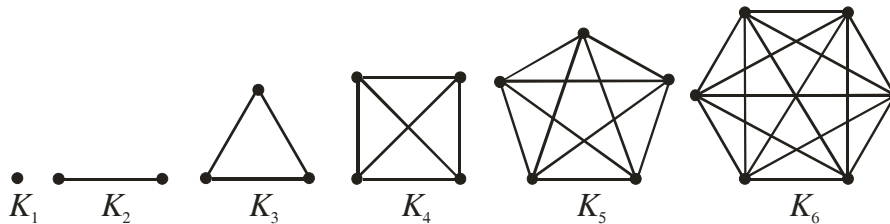


Konštrukcia grafu zodpovedajúceho grafovej postupnosti 3,2,2,2,2,1.

Niektoré špeciálne typy grafov

KOMPLETNÝ GRAF *Kompletný graf* (alternatívne volaný aj úplný graf) o n vrcholoch, označovaný ako K_n , je taký graf, ktorý obsahuje práve jednu hranu medzi každou dvojicou rôznych vrcholov. Grafy K_n pre $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ sú zobrazené na obr. 10.6.

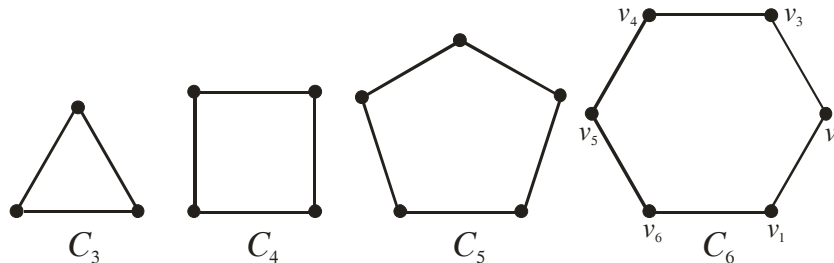
OBRÁZOK 10.6.
KOMPLETNÉ
GRAFY



Kompletné grafy

KRUŽNICA *Kružnica* dĺžky n , alebo *n-uholník* C_n , $n \geq 3$, pozostáva z vrcholov v_1, v_2, \dots, v_n a hrán $\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \dots, \{v_{n-1}, v_n\}$, a $\{v_n, v_1\}$. Na obr. 10.7 sú n -uholníky C_3, C_4, C_5 a C_6 .

OBRÁZOK 10.7.
KRUŽNICE



Kružnice (označenie C je podľa angl. cycle)

BIPARTITNÉ GRAFY Graf, ktorý má vlastnosť, že jeho vrcholová množina môže byť rozdelená na dve disjunktné podmnožiny V_1 a V_2 tak, že každá hrana spája vrchol z jednej z týchto podmnožín s vrcholom z druhej z týchto podmnožín, sa volá **bipartitný graf**. Ako príklad môžeme uviesť graf existujúcich a minulých manželstiev na dedine, kde hrana spája vždy manžela s manželkou. Taký graf sa dá rozdeliť na množinu manželov na jednej strane a množinu manželiek na strane druhej. Niektorí z páru môžu byť spojení s viacerými vrcholmi druhej podmnožiny, keď boli viackrát ženatí/vydaté za rozdielnych partnerov, ale aspoň na Slovensku sa zatiaľ nenájde pár zosobášených mužov či žien.

PRÍKLAD 10.1. Sú grafy C_6 alebo K_6 bipartitné?

Graf C_6 z obr. 10.7. je bipartitný, $V_1 = \{v_1, v_3, v_5\}$, $V_2 = \{v_2, v_4, v_6\}$. Graf K_6 z obr. 10.6. nie je bipartitný, pri každom možnom rozložení na dve vrcholové podmnožiny jedna z podmnožín musí obsahovať aspoň 2 vrcholy, ktoré podľa definície kompletného grafu musia byť spojené hranou. V skutočnosti, žiadny graf o viac ako dvoch vrcholoch nie je kompletný a súčasne bipartitný. Ďalej zmieňovaný „kompletný bipartitný“ graf je špeciálny typ grafu, ktorý nie je kompletný ako taký, teda ľubovoľná dvojica vrcholov v ňom nie je spojená hranou.

BIPARTITNÝ GRAF
– HVIEZDICOVÁ
TOPOLOGIA SIETE

Ako možné aplikácie špeciálnych typov grafov si môžeme uviesť lokálnu sieť počítačov. Takáto sieť môže mať typicky jednu z dvoch topológií. Prvou typickou topológiou je hviezdicová, kde všetky zariadenia sú prepojené s centrálnym riadiacim zariadením. Táto topológia môže byť reprezentovaná ako *kompletný bipartitný graf*, ktorý značíme $K_{1,n}$, kde množinu V_1 tvorí jeden vrchol, množinu V_2 tvorí n vrcholov, a slovo *kompletný* tu znamená, že všetky vrcholy z jednej množiny sú prepojené so všetkými vrcholmi z druhej množiny. Indexy u K sa rovnajú počtom vrcholov v daných dvoch množinách.

KRUHOVÁ
TOPOLOGIA

Druhou typickou topológiou je kruhová topológia, kde každé zariadenie je spojené presne s dvoma ďalšími. Takéto topologie sa modelujú pomocou n -uholníkov C_n , ako na obr. 10.7. Samozrejme existujú aj ich rôzne kombinácie.

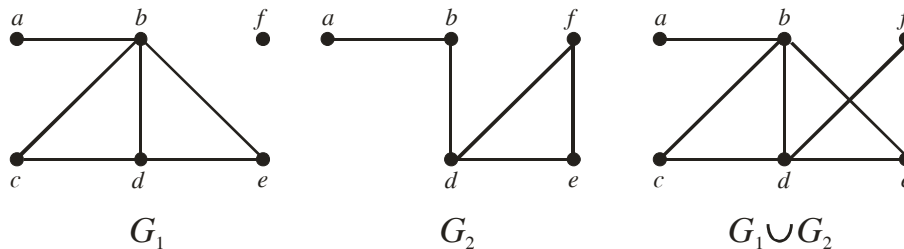
PODGRAF

Keď chceme modelovať iba podproblém väčšieho problému (napr. dopravného), môžeme z grafu odstrániť uzly (mestá), ktoré nás nezaujímajú, a všetky hrany s nimi spojené. Tak dostávame z pôvodného grafu (dopravnej siete) jeho podgraf.

Podgraf a zjednotenie

Podgraf grafu $G = (V, E)$ je graf $H = (W, F)$, kde $W \subseteq V$ a $F \subseteq E$, kde hrany z F sú incidentné iba s vrcholmi z W . **Zjednotenie** dvoch grafov $G_1 = (V_1, E_1)$ a $G_2 = (V_2, E_2)$ je graf s vrcholovou množinou $V_1 \cup V_2$ a hranovou množinou $E_1 \cup E_2$. Zjednotenie týchto grafov sa značí $G_1 \cup G_2$, pozri príklad na obr. 10.8.

OBRÁZOK 10.8.
ZJEDNOTENIE
DVOCH GRAFOV



Príklad zjednotenia dvoch grafov. Grafy G_1 a G_2 sú súčasne podgrafmi zjednoteného grafu $G_1 \cup G_2$

10.3 REPREZENTÁCIA GRAFOV A IZOMORFIZMUS

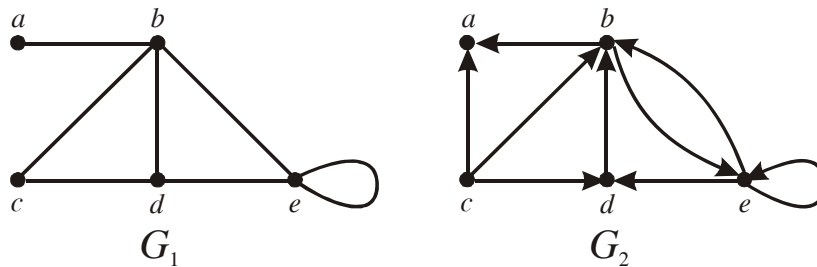
PRIRADENIE 1-1
VRCHOLOV, KTORÉ
ZACHOVÁVA
HRANY – GRAFY SÚ
IZOMORFNÉ

Niekedy dva grafy sú rovnaké v tom zmysle, že keď vhodne posunieme vrcholy jedného grafu nad druhý tak, aby sa prekryvali, aj všetky hrany sa budú prekryvať. Túto voľne povedanú definíciu môžeme preformulovať tak, že existuje medzi grafmi priradenie 1-1 vrcholov, ktoré zachováva hrany. V tom prípade hovoríme, že grafy sú *izomorfné*. Určiť, či sú grafy izomorfné, býva niekedy veľmi zložitý problém. Aby sa grafy dali počítačovo spracovať, potrebujeme ich reprezentovať aj inak ako grafickým obrázkom.

REPREZENTÁCIA:
ZOZNAM SUSEDOV

Jednou z možností reprezentácie obyčajného grafu je vypísať všetky vrcholy a hrany tohto grafu. Inou možnosťou zápisu je zoznam susedov (adjacency list), ktorý špecifikuje susedné vrcholy pre každý vrchol grafu. U orientovaného grafu sa tak dajú pre každý vrchol pripísať všetky koncové vrcholy hrán začínajúcich u daného vrcholu grafu (obr. 10.9 a tab. 10.2).

OBRÁZOK 10.9.
PSEUDOGRAF A
ORIENTOVANÝ
GRAF



Pseudograf a orientovaný graf na ukážku reprezentácie grafu.

Tabuľka 10.2. Zoznam susedov pre grafy z obr. 10.9

Vrchol grafu G_1	Susedné vrcholy	Vrchol grafu G_2	Susedné vrcholy
a	b	a	
b	a, c, d, e	b	a, e
c	b, d	c	a, b, d
d	b, c, e	d	b
e	b, d, e	e	b, e, d

MATICA
SUSEDNOSTI
(ADJACENCY
MATRIX)

Predpokladajme, že $G = (V, E)$ je obyčajný graf, kde $|V| = n$. Predpokladajme, že vrcholy G sú zoradené náhodne ako v_1, v_2, \dots, v_n . **Matica susednosti** A grafu G vzhľadom k danému zoradeniu vrcholov, je $n \times n$ matica obsahujúca iba nuly a jednotky, s prvkom a_{ij} rovným 1 vtedy, keď sú vrcholy v_i, v_j susedné, a rovným 0, keď nie sú spojené hranou. Teda $A = (a_{ij})$, kde

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{pre } \{v_i, v_j\} \in E \text{ grafu } G \\ 0 & \text{ináč} \end{cases}$$

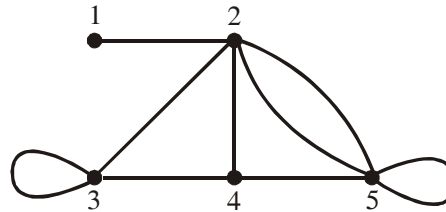
Vzhľadom k tomu, že matica susednosti je založená na zoradení (očíslovaní) vrcholov, pre graf o n vrchoch môže existovať až $n!$ rôznych matíc susednosti. Matica susednosti pre obyčajný graf je symetrická, teda $a_{ij} = a_{ji}$ pre $\forall i, j$. Ďalej, keďže obyčajný graf nemá žiadne slučky, prvky a_{ii} na hlavnej diagonále sú rovné 0.

MATICA
SUSEDNOSTI PRE
NÁSOBNÉ HRANY A
SLUČKY

Takáto matica sa dá zovšeobecniť ako **matica susednosti pre násobné hrany a slučky**, kde namiesto 1 ako vstupu a_{ij} pre vrcholy v_i, v_j spojené hranou sa môže nachádzať násobnosť hrany, a na diagonále sa môže nachádzať 1, keď má vrchol slučku (pozri obr. 10.10).

OBRÁZOK 10.10.
GRAF A JEHO
MATICA
SUŠEDNOSTI

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$



Graf a jeho matrica susednosti.

MATICA
SUŠEDNOSTI PRE
ORIENTO VANÝ
MULTIGRAF

Matrica susednosti sa rovnako dá zovšeobecniť pre orientovaný multigraf, kde nenulový vstup a_{ij} pre vrcholy v_i, v_j spojené hranou označuje násobnosť orientovanej hrany vychádzajúcej z vrcholu v_i a vchádzajúcej do vrcholu v_j . Pre grafy obsahujúce orientované hrany matrica nemusí byť symetrická.

INCIDENČNÁ
MATICA

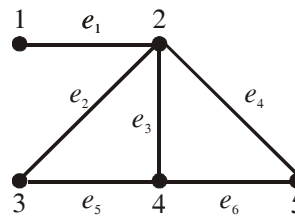
Pre obyčajné grafy sa tiež používa **incidenčná matrica** (pozri obr. 10.11). Pre neorientovaný graf $G = (V, E)$ s n vrcholmi a m hranami je incidenčná matrica pre dané indexovanie hrán a vrcholov vyjadrená ako $n \times m$ matrica $M = (m_{ij})$, kde

$$m_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{keď hrana } e_j \text{ je incidentná s vrcholom } v_i \\ 0 & \text{inak} \end{cases}$$

Incidenčná matrica môže byť tiež použitá na reprezentovanie násobných hrán alebo slučiek.

OBRÁZOK 10.11.
GRAF A JEHO
INCIDENČNÁ
MATICA

$$\begin{matrix} & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \\ v_1 & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$



Graf a jeho incidenčná matrica.

INVARIANT
VZHLADOM NA
IZOMORFIZMUS

Na zistenie, či sú dva grafy izomorfné, musíme nájsť takú bijekciu medzi ich vrcholmi, ktorá zachováva hrany (aj ich multiplicitu). V opačnom prípade, ak chceme dokázať, že dva grafy nie sú izomorfné, stačí často ukázať, že sa líšia v nejakej vlastnosti, ktorú musia izomorfné grafy mať rovnakú. Taká vlastnosť sa volá *invariant* vzhľadom na izomorfizmus obyčajných grafov. Izomorfné grafy musia mať rovnaký počet vrcholov, hrán, multimnožinu stupňov vrcholov.

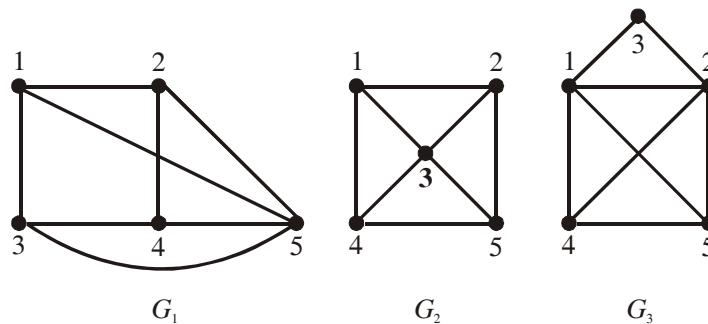
PRÍKLAD 10.2.

Zistite, ktoré z grafov na obr. 10.12 sú navzájom izomorfné.

Graf G_1 je izomorfný s grafom G_2 , pretože existuje funkcia f mapujúca vrcholy grafu G_1 ako v_i a vrcholy grafu G_2 ako w_i , kde $f(v_1) = w_1, f(v_2) = w_2, f(v_3) = w_4, f(v_4) = w_5, f(v_5) = w_3$, pre ktorúkoľvek dvojicu vrcholov v_i, v_j , ktorá bola (nebola) spojená hranou, platí, že je spojená (nie je spojená) hranou aj zodpovedajúca dvojica w_k, w_l , kde $f(v_i) = w_k, f(v_j) = w_l$. Graf G_3 nie je izomorfný s grafmi G_1 a

G_2 , pretože mu zodpovedajúce vrcholy majú stupne 2,3,3,4,4, zatiaľ čo stupne vrcholov grafov G_1 a G_2 sú 3,3,3,3,4. Takéto a iné pomôcky a heuristiky sa využívajú pri zisťovaní izomorfizmu. Aj keď má algoritmus na zistenie izomorfizmu dvoch grafov v najhoršom prípade stále exponenciálnu zložitosť, existujú algoritmy, ako napr. NAUTY, ktoré zvládnu úlohu pre 100 vrcholové grafy bežne riešiť za menej ako 1 sekundu.

OBRÁZOK 10.12.
KTORÉ DVOJICE
GRAFOV SÚ
NAVZÁJOM
IZOMORFNÉ?



Ktoré dvojice grafov sú navzájom izomorfné? (Pozor, keď sa hrany krížia, neznamená to, že je tam automaticky vrchol!)

10.4 SÚVISLOSŤ V NEORIENTOVANÝCH GRAFOCH A EULEROVSKÉ ŤAHY

SLED, ŤAH, CESTA,
UZAVRETÝ SLED,
UZAVRETÝ ŤAH,
KRUŽNICA,
EULEROVSKÝ ŤAH

Nech $G = (V, E)$ je graf. Postupnosť $(v_0, e_1, v_1, e_2, \dots, e_k, v_k)$ nazývame **sled**, ak $v_0, v_1, \dots, v_k \in V$, $e_1, \dots, e_k \in E$, a $e_i = \{v_{i-1}, v_i\}$ pre každé $i = 1, \dots, k$. **Sled**, v ktorom sú všetky hrany navzájom rôzne nazývame **ťah** a sled, v ktorom sú aj všetky vrcholy navzájom rôzne nazývame **cesta**. **Uzavretý sled** je taký sled, v ktorom je prvý vrchol zhodný s posledným. **Uzavretý ťah** je taký ťah, v ktorom je prvý vrchol zhodný s posledným. **Kružnica** je uzavretý ťah, v ktorom sú všetky vrcholy navzájom rôzne, s výnimkou prvého a posledného, ktoré sú zhodné. Ťah je **eulerovský ťah**, keď obsahuje každú hranu (príklady pozri na obr. 10.13)².

SÚVISLÝ GRAF

Neorientovaný graf sa volá **súvislý**, pokiaľ existuje cesta medzi každou dvojicou rozdielnych vrcholov grafu (pozri napr. obr. 10.14). Napríklad v počítačovej sieti môžu ľubovoľné dva počítače vzájomne komunikovať práve vtedy, keď je graf siete súvislý.

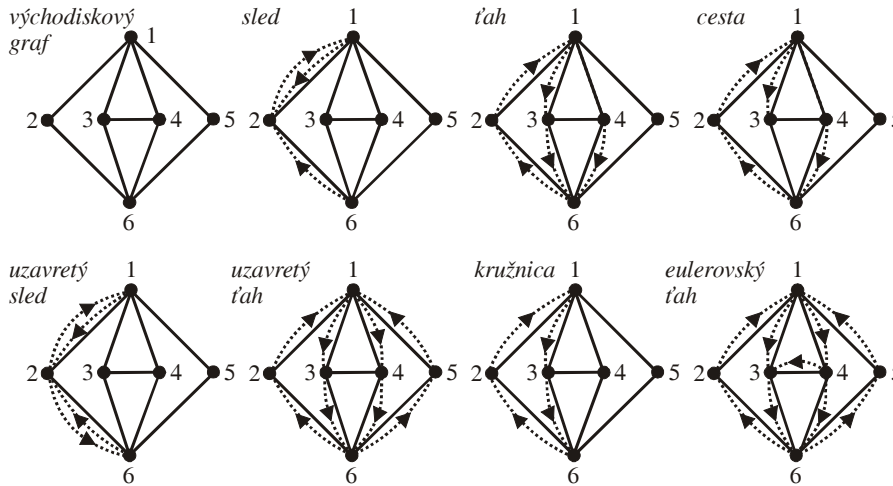
KOMPONENT

Graf, ktorý nie je súvislý, je zjednotením dvoch alebo viacerých súvislých grafov, z ktorých žiaden pár nemá spoločný vrchol. Tieto súvislé podgrafy (ktoré sú maximálne v tom zmysle, že neexistuje žiaden ďalší vrchol, ktorý by bol spojený s ich vrcholmi hranou v pôvodnom grafu a každá ich dvojica vrcholov musí byť

² Možno zaviesť aj zodpovedajúce pojmy pre orientované grafy, kedy máme tieto dvojice: sled – spojenie, ťah – trať, cesta – orientovaná cesta (dráha), kružnica (n -uholník) – okruh, cyklus

v podgrafe spojená hranou, pokiaľ bola spojená v pôvodnom grafe) sa volajú **komponenty** grafu.

OBRÁZOK 10.13.
SLED, ŤAH, CESTA,
UZAVRETÝ SLED,
UZAVRETÝ ŤAH,
KRUŽNICA,
EULEROVSKÝ ŤAH

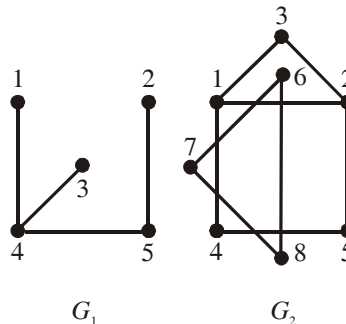


Postupnosti vrcholov východiskového grafu: Sled (6,2,1,2) – opakujú sa vrcholy aj hrany, ťah (4,6,2,1,3,6) – neopakujú sa hrany, cesta (4,6,2,1,3) – neopakujú sa vrcholy ani hrany, uzavretý sled (6,2,1,2,6) – posledný vrchol totožný s prvým, uzavretý ťah (4,6,2,1,3,6,5,1,4) – posledný vrchol totožný s prvým, kružnica (6,2,1,3,6) – ťah, posledný vrchol totožný s prvým, inak sa neopakujú, eulerovský ťah (4,6,2,1,3,6,5,1,4,3) – prejde cez všetky hrany

MOST,
ARTIKULÁCIA

Niekedy odstránením hrany alebo vrcholu z grafu sa graf rozpadne na viac komponentov. Takú hranu voláme **most** a vrchol voláme **artikulácia**. Napr. v obr. 10.14 u grafu G_1 sú artikuláciami vrcholy v_4 a v_5 a mostmi sú všetky hrany, zatiaľ čo u grafu G_2 neexistujú ani artikulácie, ani mosty.

OBRÁZOK 10.14.
SÚVISLÝ
A NESÚVISLÝ GRAF



Príklad súvislého a nesúvislého grafu (graf G_2 je nesúvislý, má dva komponenty s vrcholovými množinami $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ a $\{v_6, v_7, v_8\}$, medzi dvojicami vrcholov z rôznych množín neexistuje cesta.


UZAVRETÝ
EULEROVSKÝ ŤAH

Uzavretý eulerovský ťah je taký eulerovský ťah, kde posledný vrchol je totožný s prvým. Eulerova veta, prvá veta teórie grafov z r. 1736, ktorá rieši problém z obr. 10.1:

VETA 10.4.

Súvislý graf má uzavretý eulerovský ťah práve vtedy, keď má všetky vrcholy párneho stupňa.

Na dôkaz tejto vety si najprv dokážeme pomocnú vetu:

VETA 10.5. 

Každý vrchol grafu G s uzavretým eulerovským ťahom je incidentný s hranou aspoň jednej kružnice tohto grafu.

DÔKAZ VETY 10.5.

Dôkaz vety 10.5. Nech x je ľubovoľný vrchol a xy hrana s ním incidentná. Hrana xy nemôže byť mostom grafu G , pretože po jej odstránení by sme dostali nesúvislý graf a komponent s uzlom x by mal 1 vrchol nepárneho stupňa, čo odporuje vete 10.1. Existuje teda kružnica prechádzajúca hranou xy a teda tiež vrcholom x . ■

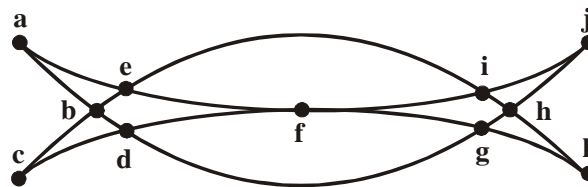
DÔKAZ VETY 10.4.

Dôkaz vety 10.4 vychádza z predpokladu, že keď sa graf G dá zostrojiť jedným uzavretým ťahom, je súvislý. V grafe nemôže existovať vrchol v nepárneho stupňa, pretože ťahom do v práve toľkokrát vstupujeme, koľkokrát z neho vystupujeme. Predpokladajme súvislý graf s vrcholmi párneho stupňa. Zvoľme ľubovoľný vrchol w . Podľa vety 10.5 existuje v našom grafe kružnica, ktorá obsahuje vrchol w , táto kružnica nám určuje uzavretý ťah začínajúci a končiaci vo w (presnejšie, v závislosti od smeru, ktorým sa po kružnici pohybujeme, môžeme vybrať z 2 takých ťahov). Zo všetkých ťahov začínajúcich a končiacich uzlom w si zoberme ťah T_{max} s najväčšou dĺžkou. Ukážeme si, že to je náš želaný uzavretý eulerovský ťah. Predpokladajme, že by niektorá hrana grafu nepatriala do T_{max} . Zostrojme podgraf G_1 grafu G , do ktorého dáme všetky hrany grafu G nepatriace do T_{max} a vrcholy s nimi incidentné. Je vidno, že G_1 je graf so všetkými vrcholmi párneho stupňa, ktorý sa dá rozložiť na súvislé podgrafy. Teda aj G_1 obsahuje aspoň jeden uzavretý ťah (dôvod je podobný ako v dôkaze vety 10.5). Teraz ale jednoducho zostrojíme z T_{max} nový ťah tým, že doňho „vnoríme“ uzavretý ťah grafu G_1 . Tento nový ťah má ale dĺžku väčšiu, ako bola dĺžka T_{max} , čím dochádzame ku sporu. Preto T_{max} obsahuje každú hranu grafu G a tým je veta dokázaná. ■

PRÍKLAD 10.3.

Môže byť tzv. Mohamedova šabl'a, ukázaná na obr. 10.15, nakreslená jedným ťahom, ktorý začína a končí v rovnakom bode (a žiadna čiara nie je zdvojená)?

OBRÁZOK 10.15.
MOHAMEDOVA
ŠABL'A



Graf nazývaný Mohamedova šabl'a.

Všetky vrcholy grafu G na obrázku 10.15. sú párneho stupňa, teda graf má uzavretý eulerovský ťah. Použijeme na jeho konštrukciu konštruktívny postup z dôkazu vety 10.5. Najprv zostrojíme ľubovoľný uzavretý ťah v grafe, napr. ťah T : $a, b, d, c, b, e, i, f, e, a$. Keďže sme takto nenašli želaný uzavretý eulerovský ťah, zostrojíme podgraf G_1 grafu G , do ktorého dáme všetky hrany grafu G nepatriace do T a vrcholy s nimi incidentné. Potom v G_1 vytvoríme ťah $d, g, h, j, i, h, k, g, f, d$, ktorý prechádza cez všetky hrany grafu G_1 . Vnorením tohto ťahu do

prvého ťahu na vhodnom mieste dostávame ťah $a, b, d, g, h, j, i, h, k, g, f, d, c, b, e, i, f, e, a$, ktorý prechádza cez všetky hrany.

VETA 10.6.

Súvislý graf má otvorený (= nie uzavretý) eulerovský ťah práve vtedy, keď má dva vrcholy nepárneho stupňa.

Dôkaz: Keď má súvislý graf otvorený eulerovský ťah, zrejme má 2 vrcholy nepárneho stupňa. Opačne, keď máme graf s dvoma vrcholmi nepárneho stupňa, stačí ich spojiť s novým vrcholom x a všetky vrcholy majú párny stupeň a existuje uzavretý eulerovský ťah. Po odstránení vrcholu x a s ním incidentných hrán dostávame otvorený eulerovský ťah. ■

PRÍKLAD 10.4.

Dajú sa grafy na obr. 10.8 nakresliť jedným ťahom? Keďže grafy G_1, G_2 na obr. 10.8 obsahujú dva vrcholy nepárneho stupňa, uzavretý eulerovský ťah v nich neexistuje. Existuje v nich ale otvorený eulerovský ťah, ktorý existuje v súvislom grafe práve vtedy, keď má práve dva vrcholy nepárneho stupňa.

**APLIKÁCIE ŤAHOV
V SIAŤACH AJ PRI
SEKVENOVANÍ
DNA**

Aplikácie eulerovských ťahov a uzavretých ťahov sa dajú nájsť v plánovaní rozloženia obvodov, v posielaní paketov po sieti, alebo aj v molekulárnej biológii, kde sa eulerovské cesty používajú pri sekvenovaní DNA.

PRÍKLAD 10.5.

Použitím techniky prehľadávania do hĺbky navrhnete algoritmus pre konštrukciu uzavretého eulerovského ťahu.

Použijeme algoritmus z kapitoly 4.2, kde bola metóda prehľadávania do hĺbky použitá pre konštrukciu permutácií n objektov. Jeho jednoduchou modifikáciou dostaneme algoritmus pre konštrukciu uzavretého eulerovského ťahu (ak existuje)

**ALGORITMUS
10.1.
KONŠTRUKCIA
UZAVRETÉHO
EULEROVSKÉHO
ŤAHU
PREHĽADÁVANÍM
DO HĽBKY**

```

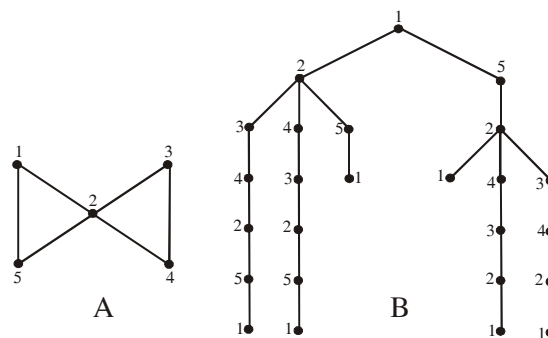
U1 := ∅; w1 := 1; U2 := Γ(1); d := 2; m := počet hrán;
while d > 1 do
  if Ud ≠ ∅ then
    begin wd := get_element(Ud); Ud := Ud - {wd};
      if d ≤ m then
        begin d := d + 1;
          Ud := Γ(wd-1);
          Z množiny Ud odstránime tie vrcholy
          i ∈ Γ(wd-1), ktorých hrany {i, wd-1} sa vy-
          skytujú v aktuálnom ťahu (w1, w2, ..., wd-1);
        end else
          if w1 = wd then
            begin print(w1, w2, ..., wm+1);
              d := d - 1;
            end;
          end else d := d - 1;
    end else d := d - 1;

```

Algoritmus je inicializovaný tým, že za prvý vrchol je vybraný vrchol indexovaný 1. Pokiaľ uzavretý eulerovský ťah existuje, potom je jedno, ktorý vrchol bol

zvolený za východzí. Symbol $\Gamma(i)$ reprezentuje množinu vrcholov, ktoré sú susedné s vrcholom i . Pri predlžovaní ťahu (vnútorný blok začínajúci príkazom $d:=d+1$), z množiny kandidátov U_d musíme odstrániť tie vrcholy, ktoré tvoria hrany vyskytujúce sa v predchádzajúcej časti ťahu. Algoritmus je ilustrovaný jednoduchým príkladom z obr. 10.16.

OBRÁZOK 10.16.
STROM RIEŠENÍ
PRE UZAVRETÝ
EULEROVSKÝ ŤAH



Strom³ riešení (diagram B) pre uzavretý eulerovský ťah zostrojený algoritmom prehľadávania do hĺbky z príkladu 10.5 pre obyčajný graf (diagram A).

PRÍKLAD 10.6.

Použitím techniky prehľadávania do hĺbky navrhňte algoritmus pre konštrukciu otvoreného eulerovského ťahu.

Tento algoritmus vznikne jednoduchou modifikáciou algoritmu z príkladu 10.5.

ALGORITMUS 10.2.
KONŠTRUKCIA
OTVORENÉHO
EULEROVSKÉHO
ŤAHU
PREHĽADÁVANÍM
DO HĽBKY

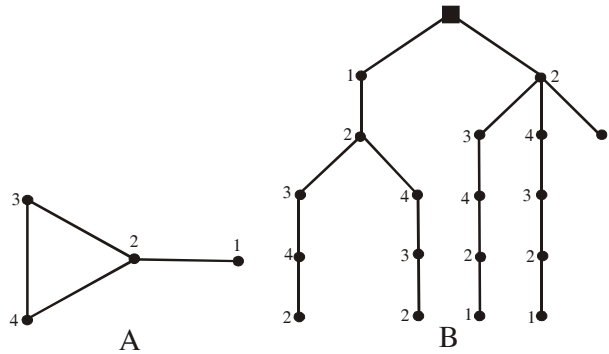
```

 $U_1 := \{\text{vrcholy s nepárnym stupňom}\};$   $d := 1;$   $m := \text{počet hrán};$ 
while  $d > 0$  do
  if  $U_d \neq \emptyset$  then
    begin  $w_d := \text{zober\_prvok}(U_d);$   $U_d := U_d - \{w_d\};$ 
      if  $d \leq m$  then
        begin  $d := d + 1;$ 
           $U_d := \Gamma(w_{d-1});$ 
          Z množiny  $U_d$  odstránime tie vrcholy
           $i \in \Gamma(w_{d-1})$ , ktorých hrany  $\{i, w_{d-1}\}$  sa vysky-
          tujú v aktuálnom ťahu  $(w_1, w_2, \dots, w_{d-1})$ ;
        end else
          begin  $\text{print}(w_1, w_2, \dots, w_{m+1});$ 
             $d := d - 1;$ 
          end;
        end else  $d := d - 1;$ 
    end
  
```

V tomto prípade algoritmus už musí byť inicializovaný množinou U_1 , ktorá obsahuje obidva vrcholy grafu s nepárnym stupňom. Algoritmus je ilustrovaný na obr. 10.17.

³ Strom je súvislý graf bez kružníc, podrobnejšie sa nimi budeme zaoberať v 12. kapitole.

OBRÁZOK 10.17.
STROM RIEŠENÍ
PRE OTVORENÝ
EULEROVSKÝ ŤAH



Strom riešení (diagram B) pre otvorený eulerovský ťah zostrojený algoritmom prehľadávania do hĺbky z príkladu 10.6 pre obyčajný graf (diagram A).

ORIENTOVANÁ
CESTA (DRÁHA),
OKRUH

Orientovaná cesta (dráha) z a do b v orientovanom grafe G je sekvencia jednej alebo viac hrán $(x_0, x_1), (x_1, x_2), (x_2, x_3), \dots, (x_{n-1}, x_n)$ v G , kde $x_0 = a$ a $x_n = b$, teda koncový vrchol jednej hrany je počiatočným vrcholom nasledujúcej hrany. Takáto cesta je označená $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n$ a má dĺžku n . Orientovaná cesta, ktorá začína a končí v rovnakom vrchole, sa volá **okruh** (alternatívne *cyklus*). U okruhov môžeme rozlišovať, v ktorom vrchole začínajú a v ktorom končia, a aj ktorým smerom idú, potom také okruhy považujeme za navzájom rôzne. Keď všetky hrany považujeme za neorientované, pre obyčajný graf vrcholy a hrany každého z týchto okruhov tvoria ale ten istý typ podgrafu daného grafu – kružnicu.

SILNO SÚVISLÝ
GRAF

Pre orientované grafy je situácia zo súvislosťou zložitejšia, môžeme si definovať, že graf je **silno súvislý**, keď pre ľubovoľné dva vrcholy a, b grafu existuje tak orientovaná cesta z a do b , ako aj cesta z b do a .

SLABO SÚVISLÝ
GRAF

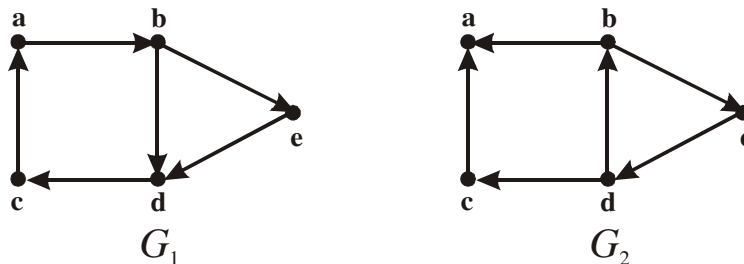
Orientovaný graf je **slabo súvislý**, keď existuje cesta medzi ľubovoľnými dvoma vrcholmi v neorientovanom grafe, vzniknutom z orientovaného grafu odstránením orientácie hrán.

PRÍKLAD 10.7.

Sú grafy na obr. 10.18. silno alebo slabo súvislé?

Graf G_1 je silno **súvislý**, pretože existuje cesta medzi ľubovoľnými dvoma vrcholmi v tomto orientovanom grafe. Preto je tento graf súčasne aj slabo súvislý. Graf G_2 je slabo súvislý, neexistuje cesta z vrcholu a na vrchol b .

OBRÁZOK 10.18.
SILNO A SLABO
SÚVISLÝ GRAF



Príklad silno súvislého grafu G_1 a slabo súvislého grafu G_2 .

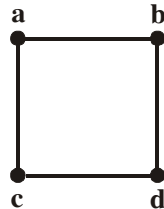
Počet ciest medzi dvoma vrcholmi v grafe môže byť určený pomocou jeho matice susednosti.

VETA 10.7.

Nech G je graf s maticou susednosti A vzhľadom na usporiadanie vrcholov v_1, v_2, \dots, v_n (s orientovanými alebo neorientovanými hranami a povolenými slučkami a násobnými hranami). Počet rozdielnych sledov dĺžky r z vrcholu v_i do vrcholu v_j , kde r je kladné celé číslo, sa rovná prvku a_{ij} matice A^r .

Dôkaz: Nech G je graf s maticou susednosti A vzhľadom na usporiadanie vrcholov v_1, v_2, \dots, v_n . Počet ciest dĺžky 1 z vrcholu v_i do vrcholu v_j sa rovná prvku a_{ij} matice A , čo je počet hrán z vrcholu v_i do vrcholu v_j . Použijeme indukciu. Predpokladajme, že prvok a_{ij} matice A^r sa rovná počtu rôznych sledov dĺžky r z vrcholu v_i do vrcholu v_j . Pretože $A^{r+1} = A^r A$, prvok a_{ij} matice A^{r+1} sa rovná $b_{i1} a_{1j} + b_{i2} a_{2j} + \dots + b_{in} a_{nj}$, kde b_{ik} je (i,k) prvok matice A^r . Podľa indukčnej hypotézy, b_{ik} je počet rozdielnych sledov dĺžky r z vrcholu v_i do vrcholu v_k .

Sled dĺžky $r+1$ z vrcholu v_i do vrcholu v_j sa vytvorí zo sledu dĺžky r z vrcholu v_i do nejakého vrcholu v_k a z hrany z vrcholu v_k do vrcholu v_j . Počet takýchto sledov je násobok počtu sledov dĺžky r z vrcholu v_i do vrcholu v_k , teda b_{ik} , a počtu hrán z vrcholu v_k do vrcholu v_j , teda a_{kj} . Keď sa tieto násobky sčítajú cez všetky možné vrcholy v_k , dostávame želaný výsledok odpovedajúci výslednému prvku matice vzniknutej násobením matíc $A^r A$. ■

OBRÁZOK 10.19.
GRAF K PRÍKLADU 10.8.

Graf k príkladu 10.8.

PRÍKLAD 10.8.

Koľko sledov dĺžky 4 z vrcholu a do vrcholu d existuje pre graf z obr. 10.19?

Matica susednosti a jej štvrtá mocnina vyzerajú takto

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad A^4 = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 8 & 8 & 0 \\ 0 & 8 & 8 & 0 \\ 8 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

a počet sledov o dĺžke 4 od vrcholu a do vrcholu d sa rovná prvku a_{14} matice A^4 , teda 8. Konkrétne ide o sledy a, b, a, b, d ; a, b, a, c, d ; a, b, d, b, d ; a, b, d, c, d ; a, c, a, b, d ; a, c, a, c, d ; a, c, d, b, d ; a a, c, d, c, d .



Veta 10.7. môže byť použitá na nájdenie dĺžky najkratšej cesty a tiež na zistenie, či je graf súvislý.

10.5 HAMILTONOVSKÉ CESTY A KRUŽNICE

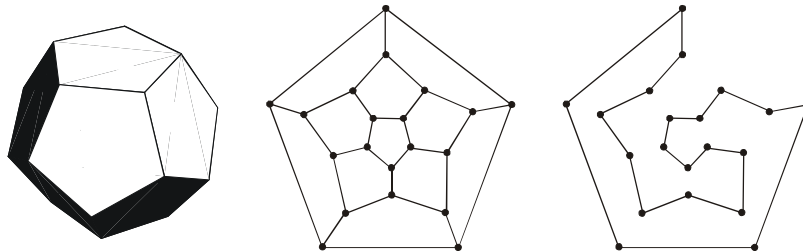
PREJSŤ PRÁVE
RAZ CEZ VŠETKY
VRCHOLY?

V prvom probléme teórie grafov bolo skúmané, či sa dá v multigrafe prejsť práve raz cez všetky hrany a prípadne sa aj vrátiť na východzí vrchol. Tento problém bol elegantne vyriešený. Existuje aj podobný problém pre vrcholy grafov: dá sa po hranách v grafe prejsť práve raz cez všetky vrcholy a prípadne sa aj vrátiť na východzí vrchol? Takýto problém už žiaľ nie je jednoducho riešiteľný.

HRA: PO HRANÁCH
DODEKAÉDRA

Problém bol prvý krát presne definovaný v roku 1857, kedy írsky matematik Sir *William Rowan Hamilton*⁴ navrhol hru zvanú "cesta okolo sveta". Bolo treba nájsť cestu po hranách dodekaédra (pravidelného dvanásťstenu) všetkými vrcholmi predstavujúcimi mestá vo svete tak aby sa prešlo cez všetky mestá až do východzieho po najmenšom počte hrán (pozri obr. 10.20). Keď má taká cesta mať minimálny počet hrán, vrcholy sa v nej nesmú opakovať, s výnimkou prvého, ku ktorému sa dôjde na konci. Takýchto ciest je pre dodekaédr (dodekahedron) samozrejme viac.

OBRÁZOK 10.20.
DODEKAHEDRON



Dodekahedron v priestore a ako graf, spolu s hamiltonovskou kružnicou.

HAMILTONOVSKÁ
CESTA A KRUŽNICA

Formálne sa dá definovať analogicky k eulerovskému ťahu a k eulerovskému uzavretému ťahu aj hamiltonovská cesta a kružnica: Cesta v_1, \dots, v_n v grafe $G = (V, E)$ o n vrcholoch sa volá **hamiltonovská cesta**, keď $v_i \neq v_j$ pre $1 \leq i < j \leq n$. Kružnica $v_1, v_2, \dots, v_n, v_1$ ($n > 2$) v grafe $G = (V, E)$ sa volá **hamiltonovská kružnica**.

POSTAČUJÚCE
PODMIENKY NA
EXISTENCIU
HAMILTONOVSKÉJ
KRUŽNICE

Nie sú žiaľ známe žiadne nutné a zároveň postačujúce kritériá na existenciu hamiltonovskej kružnice. Avšak existuje dostatok viet, ktoré stanovujú postačujúce podmienky na existenciu hamiltonovskej kružnice, a niektoré vlastnosti nám zasa určujú, že graf nemôže mať hamiltonovskú kružnicu. Napríklad graf s vrcholom

⁴ William Rowan Hamilton (1805–1865) sa narodil v Dubline v rodine právnikovi. Už ako 3-ročný vedel výborne čítať a zvládol pokročilú aritmetiku. Preto ho poslali bývať s jeho strýkom, vynikajúcim lingvistom. V 8. rokoch Hamilton vedel po latinsky, grécky a hebrejsky. Ďalej zvládol taliančinu, francúzštinu a orientálne jazyky, pýšil sa tým, že pozná toľko jazykov, koľko má rokov. V 17. rokoch sa ale zamerával na matematickú astronómiu. Do vstupu na vysokú školu Trinity College v 18. rokoch Hamilton nechodil do žiadnej školy, vzdelávali ho súkromní tútori. Po škole bol menovaný Kráľovským astronómom a v tejto funkcii zotrval celý život. Najvýznamnejšie objavy urobil, keď mal 20 rokov, predovšetkým v optike, abstraknej algebre (vynašiel objekty zvané quaternióny). Ku koncu života trpel alkoholizmom, žil odlúčene a ostali po ňom stohy nepublikovaných prác, premiešané s taniermi so zvyškami jedla.

stupňa 1 nemôže mať hamiltonovskú kružnicu, v kružnici musí byť každý vrchol incidentný s dvoma hranami. Naopak, obidve hrany pri vrchole stupňa dva musia byť súčasťou každej hamiltonovskej kružnice, pokiaľ nejaká v grafe existuje.

Vo všeobecnosti, čím viac hrán má graf, tým pravdepodobnejšie je, že bude mať hamiltonovskú kružnicu.

PRÍKLAD 10.9. Ukážte, že K_n má hamiltonovskú kružnicu pre $n > 3$.

Hamiltonovskú kružnicu môžeme začať v ľubovoľnom vrchole. Takáto kružnica môže byť skonštruovaná, keď ideme po vrchole v ľubovoľnom poradí, pokiaľ skončíme v rovnakom vrchole ako sme začali a vnútri cesty navštívime každý vrchol práve raz. To je možné preto, že v K_n existuje hrana medzi ľubovoľnými dvoma vrcholmi.

VETA 10.8.
(DIRACOVA
TEORÉMA)



Keď G je obyčajný graf s n vrcholmi pre $n \geq 3$ taký, že stupeň každého vrcholu v G je aspoň $n/2$, potom má graf G hamiltonovskú kružnicu.⁵

VETA 10.9.
(OREHO
TEORÉMA)

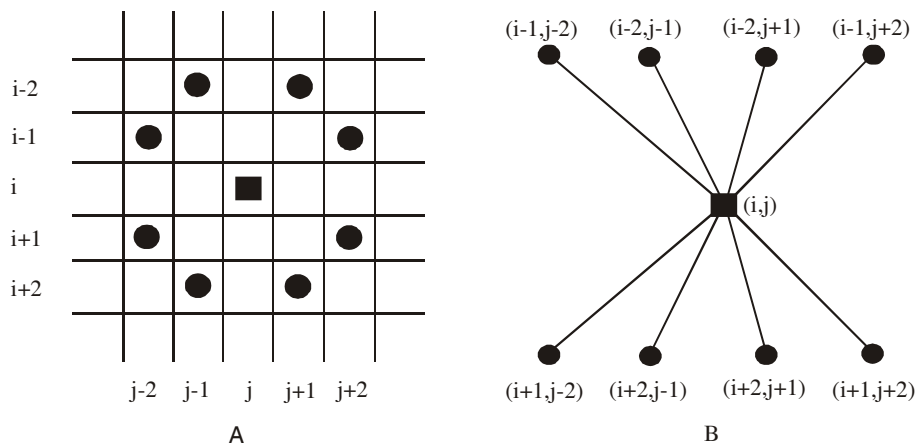


Keď G je obyčajný graf s n vrcholmi pre $n \geq 3$ taký, že $\deg(u) + \deg(v) \geq n$ pre každú dvojicu nesusedných vrcholov u a v v G , potom má graf G hamiltonovskú kružnicu.

Tieto teóremy ale nepodávajú nutné podmienky pre výskyt hamiltonovskej kružnice, napríklad podmienky z viet 10.8 a 10.9 neplatia pre C_5 , ktorý hamiltonovskú kružnicu celkom isto má. Teóremy nebudeme dokazovať.

PRÍKLAD 10.10. Nakreslite graf, ktorý reprezentuje hamiltonovskú cestu koňom na šachovnici 3×4 , prípustné ťahy koňom sú na obr. 10.21.

OBRÁZOK 10.21.
ŤAHY KOŇOM A
GRAF

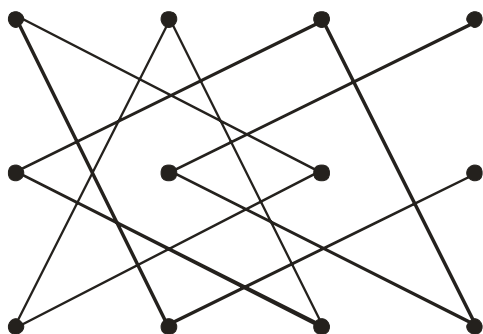


(A) Prípustné ťahy koňom na šachovnici a (B) odpovedajúci graf (východzí vrchol je označený štvorcem)

⁵ V prípade nepárneho n samozrejme zaokrúhľujeme $n/2$ nahor.

Kôň je šachová figúrka, ktorá môže ťahať alebo dve políčka vodorovne a jedno zvisle, alebo dve políčka zvisle a jedno vodorovne. Teda, kôň na políčku (x, y) môže ťahať na políčka $(x \pm 1, y \pm 2)$ a $(x \pm 2, y \pm 1)$, pokiaľ nie sú tieto políčka za okrajom šachovnice. Cesta koňom je postupnosť legálnych ťahov, ktorá navštívi každé políčko práve raz. Keď sa dá legálnym ťahom dostať z posledného políčka tejto cesty na prvé, hovoríme o uzavretej ceste koňom. Cestu koňom môžeme modelovať grafom, keď každé políčko na šachovnici zodpovedá vrcholu a hrana spája tieto vrcholy, pokiaľ existuje povolený ťah koňom medzi zodpovedajúcimi pozíciami. Uzavretá cesta koňom tak zodpovedá hamiltonovskej kružnici a otvorená cesta koňom hamiltonovskej cesty. Napríklad graf, ktorý reprezentuje cestu koňom (hamiltonovskú cestu) na šachovnici 3×4 je na obr. 10.22.

OBRÁZOK 10.22.
ŤAH KOŇOM
A TABUĽKA
POSTUPNOSTI
ŤAHOV



3	6	9	12
8	11	4	1
5	2	7	10

Ťah koňom na šachovnici 3×4 a zodpovedajúca tabuľka postupnosti ťahov

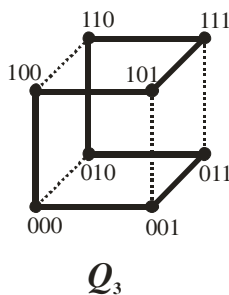
PRÍKLAD 10.11.

Ako súvisí Grayov kód s hamiltonovskou kružnicou?

GRAYOV KÓD

Grayov kód pozostáva z n binárnych reťazcov pre všetky možné kombinácie bitov, kedy reťazce sú usporiadané po rade tak, že sa líšia vždy o 1 bit, napr. 000, 001, 011, 010, 110, 111, 101, 100 a prvý sa tiež líši od posledného o 1 bit. Grayov kód bol pomenovaný po Frankovi Grayovi, ktorý ho vymyslel v 40. rokoch 20. storočia v AT&T Bell laboratóriách, aby minimalizoval chyby v prenose signálu. Hodnoty bitov v reťazcoch môžu definovať hodnoty súradníc, a tak sa dá postupnosť vrcholov definujúcej hamiltonovskej kružnice na každej n -rozmernej hyperkocke priradiť Grayov kód. Dôvodom je, že u susedných vrcholov hyperkocky sa súradnice vždy líšia iba v jednej hodnote, teda o 1 bit (pozri obr. 10.23).

OBRÁZOK 10.23.
HAMILTONOVSKÁ
KRUŽNICA PRE Q_3
A GRAYOV KÓD



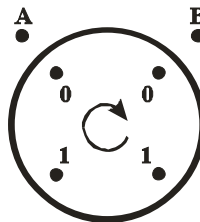
Hamiltonovská kružnica pre Q_3 .

PRÍKLAD 10.12. Automatická práčka a eulerovská a hamiltonovská kružnica

Na obr. 10.24 je znázornená schéma na nastavenie jedného zo štyroch programov automatickej práčky. Program je určený zapojením/nezapojením dvoch kontaktov *A* a *B*. Otáčaním gombíka sa prepoja (označené 1) alebo neprepoja (označené 0) kontakty, pre ktoré máme štyri kombinácie: 00,01,10,11. Na rozdielne zopnutie kontaktov všetkých možných kombinácií *A*, *B* ale netreba $2 \times 4 = 8$ miest, kde sa prepoja či neprepoja kontakty *A* a *B* (teda 00011011 po okraji gombíka), ale stačia iba 4 miesta. Keď si totiž zoberieme cyklickú postupnosť 0011, ak berieme vždy dve susedné číslice, a posúvame sa o jedno miesto, vytvoríme pod *BA* dvojice 00, 01, 11, 10 (pozri obr. 10.24).

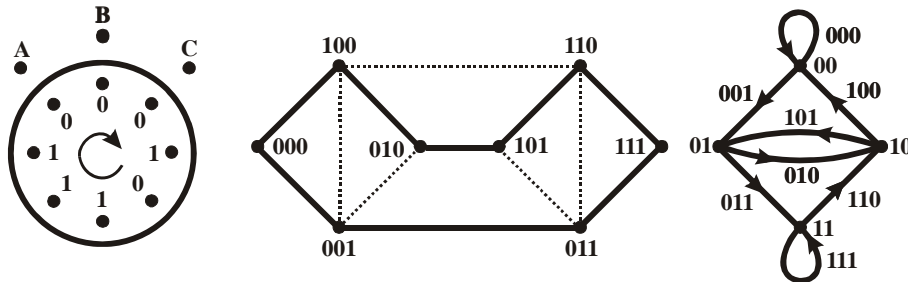
Treba zostrojiť analogickú schému pre osem programov.

OBRÁZOK 10.24.
4 MOŽNÉ
PROGRAMY
PRÁČKY



Nastavenie 4 možných programov práčky.

OBRÁZOK 10.25.
8 MOŽNÝCH
PROGRAMOV
PRÁČKY
HAMILTONOVSKOU
KRUŽNICOU A
UZAVRETÝM
EULEROVSKÝM
ŤAHOM



Nastavenie 8 možných programov práčky, nájdenie reťazca pomocou hamiltonovskej kružnice a pomocou uzavretého eulerovského ťahu.

Analogické riešenie k riešeniu na obr. 10.24 je na obr. 10.25, kde je použitá cyklická postupnosť 00011101 a berú sa vždy tri susedné číslice; keď sa posúvame o jedno miesto, vytvoríme pod *CBA* trojice 000, 001, 011, 111, 110, 101, 010, 100. Cyklickú postupnosť možno získať pomocou hamiltonovskej kružnice v prvom grafe obr. 10.25, kde sú spojené binárne reťazce, ktoré dostaneme jeden z druhého pridaním číslice dopredu a odobratím poslednej číslice, alebo naopak, pridaním číslice dozadu a odobratím prednej číslice. Pridaná číslica môže byť 0 alebo 1. Rovnaké riešenie môžeme získať z druhého grafu, kde vrcholy tvoria spoločné podreťazce binárnych reťazcov a hrany tvoria prekryv binárnych reťazcov vrcholov. V takom grafe nám stačí nájsť uzavretý eulerovský ťah, aby sme dostali cyklickú postupnosť.

PRÍKLAD 10.13.

Použitím techniky prehľadávania do hĺbky navrhnete algoritmus na konštrukciu všetkých možných hamiltonovských ciest.

PROBLÉM
OBCHODNÉHO
CESTUJÚCEHO

Podobne ako v príkladoch 10.5 a 10.6 použijeme metódu prehľadávania do hĺbky. Jednoduchou modifikáciou týchto algoritmov dostaneme algoritmus pre konštrukciu hamiltonovskej cesty. Poznamenajme, že v operačnom výskume (vedný odbor zaoberajúci sa matematickými metódami ekonómie) sa podobný problém nazýva *problém obchodného cestujúceho*, kde je potrebné navrhnuť takú cestu, aby obchodný cestujúci navštívil každé mesto práve raz, na záver cesty sa vrátil do východzieho mesta a celková dĺžka cesty bola minimálna. Podmienka uzavretosti znamená, že konštruovaná cesta je hamiltonovská kružnica.

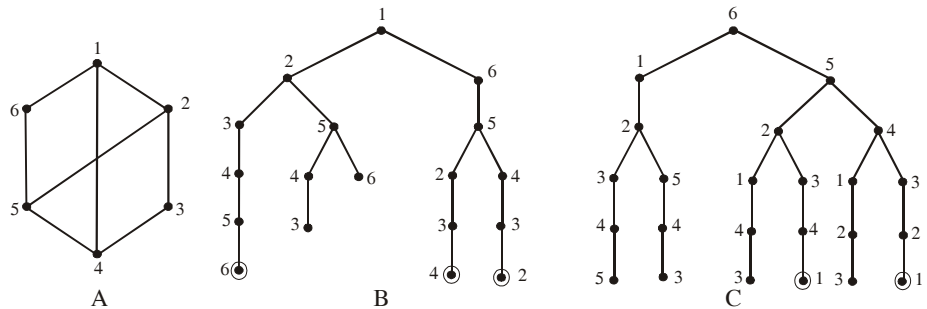
**ALGORITMUS
10.3.**

ALGORITMUS PRE
KONŠTRUKCIU
VŠETKÝCH
MOŽNÝCH
HAMILTONOVSKÝCH
CIEST

```
n=počet vrcholov; U1:={1, 2, ..., n}; d:=1;
while d>0 do
  if Ud ≠ ∅ then
  begin wd: =get_element(Ud); Ud: =Ud-{wd};
    if d<n then
    begin d:=d+1;
      Ud: =Γ(wd-1);
      Ud: =Ud-{w1, w2, ..., wd-1};
    end else
    if w1=wd then
    begin print(w1, w2, ..., wn);
      d:=d-1;
    end;
  end else d:=d-1;
```

Algoritmus je inicializovaný tým, že množina U_1 obsahuje všetky možné vrcholy grafu. Pri predlžovaní cesty (vnútorný blok začínajúci príkazom $d:=d+1$) musíme z množiny kandidátov U_d odstrániť tie vrcholy, ktoré tvoria hrany vyskytujúce sa v predchádzajúcej časti cesty. Algoritmus je ilustrovaný jednoduchým príkladom z obr. 10.26.

OBRÁZOK 10.26.
STROMY RIEŠENÍ
PRE
HAMILTONOVSKÚ
CESTU



Dva stromy riešení (diagramy B a C) pre hamiltonovskú cestu zostrojené algoritmom prehľadávania do hĺbky z príkladu 10.13 pre obyčajný graf (diagram A). Cesty, ktoré končia vrcholom v krúžku sú uzavreté (hamiltonovská kružnica).

ZHRNUTIE

GRAF

Neorientovaný graf $G = (V, E)$ je definovaný pomocou neprázdnej množiny **vrcholov** $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ a množiny $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ neorientovaných **hrán**, pričom každá hrana $e \in E$ je reprezentovaná neusporiadanou dvojicou vrcholov z V , $e = \{v, v'\} \subseteq V$. V prípade usporiadaných dvojíc hovoríme o **orientovaných hranách a orientovanom grafe**, pre $e = \{v, v'\} \subseteq V$ hovoríme o **slučke a pseudografe**. **Stupeň vrcholu** sa rovná počtu hrán s ním incidentných, neorientovaný graf má párný počet vrcholov nepárneho stupňa. **Podgraf** vzniká odstránením vrcholov a/alebo hrán z pôvodného grafu. **Grafová postupnosť** je postupnosť stupňov vrcholov (Havlova-Hakimihova veta). Graf môžeme reprezentovať napríklad **maticou susednosti**, kde $A_{ij} = 1$ pre $(v_i, v_j) \in E$. Dva grafy sú **izomorfné**, keď môžeme u jedného nájsť také indexovanie vrcholov, že má rovnakú maticu susednosti ako druhý graf.

CESTY V GRAFE

Postupnosť vzájomne susedných (majú spoločný vrchol) hrán je **sled**, keď sa v ňom neopakujú hrany, je to **ťah**, keď ani vrcholy sa neopakujú, ide o **cestu** (keď sa prvý vrchol rovná poslednému, ide o **kružnicu**). Počet rozdielnych sledov dĺžky r medzi vrcholmi v_i a v_j v grafe je rovný hodnote prvku A_{ij} z matice A^r . **Eulerovský ťah** obsahuje každú hranu, keď sa prvý vrchol rovná poslednému, ide o **uzatvorený eulerovský ťah**. Graf má taký ťah práve vtedy, keď má všetky vrcholy párneho stupňa. Eulerovský ťah, kde prvý vrchol nie je totožný s posledným, existuje práve vtedy, keď má graf práve tieto dva vrcholy nepárneho stupňa. **Hamiltonovská cesta** prechádza všetkými vrcholmi práve raz, **hamiltonovská kružnica** sa vráti do východzieho vrcholu. Grayovo kódovanie zodpovedá nájdeniu hamiltonovskej kružnice v hyperkocke.

KLÚČOVÉ POJMY

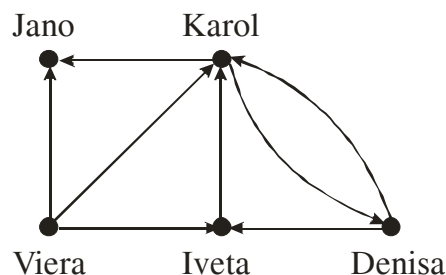
graf	grafová postupnosť
podgraf	kompletný graf
eulerovský ťah	kružnica
hamiltonovská kružnica	bipartitný graf
Leonhard Euler	zjednotenie dvoch grafov
mosty Královca	matica susednosti
tlačené spoje	incidenčná matica
chemické vzorce	invariant vzhľadom na izomorfizmus
počítačové, transportné siete	sled
vrcholy	ťah
hrany	cesta
obyčajný graf	uzavretý sled
orientovaný graf	uzavretý ťah

<i>neorientovaný graf</i>	<i>kružnica</i>
<i>zmiešaný graf</i>	<i>súvislý graf</i>
<i>multigraf</i>	<i>komponent</i>
<i>násobné hrany</i>	<i>most</i>
<i>multiplicita</i>	<i>artikulácia</i>
<i>pseudograf</i>	<i>uzavretý eulerovský ťah</i>
<i>graf plánovania udalostí</i>	<i>orientovaná cesta</i>
<i>susedné vrcholy</i>	<i>okruh, cyklus</i>
<i>hrana incidentná s vrcholmi</i>	<i>silno súvislý graf</i>
<i>stupeň vrcholu</i>	<i>slabo súvislý graf</i>
<i>izolovaný vrchol</i>	<i>dodekaéder (dodekahedron)</i>
<i>vstupný stupeň vrcholu</i>	<i>hamiltonovská cesta</i>
<i>výstupný stupeň vrcholu</i>	<i>Diracova teoréma</i>
<i>postupnosť stupňov vrcholov grafu</i>	<i>Oreho teoréma</i>
<i>Havlova a Hakimiho veta</i>	<i>Grayov kód</i>
<i>izomorfizmus</i>	<i>problém obchodného cestujúceho</i>
<i>zoznam susedov</i>	

CVIČENIA

- PRIENIKOVÝ GRAF 10.1.** Prienikový graf (intersection graph) súboru množín A_1, A_2, \dots, A_n je graf, ktorého vrcholy reprezentujú tieto množiny a hrana spája tieto vrcholy, keď im odpovedajúce množiny majú neprázdny prienik. Skonstruujte prienikové grafy pre nasledujúce súbory množín.
- (a) $A_1 = \{0, 2, 4, 6, 8\}$, $A_2 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, $A_3 = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, $A_4 = \{5, 6, 7, 8, 9\}$, $A_5 = \{0, 1, 8, 9\}$
- (b) $A_1 = \{\dots, -4, -3, -2, -1, 0\}$, $A_2 = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$, $A_3 = \{\dots, -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, \dots\}$, $A_4 = \{\dots, -5, -3, -1, 1, 3, 5, \dots\}$, $A_5 = \{\dots, -6, -3, 0, 3, 6, \dots\}$
- (c) $A_1 = \{x \mid x < 0\}$, $A_2 = \{x \mid -1 < x < 0\}$, $A_3 = \{x \mid 0 < x < 1\}$, $A_4 = \{x \mid -1 < x < 1\}$, $A_5 = \{x \mid x > -1\}$, $A_6 = \mathbf{R}$
- 10.2.** Koho v nasledujúcom grafe vplyvu na obr. 10.27 ovplyvňuje Karol a kto vplýva na Karola?

OBRÁZOK 10.27.
GRAF
OVPLYVŇOVANIA



Graf ovplyvňovania využívaný v psychológii.

10.3. Skonstruujte graf plánovania udalostí pre nasledujúci program:

$S_1: x:=0$
 $S_2: x:=x + 1$
 $S_3: y:=2$
 $S_4: z:=y$
 $S_5: x:=x + 2$
 $S_6: y:=x + z$

10.4. Môže existovať obyčajný graf s 15 vrcholmi, pričom každý z nich má stupeň 5?

10.5. Keď pre každého člena spoločnosti spočítame, s koľkými ľuďmi si potriasol rukou a tieto počty sčítame, ukážte, že súčet je párný. Predpokladajte, že nikto si nepotriasol rukou sám zo sebou.

10.6. Pre ktoré hodnoty n sú nasledujúce grafy bipartitné?

(a) K_n

(b) C_n

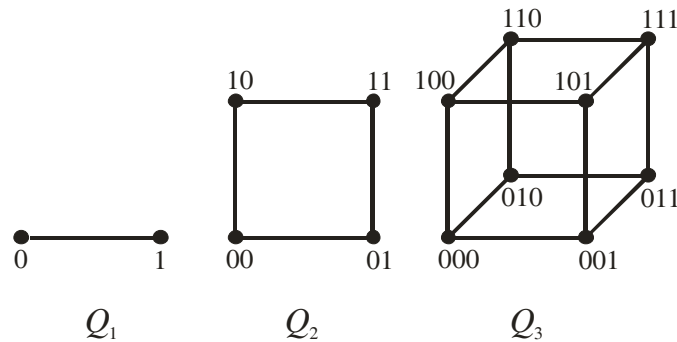
KOLESO

(c) W_n , čo je označenie tzv. kolesa, čo je hviezda so stredovým vrcholom, kde obvodové vrcholy sú prepojené kruhom ako u C_n

N -KOCKA

(d) Q_n , tzv. n -kocky (alebo n -rozmerná kocka, n -cube), kde vrcholy reprezentujú binárne reťazce dĺžky n . Vrcholy sú spojené hranou vtedy, ak sa im odpovedajúce bitové reťazce líšia práve v jednej pozícii, pozri obr. 10.28.

OBRÁZOK 10.28.
 N -ROZMERNÉ
 KOCKY



Prvé tri n -rozmerné kocky (pre $n = 1, 2$ a 3).

10.7. Koľko hrán má graf, keď má vrcholy stupňa 4, 3, 3, 2, 2? Nakreslite taký graf.

10.8. Existuje obyčajný graf o piatich vrcholoch nasledujúcich stupňov? Keď áno, nakreslite ho.

(a) 3, 3, 3, 3, 2

(b) 1, 2, 3, 4, 5

(c) 1, 2, 3, 4, 4

(d) 3, 4, 3, 4, 3

- (e) 0, 1, 2, 2, 3
 (f) 1, 1, 1, 1, 1

10.9. Koľko podgrafov bez izolovaných vrcholov majú grafy K_2 , K_3 a W_3 ?

10.10. Nech G je graf o $|V|$ vrcholoch a $|E|$ hranách. Nech M je maximálny stupeň vrcholov z G a nech m je minimálny stupeň vrcholov z G . Ukážte, že $2|E|/|V| \geq m$ a $2|E|/|V| \leq M$.

PRAVIDELNÝ GRAF **10.11.** Obyčajný graf sa volá *pravidelný* (regular), keď každý z jeho vrcholov má rovnaký stupeň. Koľko vrcholov stupňa 4 má pravidelný graf o 10 hranách?

DOPLNKOVÝ GRAF **10.12.** *Doplňkový* (príp. komplementárny, complementary) graf \bar{G} ku grafu G má rovnakú vrcholovú množinu ako G . Dva vrcholy sú spojené hranou v \bar{G} vtedy, keď nie sú spojené v G . Nájdite

- (a) \bar{K}_n
 (b) $\bar{K}_{m,n}$
 (c) \bar{C}_n
 (d) \bar{Q}_n

10.13. Keď je G obyčajný graf o 15 hranách a \bar{G} má 13 hrán, koľko vrcholov má graf G ?

10.14. Keď je G obyčajný graf o $|V|$ vrcholoch a $|E|$ hranách, koľko hrán má graf \bar{G} ?

10.15. Ukážte, že keď je G obyčajný bipartitný graf o $|V|$ vrcholoch a $|E|$ hranách, potom $|E| \leq |V|^2/4$.

10.16. Nájdite incidenčné matice pre

- (a) K_n
 (b) C_n
 (c) W_n , čo je označenie tzv. kolesa, čo je hviezda so stredovým vrcholom, kde obvodové vrcholy sú prepojené kruhom ako u C_n
 (d) $K_{m,n}$

10.17. Predpokladajme, že G a H sú obyčajné izomorfné grafy. Ukážte, že ich komplementárne grafy \bar{G} a \bar{H} sú tiež izomorfné.

10.18. Ukážte, že vrcholy bipartitného grafu s dvoma alebo viac vrcholmi môžu byť indexované tak, že ich matica susednosti má tvar $\begin{bmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{bmatrix}$, kde štyri vstupy sú obdĺžnikové bloky.

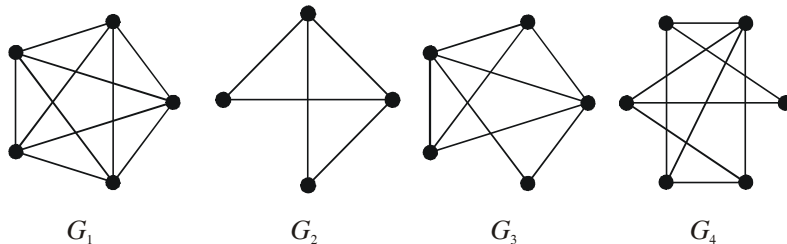
SAMOKOMPLE-
MENTÁRNY GRAF

- 10.19.** Obyčajný graf sa volá samokomplementárny (selfcomplementary), keď grafy G a \bar{G} sú izomorfné. Ukážte, že cesta na štyroch vrchoch je samokomplementárna.
- 10.20.** Ukážte, že keď je G samokomplementárny obyčajný graf s $|V|$ vrcholmi, potom $|V|$ modulo 4=0 alebo 1.
- 10.21.** Pre ktoré celé čísla je C_n samokomplementárny?
- 10.22.** Koľko neizomorfných obyčajných grafov s n vrcholmi existuje pre n rovné
(a) 2
(b) 3
(c) 4
- 10.23.** Koľko neizomorfných obyčajných orientovaných grafov s n vrcholmi existuje pre n rovné 2?
- 10.24.** Keď vynásobíme maticu susednosti pre neorientovaný graf s maticou k nej transponovanou, čo je výsledkom vynásobenia?
- 10.25.** Zistite, či grafy zadané maticou susednosti sú izomorfné

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- 10.26.** Definujte izomorfizmus pre orientované grafy.
- 10.27.** Koľko pamäti (aký počet celočíselných premenných) je potrebné na reprezentáciu obyčajného súvislého grafu o $|V|$ vrchoch a $|E|$ hranách, keď použijeme
(a) zoznam dvojíc vrcholov
(b) maticu susednosti
(c) incidenčnú maticu
- 10.28.** Nájdite dvojicu obyčajných grafov s rovnakou multimnožinou stupňov vrcholov, ktoré ale nie sú izomorfné.
- 10.29.** Ktorý z grafov na obr. 10.29 sa dá nakresliť jedným ťahom?

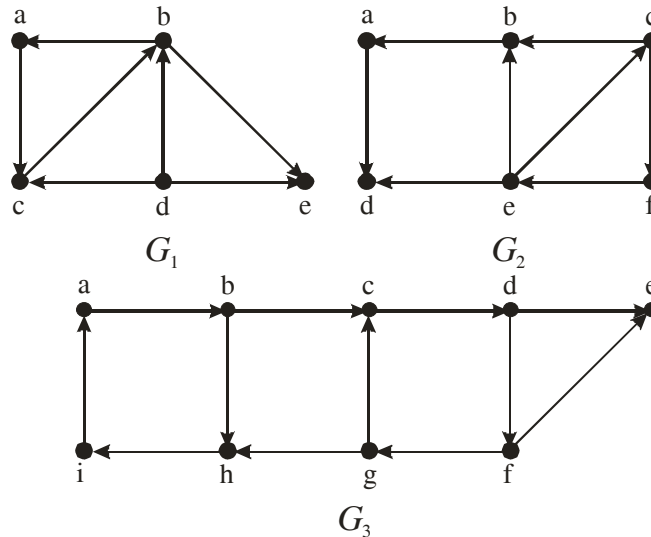
OBRÁZOK 10.29.
SÚ TO
JEDNOTAŽKY?



Sú to jednotážky?

- 10.30.** Pomocou algoritmov z príkladov 10.5 a 10.6 nájdite uzavreté a otvorené eulerovské ťahy pre prvé tri grafy z obr. 10.29 cvičenia 10.29.
- 10.31.** Nájdite také najväčšie silno súvislé podgrafy (také, ku ktorým sa nedá pridať vrchol, aby neprestali byť silno súvislé), ktoré zároveň majú spomedzi najväčších silno súvislých podgrafov aj najviac vrcholov, pre grafy z obr. 10.30.

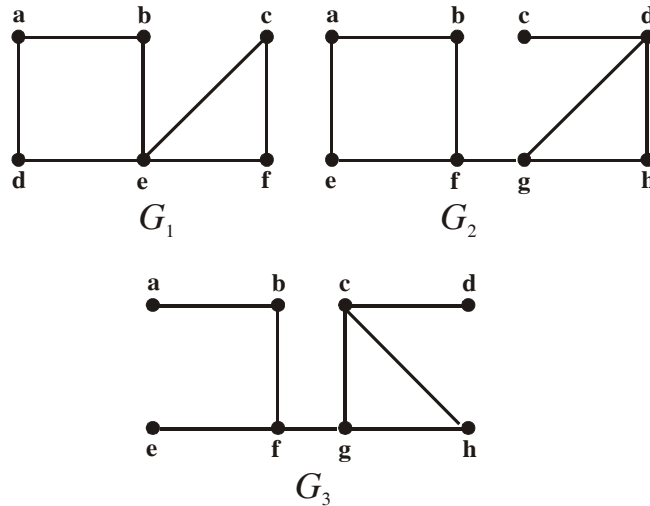
OBRÁZOK 10.30.
NAJVÄČŠIE SILNO
SÚVISLÉ
PODGRAFY?



Nájdite najväčšie silno súvislé podgrafy.

- 10.32.** Nájdite počet ťahov dĺžky n medzi dvoma rôznymi vrcholmi u $K_{3,3}$ pre n rovné
- 2, ak sú oba vrcholy v jednej množine bipartície $K_{3,3}$
 - 3, ak sú oba vrcholy v rôznych množinách bipartície $K_{3,3}$
 - 4, ak sú oba vrcholy v jednej množine bipartície $K_{3,3}$
 - 5, ak sú oba vrcholy v rôznych množinách bipartície $K_{3,3}$
- 10.33.** Nájdite počet sledov dĺžky n medzi dvoma rôznymi vrcholmi u K_4 pre rovnaké hodnoty n ako v predchádzajúcom prípade
- 10.34.** Ukážte, že v akomkoľvek obyčajnom grafe existuje cesta z ľubovoľného vrcholu nepárneho stupňa do nejakého iného vrcholu nepárneho stupňa.
- 10.35.** Nájdite všetky artikulácie grafov z obr. 10.31.

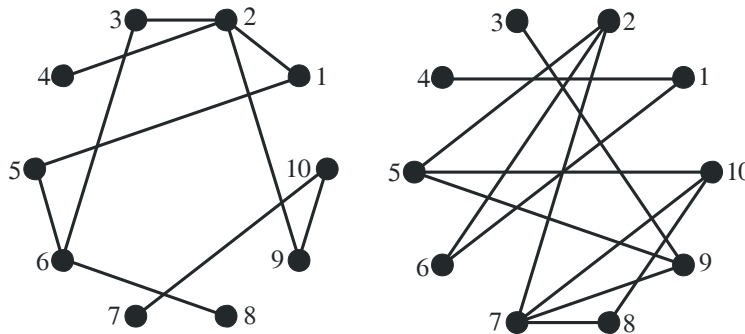
OBRÁZOK 10.31.
NÁJDITE
ARTIKULÁCIE



Nájdite artikulácie

- 10.36.** Nájdite všetky mosty pri grafoch z obr. 10.31.
- 10.37.** Dokážte, že každý vrchol mostu obyčajného grafu je artikuláciou, pokiaľ má stupeň väčší ako 1.
- 10.38.** Komunikačná linka v komunikačnej sieti by mala byť zdvojená, keď jej nefunkčnosť znemožňuje prenos signálu medzi nejakou dvojicou vrcholov. Ktoré spoje by mali byť zdvojené v grafoch na obr. 10.32?

OBRÁZOK 10.32.
MOSTY?



Ktoré hrany by mali byť zdvojené pre dvojité zabezpečenie súvislosti komunikačnej siete?

- 10.39.** Ukážte, že obyčajný graf o n vrchoch je súvislý, pokiaľ obsahuje viac ako $(n-1)(n-2)/2$ hrán.
- 10.40.** Ukážte, ako sa dá veta 10.7. využiť na nájdenie dĺžky najkratšej cesty medzi dvoma vrcholmi.
- 10.41.** Ukážte, ako sa dá veta 10.7. využiť na zistenie, či je graf súvislý.

- 10.42.** Ukážte, že obyčajný graf je bipartitný práve vtedy, keď nemá žiadne kružnice nepárnej dĺžky.
- 10.43.** Ukážte, že graf reprezentujúci prípustné ťahy koňom na šachovnici $m \times n$ (kde m, n sú kladné celé čísla), je bipartitný graf.
- 10.44.** Ukážte, že neexistuje uzavretá cesta koňom pre šachovnicu $m \times n$, kde m, n sú nepárne čísla.
- 10.45.** Ukážte, že existuje Grayov kód dĺžky n bitov pre akékoľvek pozitívne číslo n , alebo, ekvivalentne, ukážte, pomocou matematickej indukcie, že n -kocka Q_n má vždy hamiltonovskú kružnicu.

11 TEÓRIA GRAFOV II

CESTY V GRAFOCH • PLANÁRNE GRAFY • EULEROVA FORMULA
• KURATOWSKÉHO VETA • FARBENIE GRAFOV A MÁP

V tejto kapitole sa budeme zaoberať praktickejšími úlohami z teórie grafov. Po prvé to bude hľadanie najkratšej cesty v ohodnotenom grafe zodpovedajúcom napríklad transportnej sieti. Ďalej to bude otázka, kedy je graf planárny, teda sa dá nakresliť bez toho, aby sa hrany – spojnice vrcholov krížili či dotýkali inde ako vo vrcholoch, čo je zásadne dôležité napríklad pri tlačných spojoch. Konečne je tu problém, ako zafarbiť vrcholy grafu rôznymi farbami, aby žiadne dva vrcholy spojené hranou nemali rovnakú farbu, čo sa dá využiť pri návrhu máp alebo priradovaní frekvencií mobilným telefónom.

11.1 PROBLÉMY NAJKRATŠEJ CESTY

VÁHA HRANY PRI SIEŤACH

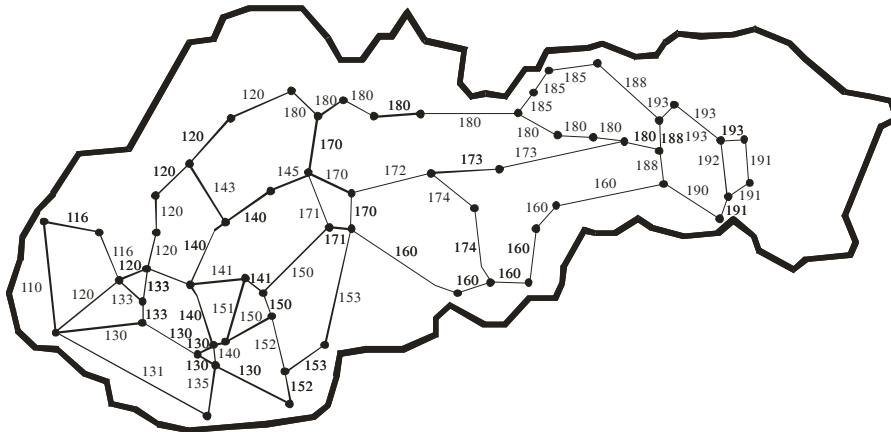
Existuje veľa problémov, pri ktorých je užitočné priradiť hranám grafu reálne číslo, ktoré voláme **váha** (weight). Typicky môže ísť napr. o železničnú (pozri obr. 11.1), cestnú alebo leteckú sieť, kde sú hranám priradené vzdialenosti medzi mestami. Ďalšou možnosťou je napr. priradenie triedy cesty (1 až 3.), čas potrebný na cestu, cena cestovného lístku. Pri počítačových a telefónnych sieťach takéto užitočné hodnoty pri hranách môžu predstavovať rýchlosť odozvy, priepustnosť linky alebo cenu jej prenájmu. Grafy s číslom priradeným každej hrane sa volajú **ohodnotené grafy** (weighted graphs). Zvyčajne prepojenia v sieťach nie sú jednosmerné, preto bežne používame obyčajné grafy, nie orientované.

DĹŽKA CESTY

Pri takýchto typoch grafov sa často vyskytuje niekoľko typov problémov. Najčastejším je asi zistiť **dĺžku cesty** v ohodnotenom grafe, ktorá sa bude rovnať súčtu váh hrán tejto cesty (táto dĺžka je rozdielna od dĺžky cesty neohodnoteného grafu, ktorá predstavuje počet hrán cesty, formálne si môžeme predstaviť, že každá hrana má váhu rovnú jednej). Typická otázka je: Ktorá cesta medzi dvoma vrcholmi je najkratšia, teda, aká je najmenšia vzdialenosť, ktorú musíme prejsť, aby sme sa dostali z Bratislavy do Medzilaboriec? Keďže niekedy krátka cesta môže byť zlá (povedzme s obmedzením rýchlosti), ktorú cestu máme vybrať, aby sme v cieľi boli čo najrýchlejšie? Ktorú cestu máme vybrať, aby sme sa do cieľa

dostali za čo najmenej peňazí? V počítačových sieťach sa môžeme spýtať, ktoré telefónne ústredne máme prepojiť, aby sme dostali čo najlacnejšie spojenie? A ktoré, aby sme mali čo najrýchlejšiu odozvu?

OBRÁZOK 11.1.
MAPA
ŽELEZNIČNEJ
SIETE –
OHODNOTENÝ
GRAF



Zjednodušená mapa železničnej siete Slovenska s očíslovaním koridorov tvorí ohodnotený graf (hranice republiky do grafu nepatria).

**PROBLÉM
OBCHODNÉHO
CESTUJÚCEHO**

Ďalším slávnym problémom je *problém obchodného cestujúceho*, kedy máme navštíviť každý vrchol (mesto) práve raz a vrátiť sa do východzieho vrcholu s cieľom precestovať pritom čo najkratšiu trasu (v zmysle ohodnotení hrán).

**NAJKRATŠIA
CESTA
DIJKSTROVÝM
ALGORITMOM**

Na nájdenie najkratšej cesty existuje viac algoritmov. Tu uvedieme algoritmus objavený holandským matematikom Edsgerom Dijkstrom r. 1959 pre ohodnotený neorientovaný grafy so všetkými váhami ohodnotenými kladným číslom. Adapácia tohto algoritmu na orientované grafy by mala byť jednoduchá.

Predpokladajme, že hľadáme cestu najkratšej dĺžky medzi vrcholmi a a z zadaného grafu G . Dijkstrov algoritmus nájde dĺžku najkratšej cesty z a do najbližšieho vrcholu, potom do druhého najbližšieho vrcholu atď., dokiaľ nenájdeme dĺžku najkratšej cesty od a do z .

Dijkstrov algoritmus spočíva v sérii iterácií. Pri každej iterácii pridávame nový vrchol do množiny vrcholov S so stanovenou najkratšou vzdialenosťou od zadaného vrcholu a . Pri každej iterácii sa robí nové ohodnocovanie vrcholov.

Vrchol w je ohodnotený dĺžkou najkratšej cesty z a do w obsahujúcej iba vrcholy z množiny S . Vrchol pridaný do tejto množiny pri každej iterácii je ten s minimálnym ohodnotením, ktorý ešte nie je v S .

Algoritmus začína ohodnotením vrcholu a hodnotou 0 a ohodnotením všetkých ostatných vrcholov v_i momentálne známou vzdialenosťou od vrcholu a rovnou ∞ , $L(v_i) := \infty$.

ALGORITMUS
11.1.
DIJKSTROV
ALGORITMUS

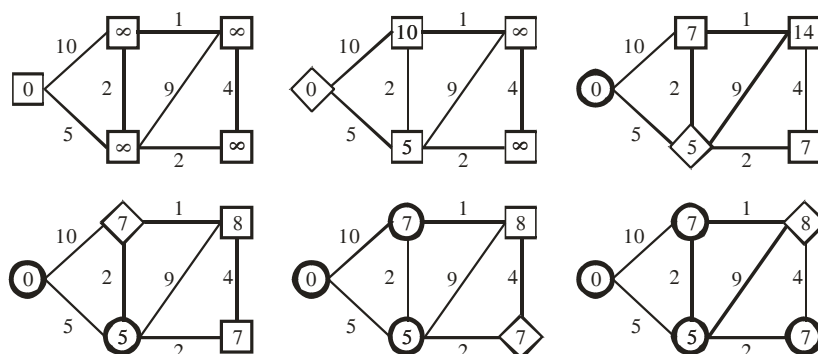
```

procedure Dijkstra(G: ohodnotený súvislý obyčajný graf
so všetkými váhami pozitívnymi)
{ G má vrcholy  $a=v_0, v_1, \dots, v_n=z$  a váhy  $w(v_i, v_j)$  kde
 $w(v_i, v_j)=\infty$ , keď  $(v_i, v_j)$  nie je hrana G }
for  $i:=1$  to  $n$ 
     $L(v_i) := \infty$ 
 $L(a) := 0$ 
 $S := \emptyset$ 
{vrcholy sú teraz ohodnotené všetky hodnotou  $\infty$ , okrem
východzieho  $a$ , ktorý má  $0$ , a množina vrcholov  $S$ 
s nájdenou najmenšou vzdialenosťou od  $a$  je prázdna}
while  $z \notin S$ 
begin
     $u :=$  vrchol nepatriaci do  $S$  s minimálnou  $L(u)$ 
     $S := S \cup \{u\}$ 
    for všetky vrcholy  $v$  nepatriace do  $S$ 
        if  $L(u) + w(u, v) < L(v)$  then  $L(v) := L(u) + w(u, v)$ 
{takto do  $S$  pridávame vrchol s najmenšou vzdialenosťou
a upravujeme hodnoty vrcholov nepatriacich do  $S$ }
end {  $L(z)$  je najkratšia cesta z  $a$  do  $z$  }

```

Na obrázku 11.2 je ukázaný priebeh Dijkstrovho algoritmu, s tým, že hľadáme najkratšiu vzdialenosť od vrcholu vľavo. Vrchol vyznačený kosoštvorcem predstavuje aktuálne spracovávaný vrchol, vrcholy v krúžku patria do množiny S , pre tieto vrcholy bola najkratšia cesta už vypočítaná a ich ohodnotenie sa už nebude meniť.

OBRÁZOK 11.2.
PRIEBEH
DIJKSTROVHO
ALGORITMU



Priebeh Dijkstrovho algoritmu pre hľadanie dĺžky najkratšej cesty.

ZLOŽITOSŤ PRE
DIJKSTROV
ALGORITMUS

Najhorší prípad časovej zložitosti pre Dijkstrov algoritmus s n vrcholmi a m hranami je $O(n^2)$. Táto hodnota môže byť podstatne vylepšená pre grafy s málo („riedko rozmiestnenými“) hranami.

Problém obchodného cestujúceho je ekvivalentný nájdeniu hamiltonovskej kružnice s minimálnym súčtom váh v kompletom ohodnotenom neorientovanom

PROBLÉM
OBCHODNÉHO
CESTUJÚCEHO →
HAMILTONOVSKÁ
KRUŽNICA
S MINIMÁLNYM
SÚČTOM VÁH
APROXIMAČNÉ
ALGORITMY

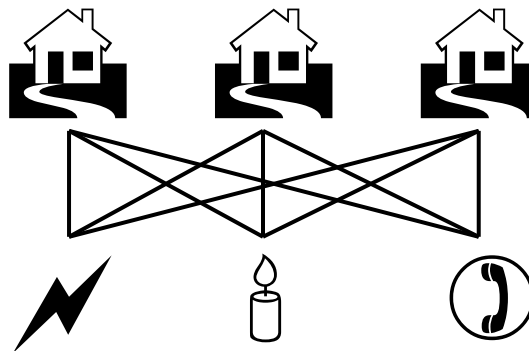
grafe. Keď si zvolíme ľubovoľný štartovací bod, keďže kružnica (a, b, c, d, a) je pre nás totožná s kružnicou (b, c, d, a, b) , máme $(n-1)!$ možností permutácií, vyjadrujúcich kružnice, a keď si zoberieme, že nám nezáleží u kružnice na smere, keďže (a, b, c, d, a) je pre nás rovnaká kružnica ako (a, d, c, b, a) , máme $(n-1)!/2$ možností, čo je stále NP-úplný problém. V praxi sa problém obchodného cestujúceho pre veľa vrcholov rieši aproximačnými algoritmi, ktoré nemusia nutne nájsť najlepšie riešenie, ale nájdu riešenie blízke najlepšiemu. Napríklad, pokiaľ graf spĺňa trojuholníkovú nerovnosť, existuje polynomiálny algoritmus, ktorý nájde prinajhoršom o 50 % dlhšiu cestu ako je najlepšia možná. V praxi sa využívajú algoritmy, ktoré sú schopné nájsť riešenie pre problém s 1000 vrcholmi v priebehu niekoľko minút a také riešenie bude v priemere do 2 % horšie ako ideálne.

11.2 PLANÁRNE GRAFY

Predstavme si tri domy, ku ktorým je potrebné doviest' telefón, od elektrického rozvodu elektrické vedenie a od plynového rozvodu vedenie plynu (pozri obr. 11.3). Je možné jednotlivé vedenia položiť tak, aby sa nekrížili?

Táto otázka sa dá preformulovať takto: Dá sa bipartitný kompletý graf $K_{3,3}$ prekresliť tak, aby sa žiadne dve hrany nekrížili?

OBRÁZOK 11.3.
ROZVODY
TELEFÓNU,
ELEKTRINY
A PLYNU BEZ
KRÍŽENIA?



Dajú sa rozvody viesť tak, aby sa nikde nekrížili?

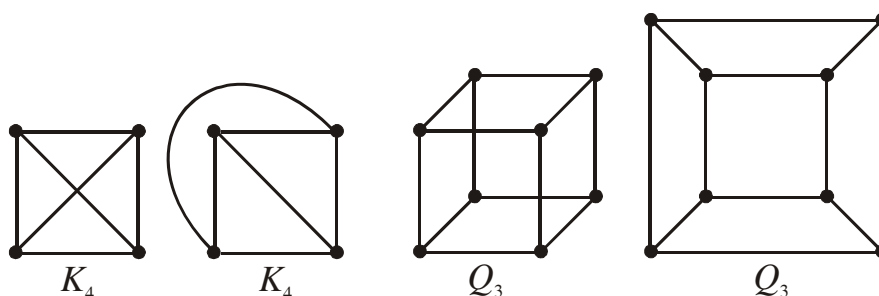
Podobná otázka je naliehavá napríklad pri tlačných spojoch, a formálne sa rieši ako otázka, či je graf planárny.

PLANÁRNY GRAF

Graf voláme **planárny**, keď môže byť zakreslený v rovine bez toho, že by sa jeho hrany krížili (pod krížením hrán rozumieme preťatie priamok alebo oblúkov reprezentujúcich hrany na inom mieste ako sú s nimi incidentné spoločné vrcholy). Taký náčrt sa volá rovinná (planárna) reprezentácia grafu.

Graf môže byť planárny, aj keď sa zvyčajne zakresľuje s prekríženými hranami. Ako príklad si môžeme uviesť kompletý graf na štyroch vrchoch K_4 a trojrozmernú hyperkocku Q_3 na obr. 11.4.

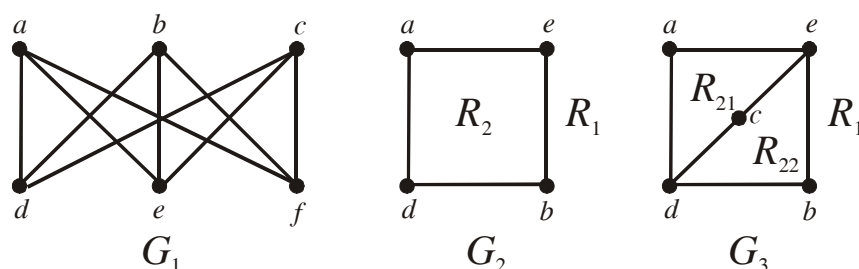
OBRÁZOK 11.4.
 K_4 A Q_3
 BEŽNÝ NÁKRES
 A ROVINNÁ
 REPREZENTÁCIA



Kompletný graf K_4 a hyperkocka Q_3 s bežným nákrešom a v rovinnej reprezentácii.

Planárnosť grafu môžeme ukázať jeho zakreslením, ako na obr. 11.4. Je o dosť ťažšie ukázať, že graf nie je planárny. To si môžeme ukázať na grafe $K_{3,3}$.

OBRÁZOK 11.5.
 $K_{3,3}$ NEPLANÁRNÝ



Prečo je kompletný bipartitný graf $K_{3,3}$ neplanárny?

DŮKAZ
 NEPLANARITY $K_{3,3}$

V každej rovinnej reprezentácii pre $K_{3,3}$ musia byť prepojené vrcholy a, b s vrcholmi d, e . Tieto 4 hrany vymedzujú rovinu na dve oblasti, R_1 a R_2 , ako je ukázané na grafe G_2 z obr. 11.5. Vrchol c je alebo v jednej, alebo v druhej oblasti; oblasť, v ktorej je, rozdeľuje na dve časti, ako je to vidno pre R_{21} a R_{22} v grafe G_3 z obr. 11.5. Potom nie je možné umiestniť vrchol f bez toho, aby sa krížili hrany. Keď je f v oblasti R_1 , nie je možné vytvoriť hranu $\{f, c\}$ bez kríženia. Keď je f v oblasti R_{21} , nie je možné vytvoriť hranu $\{f, b\}$ bez kríženia. Keď je f v oblasti R_{22} , nie je možné vytvoriť hranu $\{f, a\}$ bez kríženia. Podobné argumenty by sa dali použiť, keby bod c bol v oblasti R_1 .

Podobný rozbor môže byť urobený aj pre kompletný graf na piatich vrcholoch K_5 .

Planarita grafov hrá veľkú rolu pri návrhu elektronických obvodov, ktoré majú byť realizované plošným spojom. Elektronický obvod si môžeme abstrahovať ako graf, kde jednotlivé súčiastky tvoria vrcholy a spojenia medzi nimi sú reprezentované hranami. Elektronický obvod môžeme vytlačiť na jednu dosku, pokiaľ dokážeme pre jemu odpovedajúci graf nájsť rovinnú reprezentáciu. Keď graf nie je planárny, môžeme použiť zložitejšie riešenia. Napríklad môžeme vrcholovú množinu grafu rozdeliť na disjunktívne podgrafy, ktoré už budú planárne. Potom môžeme skonštruovať obvod prepojením viacerých vrstiev. Ďalšou možnosťou je pri krížení hrán použiť izolovaný drôt; v tomto prípade sa budeme snažiť navrhnúť reprezentáciu s čo najmenej prekríženiami.

Eulerova formula

Rovinná reprezentácia planárneho grafu rozdeľuje rovinu na časti, ktoré nazývame steny, resp. oblasti. Za stenu považujeme aj vonkajšiu, neohraničenú oblasť. Súhrn vrcholov, hrán a stien (rovinnej) reprezentácie (planárneho) grafu tvorí (rovinnú) mapu.

VETA 11.1.
(ROZŠÍRENÁ
EULEROVA
FORMULA)



Nech G je planárny obyčajný graf s $|E|$ hranami, $|V|$ vrcholmi a $|K|$ komponentmi. Nech $|R|$ je počet stien jeho rovinnej reprezentácie. Potom

$$|R| = |E| - |V| + |K| + 1 \quad (11.1)$$

Dôkaz: Použijeme indukciu na počet hrán pri fixnom počte vrcholov. Ak $|E| = 0$, potom $|R| = 1$, $|V| = |K|$ a rovnosť (11.1) platí. Nech (11.1) platí, ak $|E| = m$, kde m je celé nezáporné číslo. Majme mapu M_1 s $m+1$ hranami. Odstráňme z nej ľubovoľnú hranu e . Vznikne mapa M_2 s m hranami. Označme počet stien, resp. komponentov mapy M_1 ako $|R_1|$, resp. $|K_1|$, podobne pre M_2 ako $|R_2|$, resp. $|K_2|$. Podľa indukčného predpokladu platí $|R_2| = m - |V| + |K_2| + 1$. Ak e je most, potom $|R_1| = |R_2|$, $|K_1| = |K_2| - 1$. V opačnom prípade $|R_1| = |R_2| + 1$, $|K_1| = |K_2|$. V oboch prípadoch $|R_1| = (m+1) - |V| + |K_1| + 1$, čo sme mali dokázať. ■

PRÍKLAD 11.1.

Predpokladajme, že planárny obyčajný súvislý graf má 20 vrcholov, každý stupňa 3. Na koľko stien rovinná reprezentácia tohto grafu rozdeľuje rovinu?

Riešenie: Pretože suma stupňov vrcholov je rovná dvojnásobku počtu hrán, $2|E| = \sum_{v \in V} \deg(v)$, $2|E| = 20 \times 3 = 60$, $|E| = 30$. Z Eulerovej formuly vyplýva

$$|R| = |E| - |V| + |K| + 1 = 30 - 20 + 1 + 1 = 12.$$

Z Eulerovej formuly vyplývajú aj nasledujúce vety:

VETA 11.2.



Nech G je súvislý planárny obyčajný graf s $|E|$ hranami a $|V|$ vrcholmi, kde $|V| \geq 3$, potom $|E| \leq 3|V| - 6$.

STUPEŇ STENY =
Dĺžka OBLASTI



Dôkaz: Súvislý planárny obyčajný graf rozdeľuje rovinu na $|R|$ stien. Počet hrán ohraničujúcich stenu R (ktorý budeme volať *stupeň steny*, resp. *dĺžka oblasti* $\deg(R)$) je najmenej 3. (Do stupňa počítame ako prírastok 2 tie hrany, ktoré sú v stene „z oboch strán“.) **Suma stupňov stien sa teda presne rovná dvojnásobku počtu hrán v grafe.** Pretože každá oblasť má stupeň väčší alebo rovný 3 (musí platiť pre súvislý graf s aspoň tromi vrcholmi), dostávame


$$2|E| = \sum_{\text{všetky steny } R} \deg(R) \geq 3|R|$$

Odtiaľ (2/3) $|E| \geq |R|$. Použitím Eulerovej formuly dostávame (2/3) $|E| \geq |E| - |V| + 2$, z čoho vyplýva $|E|/3 \leq |V| - 2$ a teda $|E| \leq 3|V| - 6$. ■


PRÍKLAD 11.2.

Ukážte pomocou Vety 11.2, že K_5 nie je planárny graf.

Graf K_5 má 5 vrcholov a 10 hrán. Keďže podmienka $|E| \leq 3|V| - 6$ neplatí pre $10 \leq 3 \times 5 - 6$, K_5 nie je planárny.

VETA 11.3.  Nech G je súvislý planárny obyčajný graf, potom obsahuje vrchol stupňa menšieho alebo rovného 5.

Dôkaz: Keď by bol stupeň každého vrcholu aspoň 6, potom podľa vzorca $2|E| = \sum_{v \in V} \deg(v)$ by sme mali $2|E| \geq 6|V|$. To je ale v kontradikcii s nerovnosťou podľa 11.2, $2|E| \leq 6|V| - 12$. ■

VETA 11.4.  Nech G je súvislý planárny obyčajný graf s $|E|$ hranami a $|V|$ vrcholmi, kde $|V| \geq 3$, a neobsahuje žiadnu kružnicu dĺžky 3, potom $|E| \leq 2|V| - 4$.

Dôkaz vety je podobný dôkazu vety 11.2, je zadaný ako cvičenie 11.10.

PRÍKLAD 11.3. Použite vetu 11.4 na dôkaz toho, že $K_{3,3}$ nie je planárny.

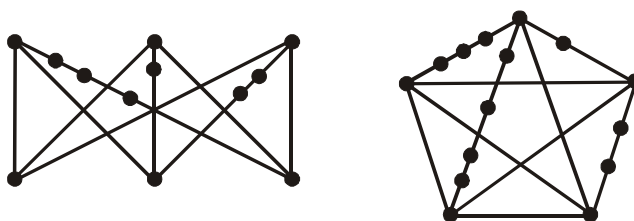
Riešenie: Pretože $K_{3,3}$ nemá žiadnu kružnicu dĺžky 3, čo je zrejme z toho, že je bipartitný, môžeme použiť vetu 11.4. $K_{3,3}$ má 6 vrcholov a 9 hrán, teda nerovnica $|E| \leq 2|V| - 4$ nie je splnená.

Je jasné, že keďže ani $K_{3,3}$ ani K_5 nie sú planárne, nebudú planárne ani grafy, ktoré ich majú ako podgrafy. Je ale prekvapujúce, že všetky neplanárne grafy nutne obsahujú podgraf, ktorý môže byť skonštruovaný z $K_{3,3}$ alebo K_5 pomocou určitých povolených operácií.


KURATOWSKÉHO
GRAFY

Z grafov $K_{3,3}$ a K_5 môžeme vytvoriť ďalšie neplanárne grafy, ak ich hrany rozdelíme na viac hrán pomocou vrcholov druhého stupňa (pozri obr. 11.6). Všetky grafy, ktoré takýmto spôsobom získame, vrátane samotných $K_{3,3}$ a K_5 , voláme *Kuratowského¹ grafy*.

OBRÁZOK 11.6.
UKÁŽKA
KURATOWSKÉHO
GRAFOV



Ukážka Kuratowského grafov.

VETA 11.5.  (KURATOWSKÉHO VETA) Konečný graf je planárny práve vtedy, keď neobsahuje ako podgraf nijaký Kuratowského graf.

Dôkaz toho, že keď graf obsahuje Kuratowského podgrafy, tak nie je planárny, je jednoduchý. Opačná strana dôkazu, že každý neplanárny graf obsahuje ako podgraf Kuratowského graf, je natoľko komplikovaný, že ho tu nebudeme uvádzať.

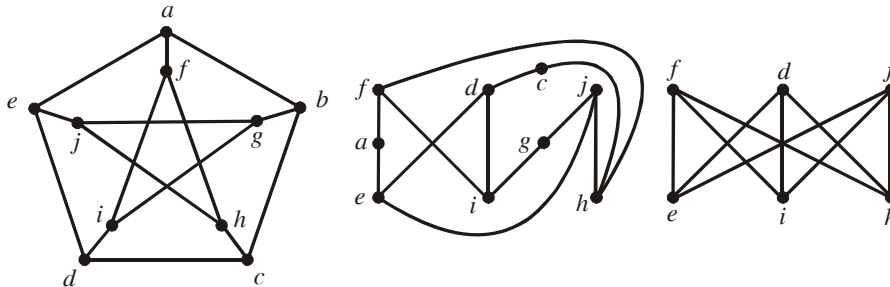
¹ Kazimierz Kuratowski (1896–1980) bol poľský matematik, ktorý študoval pred 1. svetovou vojnou v Glasgowe v Škótsku, potom pracoval v Evove a na Varšavskej univerzite. V priebehu 2. svetovej vojny kvôli prenasledovaniu vzdelaných Poliakov za okupácie nacistami vyučoval tajne. Zaslúžil sa o poľskú matematiku, publikoval viac ako 180 článkov, pracoval v teórii množín a v topológii, r. 1930 navrhol charakterizáciu neplanárnych grafov.

PRÍKLAD 11.4.

Je Petersenov graf na obr. 11.7 planárny? (Julius Petersen bol dánsky matematik, graf navrhnutý r. 1891 je často používaný na štúdium.)

Riešenie: Vzhľadom nato, že sa z grafu dá vytvoriť odstránením vrcholov a s ním spojených hrán a nasledovným odstránením vrcholov stupňa 2 (s tým, že dvojica hrán, s ktorými bol taký vrchol incidentný, vytvorí jednu hranu) graf izomorfný s grafom $K_{3,3}$, Petersenov graf nie je planárny.

OBRÁZOK 11.7.
PETERSENOV
GRAF A $K_{3,3}$



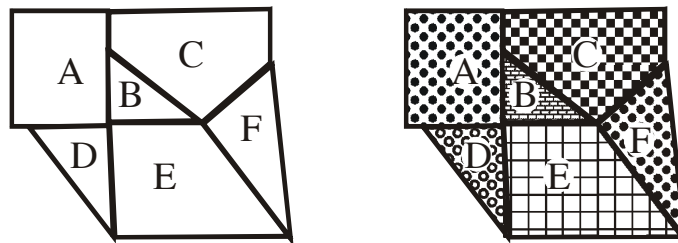
Petersenov graf, jeho podgraf získaný odstránením vrcholu b a $K_{3,3}$, z ktorého sa dá získať graf izomorfný s prostredným grafom pridaním vrcholov a, c a g medzi hrany $\{e, f\}$, $\{d, h\}$ a $\{i, j\}$.

11.3 FARBENIE GRAFOV

**POLITICKÉ MAPY –
CEZ HRANICE
ODLIŠNÉ FARBY**

Politické mapy sa zvyčajne kreslia tak, že štáty, ktoré zdieľajú hranice, sú vyfarbené odlišnou farbou. (Keď sa hranice štátov dotýkajú iba v jednom bode, potom môžu štáty byť vyfarbené rovnakou farbou.) Na obr. 11.8 je ukázaná jedna možná mapa a spôsob, ako ju vyfarbiť piatimi farbami.

OBRÁZOK 11.8.
MAPA A JEJ
FARBENIE



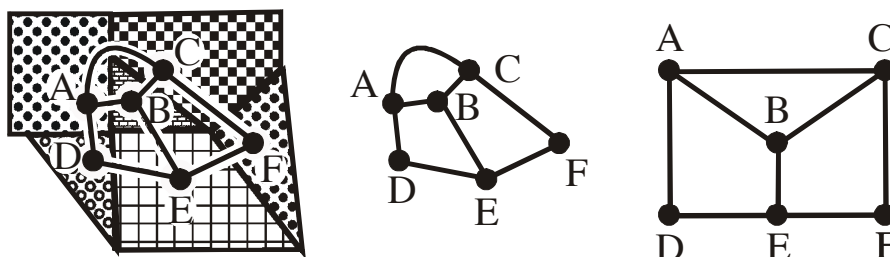
Mapa a jej farbenie (namiesto farieb sú použité odlišné černo-biele vzory).

Otázka je, dokážeme zafarbiť túto mapu aj menej ako piatimi farbami?

**DUÁLNY GRAF K
MAPE**

Takže, čo to má čo spoločné s grafmi? Farbenie máp je otázka susednosti – ktoré štáty zdieľajú netriviálnu hranicu. Všetky ostatné informácie (ako veľkosť alebo tvar štátu) sú nepodstatné. Takže môžeme odstrániť túto zvyšnú informáciu nahradením štátu vrcholom a spojením vrcholov, keď im zodpovedajúce krajiny zdieľajú hranicu. Inak povedané, umiestnime vrchol do každej mapy štátu a spojíme vrcholy, keď štáty zdieľajú spoločnú hranicu. Výsledný graf sa volá **duálny graf** k danej mape.

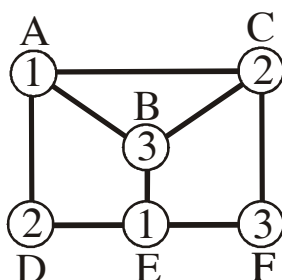
OBRÁZOK 11.9.
DUÁLNY GRAF
ODPOVEDAJÚCI
MAPE



Duálny graf odpovedajúci mape, jeho vybratie z mapy a pravidelnejšie zakreslenie.

Keď máme takýto graf, ako je na obr. 11.9, je možné jeho vrcholy zafarbiť menej farbami tak, aby susedné vrcholy neboli zafarbené rovnakou farbou? Odpoveď je na obr. 11.10.

OBRÁZOK 11.10.
ZAFARBENIE
VRCHOLOV

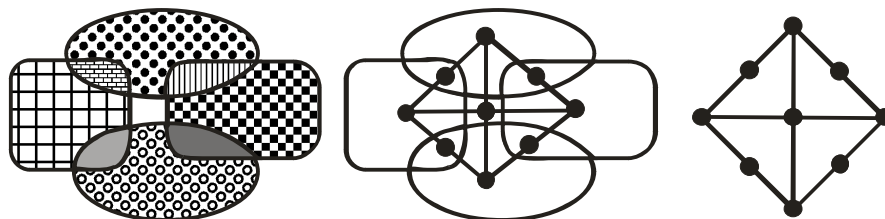


Zafarbenie vrcholov grafu menej farbami (farby nahradené číslami), mapa by vyžadovala iba 3 farby.

PRÍKLAD 11.5.

Koľko farieb je potrebných na zafarbenie mapy na obr. 11.11?

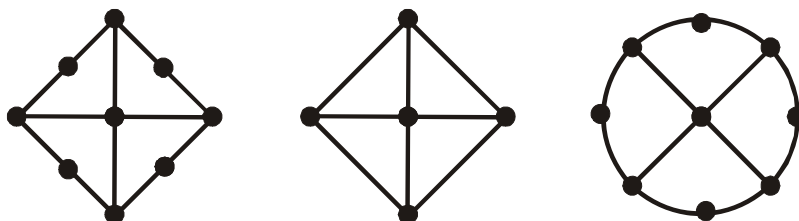
OBRÁZOK 11.11.
MAPA A JEJ GRAF



Mapa a jej prevedenie na graf.

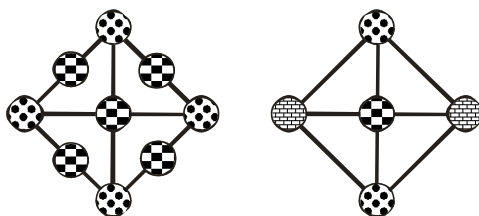
Na obr. 11.11 je súčasne s mapou uvedený jej prevod na graf. Namiesto pôvodnej otázky sa teda môžeme pýtať, najmenej koľkými farbami zafarbíme vrcholy grafu, aby susedné vrcholy mali rôznu farbu? Zodpovedajúci graf máme znova na obr. 11.12, spolu s dvoma ďalšími grafmi, pri ktorých sa tiež spýtame na najmenší počet farieb na zafarbenie ich vrcholov. Ako vidno na obr. 11.13, na zafarbenie prvého grafu a teda pôvodnej mapy postačujú dve farby, zatiaľ čo napodiv u druhého, jednoduchšieho grafu získaného odstránením vrcholov sú potrebné 3 farby. Tretí graf z obr. 11.12 je izomorfný s prvým grafom, a teda má rovnaké minimálne zafarbenie – pamätajte si, že pri grafoch si musíte predstavovať vrcholy ako koráliky, a hrany ako kúsky gummy, ktoré je možno ľubovoľne ťahať a krútiť.

OBRÁZOK 11.12.
KOĽKO FARIEB NA
ZAFARBENIE
VRCHOLOV?



Koľko farieb je potrebných na zafarbenie vrcholov grafov?

OBRÁZOK 11.13.
PRVÝ GRAF S VIAC
VRCHOLMI SI
VYŽIADAL MENEJ
FARIEB



Napodiv, prvý graf s viac vrcholmi si vyžiadal menej farieb.

Koľko farieb by bolo potrebných na zafarbenie kompletného grafu K_n ? Samozrejme n , keďže každý vrchol je spojený s každým.

CHROMATICKÉ
ČÍSLO GRAFU $\chi(G)$

Chromatické číslo grafu je počet farieb nutných na zafarbenie vrcholov tak, že susedné vrcholy majú rôznu farbu. Chromatické číslo grafu G sa zvyčajne označuje $\chi(G)$.

$\chi(G)$ PRE
PETERSENOV
GRAF, $K_N, K_{N,M}$


Napríklad Petersenov graf na obr. 11.8 má chromatické číslo 3. Chromatické číslo grafu K_n je n , a chromatické číslo bipartitného grafu $K_{n,m}$ je 2 (dve množiny vrcholov zafarbíme každú inou farbou).

$\chi(G)$ PRE PÁRNE
 C_N

Chromatické číslo grafu C_n pre párne n je dva. Na skonštruovanie takého farbenia stačí vybrať vrchol a zafarbiť ho jednou farbou, a postupovať po kruhu v smere hodinových ručičiek a farbiť vrcholy vždy alternatívnou farbou. N -tý vrchol musí byť zafarbený druhou farbou, pretože prvý a $(n-1)$ prvý boli zafarbené prvou z farieb.

$\chi(G)$ PRE
NEPÁRNE C_N


Chromatické číslo grafu C_n pre nepárne n je tri. Na skonštruovanie takého farbenia stačí vybrať vrchol a zafarbiť ho jednou farbou, a postupovať po kruhu po smeru hodinových ručičiek a farbiť vrcholy vždy alternatívnou farbou. N -tý vrchol musí byť zafarbený tretou farbou, pretože prvý a $(n-1)$ prvý boli zafarbené prvou, resp. druhou z farieb.

VETA 11.6. 

(R. L. Brooks, 1941): Nech je najväčší zo stupňov vrcholov grafu G rovný d . Ak $d \neq 2$ a graf G neobsahuje kompletný podgraf s $d+1$ vrcholmi, tak $\chi(G) \leq d$ (inak $\chi(G) = d+1$). Ak $d = 2$ a graf G neobsahuje kružnicu nepárnej dĺžky, tak $\chi(G) = 2$, inak $\chi(G) = 3$.

Vetu uvádzame bez dôkazu.

Jedna z najznámejších viet matematiky je veta o štyroch farbách:

VETA 11.7. 

Každý planárny graf má chromatické číslo maximálne 4.

VETA O ŠTYROCH
FARBÁCH – DŮKAZ
POČÍTAČOM

Prvá písomná zmienka o tomto probléme pochádza z listu Augusta De Morgana nám známemu sirovi Hamiltonovi z r. 1852. Po sade neúspešných pokusov bola táto teória dokázaná pomocou počítačov r. 1976, pomocou skontrolovania niekoľko tisíc špeciálnych prípadov. To vyvolalo diskusiu, pre tak rozsiahle použitie počítačov v dôkaze. Čo keď bola chyba v programe?

FARBENIE MÁ
EXPONENCIÁLNU
ZLOŽITOSŤ

Najlepší známy algoritmus na farbenie grafov má v najhoršom prípade exponenciálnu zložitosť v závislosti od počtu vrcholov v grafe. Aj nájsť aproximáciu chromatického čísla je zložitá.

Jeden z možných algoritmov na zafarbenie obyčajného grafu s greedy (pažravým) prístupom:

**ALGORITMUS
11.2.**
ZAFARBENIE
OBYČAJNÉHO
GRAFU GREEDY
ALGORITMOM

1. Zoraď vrcholy v_1, v_2, \dots, v_n podľa veľkosti ich stupňov, tak, že $deg(v_1) \geq deg(v_2) \geq \dots \geq deg(v_n)$; $i=0$
2. Prirad' farbu $i+1$ prvému ešte nezafarbenému vrcholu v zozname. Postupne prirad' farbu $i+1$ vrcholom v zozname, ktoré ešte neboli zafarbené a nesusedia s vrcholmi, ktorým už bola priradená farba $i+1$.
3. Opakuj krok 2, dokiaľ všetky vrcholy nebudú zafarbené

Uvedený algoritmus však nezaručuje získanie zafarbenia vrcholov s minimálnym počtom farieb.

Použitie farbenia grafov

PRÍKLAD 11.6.
ROZVRH

Ako môžu byť rozvrhnuté skúšky na univerzite, aby žiaden študent nemal naplánované dve skúšky naraz?

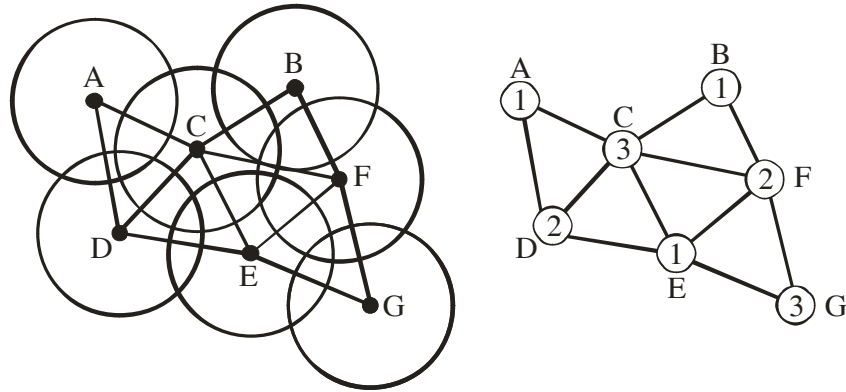
Riešenie: Vrcholy budú reprezentovať kurzy, hrana bude spájať vrcholy vtedy, keď existuje študent, ktorý ide na obidve skúšky. Každé časové priradenie skúške je reprezentované rozdielnou farbou. Rozvrh skúšok potom zodpovedá zafarbeniu zodpovedajúceho grafu. (Pozri cvičenie 11.22.)

PRÍKLAD 11.7.
PRIRADENIE
FREKVENCÍ

Frekvenčné kanály sú priradené vysielateľom (nech už rozhlasovým, televíznym, či iným) tak, že žiadne dva vysielateľe vzdialené do 100 km nemôžu používať rovnaký kanál. Ako priradenie kanálov riešiť farbením grafov?

Riešenie: Každému vysielateľu bude priradený vrchol. Dva vrcholy sú spojené, keď sú menej ako 100 km vzdialené. Priradenie kanálov zodpovedá zafarbeniu grafu, kde každá farba reprezentuje iný kanál (obr. 11.14).

OBRÁZOK 11.14.
DOSAH
VYSIELAČOV A
GRAF



Dosah vysieláčov A,B,C,D,E,F,G je znázornený kruhmi, možnosť interferencie spojením vysieláčov hranami a ako je na grafe napravo, na vysielanie bez interferencie stačia 3 frekvencie reprezentované farbami (v obrázku napravo sú vyznačené iba čísla farieb).

PRÍKLAD 11.8.
INDEXOVÝ
REGISTER

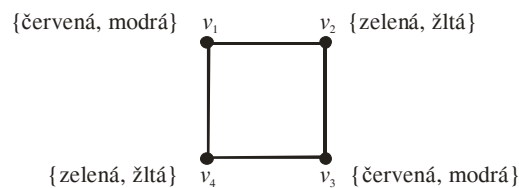
V efektívnych kompilátoroch je výpočet slučky programu zrýchlený, pokiaľ sú použité premenné ukladané dočasne v indexových registroch v CPU namiesto regulárnej pamäti. Koľko indexových registrov je potrebných pre danú slučku programu?

Riešenie: Každý vrchol grafu bude reprezentovať premennú v slučke. Hrana medzi dvoma vrcholmi existuje, keď im zodpovedajúce premenné musia byť uložené v indexovom registri v rovnakom čase výpočtu. Potom chromatické číslo grafu dáva počet potrebných registrov (pozri cvičenie 11.23).

“K-TUPLE”
FARBENIE
A PRIRADENIE
FREKVENCÍ

K aplikáciám súvisiacim s priradením frekvencií patrí aj „*k-tuple*“ farbenie grafu, čo je priradenie množiny k rôznych farieb každému z vrcholov grafu, takže žiadne dva susedné vrcholy nemajú priradenú spoločnú farbu. Pre graf G sa zvyčajne označuje $\chi_k(G)$ také najmenšie prirodzené číslo n , že graf G má k -tuple farbenie s použitím n farieb. Napríklad, $\chi_2(C_4) = 4$. Stačí nám teda použiť 4 farby tak, aby sme priradili dve farby každému vrcholu grafu C_4 , tak, aby žiadne dva susedné vrcholy nemali priradenú ani jednu rovnakú farbu. Ďalej, menej ako 4 farby nestačia, pretože dva susedné vrcholy musia mať priradené po dvoch farbách, ktoré sú rôzne (pozri obr. 11.15). Toto farbenie sa využíva, pokiaľ máme priradiť vysieláčom viac kanálov, aby nenastala interferencia – jednotlivé kanály či frekvencie sú reprezentované farbami.

OBRÁZOK 11.15.
„K-TUPLE”
FARBENIE

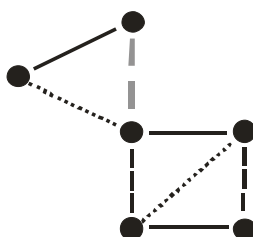


„ k -tuple“ farbenie $\chi_2(C_4) = 4$

HRANOVÉ
ZAFARBENIE

Okrem vrcholového zafarbenia grafov existuje aj **hranové zafarbenie**, kedy hrany, ktoré sú incidentné s rovnakými vrcholmi, musia mať rôzne farby, pozri obr. 11.16.

OBRÁZOK 11.16.
HRANOVÉ
ZAFARBENIE



Hranové zafarbenie grafu (farby sú nahradené rôznym čiarkovaním).

SHANNON

Claude Elwood Shannon (zakladateľ teórie informácie a informatiky) položil úlohu: Majme elektrické zariadenia, v ktorom sú určité miesta prepojené drôťmi. Aby sme drôty vychádzajúce z určitého miesta rozlíšili, použijeme drôty rozličných farieb. Aký najmenší počet farieb na to potrebujeme? Tento problém sa dá riešiť ako problém hranového chromatického čísla.

Hranové chromatické číslo $\chi_{\text{hranové}}(G)$ je najmenší počet farieb, ktorý môže byť použitý v hranovom zafarbení grafu G .

VETA 11.8. 

(Vizing, V. G., 1964) Keď G je konečný graf bez slučiek, ktorého najväčší stupeň vrcholu je r , potom $r \leq \chi_{\text{hranové}}(G) \leq r+1$.

Vetu uvádzame bez dôkazu.

INVARIANTY

Každý graf sa dá ohodnotiť mnohými ďalšími číselnými charakteristikami, ktoré sú rovnaké pre izomorfné grafy a ktoré preto voláme invarianty. Uvedieme si dve také základné charakteristiky, a to veľkosť minimálnej dominujúcej množiny a veľkosť čísla vrcholovej nezávislosti.

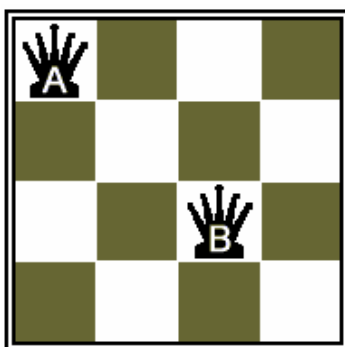
MINIMÁLNA
DOMINUJÚCA
MNOŽINA

Dominujúca množina (dominating set) je množina vrcholov taká, že všetky ostatné vrcholy sú spojené hranou aspoň s jedným vrcholom dominujúcej množiny. Dominujúca množina s najmenším počtom vrcholov sa volá **minimálna dominujúca množina** (minimum dominating set).

Túto množinu si ukážeme na šachovom príklade. Na určenie minimálneho počtu dám na šachovnici, tak, aby každé voľné pole bolo ohrozené aspoň jednou dámou, môže byť použitý obyčajný graf. Šachovnica $n \times n$ má n^2 štvorcov v $n \times n$ konfigurácii. Dáma v danej pozícii ohrozuje všetky štvorce v danom rade, v danom stĺpci a na obidvoch diagonálach prechádzajúcich štvorcem pozície dámy. Zodpovedajúci obyčajný graf má n^2 vrcholov, jeden za každý štvorec a dva vrcholy sú spojené hranou, keď dáma umiestnená na štvorci zodpovedajúcejmu jednému z vrcholov ohrozuje štvorec reprezentovaný druhým vrcholom. Sada pozícií minimálneho počtu dám umiestnených na šachovnici, tak, aby každé voľné pole bolo ohrozené aspoň jednou dámou, zodpovedá v grafe minimálnej dominujúcej množine.

Príklad minimálneho počtu dám dominujúcich 4×4 šachovnicu je uvedený na obr. 11.17.

OBRÁZOK 11.17.
DÁMY
DOMINUJÚCE 4×4
ŠACHOVNICU

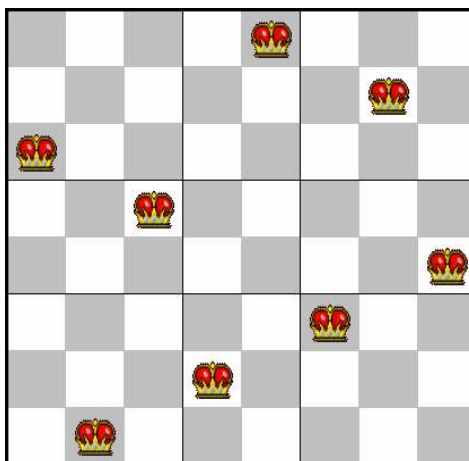


Príklad minimálneho počtu dám dominujúcich 4×4 šachovnicu.

ČÍSLO
VRCHOLOVEJ
NEZÁVISLOSTI

Množina vrcholov v grafe sa volá nezávislá, keď nie sú žiadne dva vrcholy z tejto množiny spojené hranou. Číslo vrcholovej nezávislosti grafu je maximálny počet vrcholov v nezávislej množine vrcholov grafu.

OBRÁZOK 11.18.
KOĽKO DÁM, ABY
SA
NEOHROZOVALI?



Koľko dám možno umiestniť na šachovnicu, aby žiadna neohrozovala nijakú ďalšiu?

DÁMY KTORÉ
NEOHROZUJÚ
OSTATNÉ DÁMY

Toto číslo si môžeme ilustrovať na obdobnej úlohe, ako bola predchádzajúca. V polovici 19. storočia sa objavila v šachovej rubrike jedného nemeckého obrázkového časopisu úloha: Na prázdnu normálnu šachovnicu máme postaviť osem dám tak, aby žiadna neohrozovala nijakú ďalšiu. Cieľom bolo vyšetriť, koľko riešení má táto úloha, a hneď vtedy bola daná aj odpoveď – 92 riešení. Pre nás je však zaujímavá inak položená úloha: Koľko dám možno umiestniť na šachovnicu, aby žiadna neohrozovala nijakú ďalšiu? Na riešenie môžeme využiť rovnakého typu grafu ako v predchádzajúcom prípade, iba teraz hľadáme najväčšiu množinu vrcholov tak, aby žiadna dvojica z nich nebola spojená hranou. Ako výsledok potom môžeme dostať graf odpovedajúci napr. šachovnici na obr. 11.18.

ZHRNUTIE

CESTY V OHODNOTENOM GRAFE	V sieťach, napríklad dopravných, je užitočné každej hrane korešpondujúceho grafu priradiť číslo, ktoré voláme <i>váha</i> , a ktoré reprezentuje napr. vzdialenosť. V takto ohodnotených grafoch je častým problémom zistiť vzdialenosť medzi dvoma vrcholmi ako minimálny súčet váh hrán cesty medzi dvoma vrcholmi, čo rieši <i>Dijkstrov algoritmus</i> . Podobne <i>problémom obchodného cestujúceho</i> je nájsť hamiltonovskú kružnicu s najmenším súčtom váh.
PLANÁRNY GRAF	<i>Planárny graf</i> je taký, ktorý sa dá zakresliť v rovine bez toho, že by sa jeho hrany krížili. Taký graf nesmie obsahovať ako podgrafy <i>Kuratowského grafy</i> , čo sú grafy $K_{3,3}$ a K_5 alebo grafy z nich vytvorené „navlečením“ vrcholov stupňa 2 na ich hrany.
EULEROVA FORMULA	Nech G je planárny obyčajný graf s $ E $ hranami, $ V $ vrcholmi a $ K $ komponentmi. Nech $ R $ je počet stien jeho rovinatej reprezentácie. Potom dostávame <i>rozšírenú Eulerovu formulu</i> $ R = E - V + K +1$.
STUPEŇ STENY	Súvislý planárny obyčajný graf rozdeľuje rovinu na $ R $ stien. Počet hrán ohraničujúcich stenu R (ktorý budeme volať <i>stupeň steny</i> , resp. <i>dĺžku oblasti</i> $deg(R)$) je najmenej 3. Platí $2 E = \sum_{\text{všetky steny } R} deg(R) \geq 3 R $.
DUÁLNY GRAF A FARBENIE	Keď umiestnime vrchol do každej <i>mapy</i> štátu a spojíme vrcholy, keď štáty zdieľajú spoločnú hranicu, dostaneme <i>duálny graf</i> k danej mape. Zafarbenie štátov v mape zodpovedá zafarbeniu vrcholov grafu tak, aby susedné vrcholy mali rôznu farbu. Najmenší počet potrebných farieb sa volá <i>chromatické číslo grafu</i> a každý planárny graf má chromatické číslo maximálne 4. Farbenie sa dá využiť pri zostavovaní rozvrhov, priradovaní vysielacích frekvencií, alebo zistení najmenšieho počtu potrebných registrov v programe. <i>Hranové chromatické číslo</i> je najmenší počet farieb, ktorými môžeme zafarbiť hrany, aby každý vrchol bol incidentný iba s rôzne zafarbenými hranami.
INVARIANTY	<i>Dominujúca množina</i> (dominating set) je množina vrcholov taká, že všetky ostatné vrcholy sú spojené hranou aspoň s jedným vrcholom dominujúcej množiny. Minimálnu dominujúcu množinu si pripomenieme minimálnym počtom dám potrebných na ohrozenie každého voľného poľa šachovnice. Keď naopak zoberieme maximálny počet dám rozostavených tak, aby sa navzájom neohrozovali, odpovedá to nájdeniu <i>čísła vrcholovej nezávislosti</i> . Tieto premenné sú <i>invarianty</i> , izomorfné grafy majú ich hodnoty rovnaké.

KLÚČOVÉ POJMY

cesty v grafoch
planárne grafy

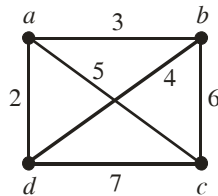
duálny graf k mape
chromatické číslo grafu $\chi(G)$

<i>Eulerova formula</i>	<i>veta o štyroch farbách</i>
<i>Kuratowského veta</i>	<i>„k-tuple“ farbenie</i>
<i>farbenie grafov a máp</i>	<i>hranové zafarbenie</i>
<i>váha hrany</i>	<i>Shannon</i>
<i>ohodnotený graf</i>	<i>invarianty</i>
<i>dĺžka cesty</i>	<i>hranové chromatické číslo grafu</i>
<i>problém obchodného cestujúceho</i>	$\chi_{\text{hranové}}(G)$
<i>Dijkstrov algoritmus</i>	<i>dominujúca množina</i>
<i>stupeň steny = dĺžka oblasti</i>	<i>minimálna dominujúca množina</i>
<i>Kuratowského grafy</i>	<i>číslo vrcholovej nezávislosti</i>
<i>Petersenov graf</i>	

CVIČENIA

- 11.1.** Upravte Dijkstrov algoritmus na nájdenie najkratšej vzdialenosti medzi dvoma vrcholmi a a z v obyčajnom súvislom ohodnotenom grafe tak, aby bola nájdená dĺžka najkratšej cesty od východzieho vrcholu a ku každému inému vrcholu.
- 11.2.** Vyriešte problém obchodného cestujúceho pre graf na obr. 11.19 nájdením celkového súčtu váh pre všetky hamiltonovské kružnice a určením kružnice s najmenším celkovým súčtom.

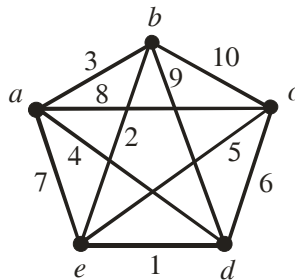
OBRÁZOK 11.19.
HAMILTONOVSKÉ
KRUŽNICE A ICH
DĹŽKY?



Hľadajte hamiltonovské kružnice a ich dĺžky (váhy).

- 11.3.** Vyriešte problém obchodného cestujúceho pre graf na obr. 11.20 nájdením celkového súčtu váh pre všetky hamiltonovské kružnice a určením kružnice s najmenším celkovým súčtom.

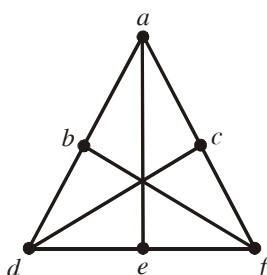
OBRÁZOK 11.20.
HAMILTONOVSKÉ
KRUŽNICE A ICH
DĹŽKY?



Hľadajte hamiltonovské kružnice a ich dĺžky (váhy).

- 11.4.** Navrhните ohodnotený graf tak, že celková suma váh uzavretého sledu, ktorý navštívi každý vrchol aspoň raz, je minimálna pre sled, ktorý navštívi niektoré vrcholy viackrát.
- 11.5.** Dajú sa z piatich domov viesť cesty ku dvom studniám tak, aby sa žiadna z ciest nekrížila?
- 11.6.** Zistíte, či je graf na obr. 11.21 planárny. Keď áno, nakreslite ho bez kríženia hrán.

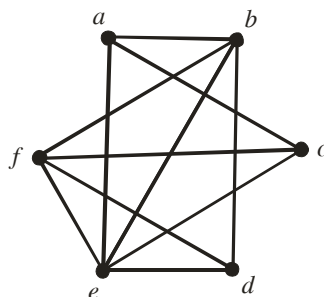
OBRÁZOK 11.21.
ROVINNÁ
REPREZENTÁCIA?



Dá sa nájsť rovinná reprezentácia daného grafu?

- 11.7.** Zistíte, či je graf na obr. 11.22 planárny. Keď áno, nakreslite ho bez kríženia hrán.

OBRÁZOK 11.22.
ROVINNÁ
REPREZENTÁCIA?

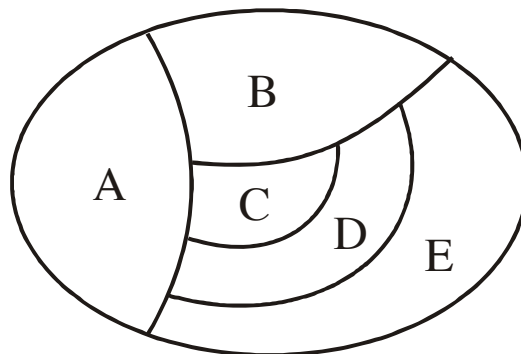


Dá sa nájsť rovinná reprezentácia daného grafu?

- 11.8.** Ukážte, že kompletý graf K_5 nie je planárny pri použití podobných argumentov, aké boli použité v príklade s oblasťami R pre $K_{3,3}$.
- 11.9.** Predpokladajme, že súvislý planárny graf má šesť vrcholov, každý stupňa 4. Na koľko strán (oblastí) je rovina rozdelená planárnou reprezentáciou tohto grafu?
- 11.10.** Dokážte vetu 11.4.
- 11.11.** Predpokladajme, že súvislý planárny obyčajný graf s $|E|$ hranami a $|V|$ vrcholmi neobsahuje kružnice dĺžky 4 alebo kratšie. Dokážte, že $|E| \leq (5/3)|V| - (10/3)$, keď počet vrcholov je väčší ako 4.

- 11.12.** Ktorý z nasledujúcich neplanárnych grafov má vlastnosť, že po odstránení ľubovoľného vrcholu a všetkých s ním incidentných hrán dostávame planárny graf?
(a) K_5 (b) K_6 (c) $K_{3,3}$ (d) $K_{3,4}$
- PRIESEČNÍKOVÉ ČÍSLO** **11.13.** *Priesečníkové číslo (crossing number)* obyčajného grafu je najmenší možný počet preťať dvoch hrán inde ako v s nimi incidentných vrcholoch (pričom žiadne tri hrany sa nesmú pretnúť v spoločnom bode). Vo všeobecnosti ide o veľmi zložitý problém, dôležitý na návrh elektronických obvodov (definuje počet izolovaných drôtov potrebných na prídanie k plošnému obvodu). Vašou úlohou je ukázať, že $K_{3,3}$ má priesečníkové číslo rovné jednej.
- HRÚBKA** **11.14.** *Hrúbka (thickness)* jednoduchého grafu je najmenší počet planárnych podgrafov, ktoré majú graf G ako ich zjednotenie. To je dôležité pre návrh elektronických obvodov, aby bolo možné zistiť, koľko najmenej vrstiev je potrebné na stavbu obvodu. Ukážte, že graf $K_{3,3}$ má hrúbku 2.
- 11.15.** Nájdite hrúbku grafov (a) K_5 (b) K_6 (c) K_7 (d) $K_{3,4}$ (e) $K_{4,4}$ (f) $K_{5,5}$
- 11.16.** Ukážte, že keď je G súvislý obyčajný graf s $|V|$ vrcholmi a $|E|$ hranami, potom jeho hrúbka je najmenej $\lceil |E|/(3|V| - 6) \rceil$.
- 11.17.** Použite cvičenie 11.16 na to, aby ste ukázali, že hrúbka pre K_n je najmenej $\lfloor (n+7)/6 \rfloor$.
- 11.18.** Nakreslite $K_{3,3}$ na torus, aby sa hrany neprekrývali.
- 11.19.** Skonstruujte duálny graf pre mapu na obr. 11.23. Nájdite počet farieb potrebných na zafarbenie mapy tak, aby žiadne dve susedné steny (oblasti) nemali rovnakú farbu.

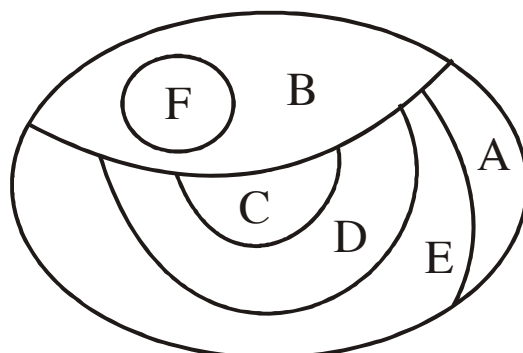
OBRÁZOK 11.23.
DUÁLNY GRAF
A ZAFARBENIE
MAPY?



Nájdite duálny graf a zafarbenie mapy.

- 11.20.** Skonstruujte duálny graf pre mapu na obr. 11.24. Nájdite počet farieb potrebných na zafarbenie mapy tak, aby žiadne dve susedné steny (oblasti) nemali rovnakú farbu.

OBRÁZOK 11.24.
DUÁLNY GRAF
A ZAFARBENIE
MAPY?



Nájdite duálny graf a zafarbenie mapy.

11.21. Aké je chromatické číslo grafu typu „koleso“ W_n ?

11.22. Navrhnete rozvrh na skúšky z predmetov Analýza algoritmov (A), Modelovanie a simulácia (M), Počítačová grafika (P), Databázy (D), Umelá inteligencia (U), Neurónové siete (N), Evolučné algoritmy (E), Operačné systémy (O), keď žiadni študenti nemajú naraz zapísané predmety Analýza algoritmov a Operačné systémy, nemajú naraz zapísané predmety Modelovanie a simulácia a Operačné systémy, nemajú naraz zapísané predmety Databázy a Umelá inteligencia, nemajú naraz zapísané predmety Databázy a Neurónové siete, nemajú naraz zapísané predmety Analýza algoritmov a Modelovanie a simulácia, nemajú naraz zapísané predmety Analýza algoritmov a Počítačová grafika, nemajú naraz zapísané predmety Počítačová grafika a Databázy, ale existujú študenti, ktorí majú zapísané všetky ostatné možné kombinácie.

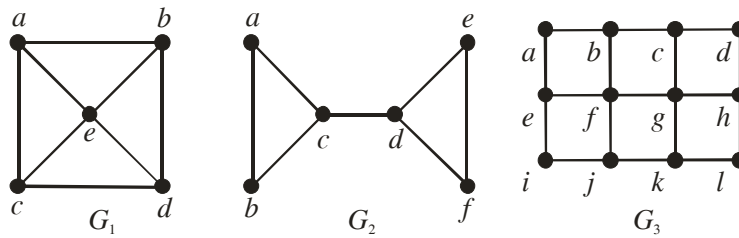
11.23. V slučke počítačového programu sa objavuje 7 premenných. Premenné a kroky, v priebehu ktorých musia byť uložené sú:

- t kroky 1-6
- u krok 2
- v kroky 2-4
- w kroky 1,3 a 5
- x kroky 1 a 6
- y kroky 3-6
- z kroky 4-5

Koľko rozdielnych indexových registrov potrebujeme na uloženie týchto premenných v priebehu výpočtu?

11.24. Frekvencie mobilných telefónov sú priradované podľa zón. Každá zóna má priradenú sadu frekvencií, ktoré môžu byť použité mobilnými telefónmi v tej zóne. Rovnaká frekvencia nemôže byť použitá v zónach, kde by bol problém s interferenciou. Vysvetlite, ako k -tuple zafarbovanie môže byť použité na priradenie k frekvencií každému mobilnému telefónu.

OBRÁZOK 11.25.
MINIMÁLNE
DOMINUJÚCE
MNOŽINY?



11.25. Nájdite minimálne dominujúce množiny grafov na obr. 11.25.

Minimálne dominujúce množiny?

11.26. Nájdite minimálny počet dám dominujúcich $n \times n$ šachovnicu
(a) pre $n = 3$, (b) pre $n = 4$, (c) pre $n = 5$

11.27. Ukážte, že počet vrcholov obyčajného grafu je menší alebo rovný násobku čísla vrcholovej nezávislosti (= maximálneho počtu vrcholov nezávislej množiny vrcholov, t. j. independence set) a chromatického čísla grafu.

12 TEÓRIA GRAFOV III

STROMY AKO MODEL Y • VLASTNOSTI STROMOV • BINÁRNE
PREHLADÁVANIE • PREFIXOVÉ KÓDY • STROMY
ALGEBRAICKÝCH VÝRAZOV • HRY

V tejto kapitole sa pozrieme podrobnejšie na špeciálnu triedu grafov a to na stromy. Stromy sú súvislé grafy bez kružníc, medzi dvoma vrcholmi v nich existuje práve jedna cesta. Zaslúžia si špeciálnu pozornosť, pretože sú široko využívané na ukladanie a rýchle vyhľadávanie informácií, pri rozhodovaní, napríklad pri hrách, alebo aj na vyjadrenie algebraických výrazov.

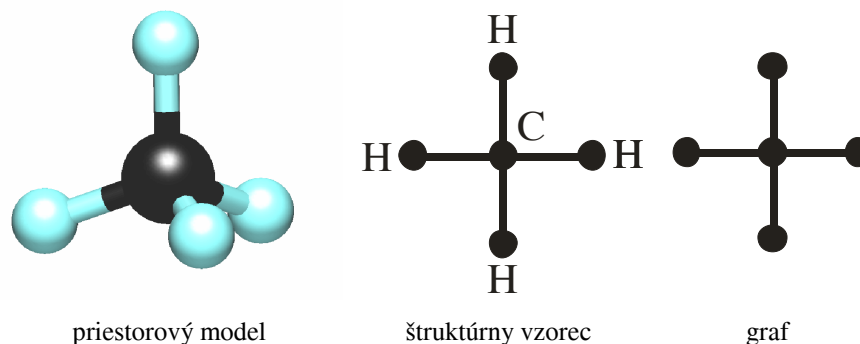
12.1 STROMY AKO MODEL Y A ICH ZÁKLADNÉ VLASTNOSTI

STROM, CAYLEY A
ALKÁNY

Strom je súvislý graf bez kružníc. Prvýkrát boli stromy použité už anglickým matematikom Arthurom Cayleym¹ r. 1857 na spočítanie druhov istého typu chemických zlúčenín – alkánov (pozri obr. 12.1). Alkány sa inak volajú nasýtené uhľovodíky a majú sumárnu formulu C_nH_{2n+2} . V grafovom modeli je každý atóm uhlíka reprezentovaný vrcholom stupňa 4 a každý vodíkový atóm vrcholom stupňa 1. V obyčajnom grafe reprezentujúcom alkány je teda je $3n + 2$ vrcholov, a keďže počet hrán je polovicou sumy stupňov vrcholov, ich počet je $(4n + 2n + 2)/2 = 3n + 1$ hrán. (Dôkaz faktu, že taký súvislý graf nemá kružnice, je ponechaný na cvičenie 12.5.) Neizomorfné stromy o n vrcholoch stupňa 4 a o $2n + 2$ vrcholoch stupňa 1 reprezentujú rozdielne izoméry C_nH_{2n+2} (pozri cvičenie 12.8).

¹ Arthur Cayley (1821–1895) vyštudoval v Cambridgi, ale pretože nebola voľná pozícia matematika, dal sa na právnickú kariéru, kde sa stal odborníkom, napriek tomu, že v priebehu 15 ročnej kariéry právnika napísal 300 matematických článkov. Potom, čo sa v Cambridgi uvoľnilo miesto matematika, Cayley sa naň prihlásil, aj keď išiel so zárobkom podstatne dolu.

OBRÁZOK 12.1.
REPREZENTÁCIE
CHEMICKEJ
ZLÚČENINY



Ukážka rôznych typov reprezentácie chemickej zlúčeniny metánu, ktorý patrí medzi alkány.

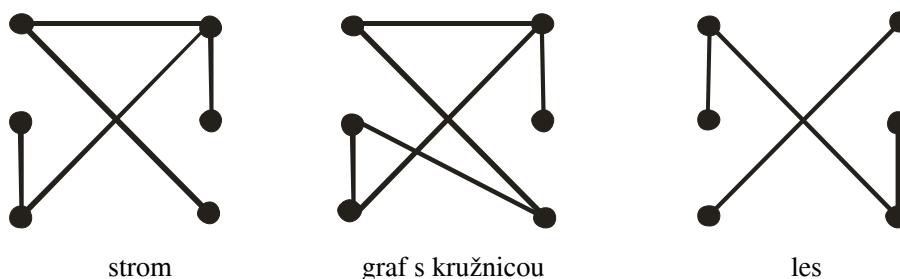
Od Cayleyho doby boli stromy použité na riešenie problémov v množstve disciplín. V bežnom živote sa s použitím stromov môžeme stretnúť od genealógie – stromu príbuznosti pri rodokmeni, klasifikačnom strome živočíchov a rastlín, stromu športového turnaja až po organizačnú štruktúru hierarchie podniku, kde vrcholy sú jednotlivé organizačné jednotky a hrany predstavujú vzťahy nadriadenosti-podriadenosti medzi nimi. Najobyčajnejším využitím stromov v počítači je štruktúra adresárov. Stromy sa ale nepoužívajú iba na opis štruktúr, ale predovšetkým ako pomôcka na manipulácie s informáciou. Je to napríklad:

- rozmiestňovanie prvkov v databázach,
- efektívne kódy na ukladanie a prenos informácií,
- rozhodovacie stromy,
- modely hier na určenie vyhrávajúcej stratégie,
- nájdenie najlacnejšieho prepojenia uzlov komunikačnej siete,
- prehľadávanie stromov (napríklad riešenie problému rozmiestnenia dám na šachovnici, aby sa neohrozovali).

LES

Nesúvislý graf bez kružníc ako podgrafov (skladá sa zo stromov) voláme *les* (pozri obr. 12.2).

OBRÁZOK 12.2.
STROM,
GRAF
S KRUŽNICOU,
LES



Ukážka stromu, grafu s kružnicou, ktorý teda nie je strom a lesa, skladajúceho sa z dvoch stromov. Aj keď zvyčajne sa stromy zakresľujú bez kríženia hrán, keďže všetky stromy sú planárne grafy, strom ostáva stromom bez ohľadu na grafickú reprezentáciu.

VETA 12.1.

Neorientovaný graf je stromom iba vtedy, ak existuje práve jedna cesta medzi ľubovoľnou dvojicou jeho vrcholov.

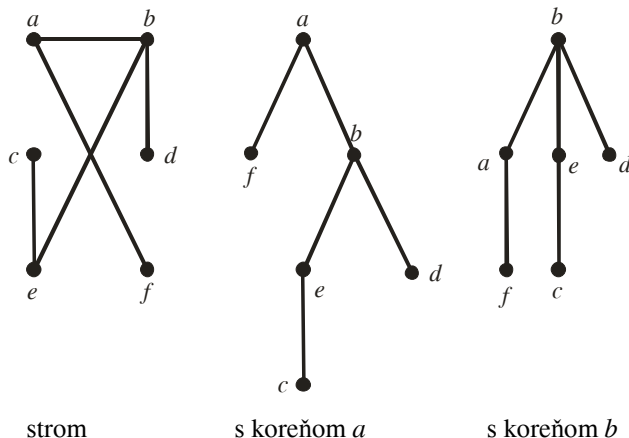
Dôkaz: Predpokladajme, že T je strom. Potom T je súvislý graf bez kružníc. Nech x a y sú dva vrcholy z T . Pretože T je súvislý, medzi x a y existuje cesta. Táto cesta musí byť jediná, pretože keby existovali 2 rôzne cesty, dala by sa zobrať cesta z x do y a naspäť z y do x , a z rozdielnych hrán týchto ciest by sa dala zostaviť kružnica. To je v spore s predpokladom, že T je súvislý graf bez kružníc.

Teraz predpokladajme, že existuje práve jedna cesta medzi ľubovoľnými dvoma vrcholmi grafu. Potom je graf súvislý a neobsahuje kružnicu. Aby sme to ukázali, predpokladajme, že existuje kružnica obsahujúca body x a y . Potom by medzi x a y existovali dve cesty, pretože kružnica obsahujúca body x a y sa dá rozdeliť na cestu z x do y a na druhú cestu z y do x . Z toho vyplýva, že graf s práve jednou cestou medzi ľubovoľnou dvojicou jeho vrcholov je strom. ■

KOREŇ,
KOREŇOVÝ
STROM,
PREDCHODCA,
NASLEDOVNÍK,
PREDOK,
POTOMOK, LIST,
VNÚTORNÉ
VRCHOLY,
PODSTROM

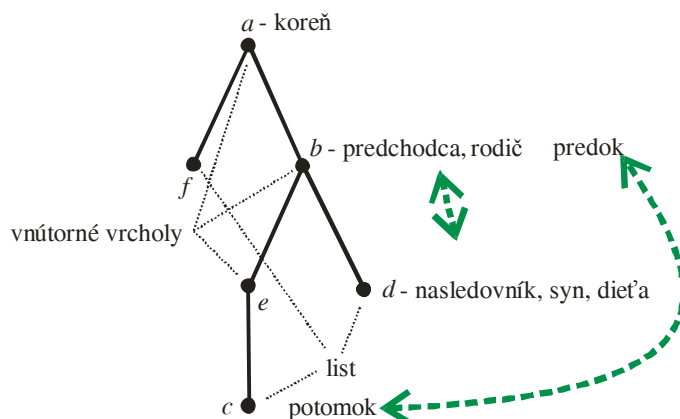
V mnohých aplikáciách sa využíva strom so špeciálne vyznačeným vrcholom volaným **koreň**. Taký strom sa volá **koreňový** (alebo **zakorenený**) **strom** (rooted tree). Keď máme vybraný takýto koreň, môžeme priradiť každej hrane orientáciu smerom od koreňa. Výberom koreňa môžeme z jedného stromu vytvoriť dva rôzne koreňové stromy, pozri obr. 12.3. Koreňové stromy preberajú ďalšiu terminológiu tak z genealógie, ako z biológie, pozri obr. 12.4. Predpokladajme, že T je koreňový strom a v je jeho vrchol rôzny od koreňa. **Predchodca** (alebo rodič – parent) vrcholu v je práve jeden vrchol u , kde (u, v) je orientovaná hrana na ceste z koreňa do vrcholu v . Vrchol v sa potom volá **nasledovník** (syn, dieťa – child) vrcholu u . **Predok** (ancestor) vrcholu v je okrem koreňa tiež každý vrchol na ceste od koreňa k danému vrcholu v , s výnimkou samotného vrcholu v . **Potomok** (descendant) vrcholu v je ľubovoľný vrchol, ktorý má vrchol v ako predka. Vrchol stromu sa volá **list**, keď nemá žiadnych nasledovníkov. Vrcholy, ktoré majú nasledovníkov, sa volajú **vnútorné vrcholy**. Keď b je vrchol stromu, **podstrom** s koreňom b je podgraf stromu zostavený z vrcholu b , všetkých jeho potomkov a všetkých hrán incidentných s potomkami, napr. na obr. 12.3 pri druhom grafe by to bol podstrom určený vrcholovou množinou $\{b, e, c, d\}$.

OBRÁZOK 12.3.
STROM
A KOREŇOVÉ
STROMY



Ukážka stromu a rôznych koreňových stromov vytvorených z pôvodného stromu rôznym výberom koreňa.

OBRÁZOK 12.4.
TERMÍNY
U KOREŇOVÝCH
STROMOV

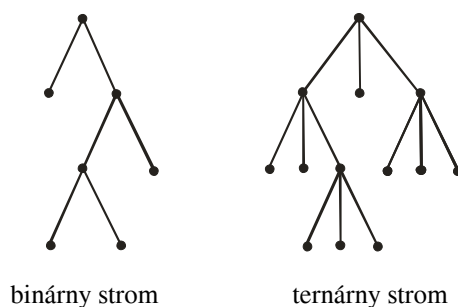


Ukážky pre termíny pri koreňových stromoch.

**ÚROVEŇ
VRCHOLU, HĽBKA
STROMU**

Úroveň vrcholu je dĺžka cesty od vrcholu ku koreňu. **Hĺbka stromu** (height, teda výška) je maximálna úroveň vrcholov. Koreňový strom sa volá ***n*-árny strom** keď každý vrchol má maximálne n nasledovníkov. Koreňový strom sa volá **plne *n*-árny strom**, keď každý vnútorný vrchol má práve n nasledovníkov. Pre $n = 2$ sa n -árny strom volá **binárny strom**, pre $n = 3$ sa n -árny strom volá **ternárny strom** (pozri obr. 12.5).


OBRÁZOK 12.5.
PLNE BINÁRNY
A PLNE TERNÁRNY
STROM



Plne binárny a plne ternárny strom.

**USPORIADANÝ
KOREŇOVÝ
STROM, ĽAVÝ A
PRAVÝ
NASLEDOVNÍK**


Usporiadáný koreňový strom je koreňový strom, kde nasledovníci každého vnútorného vrcholu sú usporiadaní, kreslia sa poporiadku zľava doprava. V binárnom strome sa vrchol naľavo volá **ľavý nasledovník**, vrchol napravo **pravý nasledovník**. Napríklad pri obrázku 12.4 je vrchol e ľavý nasledovník a vrchol d pravý nasledovník vrcholu b .

VETA 12.2.  Strom o n vrchoch má $n-1$ hrán.

Dôkaz: Použijeme matematickú indukciu. Keď $n = 1$, strom s jedným vrcholom nemá hranu, veta platí. Induktívny krok: Predpokladajme, že veta platí pre k vrcholov, kde k je kladné celé číslo. Predpokladajme, že strom T má $k+1$ vrcholov a že v je list a w je rodič vrcholu v . Odstránením vrcholu v a hrany $\{v, w\}$ z T vytvoríme strom T' . Podľa indukčnej hypotézy strom T' má $k-1$ hrán. Preto strom T musí mať k hrán, pridaním hrany $\{v, w\}$ zvýšime $k-1$ o 1. ■

CYKLOMATICKÉ
ČÍSLO GRAFU

Pre ľubovoľný graf existuje **cyklomatické číslo grafu**, pre ktoré platí: $C(G) = |E| - |V| + p$, kde E je množina všetkých hrán, V je množina všetkých vrcholov a p je počet *komponentov* grafu. Cyklomatické číslo $C(G)$ značí počet „nezávislých“ kružníc v grafe, teda minimálny počet hrán, ktoré musíme odstrániť, aby sme zrušili všetky kružnice v grafe. Keď $C(G) = 0$, potom graf neobsahuje kružnice a je teda stromom alebo lesom.


VETA 12.3. 

Plne m -árny strom s i vnútornými vrcholmi má $n = m \times i + 1$ vrcholov.

Dôkaz: Každý vrchol, okrem koreňa, je nasledovníkom vnútorného vrcholu. Pretože každý z i interných vrcholov má m nasledovníkov, existuje $m \times i$ vrcholov iných ako koreň. Preto strom obsahuje $n = m \times i + 1$ vrcholov. ■

VYVÁŽENÝ
KOREŇOVÝ STROM


Koreňový plne m -árny strom hĺbky h je **vyvážený** (balanced), keď všetky jeho listy sú na úrovni h alebo $h-1$.

VETA 12.4. 

V m -nárnom strome hĺbky h je maximálne m^h listov.

Dôkaz: Je použitá matematická indukcia na hĺbku. Uvažujte m -árny strom hĺbky 1. Tieto stromy pozostávajú z koreňa s maximálne m nasledovníkmi, kde každý z nich je list. Preto v strome hĺbky 1 je maximálne $m^1 = m$ listov.

Teraz predpokladajme, že veta platí pre všetky m -nárne stromy hĺbky menšej ako h . Nech T je m -árny strom hĺbky h . Listy T sú listy podstromov stromu T získaných odstránením hrán incidentných s koreňom. Každý z týchto podstromov má hĺbku maximálne $h - 1$. Takže, podľa indukčnej hypotézy, má maximálne m^{h-1} listov. Pre m podstromov dostávame $m \times m^{h-1} = m^h$ listov. ■

VETA 12.5. 

Keď m -árny strom hĺbky h má l listov, potom $h \geq \lceil \log_m l \rceil$. Pre plne m -árny vyvážený strom platí rovnosť.

Dôkaz: Z vety 12.4 vieme, že $l \leq m^h$. Po zlogaritmovaní pri základe m dostávame $\log_m l \leq h$. Keďže h je celé číslo, platí $h \geq \lceil \log_m l \rceil$. Predpokladajme, že strom je vyvážený. Potom je každý list v úrovni h alebo $h-1$, a pretože hĺbka je h , aspoň jeden list je na úrovni h . Potom musí existovať viac ako m^{h-1} listov. Pretože $l \leq m^h$, dostávame $m^{h-1} < l \leq m^h$, po zlogaritmovaní pri základe m dostávame $h-1 < \log_m l \leq h$. Preto $h = \lceil \log_m l \rceil$. ■

PRÍKLAD 12.1.

Predpokladajme, že správu o novom víruse rozpošle každý príjemca o minútu po prijatí 10 kamarátom a nikto nedostane správu dvakrát. Za ako dlho presiahne počet príjemcov množstvo ľudí na Slovensku?

Pri použití vety 12.4 dostávame $\lceil \log_{10} 5000000 \rceil = 7$ minút.

12.2 BINÁRNE PREHLÁDÁVACIE STROMY

NA UCHOVÁVANIE INFORMÁCIE

Binárne stromy sú s výhodou využívané na uchovávanie informácie tak, aby mohla byť ľahko nájdená. Vyhľadanie nejakého záznamu je snád' najčastejšie používaná operácia v informatike. Chceli by sme vytvoriť algoritmus, ktorý nám nájde záznam, keď máme záznamy jednoznačne zotriedené (indexované). To sa dá uskutočniť pomocou binárneho prehľadávacieho stromu. Binárny prehľadávací strom je binárny usporiadaný strom, kde každému vrcholu je priradený záznam. Záznam vrcholu musí mať väčší index ako sú indexy záznamov vrcholov v jeho ľavom podstrome a menší index ako majú indexy záznamov v jeho pravom podstrome.

POSTUP TVORBY

Takýto strom môžeme vytvoriť z ľubovoľného doposiaľ nezotriedeného zoznamu záznamov nasledujúcim algoritmom. Zoberieme si prvý záznam, priradíme ho koreňu. Na pridanie ďalšieho záznamu porovnáme záznam s už umiestnenými záznamami v strome. Začíname od koreňa, ideme doľava keď záznam je menší ako vrcholu už priradený záznam, v opačnom prípade ideme doprava. Keď ideme doľava (doprava) a na danom mieste nie je už žiaden ľavý (pravý) nasledovník, vytvoríme ho a priradíme mu náš zaradovaný záznam (pozri zaradovanie záznamu d na obr. 12.6).

NÁJDENIE ZÁZNAMU

Na nájdenie záznamu používame prakticky rovnaký prístup. Nasledujúci algoritmus nám dáva návod, ako nájsť záznam v binárnom prehľadávacom strome alebo ho tam zaradiť, keď tam záznam ešte nie je. Na zistenie záznamu, ktorý je priradený vrcholu v , budeme používať funkciu $záznam(v)$; samotná hodnota v odkazuje na umiestnenie vrcholu, teda smerník.

ALGORITMUS

12.1.

PREHLÁDÁVANIE BINÁRNEHO STROMU, RESP. PRIRADENIE NOVÉHO ZÁZNAMU

```
T:=binárny prehľadávací strom; x:=hľadaný záznam;
v:=koreň T;
{vrcholy neexistujúce v T majú hodnotu umiestnenia
null, keď je strom prázdny, aj jeho koreň má hodnotu
null}
while v≠null and záznam(v)≠x
begin
  if x<záznam(v) then
    if ľavý_nasledovník(v)≠null
    then v=ľavý_nasledovník(v)
    else ľavý_nasledovník(v)=nový_vrchol a v:=null
    else
      if pravý_nasledovník(v)≠null
      then v=pravý_nasledovník(v)
      else pravý_nasledovník(v)=nový_vrchol a v:=null
  end
```

POKRAČOVANIE
ALGORITMU 12.1.

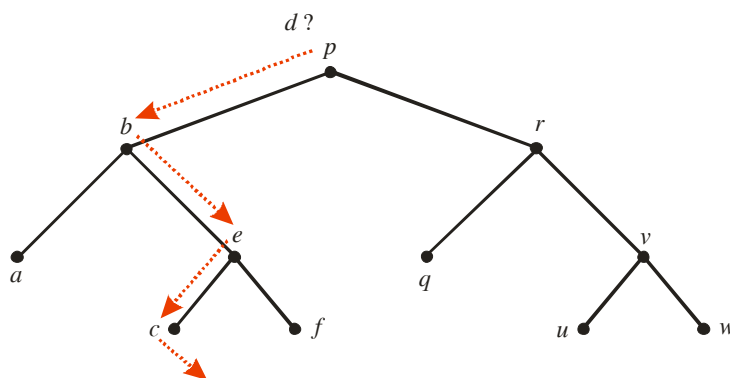
```

if koreň T=null
then pridaj nový_vrchol, t.j. koreň do T a prirad' mu
      záznam x
else
if v=null or záznam(v)≠x
then prirad' pre nový_vrchol záznam x a v=nový_vrchol
      {v=výsledok, umiestnenie záznamu x}
  
```

MAXIMÁLNE
 $\lceil \log_2(n+1) \rceil$
POROVNANÍ

Aká je náročnosť vyššie uvedenej procedúry? Najväčší počet porovnaní potrebný na pridanie nového záznamu je dĺžka najdlhšej cesty v binárnom prehľadávacom strome z koreňa do listu. Pre n záznamov má taký strom n vrcholov, a takému stromu môžeme pridať list do $n+1$ pozícií (za porovnanie považujeme aj zistenie, či potomok vrcholu existuje). Použitím vety 12.5 dostávame, že výška stromu je $\lceil \log_2(n+1) \rceil$ pre plný vyvážený strom. Z toho vyplýva, že pre nájdenie alebo pridanie prvku do vyváženého binárneho stromu potrebujeme maximálne $\lceil \log_2(n+1) \rceil$ porovnaní. Keďže toto je najlepší možný výsledok pre binárne stromy, snažíme sa udržať záznamy vo forme vyváženého stromu, na čo existujú špecializované algoritmy.

OBRÁZOK 12.6.
PRIRAĐOVANIE
ZÁZNAMU DO
BINÁRNEHO
STROMU



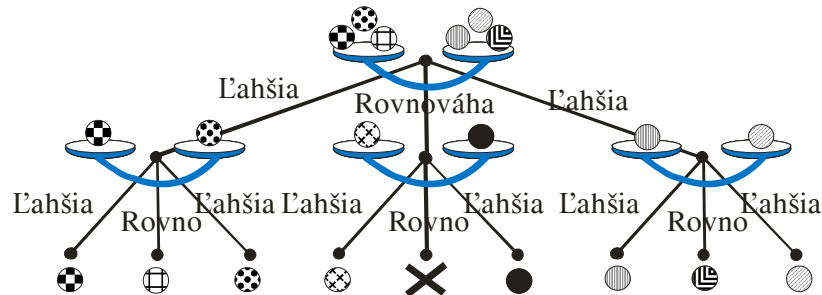
Priraďovanie záznamu d do binárneho prehľadávacieho stromu s vrcholmi ohodnotenými písmenami abecedy predstavujúcimi záznamy. Porovnanie $x < \text{záznam}(v)$ v algoritme 12.1 znamená, že porovnávame, či písmeno uložené v premennej x je v abecede pred písmenom uloženým vo vrchole v .

12.3 ROZHODOVACIE STROMY

Koreňové stromy môžu byť použité na modelovanie problémov, v ktorých rad diskrétnych rozhodnutí vedie k riešeniu. Koreňový strom, v ktorom každý vnútorný vrchol zodpovedá rozhodnutiu, s podstromami týchto vrcholov pre všetky možné výsledky tohto rozhodnutia, sa volá rozhodovací strom. Možné riešenia problému zodpovedajú cestám k listom tohto koreňového stromu. To je ilustrované napr. na obr. 12.7.

PRÍKLAD 12.2. Máme 8 mincí, z ktorých je 1 falošná, ľahšia. Ako ju rozoznať čo najmenším počtom vážení rovnoramenných váh?

OBRÁZOK 12.7.
ROZHODOVACÍ
STROM NA
ROZPOZNANIE
ĽAHŠEJ FALOŠNEJ
MINCE



Rozhodovací strom na rozpoznanie ľahšej falošnej mince spomedzi 8 mincí. Mince sú odlíšené farbou a umiestnené na miskách rovnoramenných váh. Postupné označenie u hrán znamená, že ľavá miska váh je ľahšia, resp. že obidve misky sú v rovnováhe, príp., že pravá miska váh je ľahšia. Kotúčky v dolnom riadku sú určené falošné mince.

Riešenie: Pre každé váženie na rovnoramenných váhach sú možné 3 výsledky: prvá miska bude ľahšia, obidve budú v rovnováhe, pravá miska bude ľahšia (pozri obr. 12.7). Rozhodovací strom pre sériu vážení je teda ternárnym stromom. Strom musí mať aspoň 8 listov, pretože je 8 možných riešení – každá z mincí môže byť ľahšia. Najväčší počet vážení potrebný na určenie falošnej mince je hĺbka rozhodovacieho stromu. Z vety 12.5 vyplýva, že táto hĺbka je najmenej $\lceil \log_3 8 \rceil = 2$. Sú teda potrebné aspoň dve váženia. Rozhodovací strom, ktorý ukazuje, že sa problém fakticky dá riešiť dvoma váženiami, je na obr. 12.7. Ako nájsť takýto rozhodovací strom je už iná otázka.

Pomocou modelu rozhodovacieho stromu sa dá riešiť aj zložitosť algoritmov na triedenie. Dá sa takto nájsť napríklad najmenší počet porovnaní pre najhorší prípad postupnosti na usporiadanie pre taký algoritmus.

VETA 12.6.

Každý triediaci algoritmus vyžaduje na triedenie n záznamov v najhoršom prípade² aspoň $\lceil \log_2(n!) \rceil$ porovnaní dvoch prvkov, čo odpovedá zložitosti³ $\Omega(n \log n)$.

Dôkaz: Algoritmus na triedenie záznamov zoberie vo všeobecnosti sekvenciu záznamov k_1, k_2, \dots, k_n , a vráti permutáciu ich indexov, ktorá odpovedá utriedenej sekvencii. Pre dané n si môžeme predstaviť optimálny algoritmus ako binárny

² Najhorším prípadom sa mieni také usporiadanie vstupných dát, na ktorom algoritmus zle funguje. Najlepší prípad by bola permutácia zodpovedajúca už usporiadaným záznamom.

³ Veľké grécke písmeno omega sa používa ako miera zložitosti algoritmu, zvyčajne v závislosti od potrebného času alebo pamäti, pre veľkosť problému n , čo je zvyčajne počet prvkov. Zložitosť algoritmu často závisí nie len od veľkosti, alebo množstva dát, ale priamo od ich hodnôt. Používa sa teda viac značení: $O(f(n))$ – **Omikron notácia** – horný odhad alebo horšie už to nebude, časové nároky algoritmu nikdy nebudú rásť rýchlejšie ako $f(n)$; $\Theta(f(n))$ – **Theta notácia** – priemerný odhad; $\Omega(f(n))$ – **Omega notácia** – dolný odhad alebo lepšie už to nebude. Neformálne, platnosť $f(n) \in \Omega(g(n))$ znamená, že hodnota f (počet porovnaní) je väčšia ako $g(n)$ vynásobené nejakou konštantou. Formálne, $f(n) \in \Omega(g(n))$ znamená, že existujú kladné konštanty c a k , také že $0 \leq cg(n) \leq f(n)$ pre všetky $n \geq k$. Hodnoty c a k musia byť konštantné pre funkciu f a nesmú závisieť od n .

rozhodovací strom: interné vrcholy zodpovedajú porovnaniu dvoch záznamov, a listy zodpovedajú korektným permutáciám. Triedenie danej sekvencie zodpovedá ceste po strome od koreňa k listu. Počet porovnaní sa prinajhoršom rovná hĺbke stromu.

Daná sekvencia má $n!$ permutácií, takže strom má $n!$ listov. Preto musí byť hĺbka stromu podľa vety 12.5 rovná najmenej $\lceil \log_2(n!) \rceil$. Podľa Stirlingovej formuly platí, že $n! \geq n^n e^{-n}$, čo je ekvivalentné k $\log_2(n!) \geq n \log_2 n - n \log_2 e$. Takže najhorší prípad zložitosti je väčší alebo rovný konštantou násobenej hodnote $\lceil \log_2(n!) \rceil \geq n \log_2 n - n \log_2 e$, čo zodpovedá zložitosti $\Omega(n \log n)$. (Člen $n \log_2 e$ zanedbáme v porovnaní s členom $n \log_2 n$ a na základe logaritmu nezáleží, pretože hodnoty logaritmov pri rôznych základoch sa líšia iba o násobok konštantou.)■

12.4 PREFIXOVÉ KÓDOVANIE

NAJČASTEJŠÍM
ZNAKOM PATRÍ
NAJKRATŠIE
ZAKÓDOVANIE

Kód je zobrazenie, ktoré každému znaku alebo postupnosti znakov daného súboru znakov (vzorov) jednoznačne priradí znak alebo postupnosť znakov (obrazov) z iného súboru znakov. Postavme si problém, ako zapísať viac informácií pomocou menšieho počtu bitov? Odpoveďou je priradiť znakom alebo vstupným informáciám, ktoré sa opakujú najčastejšie (pravdepodobnosť výskytu), čo najkratší kód. Taký princíp môžeme použiť tak pri stratovom kódovaní (ako je MP3, kedy znesieme malý šum výmenou za kratší súbor), tak i pri nestratovom kódovaní (ako je winzip či rar kód, kedy by sa nám nepáčilo, aby zmizli písmenká zo skomprimovanej diplomovej práce).

NESTRATOVÉ
KÓDOVANIE
ABECEDY

Kódovanie si ukážme na príklade nestratového kódovania, keď máme pomocou reťazca bitov zakódovať sekvenciu písmen anglickej abecedy a nebudeme rozlišovať medzi malými a veľkými písmenami. Keďže sa budeme baviť iba o 26 znakoch, na ich rozlíšenie by nám stačilo 5 bitov, pretože $16=2^4 < 26 < 2^5=32$. Keď ale zoberieme do úvahy frekvenciu výskytu jednotlivých písmen, môžeme pomocou lepšieho zakódovania priemernú správu odvysielat' menej bitmi, aj keď niektoré písmenká pritom môžu byť zakódované aj dlhším reťazcom bitov ako je 5-bitový. Najfrekvencovanejšie písmenká budú ale zakódované najkratším reťazcom bitov.

JEDNOZNAČNOSŤ
KÓDOVANIA?

Aké značky máme priradiť jednotlivým znakom? Treba dať pozor. Predstavme si správu AAABBC. Čo keby sme priradili značky zle? Napríklad znaku A by sme dali reťazec 0 a znaku B reťazec 1, a znaku C reťazec 01. Postupnosť bitov 0001101 braná zaradom by bola preložená ako AAABBAB, ale my sme tak zakódovali AAABBC. Dá sa v tomto prípade vôbec zakódovať AAABBC?

PREFIXOVÝ KÓD

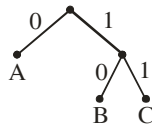
Chceme, aby žiaden binárny reťazec nezodpovedal viac ako jednej sekvencii písmen, teda aby ľubovoľný korektné zakódovaný binárny reťazec bol jednoznačne dekodovateľný. Jedným zo spôsobov, ako zaručiť dekodovateľnosť, je

použiť prefixový kód. Jeho podstatou je, že žiaden reťazec zodpovedajúci jednému písmenu sa neobjaví ako počiatočná časť reťazca zodpovedajúceho inému písmenu.

REPREZENTÁCIA
BINÁRNYM
STROMOM

Prefixový kód môže byť reprezentovaný binárnym stromom, kde písmená sú listy stromu. Hrany stromu sú označené tak, že hrana idúca k ľavému následovníkovi je označená 0 a hrana idúca k pravému následovníkovi je označená 1. Binárny reťazec odpovedajúci písmenu je sekvencia označení hrán na ceste od koreňa k danému písmenu. Strom reprezentujúci kód môže byť použitý na dekódovanie binárneho reťazca. Napríklad pre strom na obr. 12.8 dostávame pre správu AAABBC binárny reťazec 000101011.

OBRÁZOK 12.8.
BINÁRNÝ STROM
ZODPOVEDAJÚCI
PREFIXOVÉMU
KÓDU



Binárny strom zodpovedajúci prefixovému kódu pre prvé tri písmená abecedy.

DEKÓDOVANIE

Pri dekódovaní postupujeme takto. Začneme v koreni, zoberieme prvý bit, je to 0, ideme teda doľava, je to koniec tejto vetvy? Áno je, žiadne ďalšie z nej už nevedú. Teda napíšeme si písmeno A. Znovu začneme v koreni, zoberieme bit, je to 0, teda opäť si zapíšeme A. Znovu ideme do koreňa, zoberieme ďalší bit, je to 0, teda opäť si zapíšeme A. Znovu ideme do koreňa, zoberieme ďalší bit, je to 1, ideme z koreňa doprava, je tam niečo uložené? Nie, nie je, ďalej sa to vetví, tak zoberieme ďalší bit, aby sme videli, ako sa to vetví. Ďalší bit je 0, teda ideme doľava, tam narazíme na B. Znova zopakujeme od koreňa. A takto postupujeme, kým máme nejaké bity na dekódovanie.

Prefixový kód môžeme zostrojiť pre akýkoľvek binárny strom s hranami idúcimi doľava označenými jednou binárnou hodnotou, s hranami idúcimi doprava komplementárnou binárnou hodnotou a s listami stotožnenými so znakmi.

HUFFMANOVE
KÓDOVANIE
Z FREKVENCIE
ZNAKOV

David Huffman (1925–1999) ako študent na MIT r. 1951 opísal v semestrálnej práci algoritmus, známy od tej doby ako *Huffmanove kódovanie*. Tento algoritmus má ako vstup frekvencie (pravdepodobnosť výskytu) znakov v správe a vytvára prefixový kód, ktorý kóduje správu najmenším možným počtom bitov spomedzi všetkých možných binárnych prefixových kódov pre danú sadu symbolov.

ALGORITMUS
HUFFMANOVHO
KÓDOVANIA

Algoritmus Huffmanovho kódovania má za cieľ vytvoriť binárny koreňový strom so znakmi ako s listami. Algoritmus začína s lesom jednovrcholových stromov označených písmenami abecedy a s váhami stromov rovnými frekvencii priradeného písmena. Pri každom kroku sa kombinujú dva stromy s najmenšou celkovou váhou do jedného stromu pridaním nového koreňa a umiestnením stromu s väčšou váhou ako ľavého podstromu a stromu s menšou váhou ako pravého podstromu. Takto vytvorenému stromu priradíme váhu rovnú súčtu váh oboch stromov. Algoritmus končí, keď je pôvodný les pospájaný do jedného stromu.

ALGORITMUS
12.2.
HUFFMANOVE
KÓDOVANIE

```

F:=les z n koreňových jednovrcholových stromov
s priradenými symbolmi abecedy  $a_i$  a váhami  $w_i$  odpove-
dajúcimi frekvenciam;
while F nie je strom
begin
  nahraď koreňové stromy T a T' s najnižšími váhami
  z F s  $w(T) \geq w(T')$  stromom s novým koreňom a s T a T'
  ako ľavým, resp. pravým podstromom. Hranu k T označ
  0, hranu k T' označ 1.
  Prirad' koreňu nového stromu váhu  $w(T)+w(T')$ 
end

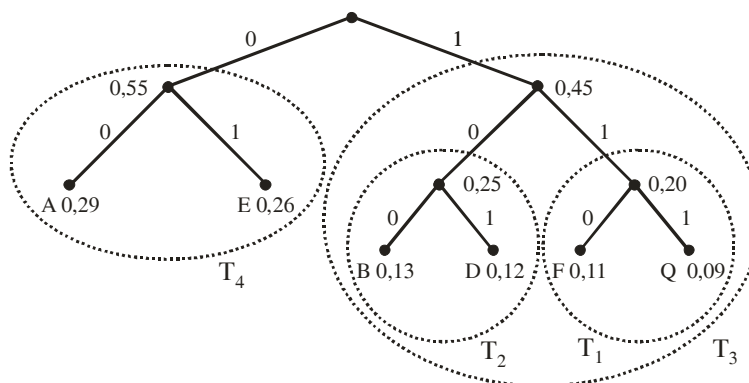
```

PRÍKLAD 12.3.

Majme nasledujúce symboly s frekvenciami A: 0,29; E: 0,26; B: 0,13; D: 0,12; F: 0,11; Q: 0,09. Ako zostrojíte Huffmanove kódy symbolov?

Najprv spojíme F a Q do stromu T_1 s váhou (u koreňa) 0,20. Potom B a D do stromu T_2 s váhou 0,25. Nasledovne stromy T_1 a T_2 do stromu T_3 s váhou 0,45, potom A a E do stromu T_4 s váhou 0,55, a nakoniec stromy T_3 a T_4 do výsledného stromu (pozri obr. 12.9).

OBRÁZOK 12.9.
BINÁRNY
KOREŇOVÝ STROM
PRE HUFFMANOV
KÓD



Binárny koreňový strom pre Huffmanov kód.

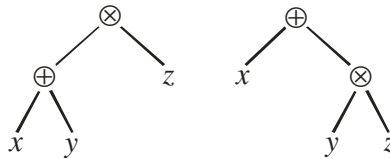
Na aplikácie Huffmanovho kódovania existuje veľa variantov, napríklad namiesto jednotlivých symbolov môžeme kódovať dvojice symbolov, alebo obecné n -tice symbolov.

12.5 KOREŇOVÉ STROMY REPREZENTUJÚCE ALGEBRAICKÉ VÝRAZY

Majme množinu S , na ktorej sú definované dve binárne operácie, \oplus a \otimes . Bez toho, aby sme vedeli, ktorá z nich má prednosť, tak môžeme napríklad výraz $x \oplus y \otimes z$ chápať ako $(x \oplus y) \otimes z$ alebo $x \oplus (y \otimes z)$. Také výrazy môžeme jednoznačne

reprezentovať binárnym stromom. Výraz môže byť rekurzívne definovaný ako $X\alpha Y$, kde α je symbol pre binárnu operáciu a X a Y sú buď prvky z množiny S alebo výraz. Taký výraz môže byť reprezentovaný binárnym stromom s koreňom α , ľavým podstromom X a pravým podstromom Y . Hore uvedené výrazy potom môžu byť reprezentované stromami ako na obr. 12.10.

OBRÁZOK 12.10.
BINÁRNE STROMY
PRE VÝRAZY
 $(x\oplus y)\otimes z$ A
 $x\oplus(y\otimes z)$



Binárne stromy pre výrazy $(x\oplus y)\otimes z$ a $x\oplus(y\otimes z)$.

INFIXOVÁ A
PREFIXOVÁ
(POLSKÁ) NOTÁCIA

Bežný zápis výrazu, napr. $x\oplus y\otimes z$ sa volá **infixová notácia**. Výraz môžeme rovnako dobre rekurzívne definovať v tzv. **prefixovej** (alebo **poľskej**) **notácii** ako αXY čo by namiesto výrazu $(x\oplus y)\otimes z$ dalo výraz $\otimes\oplus xyz$ a namiesto výrazu $x\oplus(y\otimes z)$ výraz $\oplus x\otimes yz$. Tento zápis môže vyzerat' mäťúco, ale je jednoznačnejší v tom zmysle, že na rozdiel od bežného infixového zápisu nepotrebujeme poznať precedenciu operátorov alebo ju mať určenú zátvorkami. Okrem tejto prefixovej notácie existuje aj **postfixová (reverzná poľská) notácia**, kedy je symbol pre operáciu písaný za prvkami, ktoré spája, ako u $XY\alpha$ čo by namiesto výrazu $(x\oplus y)\otimes z$ dalo výraz $xy\oplus z\otimes$ a namiesto výrazu $x\oplus(y\otimes z)$ výraz $xyz\otimes\oplus$. Voľne povedané, výraz v prefixovej notácii sa zo zodpovedajúceho binárneho stromu urobí tak, že keď ideme po vrcholoch grafu, ako by sme ho prehľadávali do hĺbky, zapíšeme operátor vždy prvýkrát, keď vrcholom prechádzame, rovnako ako pre premennú pri liste, pri infixovej notácii to urobíme pri druhom prechode vrcholom, pri postfixovej notácii pri treťom prechode vrcholom.

GENETICKÉ
PROGRAMOVANIE

Koreňové stromy vyjadrujúce algebraické výrazy sa používajú napríklad pri symbolickej regresii pri genetickom programovaní.

12.6 KOREŇOVÝ STROM AKO MODEL HRY

VRCHOLY =
POZÍCIE HRY
HRANY = ŤAHY

Stromy môžu byť použité na analýzu určitého typu hier ako sú piškvorky (angl. tic-tac-toe), dáma, šach alebo odoberanie zápaličiek (anglický ekvivalent hra nim). V týchto hrách sa dvaja hráči postupne striedajú v ťahoch. Každý hráč vie, aký ťah urobil jeho protivráč a do hry nevstupuje prvok náhodnosti. Také hry sa dajú modelovať pomocou stromu hry. Vrcholy takého stromu reprezentujú momentálne pozície hry a hrany reprezentujú legálne ťahy medzi pozíciami. Vrcholy reprezentujúce rovnaké pozície sa v takom strome môžu nachádzať viackrát, pokiaľ k nim vedú rozdielne postupnosti ťahov. Koreň reprezentuje štartovnú pozíciu. Listy reprezentujú koncové pozície hry. Listy môžeme ohodnotiť 1, keď zodpovedajú výhre prvého hráča, 0 keď nastala remíza, a -1, keď zodpovedajú prehre prvého hráča.

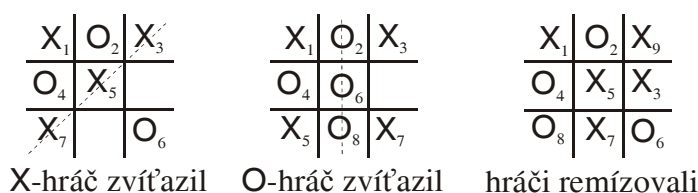
PIŠKVKORY

Tu si uvedieme hru volanú **piškvorky**. Táto hra vyžaduje dvoch hráčov, prvý hráč je označený symbolom **X** a druhý hráč symbolom **O**. Snahou každého hráča je umiestniť na štvorcovej 3×3 hracej doske svoje symboly tak, aby tvorili buď riadok, stĺpec, alebo uhlopriečku (obr. 12.11).

Hra je zahájená hráčom **X**, potom nasleduje ťah hráča **O**. Toto striedanie hráčov sa opakuje tak dlho, dokiaľ jeden z hráčov nevyhrá, alebo dokiaľ nie je na hracej doske umiestnených deväť symbolov.

Priebehy hier môžeme reprezentovať pomocou „stromu riešení“, kde je explicitne ukázané, ktoré ťahy boli použité (obr. 12.12).

OBRÁZOK 12.11.
ZNÁZORNENIE 3
PARTÍI HRY
PIŠKVKORY



Znázornenie 3 partií hry piškvorky. Indexy pri jednotlivých symboloch **X** a/alebo **O** znamenajú poradie ťahu. V prvých dvoch partiách bolo dosiahnuté víťazstvo, hráč umiestnil svoje symboly do riadku, stĺpca alebo diagonály, čo je naznačené prerušovanou čiarou. V tretej partii sa žiadnemu hráčovi takto nepodarilo umiestniť svoje symboly, po 9 ťahoch, keď sú obsadené všetky pozície hracej dosky, hra končí remízou.

SYMETRICKÉ HRY

Hra piškvorky patrí medzi tzv. symetrické hry, z pohľadu druhého hráča je hra identická s hrou prvého hráča (hráči sú rovnocenní, odlišujú sa len v tom, že jeden z nich zahajuje hru). Obaja hráči riešia rovnaký strategický cieľ – maximalizujú svoj zisk a súčasne chcú zabrániť v dosiahnutí cieľa súperovi – minimalizujú súperov zisk.

Vo všeobecnosti existujú dva diametrálne odlišné prístupy k riešeniu problému, ako vyhrať:

HIERARCHICKY
USPORIADANÉ
PRAVIDLÁ

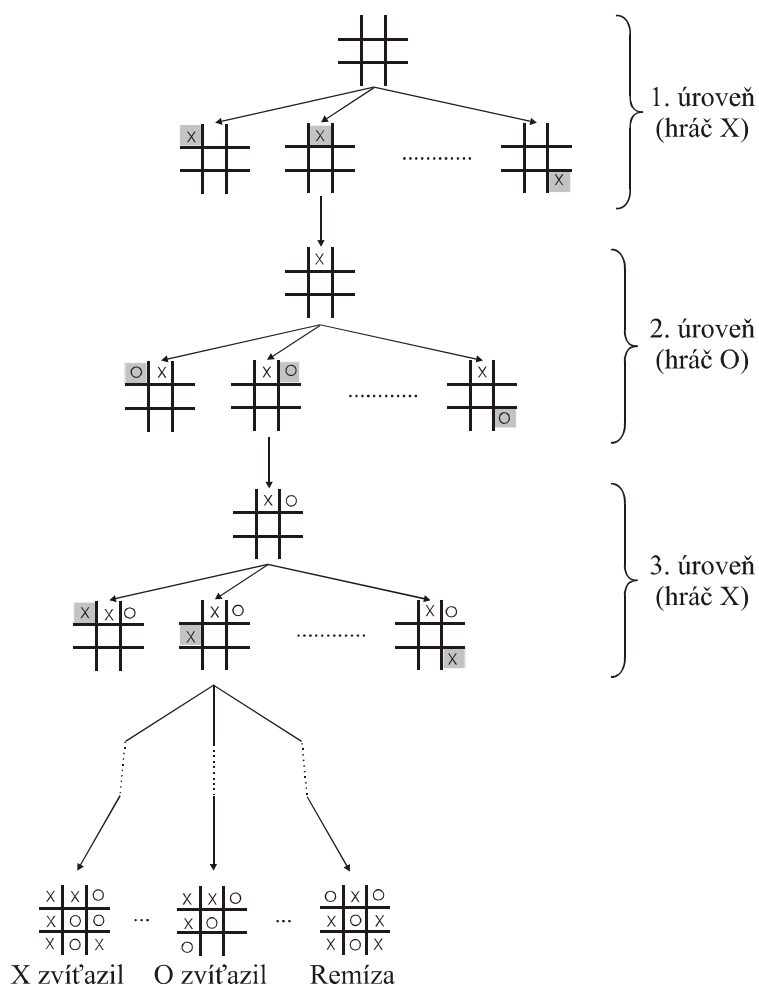
Prvý prístup je založený na existencii modelu hry, ktorý obsahuje **hierarchicky usporiadané pravidlá**. Keď tieto pravidlá budeme dodržiavať, mali by sme dospieť ak nie víťaznej pozícii, tak aspoň k remíze. Žiaľ, tento model je zostrojiteľný len pre jednoduché hry, pre zložitejšie hry (napr. šach) už nie sme schopní ho zostrojiť s dostatočnou presnosťou a efektivitou. Obvykle sme v zložitých prípadoch schopní formulovať len rôzne všeobecné pravidlá (heuristiky), ktorých dodržiavanie v priebehu hry by malo viesť k víťazstvu.

PREHLADÁVANIE
STROMU RIEŠENÍ

Druhý prístup je založený na rozsiahlom **prehľadávaní stromu riešení**, pomocou ktorého, aspoň teoreticky, sme schopní nájsť optimálny ťah v každej etape hry. Aj keď je tento prístup koncepčne veľmi jednoduchý, jeho numerická realizácia v počítači naráža na vážne problémy s enormnou veľkosťou stromu riešení. Stromy hier môžu byť obrovské, napr. pre šach je odhadovaný na 10^{100} vrcholov. K numerickému zvládnutiu tohto prístupu musíme zaviesť niektoré podstatné zjednodušenia týkajúce sa hĺbky prehľadávania stromu riešení (tak napr. pri prehľadávaní stromu riešení ideme do maximálnej hĺbky 3 alebo 4). Toto zjednodu-

šenie prehľadávania stromu riešení je obvykle kombinované s rôznymi heuristikami, ktoré ohodnocujú „koncové“ stavy hry.

OBRÁZOK 12.12.
ZNÁZORNENIE
STROMU RIEŠENÍ



Znázornenie stromu riešení, ktorého vrchol (koreň) je prázdna hracia doska. Po prvom ťahu, ktorý hral hráč X, je obsadená jedna pozícia (zdôraznená vytieňovaným) symbolom X. V druhej úrovni, hranej hráčom O, je obsadená pozícia (vytieňovaná) symbolom O. Vetva stromu riešení končí vtedy, ak jeden hráč zvíťazil alebo sú obsadené všetky pozície na hracej doske – hra skončila remízou.

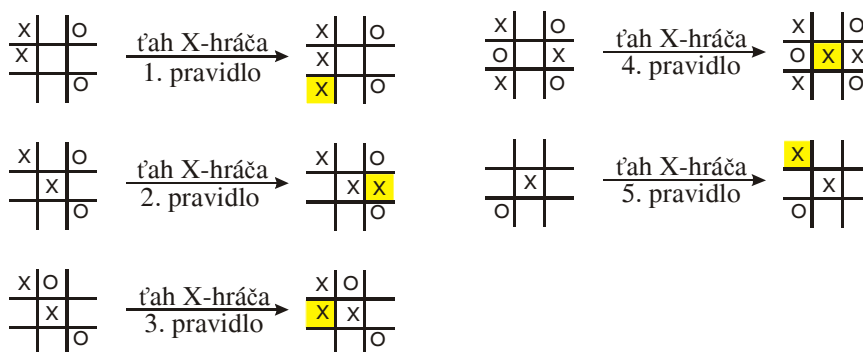
**MODEL – HRA
POMOCOU
PRAVIDIEL**

Jeden zo základných princípov umelej inteligencie je návrh modelu študovaného problému. Môžeme napríklad pomocou súboru pravidiel byť schopní hrať piškvorky na dobrej úrovni. Uvedieme jednoduchý model⁴, ktorý sa zakladá na tom, že ťah hráča je určený nasledujúcimi šiestimi pravidlami s klesajúcou prioritou (obr. 12.13-12.15):

⁴ Tomuto modelu chýba jedno pravidlo, aby tento model vždy vyhral alebo aspoň remizoval.

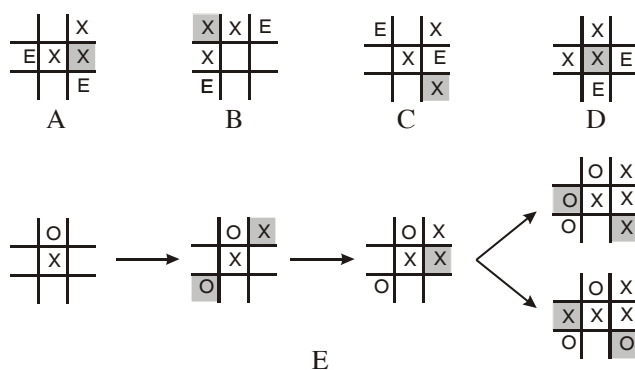
- Pravidlo 1.** Hráč vykoná ťah, ktorý vedie k jeho víťazstvu.
- Pravidlo 2.** Hráč vykoná ťah, ktorý zabráni víťazstvu oponenta v nasledujúcom ťahu.
- Pravidlo 3.** Hráč vykoná ťah, ktorý pripraví možnosť dvojnásobného použitia 1. pravidla v nasledujúcom ťahu (tzv. vidlička, obr. 12.14).
- Pravidlo 4.** Hráč vykoná ťah, ktorým obsadí stredné pole.
- Pravidlo 5.** Hráč vykoná ťah, ktorým obsadí rohové pole.
- Pravidlo 6.** Hráč vykoná náhodný ťah.

OBRÁZOK 12.13.
PRAVIDLÁ MODELU
HRY



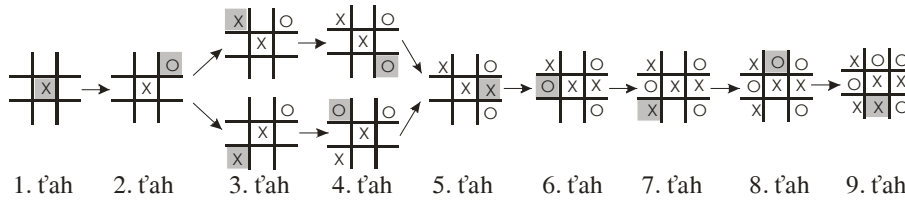
Diagramy ilustrujú jednotlivé pravidlá modelu hry. Poznamenajme, že v dôsledku 4. pravidla je prvým ťahom vždy obsadenie prostredného poľa.

OBRÁZOK 12.14.
VIDLIČKOVÉ
POZÍCIE



Diagramy A-D znázorňujú základné typy vidličkových pozícií, ktoré sú aplikovateľné použitím pravidla 3. Symboly E znázorňujú príklady dvojice pozícií, ktoré musia byť prázdne, aby sa dala „vidlička“ v ďalšom ťahu doplniť na víťaznú trojicu. Diagram E ukazuje pozíciu, ktorá je prehraná pre hráča O už po jeho druhom ťahu. Pravidlá nášho modelu hry používa prvý hráč X.

OBRÁZOK 12.15.
PRIEBEH HRY
POMOCOU MODELU



Znázornenie priebehu hry pomocou modelu, hra skončila remízou. Spodná „vetva“ ukazuje, že rôznymi postupnosťami ťahov sa môžeme dostať na rovnaký stav, prípadne na stav ekvivalentný z hľadiska symetrie. Diagram, kde sa vetvy spájajú, ale už nezodpovedá stromu.

STAV HRY

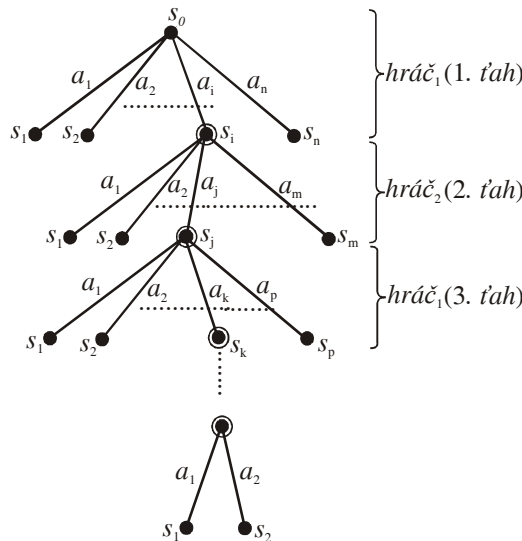
Úvah o priebehu hry piškvorcky môžeme formalizovať takto: Rozloženie znakov X a O na hracej doske sa nazýva *stav hry*.

**AKCIA
TRANSFORMUJE
STAV**

Ťah hráča, t. j. pridanie znaku X alebo O na hraciu dosku do konkrétnej voľnej polohy, sa nazýva *akcia*. Pre daný stav s má hráč k dispozícii *množinu prípustných akcií* $A(s) = \{a_1, a_2, \dots\}$. Hovoríme, že akcia a transformuje stav s na nový stav s' , alebo $s' = a(s)$. Množina všetkých možných stavov $\mathcal{S} = \{s_1, s_2, \dots\}$ sa nazýva *stavový priestor* hry. Pomocou akcií sa môžeme *pohybovať v stavovom priestore* (obr. 12.16). Nech s_0 je počiatočný stav zodpovedajúci prázdnej hracej doske, prvý hráč na vybranú pozíciu priloží znak X, dostaneme stav s_1 , potom druhý hráč na stav s_1 vykoná akciu (priloží na voľnú pozíciu znak O), takto dostaneme stav s_2 atď. Priebeh hry je opísaný sekvenciou stavov

$$s_0 \xrightarrow{a_1} s_1 \xrightarrow{a_2} s_2 \dots \xrightarrow{a_k} s_k \Rightarrow (s_0 s_1 s_2 \dots s_k)$$

OBRÁZOK 12.16.
STROM RIEŠENÍ



Prvý hráč vytvorí z počiatočnej pozície (vrchol stromu) všetky možné nasledujúce (1-ťahové) pozície s_1, s_2, \dots . Na základe určitých (racionálnych) úvah vyberie pozíciu s_i . Druhý hráč z pozície s_i vytvorí nové (2-ťahové) pozície, z nich vyberie pozíciu s_j ako výsledok svojho ťahu – akcie. Obaja hráči tento postup opakujú, končí sa vtedy, ak niektorý hráč vyhral alebo obaja hráči remizovali.

VEĽKOSŤ
STAVOVÉHO
PRIESTORU

Veľkosť stavového priestoru (t. j. počet rôznych stavov – pozícií hry) je určená hornou hranicou $3^9 = 19\,683$ (sú tri stavy každej pozície dosky a deväť pozícií). Tento počet ale zahŕňa veľa nepovolených stavov, ako samé krížiky a žiadne krúžky, alebo pozíciu, kde má jeden hráč riadok alebo stĺpec troch krížikov a druhý hráč krúžkov. Odstránenie nepovolených stavov redukuje priestor na 5478 stavov a keď započítame stavy symetrické operáciou rotácie a zrkadlenia ako jeden stav, existuje len 765 odlišných stavov.

Použitím metódy prehľadávania do hĺbky môžeme zostrojiť kompletný strom riešení hry piškvorky. Zistili sme, že má nasledujúci počet koncových pozícií, ktoré sú charakterizované takto

Počet	Typ
131184	víťazstvo hráča X
77904	víťazstvo hráča O
46080	remíza hráčov X a O

Ďalší dôležitý problém pred ktorým teraz stojíme (predpokladáme, že už poznáme úplný strom riešení hry piškvorky) je zistiť víťaznú stratégiu pre prvého hráča. Existujú tieto tri možnosti:

- (1) *existuje víťazná stratégia pre prvého hráča*, to znamená, že pri použití tejto stratégie prvým hráčom musí druhý hráč prehrať,
- (2) *existuje víťazná stratégia pre druhého hráča*, to znamená, že pri použití tejto stratégie druhým hráčom musí prvý hráč prehrať,
- (3) *neexistujú víťazné stratégie*, optimálna stratégia poskytuje obom hráčom len remízu.

MINIMAX PRINCÍP

Jednoduchá modifikácia metódy hľadania do hĺbky na konštrukciu stromu riešení nám umožňuje zistiť optimálnu stratégiu pre oboch hráčov. Najprv si ohodnotíme koncové vrcholy – listy tak, že pokiaľ vyhral prvý hráč, sú ohodnotené 1, pokiaľ vyhral druhý hráč, sú ohodnotené -1 a pokiaľ hra skončila remízou, vrchol je ohodnotený 0. Základný princíp na získanie optimálnej stratégie je veľmi jednoduchý, vychádza zo skutočnosti, že každý hráč volí taký ťah, aby maximalizoval minimálnu hodnotu pozície vychádzajúcu z oponentových ďalších možných ťahov. Hráč maximalizuje svoj zisk (= ohodnotenie svojej nasledujúcej pozície smerom od koreňa k listom, teda ľavého či pravého nasledovníka) a tým minimalizoval zisk súpera, preto ho nazývame „*minimax princíp*“ (obr. 12.17).

PRVÝ HRÁČ MAX

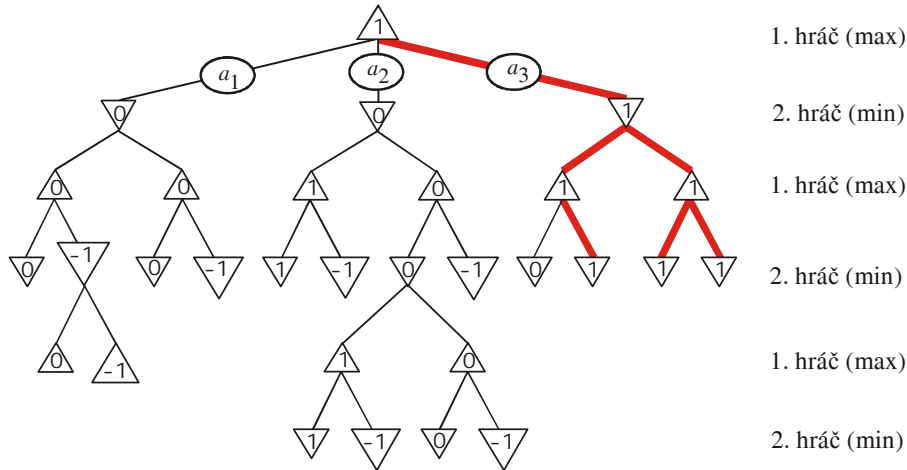
Prvý hráč (označený max) chce vyhrať, to znamená, že bude vyberať také ťahy, aby maximalizoval svoj zisk a minimalizoval zisk súpera (druhého hráča, označeného min).

DRUHÝ HRÁČ MIN

Druhý hráč sa bude správať podobne, ako prvý hráč, chce maximalizovať svoj zisk, čo je ekvivalentné tomu, že minimalizuje zisk prvého hráča (preto je druhý hráč označený min). Pri ohodnotení všetkých zvyšných vrcholov stromu riešení

postupujeme po úrovniach od listov ku koreňu a postupne ohodnocujeme vnútorné vrcholy. Vnútorný vrchol prehľadávaného grafu je vždy označený maximom (pre 1. hráča) resp. minimom (pre 2. hráča) hodnôt jeho ľavého a pravého nasledovníka. Hráči sa pritom striedajú po úrovniach, definovaných grafovou vzdialenosťou od koreňa stromu. Výsledok na obr. 12.17 ukazuje, že pre danú hru existuje víťazná stratégia pre prvého hráča, pretože koreň má hodnotu 1. Zvýraznené hrany označujú ťahy vedúce k výhre.

OBRÁZOK 12.17.
STROM RIEŠENÍ
A MINIMAX PRINCÍP



Strom riešení a minimax princíp

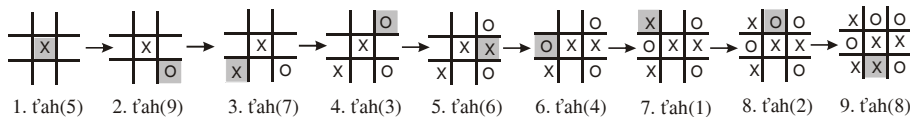
MINIMAX PRINCÍP:
TRIEDA HIER
S DVOMA HRÁČMI

Pomocou tohto jednoduchého postupu založeného na minimaxovom princípe môžeme riešiť veľkú triedu hier s dvoma hráčmi, ktorí striedavo vykonávajú ťahy, pričom hlavným strategickým zámerom každého hráča je maximalizovať svoj zisk (t. j. minimalizovať zisk súpera). Hlavný problém s použitím tohto algoritmu spočíva v tom, že strom riešení zložitejších hier (napr. šachu) má enormnú veľkosť, takže systematické prechádzanie po všetkých jeho vrcholoch – stavoch je nerealizovateľné.

PIŠKVOVKY
OPTIMÁLNE → LEN
REMÍZA

Ak aplikujeme metódu prehľadávania do hĺbky kombinovanú s minimax princípom na piškvorky, potom zistíme, že keď obidvaja hráči hrajú zo svojho hľadiska optimálne, môžu dosiahnuť len remízu. To znamená, že vrchol stromu riešení je ohodnotený na záver 0, jedna z týchto optimálnych partíí je postupnosť ťahov reprezentovaná „permutáciou“ (597364128).

OBRÁZOK 12.18.
POSTUPNOŠŤ
ŤAHOV AKO
PERMUTÁCIA



Znázornenie postupnosti (597364128) pomocou jednotlivých ťahov hry piškvorky. Jednoduchou sa môže skontrolovať, že táto postupnosť ťahov vyhovuje modelu hry piškvorky, ktorý bol diskutovaný v prvej časti tejto kapitoly.

Z výsledkov získaných metódou prehľadávania do hĺbky spolu s „minimax“ princípom vyplýva záver, že optimálna stratégia hry piškvorky vedie k remíze,

neexistuje taká stratégia, pomocou ktorej by jeden hráč vyhral a druhý prehral. Tým, že metóda prekontrolovala celý strom riešení, môžeme tento výsledok pokladať za konečný a nemenný.

Rovnako si môžeme pre dokonalejší model hry určiť počítačovými simulačnými výpočtami, že optimálna stratégia hry piškvorky sa pre prvého hráča riadi pomocou modelu hry s hierarchickými pravidlami. Skontrolovali sme optimálne postupnosti ťahov dĺžky 9, zistili sme, že vo všetkých prípadoch model hry je splnený.

ZHRNUTIE

STROM A LES

Strom je súvislý graf bez kružníc, pri n vrcholoch má $n-1$ hrán. Prvýkrát boli použité Arthurom Cayleym na spočítanie druhov alkánov. Používajú na rozmiestňovanie prvkov v databázach, efektívne kódy na ukladanie a prenos informácií, rozhodovacie stromy, modely hier na určenie vyhrávajúcej stratégie, nájdenie najlacnejšieho prepojenia uzlov komunikačnej siete. Nesúvislý graf bez kružníc voláme **les**.

KOREŇOVÝ STROM BINÁRNY STROM

Strom so špeciálne vyznačeným vrcholom volaným **koreň** sa volá **koreňový** (alebo **zakorenený**) **strom**. Koncové vrcholy na ceste od koreňa voláme **listy**. **Binárny strom** sa rozvetvuje smerom od koreňa v každom vrchole maximálne na dve nové vetvi. Optimálny algoritmus na triedenie záznamov je binárny rozhodovací strom zložitosti $\Omega(n \log n)$.

CYKLOMATICKÉ ČÍSLO

Cykloomatické číslo $C(G)$ značí počet „nezávislých“ kružníc v grafe, $C(G) = |E| - |V| + p$, kde p je počet *komponentov* grafu.

PREFIXOVÉ KÓDOVANIE

Keď priradíme znakom, ktoré sa opakujú najčastejšie, čo najkratší kód, zápis je efektívny. Keď žiaden reťazec zodpovedajúci jednému znaku sa neobjaví ako počiatočná časť reťazca zodpovedajúceho inému znaku, je to **prefixový kód** a je jednoznačný. Pre binárny kód sa reprezentuje binárnym stromom. Najefektívnejšie z týchto kódovaní je **Huffmanove kódovanie**.

KOREŇOVÉ STROMY AKO ALGEBRAICKÉ VÝRAZY

Keď vnútorným vrcholom koreňového stromu sú priradené operácie a listom premenné, reprezentuje strom jednoznačne algebraický výraz. Podľa spôsobu priechodu stromom potom odlišujeme **infixovú**, **prefixovú (poľskú)** a **postfixovú (reverznú poľskú) notáciu**.

MODEL HRY

Keď za vrcholy uvažujeme pozície hry a hrany sú ťahy, môžeme modelovať priebeh hry. Aby sme vyhrali, musíme mať alebo správne **hierarchicky usporiadané pravidlá**, alebo prehľadať **strom riešení**. Ťah hráča (**akcia**) **transformuje** stav na nový stav, pomocou akcií sa pohybujeme v **stavovom priestore hry**. Hru pre dvoch hráčov môžeme vyriešiť pomocou **minimax** princípu, kedy výhre prvého hráča je priradené maximum, výhre druhého hráča minimum, a pri analýze hry sa postupuje od koncových pozícií k východzej a vrcholy sa ohodnocujú ako

maximum či minimum vrcholov už s nimi spojených, podľa toho, či je na ťahu prvý alebo druhý hráč.

KLÚČOVÉ POJMY

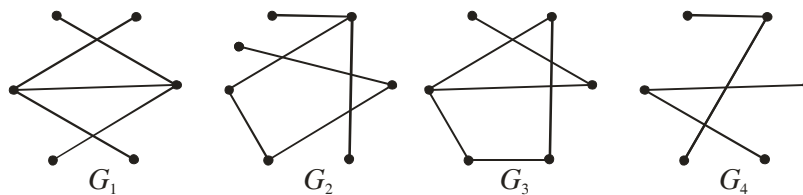
stromy ako modely
vlastnosti stromov
binárne prehľadávanie
stromy algebraických výrazov
hry
Arthur Cayley
alkány
les
koreň
koreňový strom
predchodca
nasledovník
predok
potomok
list
vnútorné vrcholy
podstrom
úroveň vrcholu
hĺbka stromu
 n -árny strom
plne n -árny strom
binárny strom
ternárny strom
usporiadaný koreňový strom
ľavý a pravý nasledovník

cyklomatické číslo grafu
vyvážený koreňový strom
prehľadávanie binárneho stromu
rozhodovací strom
zložitosť algoritmu
Stirlingova formula
Omikron notácia
Theta notácia
Omega notácia
nestratové kódovanie
prefixový kód
Huffmanove kódovanie
infixová notácia
prefixová (poľská) notácia
postfixová (reverzná poľská) notácia
genetické programovanie
hierarchicky usporiadané pravidlá
prehľadávanie stromu riešení
stav hry
množina prípustných akcií
akcia a transformuje stav
stavový priestor hry
pohyb v stavovom priestore hry
minimax princíp

CVIČENIA

12.1. Ktoré z nasledujúcich grafov na obr. 12.19 nie sú stromy a prečo?

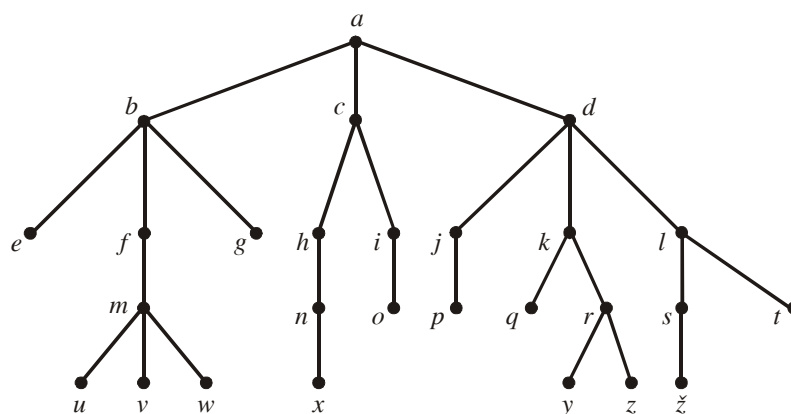
OBRÁZOK 12.19.
KTORÉ SÚ
STROMY?



Ktoré sú stromy?

- 12.2.** Odpovedzte pre graf na obr. 12.20 nasledujúce otázky:
- Ktorý z vrcholov je koreň?
 - Ktoré vrcholy sú vnútorné?
 - Ktoré vrcholy sú listy?
 - Ktoré vrcholy sú nasledovníci (synovia) vrcholu k ?
 - Ktoré vrcholy sú rodičia vrcholu k ?
 - Ktoré vrcholy sú predkovia k ?
 - Ktoré vrcholy sú potomkovia vrcholu k ?
- 12.3.** Koľko neizomorfných podstromov do 5 vrcholov obsahuje graf na obr. 12.20?

OBRÁZOK 12.20.
KOREŇOVÝ
STROM



Koreňový strom.

- 12.4.** Majme n nenulových prirodzených čísel $s_1, s_2, s_3, \dots, s_n$, kde $n \geq 2$. Nutná a postačujúca podmienka, aby existoval strom na n vrcholoch taký, že $s_1, s_2, s_3, \dots, s_n$, sú po poriadku stupne jeho vrcholov, je

$$\sum_{i=1}^n s_i = 2n - 2$$

Dokážte.

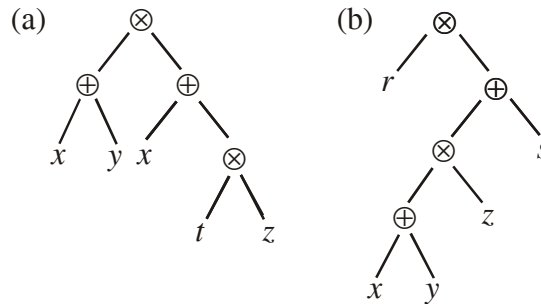
- 12.5.** Nech G je jednoduchý graf o n vrcholoch. Ukážte, že G je strom vtedy a len vtedy, keď je súvislý a má $n - 1$ hrán.
- 12.6.** Predpokladajme, že 1024 ľudí sa účastní šachového turnaja. Použite koreňový strom ako model turnaja na určenie, koľko hier musí byť odohraných, aby sa určil víťaz, pokiaľ je hráč eliminovaný po jednej prehre a turnaj pokračuje, dokiaľ iba jeden účastník neprehrá. Predpokladáme, že nebudú žiadne remízy.
- 12.7.** Reťazový list začína človekom posielajúcim list desiatim ďalším ľuďom. Každý príjemca je požiadany, aby poslal list ďalším desiatim a každý list obsahuje zoznam predchádzajúcich šiestich ľudí v reťazci. Pokiaľ zoznam neobsahuje menej ako šesť mien, každý príjemca pošle dvadsať korún pr-

vému človeku v zozname, odstráni jeho meno zo zoznamu a pridá svoje vlastné meno na koniec zoznamu. Keď všetci takto odpovedia na list a nikto nedostane viac ako jeden list, koľko peňazí človek zapojený do reťazca nakoniec dostane?

- 12.8.** Koľko rôznych izomérov majú nasledujúce nasýtené uhľovodíky?
 (a) C_3H_8
 (b) C_5H_{12}
 (c) C_6H_{14}
- 12.9.** Ukážte, ako môže byť 16 čísel sčítaných pomocou 15 procesorov v priebehu 4 časových krokov potrebných na sčítanie dvojice čísel (vstup a prenos informácie neuvažujeme za časovo náročné kroky a ich čas zanedbávame v porovnaní so sčítaním).
- 12.10.** Nech n je mocnina dvoch. Ukážte, že n čísel môže byť sčítané v $\log_2 n$ krokoch pri použití siete so stromovou štruktúrou o $n - 1$ procesoroch.
- 12.11.** Koľko vážení na rovnoramenných váhach je potrebné na nájdenie ľahšej falošnej mince spomedzi štyroch mincí? Opíšte algoritmus na nájdenie tejto ľahšej mince pri použití tohto počtu vážení.
- 12.12.** Koľko vážení na rovnoramenných váhach je potrebné na nájdenie falošnej mince spomedzi štyroch mincí, ktorá môže byť ľahšia alebo ťažšia ako ostatné tri?
- 12.13.** Koľko vážení na rovnoramenných váhach je potrebné na nájdenie falošnej mince, ktorá je ľahšia ako ostatné, spomedzi 12 mincí?
- 12.14.** Ktorý z nasledujúcich kódov je prefixový kód?
 (a) $a: 11, e: 00, t: 10, s: 01$
 (b) $a: 0, e: 1, t: 01, s: 001$
 (c) $a: 101, e: 11, t: 001, s: 011, n: 010$
 (d) $a: 010, e: 11, t: 011, s: 1011, n: 1001, p: 10101$
- 12.15.** Skonstruujte binárny strom s prefixovými kódmi reprezentujúcimi tieto kódové schémy:
 (a) $a: 11, e: 0, t: 101, s: 100$
 (b) $a: 1, e: 01, t: 001, s: 0001, n: 00001$
 (c) $a: 1010, e: 0, t: 11, s: 1011, n: 1001, p: 10001$
- 12.16.** Skonstruujte binárny strom reprezentujúci Huffmanove kódovanie pre nasledujúce symboly s frekvenciami: a: 0,2; b: 0,1; c: 0,15; d: 0,25; e: 0,3.
- 12.17.** Reprezentujte nasledujúce výrazy ako binárne stromy
 (a) $(r \otimes s) \oplus ((x \oplus y) \otimes z)$
 (b) $r \otimes (s \oplus ((x \oplus y) \otimes z))$
 (c) $((r \otimes s) \oplus x) \oplus y \otimes z$

- 12.18.** Koľko rozdielnych možných interpretácií má každý z nasledujúcich výrazov, keď predpokladáme asociatívnosť operácie \otimes a keď ju nepredpokladáme?
- (a) $x \otimes y \otimes z$
 (b) $t \oplus x \otimes y \otimes z$
 (c) $t \otimes x \oplus y \otimes z$
- 12.19.** Zostrojte infixovú, prefixovú a postfixovú formu výrazov reprezentovaných nasledujúcimi binárnymi stromami na obr. 12.21.

OBRÁZOK 12.21.
 ZOSTROJTE
 INFIXOVÚ,
 PREFIXOVÚ A
 POSTFIXOVÚ
 FORMU STROMOV



Zostrojte infixovú, prefixovú a postfixovú formu stromov.

- 12.20.** Zostrojte strom riešení hry odoberania zápaličiek, keď máte na začiatku hry 5 zápaličiek, každý hráč môže odobrať jednu, alebo 2 zápalky a kto odobere poslednú zápalku, tak prehral. Vrcholy z jednotlivých vrstiev stromu ohodnoťte pomocou minimax princípu.

13 TEÓRIA GRAFOV IV

ALGORITMY: SIETE A METÓDA KRITICKEJ CESTY •
MAXIMÁLNY TOK V SIETI A MINIMÁLNY REZ • NÁJDENIE
NAJMENŠEJ KOSTRY • PREHĽADÁVANIE DO HĽBKY •
PREHĽADÁVANIE DO ŠÍRKY

Cieľom tejto kapitoly je uviesť základné prakticky používané grafové algoritmy. Pri plánovaní projektov je to metóda kritickej cesty a pri skúmaní transportných a informačných sietí je to algoritmus na najefektívnejšie využitie siete nájdením maximálneho toku v sieti. Na zistenie najlacnejšieho prepojenia vrcholov siete je prezentovaný algoritmus na nájdenie najmenej kostry. Konečne na akékoľvek systematické prehľadávanie možností sa využívajú dva v tejto kapitole uvedené prístupy – prehľadávanie do hĺbky a prehľadávanie do šírky.

13.1 SIETE A METÓDA KRITICKEJ CESTY

NIEKOĽKO
ČIASTOČNE OD
SEBA ZÁVISLÝCH
ÚLOH PARALELNE

Na začiatku 10. kapitoly sme sa zmienili o tzv. grafe plánovania udalostí. Predstavme si, že máme projekt (čo nemusí byť priamo program, ale napríklad systém skladajúci sa z veľa programov), ktorý v sebe obsahuje niekoľko úloh. Každá z týchto úloh zaberie určité množstvo času, pričom výsledky niektorých potrebujeme, aby sme mohli začať iné úlohy. Problém je minimalizovať celkový čas, ktorý zaberie dokončenie projektu. Keď na niektorých úlohách sa dá pracovať paralelne, treba zistiť, pri ktorých z nich by neskoré splnenie úlohy predĺžilo celkový čas projektu a ktoré nie sú také „kritické“.

VÁHA HRANY =
ČAS NA SPLNENIE
PODÚLOHY U SIETE
PROJEKTU

Na rozdiel od obr. 10.3 môže byť situácia lepšie modelovaná pomocou ohodnoteného grafu, kde každá hrana reprezentuje prácu na úlohe v projekte, orientácia (šípka) smer pokračovania v projekte, jej váha čas potrebný na splnenie úlohy. Vrcholy grafu reprezentujú fázy projektu, zakončenie jednej alebo viac úloh.

ZDROJ, ÚSTIE,
SIEŤ

Nech $G(V,E)$ je hranovo ohodnotený orientovaný graf. **Sieť** je súvislý hranovo ohodnotený orientovaný graf bez slučiek, ktorý obsahuje dva špeciálne vydelené vrcholy, **zdroj** a **ústie**. V tejto kapitole sa budeme zaoberať dvoma typmi sietí, ktoré sa líšia vlastnosťami aj aplikáciami, sieťou projektu a kapacitnou sieťou.

SIEŤ PROJEKTU	<i>Sieť projektu</i> je špeciálny typ siete, ktorá neobsahuje okruh (teda „orientovanú kružnicu“ – súvislý konečný orientovaný graf, v ktorom z každého uzla jediná hrana vychádza a do každého uzla jediná hrana vstupuje) ani násobné hrany. V sieti projektu je <i>zdroj</i> (prameň, source) vrchol so vstupným stupňom rovným 0 a <i>ústie</i> (terminál, sink) je vrchol s výstupným stupňom rovným 0. Funkcia $t((u,v)) \rightarrow \langle 0, \infty \rangle$, $(u,v) \in E(G)$ mapuje hrany na nezáporné čísla (váhy), označujúce čas potrebný na splnenie úlohy. Všetky nasledujúce siete v tejto sekcii 13.1 sú siete projektu.
GRAF BEZ OKRUHOV NA SIEŤ PROJEKTU	V prípade, že v grafe existuje viac zdrojov a ústí, dajú sa jednoducho pridať dva vrcholy, jeden v s vychádzajúcimi hranami, ktoré vchádzajú do zdrojov a druhý w s hranami vychádzajúcimi z ústí a vchádzajúcimi do w . Tým sa pôvodný graf zmení na sieť. Váhy priradené novým hranám, prepájajúcim umelo vytvorené ústie s pôvodnými ústiami a zdroj s pôvodnými zdrojmi grafu, záležia od aplikácie. Pre siete projektu majú tieto nové váhy zvyčajne priradené nulové hodnoty, aby sa umelo nezvýšil čas potrebný na dokončenie projektu. Napríklad pri časovom pláne stavby domu, keď by sme mali dva zdroje, „začiatok hľadania pozemku“ a „začiatok výberu architekta“ by sme pridali umelý zdroj „začiatok stavby domu“, z ktorého by vychádzali hrany do vrcholov „začiatku hľadania pozemku“ a „začiatku výberu architekta“, ale tieto nové hrany by mali nulové váhy, pretože nevyžadujú žiaden čas na splnenie.
KRITICKÁ CESTA	Minimálny celkový čas, ktorý zaberie dokončenie projektu, sa rovná dĺžke (súčtu ohodnotení hrán) najdlhšej cesty idúcej v smere orientovaných hrán zo zdroja do ústia. Táto cesta sa volá <i>kritická cesta</i> siete. Všetky aktivity reprezentované hranami pozdĺž kritickej cesty musia byť započaté a dokončené bez oneskorenia, keď má byť dosiahnutý minimálny čas na dokončenie projektu. Každá sieť má minimálne jednu kritickú cestu, ale môže ich mať aj viac.
CPM CRITICAL PATH METHOD SIEŤOVÁ ANALÝZA	Metóda kritickej cesty (CPM Critical Path Method), vyvinutá r. 1957 v USA, patrí k základom sieťovej analýzy – metódy plánovania projektov. Takéto metódy sa používajú v najrôznejších oblastiach priemyslu, výskumu a vývoja.
ČASOVÉ OHODNOTENIE EARLIEST A LATEST	Pri jednotlivých vrcholoch nás môžu zaujímať dve hodnoty. Prvá hodnota určuje, za ako dlho od začiatku procesu sa dá do daného stavu v najkratšie dostať, čo označíme minimálne časové ohodnotenie, $E(v)$, podľa <i>earliest</i> . Druhá hodnota určí, kedy najneskoršie musia začať všetky činnosti odpovedajúce hranám vychádzajúcim z daného vrcholu–stavu v , aby nedošlo k predĺženiu celkového trvania procesu, čo označíme maximálne časové ohodnotenie, $L(v)$, podľa <i>latest</i> .

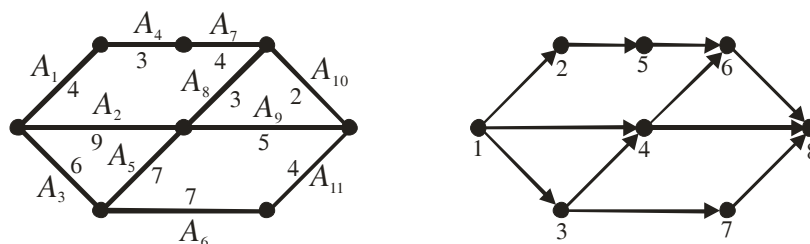
Algoritmus pre minimálne časové ohodnotenie

Majme sieť s vrcholmi očíslovanými prirodzenými číslami od 1 po $|V|$, tak, že každá hrana (i,j) spĺňa podmienku $i < j$ (platí veta, že orientovaný graf je práve vtedy acyklický, bez okruhu, keď jeho vrcholy môžeme takto očíslovať).

Očíslovanie môžeme urobiť tak, že nájdeme zdroj, očísľujeme ho číslom 1. Očíslovaný zdroj odstránime spolu s hranami, ktoré z neho vychádzajú (získame graf, ktorý už spravidla nie je sieť). V získanom grafe postupne očísľujeme všetky zdroje najmenšími číslami z množiny $\{2,3,\dots,|V|\}$, ktoré doteraz neboli použité. Ďalej odstránime zdroj očíslovaný najmenším číslom, spolu s hranami, ktoré z neho vychádzajú a pokiaľ sa tým z pôvodných vnútorných vrcholov stali zdroje, postupne ich očísľujeme najmenšími číslami z množiny $\{2,3,\dots,|V|\}$, ktoré doteraz neboli použité; tento postup rekurentne opakujeme. Posledným vrcholom očíslovaným $|V|$, je tak pôvodné ústie.

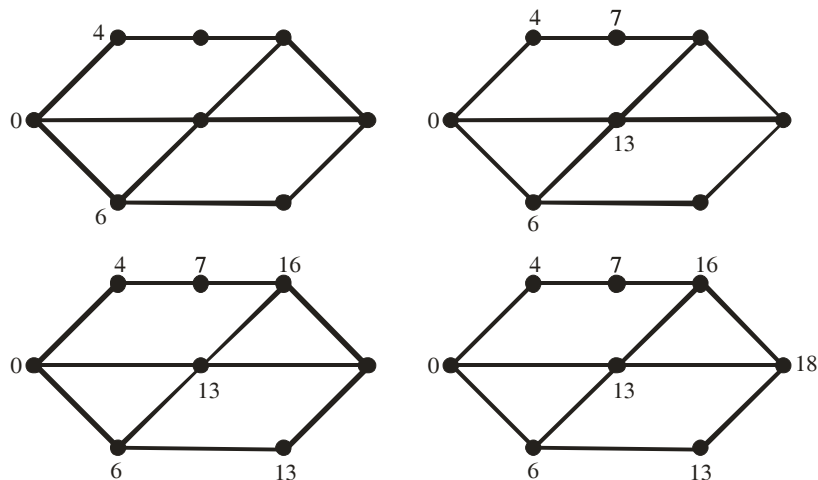
Zdroj v očíslovanej sieti, t. j. vrchol 1, má minimálne časové ohodnotenie 0, $E(1) = 0$. Preberáme ďalej vrcholy v poradí $2,3,\dots, |V|$. Nech i je preberaný vrchol. Preberieme všetky také vrcholy, $j < i$, že existuje hrana (j,i) . Ak $t((j,i))$ je ohodnotenie hrany, vrcholu i priradíme časové ohodnotenie $E(i)$ ako najväčšie z čísel $E(j) + t((j,i))$, teda označenie času, kedy budú ukončené všetky aktivity končiacie vo vrchole i (pozri obr. 13.1 a 13.2).

OBRÁZOK 13.1.
SIEŤ PROJEKTU -
HRANY SPOLU S
ČASMI NA ICH
VYKONANIE



11 aktivít A_1, \dots, A_{11} zobrazených ako hrany spolu s časmi na ich vykonanie, kde vrcholy znamenajú fázy v projekte (započatie alebo ukončenie aktivít), orientácia hrán je určená očíslovaním vrcholov, čo znamená smer pokračovania projektu. Druhý graf ukazuje indexovanie vrcholov, keď pri hrane vrchol s väčším indexom znamená koncový vrchol.

OBRÁZOK 13.2.
OHODNOCOVANIE
MINIMÁLNEHO
ČASOVÉHO
OHODNOTENIA



Postupné ohodnocovanie minimálneho časového ohodnotenia $E(i)$ pre graf z obr. 13.1., zobrazené vždy po dvoch krokoch while cyklu algoritmu 13.1.

ALGORITMUS**13.1.**

MINIMÁLNE

ČASOVÉ

OHODNOTENIE V

SIETI

```

 $E(1) := 0; \quad i := 2;$ 
while  $i \leq |V|$ 
begin  $E(i) := \max_{j < i, (i,j) \in E(G)} (E(j) + t(i,j))$ 
        $i := i + 1;$ 
end

```

Algoritmus pre maximálne časové ohodnotenie

Majme sieť s očíslovanými vrcholmi prirodzenými číslami od 1 po $|V|$, tak, že každá hrana (i, j) spĺňa podmienku $i < j$. Ústie, t. j. vrchol $|V|$, má maximálne časové ohodnotenie $L(|V|) = E(|V|)$. Preberáme ďalej vrcholy v opačnom poradí, $|V|-1, \dots, 3, 2$. Nech i je preberaný vrchol. Preberieme všetky také vrcholy, $j > i$, že existuje hrana (i, j) . Ak $t(i, j)$ je ohodnotenie hrany, vrcholu i priradíme časové ohodnotenie $L(i)$ ako najmenšie z čísel $L(j) - t(i, j)$, teda označenie času, kedy musia byť započaté všetky aktivity začínajúce vo vrchole i (pozri obr. 13.3).

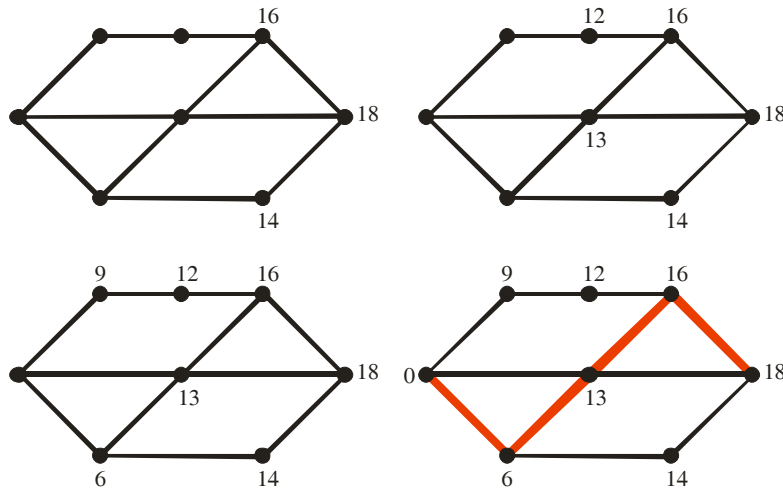
OBRÁZOK 13.3.

OHODNOCOVANIE

MAXIMÁLNEHO

ČASOVÉHO

OHODNOTENIA



Postupné ohodnocovanie maximálneho časového ohodnotenia $L(i)$ pre graf z obr. 13.1, zobrazené vždy po dvoch krokoch while cyklu algoritmu 13.2. V poslednom grafe je tučne sivo zvýraznená kritická cesta, pre ktorú $L(i) = E(i)$.

ALGORITMUS**13.2. MAXIMÁLNE**

ČASOVÉ

OHODNOTENIE V

SIETI

```

 $L(|V|) := E(|V|); \quad i := |V| - 1;$ 
while  $i \geq 1$ 
begin  $L(i) := \min_{j > i, (i,j) \in E(G)} (L(j) - t(i,j))$ 
        $i := i - 1;$ 
end

```

KEDY JE VRCHOL
A HRANA NA
KRITICKEJ CESTE?

- Každý vrchol, ktorého minimálne a maximálne časové ohodnotenie je rovnaké, $L(i) = E(i)$, leží na nejakej kritickej ceste, ostatné vrcholy na takej ceste neležia. Aby hrana (i, j) ležala na niektorej kritickej ceste, musia na kritickej ceste ležať obidva vrcholy i, j a zároveň ohodnotenie hrany (i, j) musí spĺňať podmienku $t((i, j)) = E(j) - E(i)$.
- Môžu existovať aj cesty, ktoré nie sú kritickej, napriek tomu, že prechádzajú iba cez vrcholy ležiace na (inej) kritickej ceste (cestách).

13.2 MAXIMÁLNY TOK V SIETI A MINIMÁLNY REZ

HRANY
OHODNOTENÉ
MAXIMÁLNOU
KAPACITOU
SPOJENIA

Predstavme si, že máme z jedného počítača po danej sieti preniesť do iného počítača čo najrýchlejšie maximálne množstvo dát, pričom spojenia (hrany) počítačovej siete sú ohodnotené **kapacitou spojenia** (maximálnou priepustnosťou), teda najväčším množstvom dát, ktoré sa môže daným spojením za danú časovú jednotku prepraviť. Všeobecne ale môže ísť aj o problém prepravy tovaru po dopravnej sieti, nech už ide o železnicu, alebo plyn v plynovode. Siete pomáhajúce riešiť takýto problém voláme **kapacitné siete**. Ďalej sa v tejto podkapitole 13.2 zaoberáme iba kapacitnými sieťami. Riešenie úlohy môže byť vyjadrené v tvare, keď každej hrane je priradené číslo, ukazujúce množstvo (napr. dát), prechádzajúce príslušným spojením za časovú jednotku. Toto priradenie sa nazýva tokom. Pre niektoré hrany nemusí tok dosahovať hodnotu kapacity danej hrany.

Nebudeme uvažovať siete s násobnými rovnako orientovanými hranami, ale ku každej hrane $(u, v) \in E$ kapacitnej siete $G(V, E)$ bude existovať aj opačne orientovaná hrana $(v, u) \in E$. Na rozdiel od siete projektu v kapacitnej sieti existujú cykly a pre zdroj (resp. ústie) vstupný (resp. výstupný) stupeň vrcholu nie je rovný 0.

TOK - ČO DO
VRCHOLU V
VCHÁDZA, TO
Z NEHO ZASA
VYCHÁDZA

Tok (flow) v kapacitnej sieti $G(V, E)$ je funkcia f , ktorá každej hrane $e = (u, v)$, $e \in E$ priradí konečné číslo $f(e)$ nazývané tok hranou, $f(e) \rightarrow (-\infty, \infty)$. Pre všetky dvojice vrcholov, $u, v \in V$, ktoré spája hrana, požadujeme $f((u, v)) = -f((v, u))$. Pre každý pevne zvolený vrchol $v \in V$ rôzny od zdroja a ústia platí, že čo do vrcholu v vchádza, to z neho zasa vychádza, teda $\sum_{(u, v) \in E} f((u, v)) = \sum_{(v, w) \in E} f((v, w))$.

VEĽKOSŤ TOKU –
KOĽKO ZO ZDROJA
DO ÚSTIA

Zároveň je tok pre každú hranu zhora obmedzený jej špecifickou konštantou – **kapacitou** (capacity), $f(e) \leq c(e)$. U opačne orientovaných hrán budeme požadovať rovnakú kapacitu, $c((u, v)) = c((v, u))$. **Veľkosť toku** udáva množstvo „médiá“, ktoré vyteká zo zdroja a preteká do ústia, teda súčet tokov v hranách vychádzajúcich zo zdroja. Tok sa nazýva **maximálny tok**, ak sa nedá nájsť žiadne iné priradenie tokov hranám, ktoré by dávalo väčšiu veľkosť toku. Je jasné, že môžu existovať rôzne maximálne toky, pozri obr. 13.4. (Zobrazujeme iba hrany s $f(e) > 0$.)

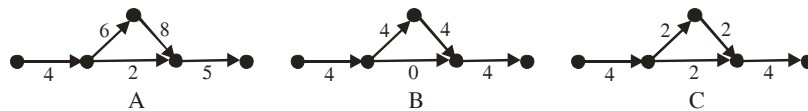
MAXIMÁLNY TOK

REZ SIETE,
KAPACITA REZU,
MINIMÁLNY REZ

Maximálna hodnota toku v sieti je spojená s myšlienkou „rezu“ siete. Za (hranový) **rez siete** $G=(V, E)$ budeme považovať takú množinu hrán $A \subseteq E$, ktorú keby sme odstránili z grafu (alebo zablokovali odpovedajúce spojenia, napr. prereza-

ním káblov), tak kompletne zastavíme tok zo zdroja do ústia, ale keby sme ktorúkoľvek hranu dali naspäť, tak nenulový tok bude možný. **Kapacita** (veľkosť) **rezu** je číslo $\sum_{e \in A} c(e)$, súčet kapacít jeho hrán. Graf A na obr. 13.4 má 4 možné rezy, sú to množiny hrán označených kapacitami $\{4\}, \{2,6\}, \{2,8\}, \{5\}$. Rez je **minimálny rez**, pokiaľ je jeho kapacita menšia alebo rovná kapacite ľubovoľného iného rezu. Obr. 13.4 má ako minimálny rez hranu označenú kapacitou 4. L.R. Ford a D.R. Fulkerson r. 1955 dokázali vetu 13.1.

OBRÁZOK 13.4.
VIAC
MAXIMÁLNYCH
TOKOV V SIETI



Ukážka, že môže existovať viac maximálnych tokov v sieti. Diagram A ukazuje kapacity hrán, diagramy B a C potom rôzne maximálne toky pre danú sieť.

VETA 13.1.

Hodnota ľubovoľného maximálneho toku v sieti sa rovná kapacite jeho minimálneho rezu.

Vetu nebudeme dokazovať.

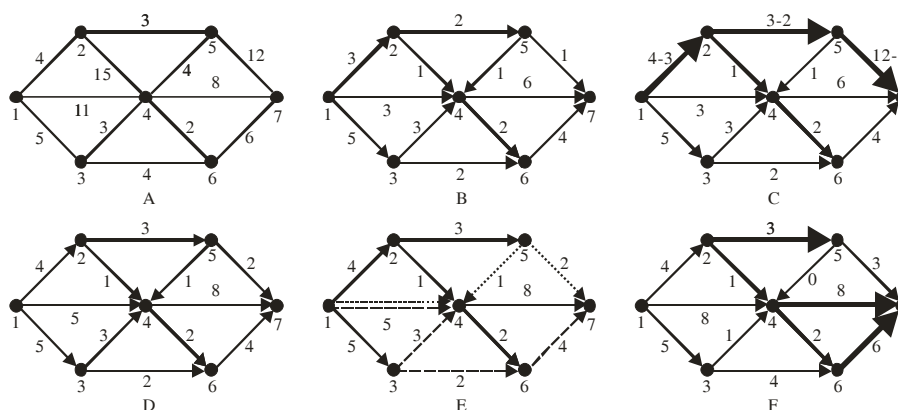
ALGORITMUS
13.3.
URČENIE
MAXIMÁLNEHO
TOKU V SIETI

G : = sieť s hranovým ohodnotením kapacít c ;

1. $f((u, v) \in E(G)) := 0$;
2. {vyhľadanie zlepšujúcej cesty}
Nájdeme postupnosť vrcholov zdroj= v_0, v_1, \dots, v_k =ústie tak, že pre každé $i=1, 2, \dots, k$ platí $(v_{i-1}, v_i) \in E(G)$ a $c((v_{i-1}, v_i)) - f((v_{i-1}, v_i)) > 0$. Ak taká cesta neexistuje, f je maximálny tok.
3. {určenie prírastku toku}
Pre $i:=1, 2, \dots, k$ položíme $d_i := c((v_{i-1}, v_i)) - f((v_{i-1}, v_i))$;
 $d := \min\{d_1, \dots, d_k\}$
4. {zlepšenie toku}
Pre $i:=1, 2, \dots, k$ položíme
if $((v_{i-1}, v_i) \in E(G))$ $f((v_{i-1}, v_i)) := f((v_{i-1}, v_i)) + d$;
{pridanie toku pozdĺž cesty}
if $((v_i, v_{i-1}) \in E(G))$ $f((v_i, v_{i-1})) := f((v_i, v_{i-1})) - d$;
{tok môže byť „vrátený“ neskôr}
5. Choď na bod 2;

Na nájdenie maximálneho toku uvádzame algoritmus 13.3 L. R. Forda a D. R. Fulkersona. Jeho základnou myšlienkou je nájsť ľubovoľný tok – cestu zo zdroja do ústia, a ak nie je maximálny a teda všetky hrany v ceste majú nenaplnenú kapacitu, tok zvýšiť. Potom nájdeme ďalšiu cestu a postup opakujeme. V algoritme počítame iba s jednoduchými hranami. Po každom kroku algoritmu platí, že $f(u, v) \leq c(u, v)$, teda tok z vrcholu u do v neprekročí kapacitu a $f(u, v) = -f(v, u)$, teda udržiavame „čistý“ tok z vrcholu u do v (pokiaľ $f(u, v) = a$, $f(v, u) = b$ a $a \neq -b$, potom položíme $f(u, v) = a - b$ a $f(v, u) = b - a$).

OBRÁZOK 13.5.
POSTUP FORD-
FULKERSONOVHO
ALGORITMU



Postup Ford-Fulkersonovho algoritmu na nájdenie maximálneho toku. (A) Kapacita hrán (B) Náhodný tok vyhovujúci kapacite (C) Nájdenie postupnosti vrcholov 1, 2, 5, 7 kde sa dá zväčšiť tok o 1 ako minimum rozdielu kapacít a momentálnych tokov pre hrany (D) Výsledné zlepšenie toku, aj pre postupnosť 1, 4, 7 (E) Nájdenie postupností 1, 4, 5, 7 a 1, 4, 3, 6, 7, kde sa dajú znížiť kapacity hrán idúcich opačným smerom a zvýšiť kapacity ostatných hrán (F) Výsledný tok so zvýraznenými hranami (2, 5), (4, 7) a (6, 7), určujúcimi minimálny rez s kapacitou 17.

Postup Ford-Fulkersonovho algoritmu je znázornený na obr. 13.5, kde na grafe A je sieť s očíslovanými vrcholmi, so zdrojom 1 a ústím 7 a s kapacitami orientovaných hrán. Na grafe B je znázornený náhodne nájdený tok neprekračujúci kapacity hrán a splňajúci podmienku, že čo do vrcholu vchádza, to z neho aj vychádza, okrem zdroja a ústia. Graf C zobrazuje rozdiely kapacít a momentálnych tokov na ceste medzi vrcholmi 1, 2, 5, 7, kde keď sa zoberie minimum z týchto rozdielov, tak tok každej hrany na tejto ceste sa dá zväčšiť o toto minimum, ako je ukázané na grafe D. V grafe D je aj zvýšená kapacita na ceste 1, 4, 7. V grafe D pri danej orientácii hrán už nemôžeme nájsť žiadnu cestu zo zdroja do ústia, kde by tok každej hrany bol menší ako je kapacita hrany. Láka nás teda povedať, že taký tok je maximálny. Uvažujme ale napr. bodkovane vyznačenú cestu 1, 4, 5, 7 na grafe E, kde pri všetkých hranách cesty nejdeme v smere orientácie. Tok dvoch „dopredných“ hrán (1, 4) a (5, 7) je menší ako ich kapacita a to platí aj pri „spätnej“ hrane, $f(4,5) = -1$. Pokiaľ zvýšime tok dopredných hrán o 1 a redukuje tok hrany (5, 4) o 1, výsledný tok zachováva podmienku rovného súčtu tokov vstupných a výstupných hrán. Rovnako, keď si zoberieme pri grafe E čiarkovane vyznačenú cestu 1, 4, 3, 6, 7, tok hrany (4, 3) môžeme o 2 znížiť a toky ostatných hrán o 2 zvýšiť. Dostávame tak graf F s tokom, ktorý je už maximálny a ktorý aj zodpovedá minimálnemu rezu s kapacitou 17 so zvýraznenými hranami (2, 5), (4, 7) a (6, 7). Keďže odstránenie zvýraznených hrán by viedlo k zastaveniu toku, hodnota žiadneho toku nemôže prekročiť kapacitu takéhoto rezu. Preto si môžeme byť istí, že nájdený tok je maximálny. Všeobecne môže existovať na danú sieť viac maximálnych tokov a minimálnych rezov o rovnakej kapacite, ďalší minimálny rez na obr. 13.5 je napr. určený hranami (2, 5), (4, 7), (3, 6), (4, 6).

13.3 NÁJDENIE NAJMENŠEJ KOSTRY

KOSTRA
(SPANNING TREE)

Kostra (spanning tree) obyčajného súvislého grafu G je podgraf grafu G , ktorý je stromom obsahujúcim všetky vrcholy z G .

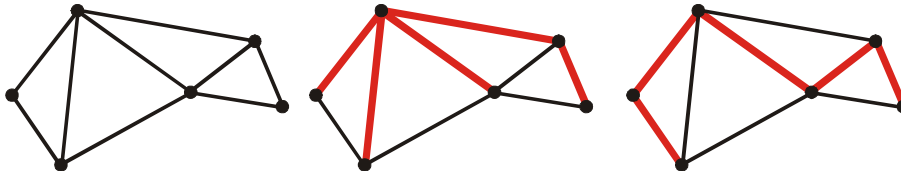
Predstavte si snehovú kalamitu, keď chceme sprevádzkovať cesty snehovým pluhom tak, aby boli prepojené všetky mestá, ale aby sme pritom museli čistiť čo najmenej kilometrov. Ako to urobiť? (Ekvivalentná úloha je najlacnejšie prepojenie počítačovej siete, alebo posielanie dát cez routery pri multicastingu v Internet Protocol sieťach.)

MINIMÁLNA
KOSTRA

Nech G je súvislý graf s ohodnotenými hranami. **Minimálna kostra** grafu G je kostra T s minimálnou váhou v tom zmysle, že akákoľvek iná kostra T' má väčší súčet váh (ohodnotení $w(e)$) svojich hrán, $\sum_{e \in E(T)} w(e) \leq \sum_{e \in E(T')} w(e)$.

Nájdenie najlacnejšieho prepojenia miest pri snehovej kalamite je teda ekvivalentné nájdeniu minimálnej kostry (pozri obr. 13.6). Ako nájsť minimálnu kosť? Vyberáme do kostry najmenej ohodnotené hrany, tak aby v nej nevznikla kružnica, dokiaľ nebude kostra obsahovať všetky vrcholy grafu.

OBRÁZOK 13.6.
GRAF SIETE,
KOSTRA A
MINIMÁLNA
KOSTRA



Zobrazenie grafu siete, kostry a minimálnej kostry pre váhy hrán rovné ich dĺžke.

Každý konečný ohodnotený graf G má minimálnu kosť. Keďže G má iba konečný počet kostí, aspoň jedna z nich musí byť minimálna (ale takých môže byť aj viac, pokiaľ nie sú všetky váhy navzájom rôzne).

Na konštrukciu minimálnej kostry uvedieme dva algoritmy. Pri oboch algoritmoch postupne vyberáme do kostry hrany s najmenšou váhou tak, aby v nej nevznikla kružnica. Výber hrán sa opakuje, pokiaľ existuje vrchol grafu, ktorý nie je incidentný so žiadnou z vybraných hrán. Obedva algoritmy sú pažravé (greedy), teda budujú celkové riešenie z krokov, ktoré sa zdajú byť najvýhodnejšie v danom momente. Pažravé algoritmy zvyčajne nezaručujú nájdenie globálneho optima, ale pre problém nájdenia minimálnej kostry globálne optimum zaručujú. Prvý algoritmus bol formálne navrhnutý matematikom Vojtěchom Jarníkom v r. 1930 a neskoršie znova objavený Robertom Primom r. 1957 a Edsberom Dijkstrom v r. 1959. Keďže Jarníkov článok publikovaný v češtine bol nadhlo zabudnutý, algoritmus sa najčastejšie volá Primov. Pri tomto postupe vyberáme najmenej ohodnotené hrany tak, aby vybrané grafy v každom okamihu tvorili strom. Skončíme po výbere $n-1$ hrán, kde n je počet vrcholov grafu.

**ALGORITMUS
13.4.**
PRIMOV ALG. NA
MINIMÁLNU
KOSTRU

```

Procedure Prim(G: súvislý neorientovaný graf o n vr-
  chloch s ohodnotenými hranami)
T:= ľubovoľný vrchol z G
for i:=1 to n-1
begin
e:= hrana o minimálnej váhe neobsiahnutá v T ale inci-
  dentná s vrcholom z T a nevytvárajúca kružnicu, keď
  sa pridá k T
T:=T s pridanou hranou e
end {T je minimálna kostra grafu G}

```

Druhý algoritmus bol formulovaný Josephom Kruskalom r. 1956, a jeho jediným rozdielom od Primovho algoritmu je, že nám nezáleží na tom, aby vytváraná kostra T bola súvislá v každom okamihu vytvárania (pozri obr. 13.7).

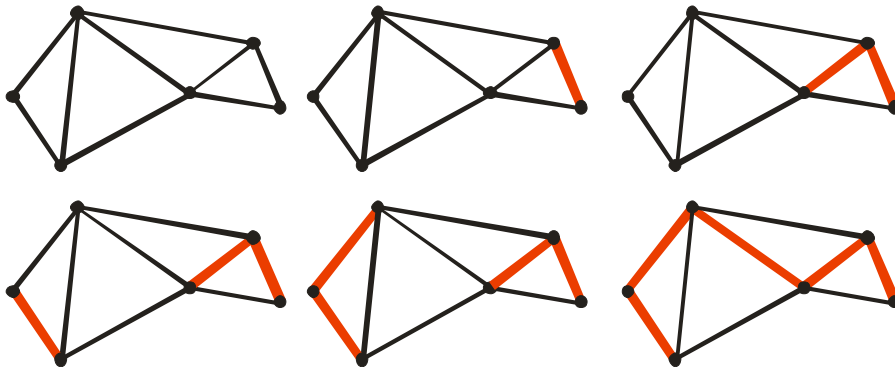
**ALGORITMUS
13.5.**
KRUSKALOV ALG.
NA MINIMÁLNU
KOSTRU

```

Procedure Kruskal(G: súvislý neorientovaný graf o n
  vrcholoch s ohodnotenými hranami)
T:=prázdny graf
for i:=1 to n-1
begin
e:=hrana o minimálnej váhe neobsiahnutá v T a nevytvá-
  rájúca kružnicu, keď sa pridá k T
T:=T s pridanou hranou e
end {T je minimálna kostra grafu G}

```

OBRÁZOK 13.7.
BUDOVANIE
KOSTRY
KRUSKALOVÝM
ALGORITMOM



Postup budovania kostry pomocou Kruskalovho algoritmu. Ohodnotením hrany je jej dĺžka. Hrany postupne vytvárajúcej kostry sú zvýraznené.

ZLOŽITOSŤ
 $O(|E| \log |E|)$

Pre obidva algoritmy sa dá dokázať, že produkujú minimálnu kostru. Časová náročnosť Kruskalovho algoritmu je $O(|E| \log |E|)$ a Primovho algoritmu je $O(|V|^2)$. Kruskalov algoritmus je teda výhodnejší pre *riedke grafy*, teda pre grafy, kde počet hrán je malý v porovnaní s počtom hrán u kompletneho grafu. Inak medzi algoritmi nie je podstatný rozdiel. Časová náročnosť Primovho algoritmu sa dá vylepšiť na úroveň Kruskalovho pri použití sofistikovanejších dátových štruktúr, iných ako je matica susednosti.

13.4 PREHLĎÁVANIE DO HLĎKY (DEPTH-FIRST SEARCH, DFS)

„CESTOVANIE“ POZDĽŽ HRÁN

Rôzne varianty algoritmu prehľadávania do hĺbky boli už v texte niekoľkokrát uvedené (napr. príklady 10.5, 10.6, 10.13. Tu si ale uvedieme jeho „klasické“ verzie. Systematické prehľadávanie vrcholov grafu spočíva v postupnom navštevovaní všetkých vrcholov „cestovaním“ pozdĺž hrán. Pritom môžu byť tak vrcholy, ako aj hrany navštívené viackrát. Postup prehľadávania vrcholov je definovaný aj sekvenciou navštevovaných hrán.

KONŠTRUJEME KOSTRU GRAFU

Prehľadávanie grafu G môžeme teda považovať aj za konštruovanie podgrafu obsahujúceho všetky vrcholy grafu G , ale nie nutne všetky hrany. Tak pri prehľadávaní do hĺbky, ako aj pri prehľadávaní do šírky opísanom v nasledujúcej sekcii, je konštruovaným podgrafom vlastne kostra grafu.

PREHLĎÁVANIE BLUDISKA

Prehľadávanie do hĺbky si môžeme predstaviť ako prehľadávanie bludiska, keď na každom rázcestí pôjdeme vždy napr. vľavo. Keď sa dostaneme do slepého konca (alebo do miesta, kde vidíme rázcestie, kde sme už boli), vrátíme sa späť na najbližšie rázcestie, ktorého všetky možnosti sme ešte nepreskúmali a ideme ďalšou nepreskúmanou cestou rovnakým spôsobom. Formálne môžeme označiť každú križovatku, roh a koniec slepej cesty ako vrchol a prípustné kúsky cesty medzi nimi ako hrany. Každý prejdený koridor (súčasť kostry) si označíme napr. kriedou a cestu naspať k najbližšej nepreskúmanej odbočke vieme tak, že sa sebou od začiatku ťaháme motúz (ten zodpovedá zásobníku tvorenému pri rekurzii pri ďalej uvedenom algoritme).

Prehľadávanie do hĺbky, ako už názov napovedá, hľadá „hlbšie“ v grafe, kedykoľvek je to možné. Sú skúmané hrany, smerujúce z takého najneskôr objaveného vrcholu, ktorý má ešte nepreskúmané hrany. Tento proces sa opakuje rovnakým spôsobom, dokiaľ nie sú objavené všetky vrcholy.

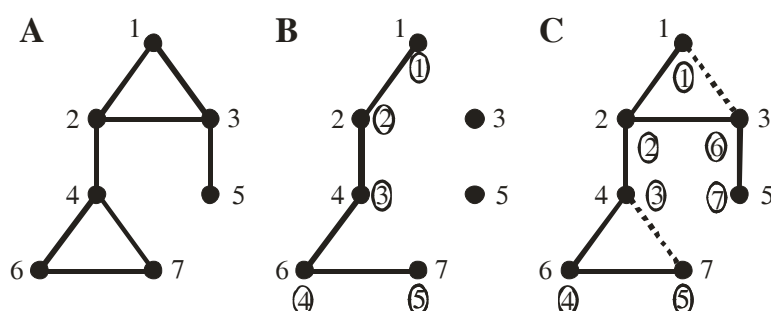
BACKTRACKING – NÁVRAT K UŽ NAVŠTÍVENÝM VRCHOLOM

Slová „rovnakým spôsobom“ implikujú rekurzívny charakter prehľadávania do hĺbky, ktoré sa po anglicky volá spätné prehľadávanie (backtracking), pretože sa vraciame k už navštíveným vrcholom vydať sa ešte nevyškúšanou cestou.

Prehľadávanie do hĺbky navštívi všetky vrcholy a hrany grafu G , pokiaľ je súvislý. Algoritmus sa takto dá použiť aj na zistenie, či je graf súvislý – v tom prípade sa počet navštívených vrcholov rovná celkovému počtu vrcholov grafu. Po úprave sa tento algoritmus dá použiť aj na nájdenie cesty medzi dvoma vrcholmi, alebo na nájdenie kružníc v grafe. Pokiaľ je graf reprezentovaný zoznamom hrán, zložitosť algoritmu je $O(|V|+|E|)$, kde $|V|$ a $|E|$ sú počty vrcholov a hrán, pokiaľ je graf reprezentovaný maticou susednosti, zložitosť algoritmu je $O(|V|^2)$. Každú hranu v tomto algoritme prejdeme maximálne dvakrát, aby sme vedeli, či túto hranu a s ňou spojený koncový vrchol môžeme pripojiť k stromu T (či ešte T tento vrchol neobsahuje).

Prehľadávanie do hĺbky môže byť spojené s riešením veľa rôznorodých problémov. Výsledkom ďalej uvedených dvoch verzií algoritmu prehľadávania do hĺbky (s *rekurziou* a bez rekurzie) je aj kostra prehľadávaného grafu. Postup algoritmov je zobrazený aj na obr. 13.8.

OBRÁZOK 13.8.
POSTUP
PREHĽADÁVANIA
DO HĽBKY



Postup prehľadávania do hĺbky: (A) Prehľadávaný graf, štartovný vrchol je 1. (B) Prehľadávanie prvej vetvy, prehľadávanie sa zastaví na vrchole 7, pretože vrchol 4 už bol navštívený; postupnosť prehľadávania vrcholov je označená očíslovaním v ováloch. (C) pokračovanie algoritmu, algoritmus sa vracia do prvého nepreskúmaného vetvenia na vrchole 4, zisťuje, že vrchol 7 už bol navštívený, algoritmus sa vracia do ďalšieho nepreskúmaného vetvenia na vrchole 2, pokračuje na vrchol 3 a 5, vracia sa do prvého nepreskúmaného vetvenia na vrchole 3, ale vrchol 1 už bol navštívený.

ALGORITMUS
13.6.
PREHĽADÁVANIE
DO HĽBKY S
REKURZIOU

```

procedure DFS1(G: súvislý graf s  $V=\{v_1, \dots, v_n\}$ ,  $v_1$ :
  štartovný vrchol, x: hľadaný vrchol)
  T:=strom zložený z vrcholu  $v_1$ ;
  if  $v_1 = x$  then print(„Nájdené“);
  visit( $v_1$ );

procedure visit(v: vrchol grafu G)
  for každý vrchol w spojený s v a neobsiahnutý v T
  begin
    if  $w = x$  then print(„Nájdené“);
    pridaj w a hranu {v,w} do T;
    visit(w);
  end

```

ZÁSOBNÍK

Okrem uvedeného rekurzívneho algoritmu si môžeme priechod stromu do hĺbky urobiť aj pomocou *zásobníka*. Zásobník je dátová štruktúra, ktorú si môžeme predstaviť ako uloženie tanierov na seba v jedálni: tanier, ktorý posledný ukladáme do stĺpca, ako prvý zasa zoberieme. V nasledujúcom algoritme budeme ale hovoriť iba o tom, či pridávame alebo uberáme spredu alebo zozadu zoznamu.

ALGORITMUS**13.7.**

PREHLADÁVANIE
DO HĽBKY
POMOCOU
ZÁSOBNÍKA

```

procedure DFS2(G: súvislý graf s  $V=\{v_1, \dots, v_n\}$ ,  $v_1$ :
  štartovný vrchol, x: hľadaný vrchol)
  zoznam L :=  $\emptyset$ ;
  strom T :=  $\emptyset$ ;
  prehľadaj( $v_1$ );
  while (L $\neq\emptyset$ ) do
  begin
    odstráň hranu (v,w) z konca L;
    if w ešte nebol navštívený
    begin
      pridaj (v,w) do T;
      prehľadaj(w);
    end
  end

procedure prehľadaj(v: vrchol grafu G)
begin
  označ v ako navštívený vrchol;
  if v=x then print(„Nájdené“);
  for každú hranu (v,w) $\notin$ T
    pridaj hranu (v,w) na koniec L;
end

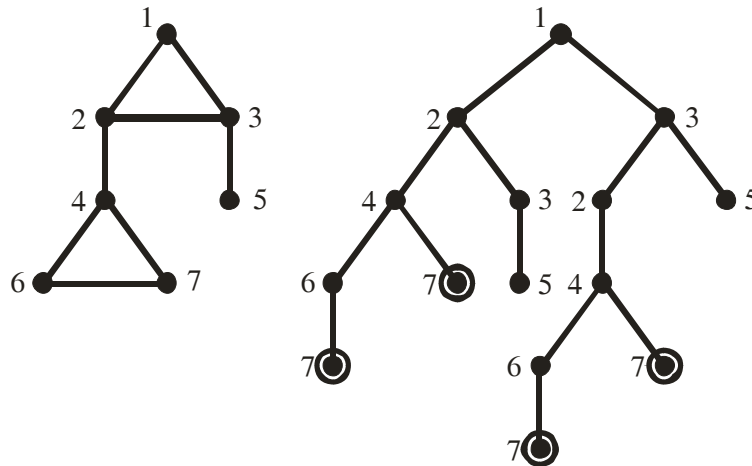
```

AKO ZISTIŤ, ČI
VRCHOL EŠTE
NEBOL
NAVŠTÍVENÝ

CESTA
MINIMÁLNEJ
DĹŽKY? PRI CESTE
NASPÄŤ MAŽEME
OZNAČENIE
NAVŠTÍVENEJ
CESTY

Na to, aby sme zisťovali, či vrchol ešte nebol navštívený, môžeme používať buď špeciálny *zoznam* prehľadávaných vrcholov alebo zisťovať, či vrchol je v budovanom strome T . Výstavba stromu alebo tvorba zoznamu navštívených vrcholov sú ekvivalentné, pokiaľ hľadáme konkrétny vrchol a nezaujímá nás cesta k nemu. Namiesto zoznamu hrán L môžeme taktiež bez problémov použiť aj zoznam koncových vrcholov w hrany (v,w) . Zoznam navštívených vrcholov nám ale nebude stačiť, pokiaľ máme nájsť aj cestu od koreňa k cieľovému riešeniu. Ani kostra T nám v nájdení cesty nepomôže, pokiaľ ju nechceme znova prehľadávať. Aj keby sme mali cestu vo vytvorenej kostre T od koreňa k cieľovému riešeniu, táto cesta nemusí mať minimálnu dĺžku (počet hrán). Aby sme preskúmali všetky cesty k vrcholom, museli by sme zároveň mazať navštívené vrcholy a hrany zo stromu T , keď sa vraciame naspäť po kostre, aby sme išli po novej odbočke. To je implicitne urobené v nasledujúcom algoritme, kde w_d nám určuje navštívený d -tý vrchol na ceste od zadaného koreňa, a keď jeho hodnotu prepisujeme príkazom $w_d := \text{get_element}(U_d)$, je to ako keby sme pri ceste naspäť v bludisku (alebo vo vytváranom strome T) mazali označenie už navštívenej cesty.

OBRÁZOK 13.9.
GRAF A STROM
RIEŠENÍ PRE
CESTY PRE
ALGORITMUS 13.8.



Graf a strom riešení pre cesty z vrcholu 1 do vrcholu 7 zostrojený algoritmom prehľadávania do hĺbky, kedy algoritmus uchováva vždy iba jednu cestu, nie celý strom. Cesty, ktoré končia vrcholom v krúžku sú úspešné. Je tu vidno rozdiel od obr. 13.8, klasický algoritmus prehľadávania do hĺbky by mal vo vytváraní kostre iba prvú, nie najkratšiu cestu z vrcholu 1 do vrcholu 7.

Na nájdenie všetkých možných ciest z koreňa vrcholu do cieľového vrcholu môžeme použiť adaptáciu algoritmu prehľadávania do hĺbky pre konštrukciu hamiltonovskej kružnice z príkladu 10.13. Algoritmus pathDFS je čiastočne zjednodušený a zefektívnený oproti algoritmom DFS1 a DFS2 v tom, že jeho vedľajším výsledkom nie je kostra prehľadávaného grafu.

ALGORITMUS 13.8.
PREHĽADÁVANIE
DO HĽBKY
S VÝPISOM CESTY
OD KOREŇA

```

procedure pathDFS(G: súvislý graf s  $V=\{v_1, \dots, v_n\}$ ,
 $v_1$ : štartovný vrchol,  $x$ : hľadaný vrchol)
 $U_1 := \{v_1\}$ ;  $d := 1$ ;
while  $d > 0$  do
  if  $U_d \neq \emptyset$  then
    begin  $w_d := \text{get\_element}(U_d)$ ;  $U_d := U_d - \{w_d\}$ ;
      if  $x \neq w_d$  then
        begin  $d := d + 1$ ;
           $U_d := \Gamma(w_{d-1})$ ;
           $U_d := U_d - \{w_1, w_2, \dots, w_{d-1}\}$ ;
        end else
          begin print( $w_1, w_2, \dots, w_d$ );
             $d := d - 1$ ;
          end;
        end else  $d := d - 1$ ;

```

CESTA MEDZI
KOREŇOM
A AKTUÁLNYM
VRCHOLOM MÁ

Algoritmus je inicializovaný tým, že množina U_1 obsahuje štartovný vrchol. Pri predlžovaní cesty (vnútorný blok začínajúci príkazom $d := d + 1$), z množiny kandidátov U_d musíme odstrániť tie vrcholy, ktoré tvoria hrany vyskytujúce sa

FUNKCIU
ZÁSOBNÍKA

v predchádzajúcej časti cesty. Príkaz $U_d := \Gamma(w_{d-1})$ vloží do množiny U_d susedov vrcholu w_{d-1} . Pole w je využívané vo funkcii **zásobníka**, uchovávajúceho cestu medzi štartovným vrcholom v_1 a momentálne navštíveným vrcholom. Akonáhle je nájdený hľadaný vrchol x , vypíšeme cestu ako obsah poľa o dĺžke cesty do vrcholu x .

AKO ZEFEKTÍVNIŤ
ALGORITMY
PREHĽADÁVANIA
DO HĽBKY PRI
PREHĽADÁVANÍ
STROMOV

Algoritmus je ilustrovaný jednoduchým príkladom z obr. 13.9. V prípade, že by sme vedeli, že prehľadávaný graf je strom, môžeme uvedené algoritmy DFS zjednodušiť. U DFS1 môžeme vynechať kontrolu „neobsiahnutý v T “ a namiesto budovania stromu T nám iba stačí kontrolovať, aby sme nepokračovali z vrcholu opačným smerom, teda hranou, ktorou sme doňho prišli. Rovnako u DFS2 môžeme vynechať kontrolu „keď w ešte nebol navštívený“ a „označ v ako navštívený vrchol“ a kontrolu $\notin T$, namiesto budovania stromu T nám tiež iba stačí kontrolovať, aby sme nepokračovali z vrcholu opačným smerom, teda hranou, ktorou sme doňho prišli. Konečne pri algoritme pathDFS nemusíme odstrániť tie vrcholy, ktoré tvoria hrany vyskytujúce sa v predchádzajúcej časti cesty, teda môžeme vynechať časť „ $\{w_1, w_2, \dots, w_{d-1}\}$ “.

PREHĽADANIE
VŠETKÝCH
MOŽNÝCH RIEŠENÍ
AKO PREHĽADANIE
STROMU

Existujú problémy, ktoré môžu byť vyriešené iba prehľadaním všetkých možných riešení. Jedným zo spôsobov ako systematicky hľadať riešenie je použitie rozhodovacieho stromu, kde každý vnútorný vrchol reprezentuje rozhodnutie a každý list možné riešenie. Aby sme našli riešenie pomocou prehľadávania do hĺbky, je potrebné ako prvé urobiť sériu rozhodnutí, aby sme sa pokúsili nájsť riešenie, pokiaľ je to ešte po sérii rozhodnutí možné. Sekvencia rozhodnutí môže byť reprezentovaná cestou v rozhodovacom strome. Akonáhle je jasné, že akékoľvek predĺženie aktuálnej sekvencie rozhodnutí nemôže viesť k riešeniu, vráťte sa v rozhodovacom strome k prvej nepreskúmanej odbočke a skúste dôjsť k riešeniu pomocou ďalšej série rozhodnutí, pokiaľ je to možné. Takáto procedúra pokračuje, dokiaľ sa nenájde riešenie, alebo pokiaľ nie je zistené, že riešenie neexistuje.

PRÍKLAD 13.1.

Použite prehľadávanie do hĺbky na načapovanie 4 litrov piva do jedného z krčahov, keď máte iba 2 krčahy, jeden 5-litrový (označíme A), druhý 3 litrový (označíme B).

Riešenie: Všetky možné stavy celočíselných dvojíc AB počtov litrov v krčahoch prehlásime za vrcholy. Tieto vrcholy prepojíme orientovanou hranou, ak sa z jedného im odpovedajúceho stavu $A_x B_x$ dostaneme do druhého $A_y B_y$ jednou z nasledujúcich šiestich operácií:

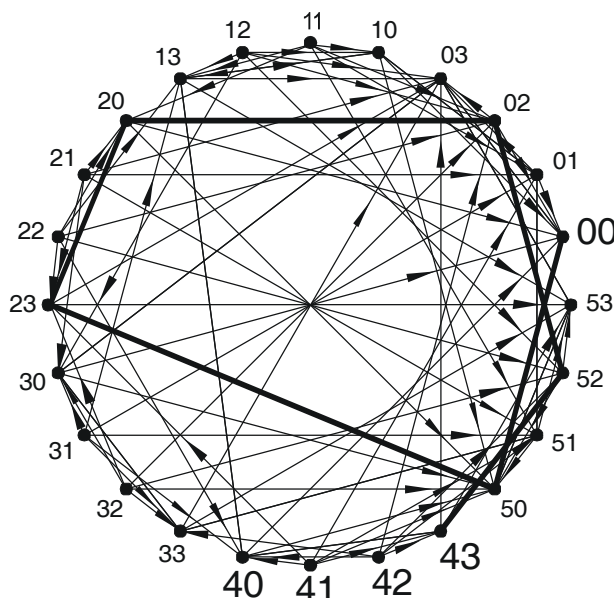
- (1) doliatie krčahu A ($A_y := 5, B_y := B_x$)
- (2) doliatie krčahu B ($A_y := A_x, B_y := 3$)
- (3) vylatie krčahu A ($A_y := 0, B_y := B_x$)
- (4) vylatie krčahu B ($A_y := A_x, B_y := 0$)
- (5) priliatie obsahu krčahu A k obsahu krčahu B, keď je B naplnený, zvyšok ostáva v A ($A_y := \max(A_x - (3 - B_x), 0), B_y := \min(A_x + B_x, 3)$)
- (6) priliatie obsahu krčahu B k obsahu krčahu A, keď je A naplnený, zvyšok ostáva v B ($A_y := \min(A_x + B_x, 5), B_y := \max(B_x - (5 - A_x), 0)$)

Z každého stavu teda vychádza maximálne 6 hrán (ale vchádzať môže aj viac). Keď počty litrov v krčahoch A a B napíšeme vedľa seba, môžeme takéto dvojice čísiel prehlásiť za označenie vrcholov. Takto sa napríklad z vrcholu 41 operáciou (1) dostaneme na vrchol 51, operáciou (2) sa dostaneme na vrchol 43, operáciou (3) sa dostaneme na vrchol 01, operáciou (4) sa dostaneme na vrchol 40, operáciou (5) sa dostaneme na vrchol 23, a konečne operáciou (6) sa dostaneme na vrchol 50.

Niektoré spojenia dvoch vrcholov idú obidvoma smermi, napr. zo stavu (vrcholu) 52 dostaneme stav (vrchol) 43 operáciou (5) a opačným smerom sa dostaneme operáciou (6). Odpovedajúcu dvojicu orientovaných hrán idúcich opačným smerom nahradíme jednou neorientovanou hranou. Graf zodpovedajúci stavovému priestoru problému a jedno z riešení vidíme v grafe na obr. 13.10.

Nameranie 4 litrov piva tak zodpovedá ceste v grafe, kedy sa z vrcholu 00 musíme dostať do jedného z vrcholov 40, 41, 42, alebo 43. Po neorientovaných hranách pritom môžeme ísť ľubovoľným smerom, po orientovaných hranách iba v smere orientácie. Na nájdenie riešenia môžeme použiť vyššie uvedený algoritmus pathDFS.

OBRÁZOK 13.10.
GRAF STAVOVÉHO
PRIESTORU 5 A 3
LITROVÝCH
KRČAHOV,
S CESTOU
RIEŠIACOU
NAČAPOVANIE 4
LITROV



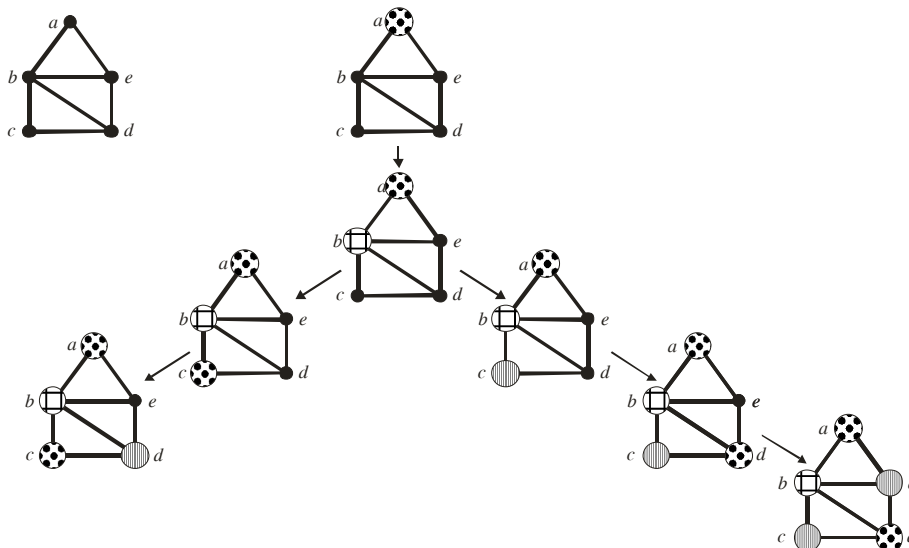
Graf zodpovedajúci stavovému priestoru množstva litrov v dvoch krčahoch, jednom 5-litrovom, druhom 3-litrovom. Počty litrov v prvom a druhom krčahu tvoria dvojicu čísiel označujúcu vrcholy. Tie sú spojené hranou, ak sa dá z jedného stavu do druhého prejsť naliaťím alebo vyliaťím jedného z krčahov, alebo preliatím obsahu jedného krčahu do druhého, čo sa tam len vojde. Počiatočný stav (v krčahoch nie je nič, 00) a cieľové stavy začínajúce číslom 4 sú zvýraznené. Neorientované hrany sa dajú prejsť obidvoma smermi. V grafe je zvýraznená najkratšia cesta 00, 50, 23, 20, 02, 52, 43, keď sa po 6 hranách (preliatiach) dostaneme do stavu so 4 litrami v prvom krčahu. Existuje viac prípustných, ale dlhších ciest.

PRÍKLAD 13.2.

Ako sa dá prehľadávaním do hĺbky zistiť, či sa dajú vrcholy grafu zafarbiť n farbami?

Riešenie: Na konci kapitoly 11 bol uvedený greedy algoritmus, ktorý nezaručoval nájdenie zafarbenia minimálnym počtom farieb. Prehľadávanie do hĺbky také zafarbenie zaručuje. Jednoducho vyberieme prvý vrchol a a zafarbíme ho prvou farbou. Zoberieme ďalší vrchol b a pokiaľ nie je susedný s vrcholom a , zafarbíme ho tiež prvou farbou, inak ho zafarbíme druhou farbou. Podobne ideme aj na ďalšie vrcholy, vždy vyskúšame, či môžeme použiť už použitú farbu, v opačnom prípade použijeme novú farbu v poradí. Keď máme možnosť použiť viac použitých farieb, vždy si zoberieme tú prvú v prípustných. Takto pokračujeme, dokiaľ nezafarbíme všetky vrcholy alebo sa nám minú všetky druhy farieb. V takom prípade sa vrátíme na posledný vrchol, kde sme použili už použitú farbu a pokúsime sa použiť ďalšiu prípustnú (použitú alebo nepoužitú) farbu v poradí. Pri vrátení sa naspäť samozrejme mažeme na strome rozhodnutia priradené farby. Po zmene už použitej farby zasa pokračujeme podobne ako predtým vo farbení ďalších vrcholov. Takýto rozhodovací strom spolu s grafom, ktorého vrcholy farbíme, je znázornený na obr. 13.11.

OBRÁZOK 13.11.
FARBENIE GRAFU
POMOCOU
PREHĽADÁVANIA
DO HĽBKY



Farbenie grafu pomocou prehľadávania do hĺbky. Naľavo je pôvodný graf, napravo rozhodovací strom s farbami (nahradenými černo-bielym vzorom) priradenými vrcholom. Prvá vetva skončila po sfarbení štyrmi farbami, keď ešte nie je zafarbený vrchol e , ktorý by musel byť zafarbený piatou farbou. Preto sa vrátíme k farbeniu vrcholu c , ktorý zafarbíme ešte nepoužitou farbou, a pokračujeme napravo až k výslednému farbeniu 3 farbami.

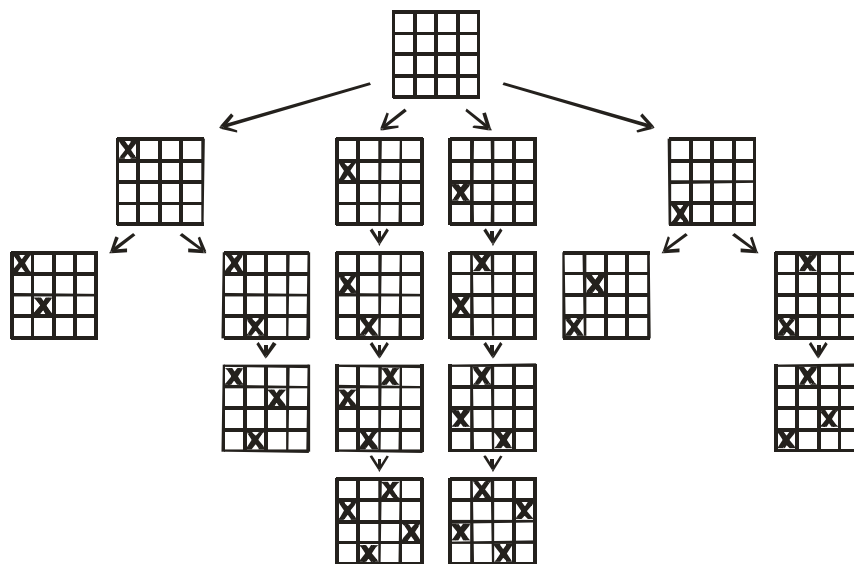
PRÍKLAD 13.3.

Problém n dám: Ako sa dá prehľadávaním do hĺbky rozmiestniť n dám na šachovnici rozmerov $n \times n$ tak, aby sa neohrozovali? Dáma v danej pozícii ohrozuje všetky štvorce v danom rade, v danom stĺpci a na oboch diagonálach prechádzajúcich štvorcem pozície dámy.

Riešenie: Na konci kapitoly 11 bolo uvedené riešenie problému pre šachovnicu 8×8 , ale nebol pri ňom uvedený postup riešenia. Problém sa dá riešiť metódou prehľadávania do hĺbky. Začneme s prázdnu šachovnicou na nulte úrovni prehľadávania stromu riešení. Na $k + 1$ úrovni sa pokúsime pridať ďalšiu dámu na šachovnicu do $(k + 1)$ -ho stĺpca, keďže sú už dámy v prvých k stĺpcoch. Prehľadáme štvorce v $(k + 1)$ -om stĺpci, začínajúc od prvého riadku, tak, aby predchádzajúce dámy v prvých k stĺpcoch neboli na rovnakom riadku alebo na rovnakej diagonále. To, že nie sú na rovnakom stĺpci máme zaručené tým, že do každého stĺpca dávame iba jednu dámu. Keď je nemožné dámu umiestniť v $(k + 1)$ -om stĺpci, vraciame sa do k -tej úrovne a umiestnime dámu v k -tom stĺpci na ďalší prípustný riadok v tomto stĺpci, pokiaľ existuje. Keď neexistuje, vraciame sa o úroveň vyššie.

Na obr. 13.12 je uvedený strom riešení pre šachovnicu 4×4 . V princípe rozmiesťenie zodpovedá permutácii čísel riadkov umiestnenia v jednotlivých stĺpcoch, takže na nájdenie riešenia by stačilo upraviť už v predchádzajúcich kapitolách uvádzaný algoritmus na generáciu permutácií (ale iba niektoré z týchto permutácií budú vyhovovať podmienkam na rozloženie dám).

OBRÁZOK 13.12.
AKO
PREHĽADÁVANÍM
DO HĽBKY
ROZMIESTNIŤ N
DÁM, ABY SA
NEOHROZOVALI



Riešenie problému n dám: ako sa dá prehľadávaním do hĺbky rozmiestniť n dám na šachovnici rozmerov $n \times n$ tak, aby sa neohrozovali?

PRÍKLAD 13.4.


Suma podmnožín: Uvažujte nasledujúci problém. Chcete napáliť súbory na CD-R disk tak, aby kapacita CD disku bola čo najviac využitá, pričom súborov máte veľa. Ako môže byť prehľadávanie do hĺbky použité na riešenie tohto problému?

Riešenie: Ako už bolo predstreté v názve problému, problém si môžeme sformalizovať tak, že máme sadu prirodzených čísel x_1, x_2, \dots, x_n a máme nájsť takú ich podmnožinu, ktorá má súčet čo najviac sa zdola blížiaci alebo rovný číslu C , kde

menšia časť z nich odpovedá hamiltonovskej kružnici, ako je uvedené na obr. 13.14. Algoritmus je opísaný v príklade 10.13.

OBRÁZOK 13.14.

AKO PRESKÁKAŤ
KOŇOM
ŠACHOVNICU, ABY
KŇ NAVŠTÍVIL
KAŽDÉ POLE IBA
RAZ

35	40	47	44	61	08	15	12
46	43	36	41	14	11	62	09
39	34	45	48	07	60	13	16
50	55	42	37	22	17	10	63
33	38	49	54	59	06	23	18
56	51	28	31	26	21		03
29	32	53	58	05	02	19	24
52	57	30	27	20	25	04	01

Postup prehľadávania do hĺbky koňom na šachovnici, riešenie úlohy preskákať koňom zo zadaného poľa šachovnicu tak, aby kň navštívil každé pole iba raz (knight tour).

13.5 PREHĽADÁVANIE DO ŠÍRKY (BREADTH-FIRST SEARCH, BFS)

ROVNAKÁ ČASOVÁ
ZLOŽITOSŤ AKO DO
HĽBKY

Prehľadávanie do šírky, podobne ako prehľadávanie do hĺbky, je obecnou použiteľnou technikou na prehľadávanie grafu. Rovnako ako prehľadávanie do hĺbky, aj prehľadávanie do šírky navštívi všetky vrcholy a hrany grafu a určí, či graf je súvislý. Prehľadávanie do šírky má rovnakú zložitosť ako prehľadávanie do hĺbky. Rovnako môže byť použité v upravenej verzii na nájdenie cesty s minimálnym počtom hrán medzi dvoma vrcholmi alebo na nájdenie kružníc.

PRECHÁDZAME PO
VRSTVÁCH

Pri prehľadávaní stromu do šírky prehľadávame vrcholy po „vrstvách“ zložených z vrcholov s rovnakou vzdialenosťou od koreňa. Najprv koreň, potom jeho nasledovníkov, potom ich nasledovníkov atď. Na rozdiel od prechádzania do hĺbky, keď bola používaná dátová štruktúra zásobník, pri prehľadávaní do šírky používame dátovú štruktúru rad: ktorý záznam je skôr umiestnený do radu, ten je z neho prv vyťahovaný von.

Prehľadávanie do šírky si v analógii s prehľadávaním do hĺbky môžeme predstaviť tiež ako prehľadávanie bludiska, keď je prieskumník bojzlivý alebo dúfa, že cieľ je blízko, na každom rázcestí teda pôjde vždy na najbližšiu zákrutu alebo

rázcestie, vráti sa a vyskúša takto všetky cesty z momentálneho rázcestia. Pokiaľ nenájde cieľ, opakuje cestu s tým, že v každej navštívenej ceste ide o kúsok ďalej a vyskúša začiatky ďalších rázcestí a vráti sa. Takto postupne navštívi pri preskúmaní všetky body so vzdialenosťou od východzieho bodu predĺženou o 1 a toto robí rekurzívne, pozri obr. 13.15.

ALGORITMUS**13.9.**

PREHLADÁVANIE
DO ŠÍRKY S RADOM

```

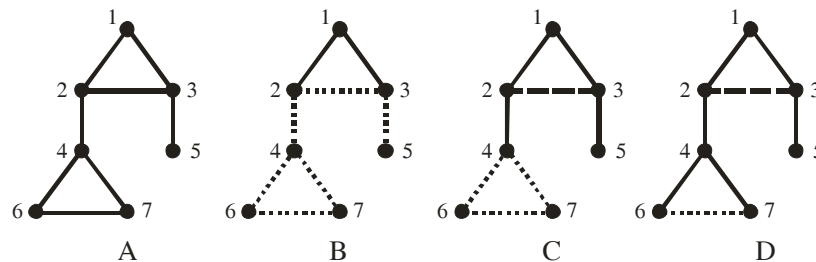
procedure BFS(G: súvislý graf s  $V=\{v_1, \dots, v_n\}$ ,  $v_1$ :
    štartovný vrchol, x: hľadaný vrchol)
    zoznam L :=  $\emptyset$ ;
    strom T :=  $\emptyset$ ;
    prehľadaj( $v_1$ )
while (L $\neq\emptyset$ )
    odstráň hranu (v,w) zo začiatku L;
    keď w ešte nebol navštívený
    begin
        pridaj (v,w) do T;
        prehľadaj(w);
    end

procedure prehľadaj (v: vrchol grafu G)
begin
    označ v ako navštívený vrchol;
    if v=x then print(„Nájdené“);
    pre každú hranu (v,w) $\notin$ T
        pridaj hranu (v,w) na koniec L;
end

```

OBRÁZOK 13.15.

POSTUP
PREHLADÁVANIA
DO ŠÍRKY



Postup prehľadávania do šírky: (A) Prehľadávaný graf, štartovný vrchol je 1. (B) Prehľadávanie prvej úrovne; postupnosť prehľadávania vrcholov súhlasí s očíslovaním vrcholov, bodkované sú označené nenavštívené hrany. (C) Pokračovanie algoritmu, prehľadávanie druhej úrovne, algoritmus naráža na už preskúmaný vrchol 3, hrana označená čiarkovane už nie je pridávaná do T. (D) Pokračovanie do 3 úrovne. V štvrtej úrovni by bola preskúmaná iba hrana (6, 7), keďže sa spája s už navštíveným vrcholom, nepridáva sa do kostry T, ktorá je vyznačená tučne a je rozdielna od kostry vytvorenej na obr. 13.8.

NAMIESTO
ZÁSOBNÍKA RAD

Tak prehľadávanie do šírky, ako aj prehľadávanie do hĺbky v algoritme DFS2 uchovávajú zoznam hrán, ktoré ešte neboli preskúmané; jediný rozdiel medzi DFS2 a BFS je, že aj keď obidva algoritmy ukladajú prvky na koniec zoznamu L, BFS ich odstraňuje zo začiatku, čo odpovedá udržiavaniu zoznamu ako dátovej

štruktúry typu rad – queue, zatiaľ čo DFS ich odstraňuje od konca, zodpovedá udržiavaniu zoznamu ako dátovej štruktúry typu zásobníka – stack.

Rovnako ako pri prehľadávaní do hĺbky aj pri prehľadávaní do šírky sa vytvára kostra prehľadávaného grafu, ibaže tieto kostry môžu byť rozdielne.

PREHLADÁVANIE
DO HĽBKY MÁ
MENŠIU PAMÄŤOVÚ
NÁROČNOSŤ

Všeobecne sa dá povedať, že pokiaľ dúfame, že hľadaný vrchol nie je ďaleko od štartovného vrcholu, môžeme dať prednosť prehľadávaniu do šírky. Avšak pri prehľadávaní do šírky pri priemerných grafoch potrebujeme oveľa dlhšiu frontu, ako je dĺžka zásobníka pri prehľadávaní do hĺbky. Pri riešení veľkých problémov teda dávame prednosť prehľadávaniu do hĺbky kvôli pamäťovej náročnosti. Nedá sa ale povedať, že by niektoré z týchto dvoch prehľadávaní bolo všeobecne efektívnejšie ako to druhé.

PRÍKLAD 13.6.

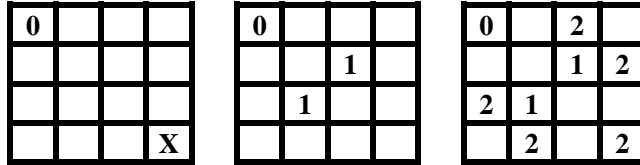
Priechod stavovým priestorom – prehľadávanie do šírky koňom na šachovnici.

Máme zadané východzie a cieľové pole na šachovnici a máme nájsť dĺžku najkratšej cesty koňom medzi nimi.

Riešenie: Koncovým stavom je každý list, ktorý zodpovedá umiestneniu koňa na cieľovom poli. Nezaujímá nás každý koncový stav, ale list s najmenšou hĺbkou. Malo by ísť o jednoduché riešenie (asi 6 ťahov), preto zvolíme prehľadávanie do šírky. Môžeme si to predstaviť ako vlnu šíriacu sa zo štartovného vrcholu a vrcholy sú prehľadávané v poradí zasiahnutia touto vlnou. Postup je výhodný, keď predpokladáme niektoré z riešení v malej hĺbke.

Výpočet začneme robiť vo východzom stave, určíme všetky možné pokračovania, teda prípustné ťahy a urobíme ich, zapamätáme si ich a otestujeme, či nie sú riešením. Keď nie, určíme všetky možné pokračovania z druhej vlny atď. V tomto prípade je výhodou, že pokiaľ sa nezaujímame o cestu samotnú, ale iba o jej dĺžku, namiesto nutnosti zapamätania si hrán kostry s vrcholmi totožnými s momentálnou pozíciou koňa môžeme použiť namiesto celého stromu riešení dohromady jednu šachovnicu, do ktorej zapisujeme na jednotlivé políčka vzdialenosti od počiatočného vrcholu. Pokiaľ je už políčko zaplnené, potom doňho nič nezapisujeme, pretože momentálne dosiahnutá vzdialenosť na danej ceste by bola väčšia alebo rovná vzdialenosti najlepšej nájdenej cesty. Keď chceme ušetriť ďalšie premenné, nemusíme si ani pamätať zoznam L, stačí nám, keď namiesto toho v cykle prejdeme celú šachovnicu a hľadáme v každom cykle políčko označené číslom cyklu, z ktorého konštruujeme ďalšie možné kroky koňa. Na obr. 13.16 tak máme dva cykly pre zistenie dĺžky najkratšej cesty z ľavého horného rohu šachovnice 4×4 do pravého dolného rohu tejto šachovnice. Začneme s označením začiatočného políčka vzdialenosťou 0. Potom postupujeme v prvom cykle tak, že všetky políčka, z ktorých sa dá dostať z políčka označeného 0 označíme číslom jedna. V druhom cykle nájdeme postupne všetky políčka označené jedna, a políčka, na ktoré sa dá z týchto políčok dostať, označíme číslom 2 (s výnimkou už označeného políčka 0). V tomto prípade je už políčko v pravom dolnom rohu zaplnené číslom, takže vieme, že sa naň dá dostať dvoma krokmi. Napríklad do pravého horného rohu by sme sa dostali až piatimi ťahmi.

OBRÁZOK 13.16.
DĹŽKY
NAJKRATŠEJ
CESTY KOŇA NA
ŠACHOVNICI



ZHRNUTIE

SIEŤ PROJEKTU,
ZDROJ, ÚSTIE, TOK
A KRITICKÁ CESTA

Sieť projektu je súvislý hranovo ohodnotený orientovaný graf bez slučiek a okruhových, ktorý má 1 **zdroj** (vrchol, do ktorého žiadna hrana nevstupuje) a 1 **ústie** (vrchol, z ktorého žiadna hrana nevychádza). Hranové ohodnotenie nezápornými číslami predstavuje čas. **Kritická cesta** má najväčší súčet ohodnotení hrán idúcich zo zdroja do ústia, pri plánovaní určuje minimálnu celkovú dĺžku trvania plánovanej činnosti.

Metóda kritickej cesty využíva dvoch ohodnotení vrcholov, minimálneho (za aký najkratší čas od začiatku procesu sa dá do daného stavu dostať) a maximálneho (keď najneskoršie musia začať všetky činnosti vychádzajúce z daného vrcholu, aby sa celkový proces nepredlžil). Vrcholy, pri ktorých sa maximálna hodnota rovná minimálnej, sú na kritickej ceste.

KAPACITNÁ SIEŤ,
MAXIMÁLNY TOK
A MINIMÁLNY REZ

Kapacitná sieť je súvislý ohodnotený orientovaný graf bez slučiek, ale s dvojicami opačne orientovaných hrán, ktorý má 1 **zdroj** a 1 **ústie** (do ktorých môžu vstupovať aj z nich vystupovať hrany). **Tok** je ohodnotenie hrán reálnym číslom menším alebo rovným pozitívnej **kapacite hrán**. **Veľkosť toku** je súčet tokov v hranách vychádzajúcich zo zdroja. S výnimkou zdroja a ústia platí, že čo do vrcholu vchádza, to z neho vychádza. Tok sa nazýva **maximálny tok**, ak sa nedá nájsť žiadne iné priradenie tokov hranám, ktoré by dávalo väčšiu veľkosť toku. Za **rez siete** budeme považovať takú množinu hrán, ktorú keby sme odstránili z grafu (napr. prerezaním káblov), tak kompletne zastavíme tok zo zdroja do ústia, ale pridaním ktorejkoľvek z týchto hrán bude tok možný. **Kapacita rezu** bude pre nás súčet kapacít jeho hrán. Hodnota ľubovoľného maximálneho toku v sieti sa rovná kapacite jeho minimálneho rezu. Na nájdenie maximálneho toku môžeme použiť **Ford-Fulkersonov** algoritmus.

MINIMÁLNA
KOSTRA

Kostra (spanning tree) obyčajného grafu G je podgraf grafu G , ktorý je stromom obsahujúcim všetky vrcholy z G . **Minimálna kostra** grafu G je kostra T s minimálnym súčtom váh jej hrán. Na jej určenie využívame greedy algoritmy, **Primov** alebo **Kruskalov**.

PREHLÁDÁVANIE
DO HLĚBKY A DO
ŠÍRKY

Na prehľadávanie grafu, napr. bludiska, môžeme využiť *prehľadávanie do hĺbky* (Depth-First Search, DFS, backtracking) využívajúce *zásobník* – stack, alebo rekurziu, alebo *prehľadávanie do šírky* (Breadth-First Search, BFS, prehľadávajúce graf po vrstvách), využívajúce *rad* – queue. Pomocou týchto prístupov sa dajú riešiť najrôznejšie problémy, od logických úloh prelievania krčahov, po farbenie grafov, problémov rozložení dām, alebo preskákania šachovnice koňom, či najlepšieho využitia kapacity CD. Prehľadávanie do hĺbky je menej náročné na pamäť, časová zložitosť obidvoch algoritmov je rovnaká.

KLÚČOVÉ POJMY

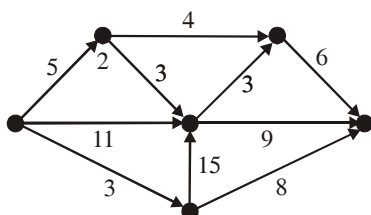
<i>siete a metóda kritickej cesty</i>	<i>kapacita spojenia (priepustnosť)</i>
<i>maximálny tok v sieti</i>	<i>veľkosť toku</i>
<i>minimálny rez</i>	<i>maximálny tok</i>
<i>nájdenie najmenej kostry</i>	<i>rez siete</i>
<i>prehľadávanie do hĺbky (Depth-First Search, DFS), backtracking</i>	<i>kapacita rezu</i>
<i>prehľadávanie do šírky (Breadth-First Search, BFS)</i>	<i>minimálny rez</i>
<i>zdroj</i>	<i>Ford-Fulkersonov algoritmus</i>
<i>ústie</i>	<i>kostra (spanning tree)</i>
<i>sieť</i>	<i>minimálna kostra</i>
<i>sieť projektu</i>	<i>Primov algoritmus</i>
<i>CPM Critical path method</i>	<i>Kruskalov algoritmus</i>
<i>sieťová analýza</i>	<i>rekurzia</i>
<i>časové ohodnotenie earliest a latest</i>	<i>cesta minimálnej dĺžky</i>
<i>kapacitná sieť</i>	<i>zásobník - stack</i>
	<i>rad - queue</i>
	<i>knight tour</i>

CVIČENIA

- 13.1.** Pre sieť projektu na obr. 13.17 a 13.18 určite minimálny celkový čas, ktorý zaberie dokončenie projektu, minimálne časové ohodnotenie $E(v)$ u jednotlivých vrcholov a kritickej cestu. Každá z hrán je ohodnotená časom potrebným na splnenie úlohy jej priradené.

OBRÁZOK 13.17.
ČASOVÝ PLÁN
PROJEKTU

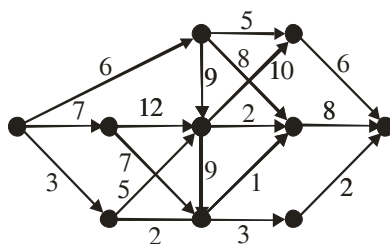
(a)



Časový plán projektu, určite kritickú cestu

OBRÁZOK 13.18.
ČASOVÝ PLÁN
PROJEKTU

(b)

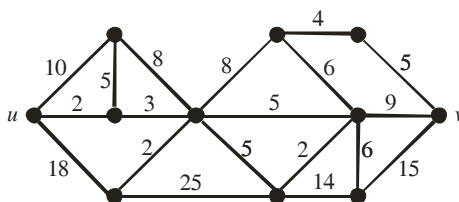


Časový plán projektu, určite kritickú cestu

- 13.2.** Pre nasledujúce kapacitné siete na obr. 13.19 a 13.20 s ohodnotením hrán ich kapacitami (namiesto dvojice opačne orientovaných hrán je vždy vykreslená iba neorientovaná hrana) nájdite maximálny tok z u do v a dokážte, že je tok maximálny nájdením minimálneho rezu, ktorého kapacita sa rovná hodnote vami nájdeného toku.

OBRÁZOK 13.19.
MAXIMÁLNY TOK A
MINIMÁLNY REZ?

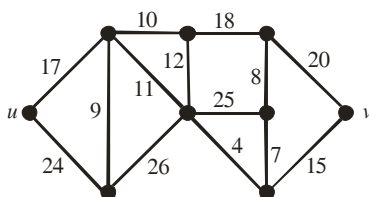
(a)



Nájdite maximálny tok a minimálny rez siete.

OBRÁZOK 13.20.
MAXIMÁLNY TOK A
MINIMÁLNY REZ?

(b)

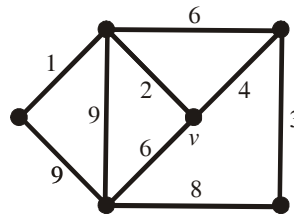


Nájdite maximálny tok a minimálny rez siete.

- 13.3.** Pre grafy z obr. 13.21 a 13.22 použite Primov algoritmus, začínajúci na vyznačenom vrchole v , na nájdenie minimálnej kostry a určite jej váhu.

OBRÁZOK 13.21.
MINIMÁLNA
KOSTRA?

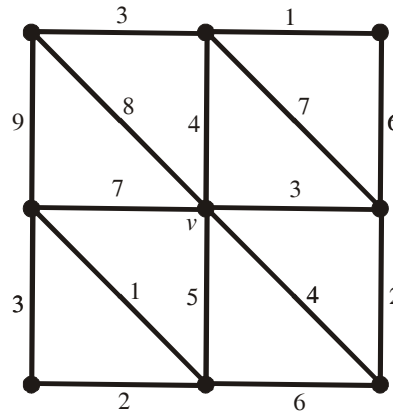
(a)



Nájdite minimálnu kostru.

OBRÁZOK 13.22.
MINIMÁLNA
KOSTRA?

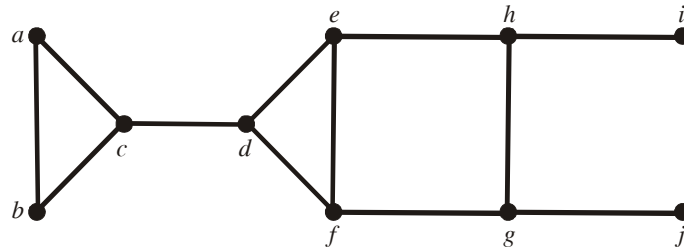
(b)



Nájdite minimálnu kostru.

- 13.4.** Použite Kruskalov algoritmus na nájdenie minimálnej kostry pri grafoch z príkladu 13.3 a určite jej váhu.
- 13.5.** Nech T je minimálna kostra ohodnoteného grafu G . Určte, či nasledujúce tvrdenia sú pravdivé:
- Váha každej hrany patriacej do T je menšia alebo rovná váhe ľubovoľnej hrany z G nepatriacej do T .
 - Keď žiadne dve hrany nemajú rovnakú váhu, potom Kruskalov algoritmus vyberie kostru T jednoznačne.
- 13.6.** Použite prehľadávanie do hĺbky na nájdenie kostry daného jednoduchého grafu z obr. 13.23. Zvoľte vrchol a ako koreň tejto kostry a predpokladajte, že vrcholy sú usporiadané abecedne (namiesto typického postupu prehľadávania vykresleného grafu „zľava doprava“).

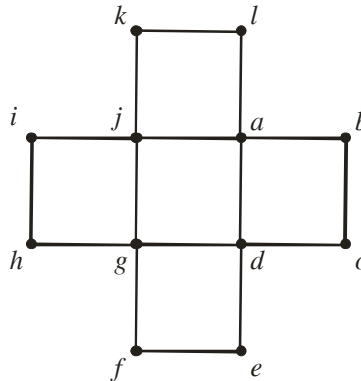
OBRÁZOK 13.23.
KOSTRA
PREHLADÁVANÍM
DO HLĚBKY?



Nájdite kostru prehľadávaním do hĺbky.

- 13.7.** Použite prehľadávanie do hĺbky na nájdenie kostry daného jednoduchého grafu z obr. 13.24. Zvoľte vrchol a ako koreň tejto kostry a predpokladajte, že vrcholy sú usporiadané abecedne (namiesto typického postupu prehľadávania vykresleného grafu „zľava doprava“).

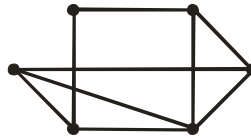
OBRÁZOK 13.24.
KOSTRA
PREHLADÁVANÍM
DO HLĚBKY?



Nájdite kostru prehľadávaním do hĺbky.

- 13.8.** Použite prehľadávanie do šírky na nájdenie kostry daného jednoduchého grafu zadaného v cvičení 13.6. Zvoľte vrchol a ako koreň tejto kostry a predpokladajte, že vrcholy sú usporiadané abecedne (namiesto typického postupu prehľadávania vykresleného grafu „zľava doprava“).
- 13.9.** Použite prehľadávanie do šírky na nájdenie kostry daného jednoduchého grafu zadaného v cvičení 13.7. Zvoľte vrchol a ako koreň tejto kostry a predpokladajte, že vrcholy sú usporiadané abecedne (namiesto typického postupu prehľadávania vykresleného grafu „zľava doprava“).
- 13.10.** Čo musí platiť pre danú hranu jednoduchého súvislého grafu, aby bola v každej kostre tohto grafu?
- 13.11.** Kedy má jednoduchý súvislý graf práve jednu kostru?
- 13.12.** Použite prehľadávanie do hĺbky na nájdenie priradenia farieb vrcholom grafu z obr. 13.25 s využitím iba troch farieb.

OBRÁZOK 13.25.
FARBENIE
PREHLADÁVANÍM
DO HĽBKY?



Nájdite farbenie 3 farbami prehľadávaním do hĺbky.

13.13. Použite prehľadávanie do hĺbky na nájdenie riešenia problému n dám na šachovnici pre zadané hodnoty n .

- (a) $n = 3$
- (b) $n = 5$
- (c) $n = 6$

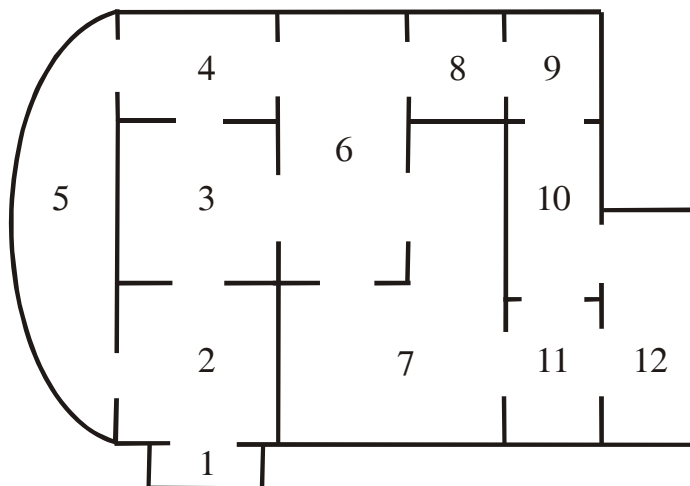
13.14. Použite prehľadávanie do hĺbky na nájdenie podmnožiny, pokiaľ existuje, pre množinu $\{27, 24, 19, 14, 11, 8\}$ so súčtom rovným

- (a) 41
- (b) 60

13.15. Vysvetlite, ako je možné prehľadávanie do hĺbky využiť na nájdenie cesty v múzeu, pri zadanej štartovnej pozícii a cieľovej pozícii. Múzeum má plán poschodia nakreslený na obr. 13.26.

- (a) Nakreslite graf reprezentujúci plán poschodia, kde každá miestnosť bude ako vrchol a každé dvere ako hrana.
- (b) Urobte prehľadávanie do šírky a do hĺbky, so štartom v miestnosti 1 a cieľom v miestnosti 8.
- (c) Porovnajzte, ktorý zo spôsobov prehľadávania by ste odporučili.

OBRÁZOK 13.26.
PLÁN MÚZEA
PREROBIŤ NA
GRAF



Plán múzea reprezentovať grafom.

PRÍLOHA A
RIEŠENÉ PRÍKLADY

RIEŠENÉ CVIČENIA Z KAPITOLY 1

1.1. Aké pravidlo usudzovania bolo použité pri dôkaze záverov?

- (a) Mária je študentkou informatiky. Preto je Mária študentkou informatiky alebo študentkou telekomunikácií.

p = Mária je študentkou informatiky
 q = Mária je študentkou telekomunikácií

p	predpoklad ₁
<hr/>	
$p \vee q$	dôsledok adície v tab. 1.1

- (b) Jaroslav študuje informatiku a elektrotechnológiu. Preto, Jaroslav študuje informatiku.

p = Jaroslav študuje informatiku
 q = Jaroslav študuje elektrotechnológiu

$p \wedge q$	predpoklad ₁
<hr/>	
p	dôsledok simplifikácie v tab. 1.1

- (c) Ak prší, potom plaváreň je zatvorená. Preto, ak plaváreň je otvorená, potom neprší.

p = prší
 q = plaváreň je zatvorená

$p \Rightarrow q$	predpoklad ₁
<hr/>	
$\neg q \Rightarrow \neg p$	dôsledok inverzie implikácie v tab. 1.1

- (d) Ak dnes sneží, kino je dnes uzavreté. Kino dnes nie je uzavreté. Preto, dnes nesneží.

p = dnes sneží
 q = kino je dnes uzavreté

$p \Rightarrow q$	predpoklad ₁
$\neg q$	predpoklad ₂
<hr/>	
$\neg p$	dôsledok modus tollens v tab. 1.1

- (e) Ak dnes pôjdem plávať, potom ráno skoro vstanem. Ak ráno skoro vstanem, potom pôjdem do obchodu kúpiť čerstvé pečivo. Preto, ak dnes pôjdem plávať, potom pôjdem do obchodu kúpiť čerstvé pečivo.

p = dnes pôjdem plávať
 q = dnes ráno skoro vstanem
 r = dnes pôjdem do obchodu kúpiť čerstvé pečivo

$p \Rightarrow q$	predpoklad ₁
$q \Rightarrow r$	predpoklad ₂
$p \Rightarrow r$	dôsledok hypotetického sylogizmu v tab. 1.1

1.2. Aké pravidlo usudzovania bolo použité pri dôkaze záverov?

- (a) Dnes bude teplo alebo bude smog v ovzduší. Dnes nebude teplo. Preto, dnes bude smog v ovzduší.

p = dnes bude teplo
 q = dnes bude smog v ovzduší

$p \vee q$	predpoklad ₁
$\neg p$	predpoklad ₂
q	dôsledok disjunktívneho sylogizmu v tab. 1.1

- (b) Eva vynikajúco pláva. Ak Eva je vynikajúci plavec, potom môže pracovať ako plavčík. Preto, Eva môže pracovať ako plavčík.

p = Eva vynikajúco pláva
 q = Eva môže pracovať ako plavčík

p	predpoklad ₁
$p \Rightarrow q$	predpoklad ₂
q	dôsledok modus ponens v tab. 1.1

- (c) Stano bude pracovať v počítačovej firme ABC. Ak Stano dokončí štúdium na FIIT, potom nebude pracovať v počítačovej firme ABC. Preto, Stano nedokončí štúdium na FIIT.

p = Stano bude pracovať v počítačovej firme ABC
 q = Stano dokončí štúdium na FIIT

p	predpoklad ₁
$q \Rightarrow \neg p$	predpoklad ₂
$p \Rightarrow \neg q$	dôsledok ₁ predpokladu ₂ prepísaný pomocou inverzie implikácie
$\neg q$	dôsledok ₂ modus ponens na predpoklad ₁ a dôsledok ₁

- (d) Ak budem intenzívne pracovať na projekte, potom zvládnem teóriu logických obvodov. Ak zvládnem teóriu logických obvodov, potom úspešne dokončím bakalárske štúdium. Preto, ak budem intenzívne pracovať na projekte, potom úspešne dokončím bakalárske štúdium.

p = budem intenzívne pracovať na projekte
 q = zvládnem teóriu logických obvodov
 r = úspešne dokončím bakalárske štúdium

$p \Rightarrow q$	predpoklad ₁
$q \Rightarrow r$	predpoklad ₂
$p \Rightarrow r$	dôsledok hypotetického sylogizmu

1.3. Aké závery vyplývajú z množiny výrokov?

- (a) „Ak jem korenenú stravu, potom mám hrozné sny“, „ak spím a pritom hrmí, potom mám hrozné sny“, „nemám hrozné sny“.

p = jem korenenú stravu
 q = mám hrozné sny
 r = spím
 s = hrmí

$p \Rightarrow q$	predpoklad ₁
$(r \wedge s) \Rightarrow q$	predpoklad ₂
$\neg q$	predpoklad ₃
$\neg(r \wedge s) \equiv (\neg r \vee \neg s)$	modus tollens na predpoklad ₂ a predpoklad ₃
$\neg p$	modus tollens na predpoklad ₁ a predpoklad ₃

záver₁: nespím alebo nehmí
záver₂: nejem korenenú stravu

- (b) „Ja som chytrý alebo mám šťastie“, „nemám šťastie“, „ak mám šťastie, potom zvíťazím v lotérii“.

p = som chytrý
 q = mám šťastie
 r = zvíťazím v lotérii

$p \vee q$	predpoklad ₁
$\neg q$	predpoklad ₂
$q \Rightarrow r$	predpoklad ₃
p	dôsledok disjunkt. sylogizmu aplik. na predpoklad ₁ a predpoklad ₂

záver: som chytrý

- (c) „Každý študent informatiky vlastní notebook“, „Rudo nevlastní notebook“, „Anna vlastní notebook“.

$SI(x) = x$ študuje informatiku
 $VN(x) = x$ vlastní notebook
Univerzum = { študenti }

$(\forall x(SI(x) \Rightarrow VN(x)))$	predpoklad ₁
$\neg VN(Rudo)$	predpoklad ₂
$VN(Anna)$	predpoklad ₃
$(SI(Rudo) \Rightarrow VN(Rudo))$	konkretizácia predpokladu ₁
$(SI(Anna) \Rightarrow VN(Anna))$	konkretizácia predpokladu ₁
$\neg SI(Rudo)$	modus tollens na konkretizáciu a predpoklad ₂

záver: Rudo neštuduje informatiku

- (d) „Ak mám hlad, potom si kúpim bagetu“, „ak si kúpim bagetu, potom si kúpim aj kofolu“, „ak nepôjdem do bufetu, nekúpim si kofolu“.

p = mám hlad

q = kúpim si bagetu

r = kúpim si kofolu

s = pôjdem do bufetu

$p \Rightarrow q$	predpoklad ₁
$q \Rightarrow r$	predpoklad ₂
$\neg s \Rightarrow \neg r$	predpoklad ₃
$p \Rightarrow r$	dôsledok ₁ : hypotetický sylogizmus na predpoklad ₁ a predpoklad ₂
$r \Rightarrow s$	dôsledok ₂ : inverzia implikácie na predpoklad ₃
$p \Rightarrow s$	záver: hypotetický sylogizmus na dôsledok ₁ a dôsledok ₂

záver: Ak mám hlad, potom pôjdem do bufetu.

- (e) „Všetky hlodavce hryzú potravu“, „myš je hlodavec“, „pes nehryzie potravu“, „netopier nie je hlodavec“.

$H(x) = x$ je hlodavec, $HP(x) = x$ hryzie potravu, $M(x) = x$ je myš

$\forall x(H(x) \Rightarrow HP(x))$	predpoklad ₁
$H(myš)$	predpoklad ₂
$\neg HP(pes)$	predpoklad ₃
$\neg H(netopier)$	predpoklad ₄
$H(myš) \Rightarrow HP(myš)$	dôsledok ₁ : konkretizácia predpokladu ₁
$H(pes) \Rightarrow HP(pes)$	dôsledok ₂ : konkretizácia predpokladu ₁
$HP(myš)$	dôsledok ₃ : modus ponens na predpoklad ₂ a dôsledok ₁
$\neg H(pes)$	dôsledok ₄ : modus tollens na predpoklad ₃ a dôsledok ₂

záver₁: myš hryzie potravu

záver₂: pes nie je hlodavec

1.4. Vysvetlite, ktorá schéma usudzovania bola použitá v ktorom kroku.

- (a) „Eva je študentka nášho krúžku a vlastní červené auto“, „každý, kto vlastní červené auto dostal aspoň jednu pokutu za prekročenie rýchlosti“, „preto, niekto z nášho krúžku dostal pokutu za prekročenie rýchlosti“.

$SNK(x) = x$ je študentom nášho krúžku

$VCA(x) = x$ vlastní červené auto

$DPPR(x) = x$ dostal pokutu za prekročenie rýchlosti

$SNK(Eva) \wedge VCA(Eva)$	
$\forall x(VCA(x) \Rightarrow DPPR(x))$	
$\exists x(SNK(x) \wedge DPPR(x))$	

1.	$SNK(Eva) \wedge VCA(Eva)$	predpoklad ₁
2.	$\forall x(VCA(x) \Rightarrow DPPR(x))$	predpoklad ₂
3.	$SNK(Eva)$	konkretizácia predpokladu ₁
4.	$VCA(Eva)$	konkretizácia predpokladu ₁
5.	$VCA(Eva) \Rightarrow DPPR(Eva)$	konkretizácia predpokladu ₂
6.	$DPPR(Eva)$	modus ponens na 4 a 5
7.	$SNK(Eva) \wedge DPPR(Eva)$	konjunkcia 3 a 6
8.	$\exists x(SNK(x) \wedge DPPR(x))$	zovšeobecnenie 7

- (b) „Všetci moji priatelia, Mária, Adolf, Rudolf, Viera a Karol, si zapísali do indexu prednášku z diskretnej matematiky“, „každý študent, ktorý si zapísal do indexu prednášku z diskretnej matematiky, môže si nasledujúci akademický rok zapísať aj prednášku z algoritmov“, „preto, všetci moji priatelia Mária, Adolf, Rudolf, Viera a Karol, môžu si nasledujúci akademický rok zapísať do indexu prednášku z algoritmov“.

$ZIPDM(x) = x$ si zapísal do indexu prednášku z diskretnej matematiky

$NARZPA(x) = x$ si nasledujúci akademický rok môže zapísať prednášku z algoritmov

U = množina všetkých študentov

U' = podmnožina U , obsahuje Máriu, Adolfa, Rudolfa, Vieru a Karola

$\forall (x \in U')(ZIPDM(x))$	predpoklad
$\forall (x \in U)(ZIPDM(x) \Rightarrow NARZPA(x))$	predpoklad
$\forall (x \in U')(NARZPA(x))$	záver

1.	$\forall (x \in U') (ZIPDM(x))$	predpoklad ₁
2.	$\forall (x \in U) (ZIPDM(x) \Rightarrow NARZPA(x))$	predpoklad ₂
3.	$ZIPDM(t)$	pre $\forall t \in U'$, konkretizácia 1
4.	$ZIPDM(t) \Rightarrow NARZPA(t)$	pre $\forall t \in U'$, konkretizácia 2
5.	$NARZPA(t)$	pre $\forall t \in U'$, modus ponens na 3 a 4
6.	$\forall (x \in U') NARZPA(x)$	zovšeobecnenie 5 pre U'

- (c) „Všetky filmy s Charlie Chaplinom sú vynikajúce“, „Charlie Chaplin hral v nemých filmoch“, „preto, niektoré vynikajúce filmy sú nemé“.

$FCC(x) = x$ je film kde hral Charlie Chaplin

$VF(x) = x$ je vynikajúci film

$NF(x) = x$ je nemý film

$\forall x (FCC(x) \Rightarrow VF(x))$
$\exists x (FCC(x) \wedge NF(x))$
$\exists x (VF(x) \wedge NF(x))$

1.	$\forall x (FCC(x) \Rightarrow VF(x))$	predpoklad
2.	$\exists x (FCC(x) \wedge NF(x))$	predpoklad
3.	$FCC(c) \wedge NF(c)$	konkretizácia 2, c je film s CC a je nemý
4.	$FCC(c)$	simplifikácia 3
5.	$NF(c)$	simplifikácia 3
6.	$FCC(c) \Rightarrow VF(c)$	konkretizácia 1
7.	$VF(c)$	modus ponens na 4 a 6
8.	$VF(c) \wedge NF(c)$	konjunkcia 5 a 7
9.	$\exists x (VF(x) \wedge NF(x))$	zovšeobecnenie 8

1.5. Vysvetlite prečo uvedené závery sú korektné alebo nekorektné.

- (a) „Všetci študenti v tomto krúžku ovládajú logiku“, „Jano je študentom tohto krúžku“, „preto, Jano ovláda logiku“.

$tk(x) = x$ je študent v tomto krúžku

$ol(x) = x$ ovláda logiku

$\forall x (tk(x) \Rightarrow ol(x))$
$tk(Jano)$
$ol(Jano)$

1.	$\forall x(tk(x) \Rightarrow ol(x))$	predpoklad
2.	$tk(Jano)$	predpoklad
<hr/>		
3.	$tk(Jano) \Rightarrow ol(Jano)$	konkretizácia 1
4.	$ol(Jano)$	modus ponens na 2 a 3, záver

Záver je korektný

- (b) „Každý študent informatiky má zapísanú v indexe prednášku z diskkrétnej matematiky“, „Viera má zapísanú prednášku z diskkrétnej matematiky“, „preto, Viera je študentom informatiky“.

$si(x) = x$ je študent informatiky

$zpdm(x) = x$ má zapísanú v indexe prednášku z diskkrétnej matematiky

$\forall x(si(x) \Rightarrow zpdm(x))$	
$zpdm(Viera)$	
<hr/>	
$si(Viera)$	

1.	$\forall x(si(x) \Rightarrow zpdm(x))$	predpoklad
2.	$zpdm(Viera)$	predpoklad
<hr/>		
3.	$si(Viera) \Rightarrow zpdm(Viera)$	konkretizácia 1
4.	$si(Viera)$	použitie chybného pravidla „potvrdenie dôsledku“

Záver je nekorektný

- (c) „Každý kôň má rád ovocie“, „môj pes nie je kôň“, „preto, môj pes nemá rád ovocie“.

$k(x) = x$ je kôň

$ro(x) = x$ má rád ovocie

$\forall x(k(x) \Rightarrow ro(x))$	
$\neg k(moj_pes)$	
<hr/>	
$\neg ro(moj_pes)$	

1.	$\forall x(k(x) \Rightarrow ro(x))$	predpoklad
2.	$\neg k(moj_pes)$	predpoklad
<hr/>		
3.	$k(moj_pes) \Rightarrow ro(moj_pes)$	konkretizácia 1
4.	$\neg ro(moj_pes)$	použitie chybného pravidla „popretie predpokladu“

Záver je nekorektný

- (d) „Každý, kto má rád ovsené vločky je zdravý“, „Lenka nie je zdravá“, „preto, Lenka nemá rada ovsené vločky“.

$rov(x) = x$ má rád ovsené vločky

$z(x) = x$ je zdravý

$$\begin{array}{|l} \forall x(\text{rov}(x) \Rightarrow z(x)) \\ \neg z(\text{Lenka}) \\ \hline \neg \text{rov}(\text{Lenka}) \end{array}$$

1.	$\forall x(\text{rov}(x) \Rightarrow z(x))$	predpoklad
2.	$\neg z(\text{Lenka})$	predpoklad
3.	$\text{rov}(\text{Lenka}) \Rightarrow z(\text{Lenka})$	konkretizácia 1
4.	$\neg \text{rov}(\text{Lenka})$	modus tollens na 2 a 3

Záver je korektný

1.6. Určite, ktorá veta je pravdivá. Ak je uvedený záver korektný, určite ktorá schéma usudzovania bola použitá pri jeho dôkaze.

(a) Ak x je reálne číslo také, že $x > 1$, potom $x^2 > 1$. Predpokladajte, že $x^2 > 1$, potom $x > 1$.

$$\begin{array}{|l} \forall (y \in R)(y > 1 \Rightarrow y^2 > 1) \\ x^2 > 1 \\ \hline x > 1 \end{array}$$

1.	$\forall (y \in R)(y > 1 \Rightarrow y^2 > 1)$	predpoklad
2.	$x^2 > 1$	predpoklad
3.	$x > 1 \Rightarrow x^2 > 1$	konkretizácia 1
4.	$x > 1$	použitie chybného pravidla „potvrdenie dôsledku“

Záver je nekorektný

(b) Číslo $\log_2 3$ je iracionálne vtedy, ak sa nedá vyjadriť ako podiel dvoch celých nesúdeliteľných čísel. Pretože číslo $\log_2 3$ nie je vyjadriteľné ako p/q , kde p a q sú celé nesúdeliteľné čísla, potom je číslo $\log_2 3$ iracionálne.

$\text{rac}(x) = x$ je racionálne číslo

$\text{pod}(x) = x$ sa dá vyjadriť ako podiel dvoch celých nesúdeliteľných čísel

$$\begin{array}{|l} \neg \text{pod}(\log_2 3) \Rightarrow \neg \text{rac}(\log_2 3) \\ \neg \text{pod}(\log_2 3) \\ \hline \text{irac}(\log_2 3) \end{array}$$

1.	$(\neg pod(\log_2 3) \Rightarrow \neg rac(\log_2 3))$	predpoklad
	$\wedge(\neg rac(\log_2 3) \Rightarrow \neg pod(\log_2 3))$	
2.	$\neg pod(\log_2 3)$	predpoklad
3.	$\neg pod(\log_2 3) \Rightarrow \neg rac(\log_2 3)$	simplifikácia 1
4.	$\neg rac(\log_2 3)$	modus ponens na 3 a 2
5.	$irac(\log_2 3)$	ekvivalentné s 4

Záver je korektný

(c) Ak x je reálne číslo, ktoré spĺňa podmienku $x > 3$, potom $x^2 > 9$. Nech $x^2 \leq 9$, potom $x \leq 3$.

$$\left| \begin{array}{l} \forall (y \in R)(y > 3 \Rightarrow y^2 > 9) \\ x^2 \leq 9 \\ \hline x \leq 3 \end{array} \right.$$

1.	$\forall (y \in R)(y > 3 \Rightarrow y^2 > 9)$	predpoklad
2.	$x^2 \leq 9$	predpoklad
3.	$x > 3 \Rightarrow x^2 > 9$	konkretizácia 1
4.	$\neg(x^2 > 9)$	ekvivalentné s 2
5.	$\neg(x > 3)$	aplikácia modus tollens na 3 a 4
6.	$x \leq 3$	ekvivalentné s 5

Záver je korektný

(d) Ak x je reálne číslo, ktoré spĺňa podmienku $x > 2$, potom $x^2 > 4$. Nech $x \leq 2$, potom $x^2 \leq 4$.

$$\left| \begin{array}{l} \forall (y \in R)(y > 2 \Rightarrow y^2 > 4) \\ x \leq 2 \\ \hline x^2 \leq 4 \end{array} \right.$$

1.	$\forall (y \in R)(y > 2 \Rightarrow y^2 > 4)$	predpoklad
2.	$x \leq 2$	predpoklad
3.	$x > 2 \Rightarrow x^2 > 4$	konkretizácia 1
4.	$\neg(x > 2)$	ekvivalentný prepis 2
5.	$\neg(x^2 > 4)$	použitie chybného pravidla „popretie predpokladu“
6.	$x^2 \leq 4$	ekvivalentný prepis 5

Záver je nekorektný

1.7. Určite, či uvedené výroky sú korektné, ak nie, prečo?

- (a) Ak x^2 je iracionálne, potom x je iracionálne. Preto, ak x je iracionálne, potom x^2 je iracionálne.

$ir(x) = x$ je iracionálne číslo

$r(x) = x$ je racionálne číslo

$$(ir(x^2) \Rightarrow ir(x)) \Rightarrow (ir(x) \Rightarrow ir(x^2))$$

výrok je nekorektný, pri inverzii implikácie musia byť negované jej zložky. Korektný výrok má tvar

$$(ir(x^2) \Rightarrow ir(x)) \Rightarrow (r(x) \Rightarrow r(x^2))$$

- (b) Ak x^2 je iracionálne, potom x je iracionálne. Číslo $x = \pi^2$ je iracionálne. Preto, číslo $x = \pi$ je iracionálne.

$$\begin{array}{l} \forall x (ir(x^2) \Rightarrow ir(x)) \\ ir(\pi^2) \\ \hline ir(\pi) \end{array}$$

1.	$\forall y (ir(y^2) \Rightarrow ir(y))$	predpoklad
2.	$ir(\pi^2)$	predpoklad
3.	$ir(\pi^2) \Rightarrow ir(\pi)$	konkretizácia 1 pre $y = \pi^2$
4.	$ir(\pi)$	aplikácia modus ponens pre 2 a 3

výrok je korektný

1.8. Prečo tieto výroky sú nekorektné?

- (a) Nech $H(x)$ je predikát s významom „ x je šťastný“. Nech platí $\exists x H(x)$. Preto, Eva je šťastná.

$$\begin{array}{l} \exists x H(x) \\ \hline H(Eva) \end{array}$$

Táto konkretizácia existenčného kvantifikátora nie je korektná, z existencie niekoho, kto je šťastný, nemusí vyplývať, že práve Eva je šťastná (napr. Zuza je šťastná).

- (b) Nech $S(x,y)$ je predikát s významom „ x je menší ako y “. Platí implikácia $(\exists s S(s, Max)) \Rightarrow S(Max, Max)$, kde Max je maximálne číslo z konečnej viacprvkovej množiny obsahujúcej prirodzené čísla.

Použitím schémy zovšeobecnenia pomocou existenčného kvantifikátora (zákon predikátovej logiky $A(c) \Rightarrow \exists x A(x)$) dostaneme, že platí $\exists x S(x,x)$, t. j. nejaké číslo je menšie ako ono samo.

Nekorektná je implikácia predpokladu $\exists s S(s, Max) \Rightarrow S(Max, Max)$, ľavá strana je pravdivá, zatiaľ čo pravá strana je nepravdivá, čiže celá implikácia je nepravdivá.

1.9. Dokážte, keď sa dajú dokázať, tieto výroky:

- (a) Dokážte výrok $P(0)$, kde $P(n)$ je výrok „ak n je kladné celé číslo väčšie ako 1, potom $n^2 > n$ “. Ktorú schému usudzovania sme použili?

Výrok $P(0)$ je pravdivý, pretože sa pokúšame dokázať výrok „ak 0 je kladné celé číslo väčšie ako 1, potom $0^2 > 0$ “. Pretože predpoklad je nepravdivý, implikácia je automaticky pravdivá. Priamy dôkaz.

- (b) Dokážte výrok $P(1)$, kde $P(n)$ je výrok „Ak n je kladné celé číslo, potom $n^2 > n$ “. Ktorú schému usudzovania sme použili?

Výrok $P(1)$ je nepravdivý ($1^2 > 1$). Priamy dôkaz.

- (c) Nech $P(n)$ je výrok „ak a a b sú kladné reálne čísla, potom $(a + b)^n \geq a^n + b^n$ “. Dokážte, že $P(1)$ je pravdivý výrok. Akú schému usudzovania sme použili?

$P(1)$ je pravdivý výrok, $(a + b)^1 \geq a^1 + b^1$, priamy dôkaz

- (d) Použitím priameho dôkazu dokážte, že kvadrát párneho čísla je párne číslo.

Priamy dôkaz: $pc(i) \Rightarrow pc(i^2), (2k)^2 = 2(2k^2)$

- (e) Použitím nepriameho dôkazu dokážte, že ak n je celé číslo a $n^3 + 5$ je nepárne číslo, potom n je párne číslo.

Máme dokázať implikáciu $np(n^3 + 5) \Rightarrow p(n)$, inverziou tejto implikácie dostaneme $np(n) \Rightarrow p(n^3 + 5)$. Nech $n = 2k + 1$, potom $n^3 = (2k + 1)^3 = 2(4k^3 + 6k^2 + 3k) + 1$, potom $n^3 + 5 = 2(4k^3 + 6k^2 + 3k + 3)$.

- (f) Dokážte, že suma dvoch nepárnych čísel je párne číslo.

$np(a) \wedge np(b) \Rightarrow p(a + b)$. Ak $a = 2k + 1$ a $b = 2l + 1$, potom $a + b = 2(k + l + 1)$, kde k, l sú nezáporné celé čísla.

- (g) Dokážte, že súčin dvoch nepárnych čísel je nepárne číslo.

$np(a) \wedge np(b) \Rightarrow np(a \cdot b)$. Ak $a = 2k + 1$ a $b = 2l + 1$, potom $a \cdot b = 2(2kl + k + l) + 1$, kde k, l sú nezáporné celé čísla.

- (h) Dokážte, že ak x je iracionálne nenulové číslo, potom $1/x$ je iracionálne číslo.

$ir(x) \Rightarrow ir(1/x)$, inverziou tejto implikácie dostaneme $r(1/x) \Rightarrow r(x)$. Predpokladajme, že $1/x = \alpha/\beta$, kde α, β sú celé nesúdeliteľné čísla, potom aj $x = \beta/\alpha$, čiže x je rac. číslo.

1.10. Dokážte metódou vymenovania prípadov tieto vlastnosti:

(a) $\max\{x, y\} + \min\{x, y\} = x + y$, kde x, y sú reálne čísla.

$$(1) \quad x \leq y, \quad \underbrace{\max\{x, y\}}_y + \underbrace{\min\{x, y\}}_x = x + y$$

$$(2) \quad y < x, \quad \underbrace{\max\{x, y\}}_x + \underbrace{\min\{x, y\}}_y = x + y$$

(b) $\min\{a, \min\{b, c\}\} = \min\{\min\{a, b\}, c\}$, kde a, b, c sú navzájom rôzne čísla.

$$(1) \quad a < b < c, \quad \min\left\{a, \underbrace{\min\{b, c\}}_b\right\} = \min\left\{\underbrace{\min\{a, b\}}_a, c\right\}$$

$$(2) \quad a < c < b, \quad \min\left\{a, \underbrace{\min\{b, c\}}_c\right\} = \min\left\{\underbrace{\min\{a, b\}}_a, c\right\}$$

$$(3) \quad b < a < c, \quad \min\left\{a, \underbrace{\min\{b, c\}}_b\right\} = \min\left\{\underbrace{\min\{a, b\}}_b, c\right\}$$

(c) Kvadráty celých čísel sú reprezentované dekadickými číslicami, ktoré končia 0, 1, 4, 5, 6, alebo 9.

$$(1) \quad \text{číslo } n = (\dots 0), \text{ potom } n^2 = (\dots 0),$$

$$(2) \quad \text{číslo } n = (\dots 1), \text{ potom } n^2 = (\dots 1),$$

$$(3) \quad \text{číslo } n = (\dots 2), \text{ potom } n^2 = (\dots 4),$$

$$(4) \quad \text{číslo } n = (\dots 3), \text{ potom } n^2 = (\dots 9),$$

$$(5) \quad \text{číslo } n = (\dots 4), \text{ potom } n^2 = (\dots 6),$$

$$(6) \quad \text{číslo } n = (\dots 5), \text{ potom } n^2 = (\dots 5),$$

$$(7) \quad \text{číslo } n = (\dots 6), \text{ potom } n^2 = (\dots 6),$$

$$(8) \quad \text{číslo } n = (\dots 7), \text{ potom } n^2 = (\dots 9),$$

$$(9) \quad \text{číslo } n = (\dots 8), \text{ potom } n^2 = (\dots 4),$$

$$(10) \quad \text{číslo } n = (\dots 9), \text{ potom } n^2 = (\dots 1).$$

(d) Štvrté mocniny celých čísel sú reprezentované dekadickými číslami, ktoré končia 0, 1, 5, alebo 6.

Použijeme predchádzajúce výsledky, potom

- (1) číslo $n^2 = (\dots 0)$, potom $n^4 = (\dots 0)$,
 (2) číslo $n^2 = (\dots 1)$, potom $n^4 = (\dots 1)$,
 (3) číslo $n^2 = (\dots 4)$, potom $n^4 = (\dots 6)$,
 (4) číslo $n^2 = (\dots 5)$, potom $n^4 = (\dots 5)$,
 (5) číslo $n^2 = (\dots 6)$, potom $n^4 = (\dots 6)$,
 (6) číslo $n^2 = (\dots 9)$, potom $n^4 = (\dots 1)$.

1.11. Dokážte tieto vlastnosti:

(a) Ak n je kladné celé číslo, potom n je párne vtedy a len vtedy, ak $7n + 4$ je párne.

- (1) $p(n) \Rightarrow p(7n + 4)$, $n = 2k \Rightarrow 7n + 4 = 14k + 4 = 2(7k + 2)$
 (2) $p(7n + 4) \Rightarrow p(n)$, $7n + 4 = 2(7k + 2) \Rightarrow n = 2k$

(b) Ak n je kladné celé číslo, potom n je nepárne vtedy a len vtedy, ak $5n + 6$ je nepárne.

- (1) $np(n) \Rightarrow np(5n + 6)$, $n = 2k + 1 \Rightarrow 5n + 6 = 10k + 11 = 2(5k + 5) + 1$,
 (2) $np(5n + 6) \Rightarrow np(n)$, $5n + 6 = 2(5k + 5) + 1 \Rightarrow n = 2k + 1$.

(c) $m^2 = n^2$ platí vtedy a len vtedy, ak $m = n$, alebo $m = -n$.

- (1) $(m = n) \vee (m = -n) \Rightarrow m^2 = n^2$,
 (2) $m^2 = n^2 \Rightarrow |m| = |n| \Rightarrow (m = n) \vee (m = -n)$.

(d) Dokážte, že tieto tri výroky sú ekvivalentné: (1) $a < b$, (2) priemer a a b je väčší ako a , $(a + b)/2 > a$, (3) priemer a a b je menší ako b , $(a + b)/2 < b$.

$$(1a) (a < b) \Leftrightarrow \frac{1}{2}a < \frac{1}{2}b \Leftrightarrow a - \frac{1}{2}a < \frac{1}{2}b \Leftrightarrow a < \frac{1}{2}(a + b)$$

$$(1b) a < b \Leftrightarrow \frac{1}{2}a < \frac{1}{2}b \Leftrightarrow \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b < b \Leftrightarrow \frac{1}{2}(a + b) < b$$

1.12. Pomocou matematickej indukcie dokážte:

(a) Suma prvých n prirodzených čísel je

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$P(1): 1 = \frac{1(1+1)}{2}, \quad P(n): 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\Rightarrow P(n+1): 1 + 2 + \dots + n + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = (n+1) \left(\frac{n}{2} + 1 \right) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

(b) Dokážte formulu

$$3 + 3 \cdot 5 + 3 \cdot 5^2 + \dots + 3 \cdot 5^n = \frac{1}{4} 3(5^{n+1} - 1)$$

$$P(1): 3 + 3 \cdot 5^1 = \frac{1}{4} 3(5^{1+1} - 1), \quad P(n): 3 + 3 \cdot 5 + 3 \cdot 5^2 + \dots + 3 \cdot 5^n = \frac{1}{4} 3(5^{n+1} - 1) \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow P(n+1): 3 + 3 \cdot 5 + 3 \cdot 5^2 + \dots + 3 \cdot 5^n + 3 \cdot 5^{n+1} &= \frac{1}{4} 3(5^{n+1} - 1) + 3 \cdot 5^{n+1} = \\ &= 3 \cdot 5^{n+1} \left(\frac{1}{4} + 1 \right) - \frac{3}{4} = 3 \cdot 5^{n+1} \frac{5}{4} - \frac{3}{4} = \frac{3}{4} (5^{n+2} - 1) \end{aligned}$$

(c) Dokážte formulu

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$$

$$P(1): 1^2 = \frac{1}{6} 1(1+1)(2 \cdot 1 + 1), \quad P(n): 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} P(n+1) &= 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 + (n+1)^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) + (n+1)^2 = \\ &= \frac{1}{6} (n+1)(n(2n+1) + 6(n+1)) = \frac{1}{6} (n+1)(n+2)(2n+3) \end{aligned}$$

(d) Dokážte formulu

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{1}{4} n^2 (n+1)^2$$

$$P(1): 1^3 = \frac{1}{4} 1^2 (1+1)^2, \quad P(n): 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{1}{4} n^2 (n+1)^2 \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow P(n+1): 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 + (n+1)^3 &= \frac{1}{4} n^2 (n+1)^2 + (n+1)^3 \\ &= \frac{1}{4} (n+1)^2 (n^2 + 4(n+1)) = \frac{1}{4} (n+1)^2 (n+2)^2 \end{aligned}$$

(e) Dokážte formulu $n! < n^n$, pre $n > 1$.

$$P(2): 2! < 2^2, \quad P(n): (n! < n^n)$$

$$n! < n^n \Rightarrow n!(n+1) < n^n(n+1) \Rightarrow n!(n+1) < (n+1)^n(n+1) \Rightarrow (n+1)! < (n+1)^{n+1} \Rightarrow P(n+1)$$

(f) Dokážte formulu pre prvú deriváciu funkcie $f(x) = x^n$, $f'(x) = nx^{n-1}$

$$P(1): (x^1)' = 1, \quad P(n): (x^n)' = nx^{n-1}, \quad P(n+1): (x^n x)' = (nx^{n-1})x + x^n = (n+1)x^n.$$

(g) Dokážte zovšeobecnené distributívne formuly z výrokovej logiky

$$(1) (p_1 \vee p_2 \vee \dots \vee p_n) \wedge q \equiv (p_1 \wedge q) \vee (p_2 \wedge q) \vee \dots \vee (p_n \wedge q)$$

$$P(n): (p_1 \vee p_2 \vee \dots \vee p_n) \wedge q \equiv (p_1 \wedge q) \vee (p_2 \wedge q) \vee \dots \vee (p_n \wedge q)$$

$$P(2): (p_1 \vee p_2) \wedge q \equiv (p_1 \wedge q) \vee (p_2 \wedge q) \quad \text{distribut. zákon}$$

$$P(n+1) = ((p_1 \vee p_2 \vee \dots \vee p_n) \vee p_{n+1}) \wedge q \equiv \underbrace{((p_1 \vee p_2 \vee \dots \vee p_n) \wedge q)}_{\text{ľavá strana } P(n)} \vee (p_{n+1} \wedge q) \\ \equiv (p_1 \wedge q) \vee (p_2 \wedge q) \vee \dots \vee (p_n \wedge q) \vee (p_{n+1} \wedge q)$$

$$(2) (p_1 \wedge p_2 \wedge \dots \wedge p_n) \vee q \equiv (p_1 \vee q) \wedge (p_2 \vee q) \wedge \dots \wedge (p_n \vee q)$$

Dôkaz sa vykoná analog. spôsobom.

(h) Dokážte zovšeobecnené De Morganove formuly

$$(1) \neg(p_1 \wedge p_2 \wedge \dots \wedge p_n) \equiv (\neg p_1 \vee \neg p_2 \vee \dots \vee \neg p_n)$$

$$(2) \neg(p_1 \vee p_2 \vee \dots \vee p_n) \equiv (\neg p_1 \wedge \neg p_2 \wedge \dots \wedge \neg p_n)$$

Pôvodný tvar De Morganových formúl pre $n = 2$ je

$$\neg(p_1 \wedge p_2) \equiv (\neg p_1 \vee \neg p_2) \quad \text{a} \quad \neg(p_1 \vee p_2) \equiv (\neg p_1 \wedge \neg p_2)$$

Pre jednoduchosť vykonáme dôkaz pre $n = 3$, pričom použijeme De Morganovu formulu pre $n = 2$

$$\neg(p_1 \wedge p_2 \wedge p_3) \equiv \neg((p_1 \wedge p_2) \wedge p_3) \equiv \neg((p_1 \wedge p_2) \vee \neg p_3) \equiv (\neg p_1 \vee \neg p_2) \vee \neg p_3 \\ \equiv \neg p_1 \vee \neg p_2 \vee \neg p_3$$

Tento dôkaz môžeme jednoducho zovšeobecniť pre každé prirodzené $n \geq 4$, ak poznáme formulu pre $n - 1$. Analogickým spôsobom sa dokáže aj (2) De Morganova formula.

1.13. Pomocou rozkladu na parciálne zlomky nájdite formulu pre

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}$$

Použijeme algebraickú identitu (niekedy nazývaná rozklad na parciálne zlomky)

$$\frac{1}{i(i+1)} = \frac{1}{i} - \frac{1}{i+1}$$

Potom študovaný rad môžeme prepísať takto

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$$

RIEŠENÉ CVIČENIA Z KAPITOLY 2

2.1. Ktoré prvky patria do množiny:

- (a) $\{x; (x \in \mathbb{R}) \wedge (x^2 = 1)\}$, (kde \mathbb{R} je množina reálnych čísel), $\{-1, 1\}$
(b) $\{x; (x \in \mathbb{R}) \wedge (x^2 - 3x + 2 = 0)\}$, $\{1, 2\}$
(c) $\{x; (x \in \mathbb{N}) \wedge (x < 12)\}$, (kde \mathbb{N} je množina nezáporných celých čísel),
 $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$
(d) $\{x; (x \in \mathbb{N}) \wedge (x^2 < 100)\}$, $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
(e) $\{x; (x \in \mathbb{N}) \wedge (x^2 = 2)\}$, \emptyset

2.2. Vyjadrite tieto množiny pomocou predikátu (pozri (2.1b)):

- (a) $A = \{0, 3, 6, 9, 12\}$,
 $A = \{x \in \mathbb{N}; P(x)\}$, kde $P(x) = \exists(k \in \mathbb{N})((x = 3k) \wedge (x \leq 12))$
(b) $A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$,
 $A = \{x \in \mathbb{Z}; P(x)\}$, kde $P(x) = (|x| \leq 3)$, \mathbb{Z} je množina celých čísel.
(c) $A = \{m, n, o, p\}$
 $A = \{x \in \mathcal{A}; P(x)\}$, kde $P(x) = \exists(k \in \mathcal{A})((x = k) \wedge ((k = m) \vee (k = n) \vee (k = o) \vee (k = p)))$,
 $\mathcal{A} = \{a, b, c, \dots, x, y, z\}$.

2.3. Zistite, či množiny z každej dvojice sú navzájom rovné:

- (a) $A = \{1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$,
ak vynecháme v množine A prvky, ktoré sa opakujú, potom $A = B$.
(b) $A = \{\{1\}\}$, $B = \{1, \{1\}\}$,
Množina A má jeden prvok, množina B má dva prvky, čiže $A \neq B$.
(c) $A = \emptyset$, $B = \{\emptyset\}$,
Množina A je prázdna, množina B má jeden prvok, čiže $A \neq B$.

2.4. Nech $A = \{2, 4, 6\}$, $B = \{2, 6\}$, $C = \{4, 6\}$, $D = \{4, 6, 8\}$. Zistite, ktoré množiny sú podmnožiny ktorých množín.

$$B \subset A, C \subset A, C \subset D.$$

2.5. Pre každú množinu A určite, či platí $2 \in A$:

(a) $A = \{x \in \mathbb{R}; x < 2\}$,

$2 \notin A$.

(b) $A = \{x \in \mathbb{R}; \exists (n \in \mathbb{N})(x = n^2)\}$,

množina A obsahuje kvadráty celých čísel, pretože 2 nie je kvadrátom celého čísla, potom $2 \notin A$.

(c) $A = \{2, \{2\}\}$,

$2 \in A$

(d) $A = \{\{2\}, \{\{2\}\}\}$,

$2 \notin A$

(e) $A = \{\{2\}, \{2, \{2\}\}\}$.

$2 \notin A$

2.6. Pre každý príklad z cvičenia 2.5 rozhodnite, či prvok $\{2\}$ je prvkom množiny A .

(a) $A = \{x \in \mathbb{R}; x < 2\}$;

$\{2\} \notin A$

(b) $A = \{x \in \mathbb{R}; \exists (n \in \mathbb{N})(x = n^2)\}$;

množina A obsahuje kvadráty celých čísel, pretože 2 nie je kvadrátom celého čísla, potom $2 \notin A$, a aj keby 2 patrilo do A , množina obsahujúca 2, teda $\{2\}$ určite do A nepatrí.

(c) $A = \{2, \{2\}\}$;

$\{2\} \in A$

(d) $A = \{\{2\}, \{\{2\}\}\}$;

$\{2\} \in A$

(e) $A = \{\{2\}, \{2, \{2\}\}\}$;

$\{2\} \in A$

2.7. Rozhodnite, či výroky sú pravdivé alebo nepravdivé:

(a) $0 \in \emptyset$, nepravdivý,

(b) $\emptyset \in \{0\}$, nepravdivý,

(c) $\{0\} \subset \emptyset$, nepravdivý,

(d) $\emptyset \subset \{0\}$, pravdivý,

(e) $\{0\} \in \{0\}$, nepravdivý,

(f) $\{0\} \subset \{0\}$, pravdivý (závisí od interpretácie symbolu \subset),

(g) $\{0\} \subseteq \{0\}$, pravdivý.

2.8. Rozhodnite, či výroky sú pravdivé alebo nepravdivé:

- (a) $\emptyset \in \{\emptyset\}$, pravdivý,
- (b) $\emptyset \in \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, pravdivý,
- (c) $\{\emptyset\} \in \{\emptyset\}$, nepravdivý,
- (d) $\{\emptyset\} \in \{\{\emptyset\}\}$, pravdivý,
- (e) $\{\emptyset\} \subset \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, pravdivý,
- (f) $\{\{\emptyset\}\} \subset \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, pravdivý.

2.9. Nech $A \subseteq B$ a $B \subseteq C$, dokážte $A \subseteq C$.

$$\begin{aligned} & \text{Priamy dôsledok zákona hypotetického syllogizmu } ((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \Rightarrow r), \\ & (A \subseteq B) \wedge (B \subseteq C) \equiv (\forall x(x \in A \Rightarrow x \in B)) \wedge (\forall x(x \in B \Rightarrow x \in C)) \\ & \Rightarrow \forall x((x \in A \Rightarrow x \in B) \wedge (x \in B \Rightarrow x \in C)) \Rightarrow \forall x(x \in A \Rightarrow x \in C) \equiv (A \subseteq C) \end{aligned}$$

2.10. Nájďte také dve množiny A a B , aby platilo

- (a) $A \in B: B = \{A\}$, potom $A \in B$,
- (b) $A \subseteq B: A = \{a\}, B = \{a, b\}$, potom $A \subseteq B$.

2.11. Aká je mohutnosť týchto množín:

- (a) $\{a\}$, 1,
- (b) $\{\{a\}\}$, 1,
- (c) $\{a, \{a\}\}$, 2,
- (d) $\{a, \{a\}, \{a, \{a\}\}\}$, 3.

2.12. Aká je mohutnosť týchto množín:

- (a) \emptyset , 0,
- (b) $\{\emptyset\}$, 1,
- (c) $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, 2,
- (d) $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$, 3.

2.13. Zostrojte potenčnú množinu $\mathcal{P}(A)$ pre

- (a) $A = \{a\}$, $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{a\}\}$,
- (b) $A = \{a, b\}$, $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$,
- (c) $A = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$.

2.14. Dokážte alebo vyvráťte implikáciu $(\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(B)) \Rightarrow (A = B)$.

$$(\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(B)) \Rightarrow \underbrace{(\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B))}_{\equiv (A \subseteq B)} \wedge \underbrace{(\mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A))}_{\equiv (B \subseteq A)} \equiv (A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A) = (A = B)$$

kde bola použitá formula (2.21a).

2.15. Určite, ktorá z množín nie je potenčná množina

- (a) \emptyset , nie je potenčná množina, v tomto špeciálnom prípade potenčnou množinou je $\{\emptyset\}$,
- (b) $\{\emptyset, \{a\}\}$, potenčná množina,
- (c) $\{\emptyset, \{a\}, \{\emptyset, a\}\}$, nie je potenčná množina, pretože táto množina má len tri prvky. Na to, aby táto množina bola potenčnou množinou množiny $A = \{\emptyset, a\}$, jej ako prvok chýba množina $\{\emptyset\}$.
- (d) $\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$, potenčná množina.

2.16. Nech $A = \{a, b, c\}$, $B = \{x, y\}$, zostrojte

- (a) $A \times B$,
 $A \times B = \{(a, x), (a, y), (b, x), (b, y), (c, x), (c, y)\}$
- (b) $B \times A$.
 $B \times A = \{(x, a), (x, b), (x, c), (y, a), (y, b), (y, c)\}$

2.17. Aký význam má karteziánsky súčin $A \times B$, kde A je množina prednášok, ktoré poskytuje Ústav aplikovanej informatiky a B je množina pedagógov Fakulty informatiky?

Usporiadaná dvojica $(x, \xi) \in A \times B$ sa interpretuje ako priradenie, ktorý predmet ÚAI prednáša ktorý pedagóg FI.

2.18. Aký je význam karteziánskeho súčinu $A \times B \times C$, kde A je množina všetkých leteckých spoločností, B a C sú množiny letísk na svete.

Usporiadaná trojica $(a, \alpha, \hat{\beta}) \in A \times B \times C$ sa interpretuje ako priradenie, že letecká spoločnosť a má letovú linku, ktorá štartuje v α a pristáva na $\hat{\beta}$.

2.19. Nech A je množina študentov FIIT, ktorí sú z Bratislavy a B je množina študentov FIIT, ktorí jazdia na fakultu autom. Opíšte študentov, ktorí patria do množiny

- (a) $A \cap B$, obsahuje študentov z Bratislavy, ktorí jazdia na fakultu autom,
- (b) $A \cup B$, obsahuje študentov z Bratislavy alebo študentov, ktorí jazdia na fakultu autom,
- (c) $A - B$, obsahuje študentov v Bratislavy, ktorý nejazdia na fakultu autom,
- (d) $B - A$, obsahuje študentov, ktorí jazdia na fakultu autom a pritom nie sú z Bratislavy.

2.20. Nech A je množina prvkov na našej fakulte a B je množina študentov navštevujúcich diskretnú matematiku. Vyjadrite pomocou množín A a B tvrdenia:

- (a) Množina prvkov, ktorí navštevujú prednášku z diskretnej matematiky, $A \cap B$,
 (b) Množina prvkov, ktorí nenavštevujú prednášku z diskretnej matematiky, $A \cap \bar{B}$,
 (c) Množina študentov, ktorí sú prváci alebo navštevujú prednášku z diskretnej matematiky, $A \cup B$,
 (d) Množina študentov, ktorí nie sú prváci alebo nenavštevujú prednášku z diskretnej matematiky, $\bar{A} \cup \bar{B}$.

2.21. Nech A a B sú množiny, dokážte

(a) $(A \cap B) \subseteq A$,

1.	$x \in A \cap B$	predpoklad
2.	$(x \in A) \wedge (x \in B)$	dôsledok predpokladu
3.	$(x \in A)$	dôsledok 2
4.	$(x \in A \cap B) \Rightarrow (x \in A)$	deaktivácia predpokladu

(b) $(A \cap B) \subseteq B$,

1.	$x \in A \cap B$	predpoklad
2.	$(x \in A) \wedge (x \in B)$	dôsledok predpokladu
3.	$(x \in B)$	dôsledok 2
4.	$(x \in A \cap B) \Rightarrow (x \in B)$	deaktivácia predpokladu

(c) $A \subseteq (A \cup B)$,

1.	$(x \in A)$	predpoklad
2.	$(x \in A) \vee (x \in B)$	dôsledok 1
3.	$(x \in A) \Rightarrow ((x \in A) \vee (x \in B))$	deaktivácia predpokladu

(d) $B \subseteq (A \cup B)$,

1.	$(x \in B)$	predpoklad
2.	$(x \in B) \vee (x \in A)$	dôsledok 1
3.	$(x \in B) \Rightarrow ((x \in B) \vee (x \in A))$	deaktivácia predpokladu

(e) $A - B \subseteq A$,

1.	$x \in (A - B)$	predpoklad
2.	$(x \in A) \wedge (x \notin B)$	dôsledok 1
3.	$x \in A$	dôsledok 2
4.	$(x \in (A - B)) \Rightarrow (x \in A)$	deaktivácia predpokladu

(f) $A \cap (B - A) = \emptyset$.

1.	$x \in (A \cap (B - A))$	predpoklad
2.	$(x \in A) \wedge (x \in (B - A))$	dôsledok 1
3.	$x \in A$	dôsledok 2
4.	$x \in (B - A)$	dôsledok 2
5.	$x \in B$	dôsledok 4
6.	$x \notin A$	dôsledok 4
7.	$(x \in A) \wedge (x \notin A)$	dôsledok 3 a 6 (kontradikcia, potom $x \in \emptyset$)

2.22. Nech A, B a C sú množiny, dokážte $(A - B) - C = (A - C) - (B - C)$.

1.	$x \in ((A - C) - (B - C))$	predpoklad
2.	$(x \in (A - C)) \wedge (x \notin (B - C))$	dôsledok 1
3.	$(x \in A \wedge x \notin C) \wedge \neg(x \in (B - C))$	dôsledok 2
4.	$(x \in A \wedge x \notin C) \wedge \neg(x \in B \wedge x \notin C)$	dôsledok 3
5.	$(x \in A \wedge x \notin C) \wedge (x \notin B \vee x \in C)$	dôsledok 4
6.	$(x \in A \wedge x \notin C \wedge x \notin B) \vee \underbrace{(x \in A \wedge \underbrace{x \notin C \wedge x \in C}_0)}_0$	distribut. zákon na 5
7.	$(x \in A \wedge x \notin C \wedge x \notin B)$	dôsledok 6
8.	$x \in ((A - B) - C)$	dôsledok 7

2.23. Čo môžeme povedať o množinách A a B , ak platí

- (a) $A \cup B = A$, platí ak $B \subseteq A$,
- (b) $A \cap B = A$, platí ak $A \subseteq B$,
- (c) $A - B = A$, $A \cap B = \emptyset$,
- (d) $A \cap B = B \cap A$, platí pre každé množiny A a B ,
- (e) $A - B = B - A$, platí ak $A = B$.

2.24. Nech A, B a C sú množiny, zistite, či sú pravdivé implikácie:

(a) $(A \cup C = B \cup C) \Rightarrow (A = B)$, neplatí

$A = \{1, 2\}, B = \{2, 3\}, C = \{1, 2, 3\}$, potom $A \cup C = B \cup C = \{1, 2, 3\}$, avšak $A \neq B$

(b) $(A \cap C = B \cap C) \Rightarrow (A = B)$, neplatí

$A = \{1, 2\}, B = \{2, 3\}, C = \{2\}$, potom $A \cap C = B \cap C = \{2\}$, avšak $A \neq B$

2.25. Nech A a B sú množiny, dokážte vlastnosť $(A \subseteq B) \Rightarrow (\bar{B} \subseteq \bar{A})$.

$$A \subseteq B \stackrel{\text{def}}{=} \forall x(x \in A \Rightarrow x \in B) \equiv \forall x(x \in \bar{B} \Rightarrow x \in \bar{A}) \stackrel{\text{def}}{=} \bar{B} \subseteq \bar{A}$$

Pri dôkaze sme použili ekvivalenciu $(x \notin A) \equiv (x \in \bar{A})$.

2.26. Nech $A_i = \{1, 2, \dots, i\}$, pre $i=1, 2, \dots, n$. Nájdite

(a) $A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n, A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n = \{1\}$

(b) $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n, A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \{1, 2, \dots, n\}$

2.27. Nech A_i je množina binárnych reťazcov, ktorých dĺžka nie je väčšia ako i , pre $i=1, 2, \dots, n$. Nájdite

(a) $A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n, A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n = A_1$

(b) $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n, A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = A_n$.

2.28. Dokážte pomocou matematickej indukcie vzťahy

(a) $\bigcup_{i=1}^n A_i = \bigcap_{i=1}^n \bar{A}_i$

Jednoducho sa dokáže pomocou De Morganovej vety, predpokladajme, že máme dokázať

$$\overline{A_1 \cup A_2 \cup A_3} = \overline{(A_1 \cup A_2) \cup A_3} = \overline{(A_1 \cup A_2)} \cap \bar{A}_3 = (\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2) \cap \bar{A}_3 = \bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3$$

Tento jednoduchý postup sa ľahko zovšeobecní pre každé $n > 3$.

(b) $\bigcap_{i=1}^n A_i = \bigcup_{i=1}^n \bar{A}_i$

$$\overline{A_1 \cap A_2 \cap A_3} = \overline{(A_1 \cap A_2) \cap A_3} = \overline{(A_1 \cap A_2)} \cup \bar{A}_3 = (\bar{A}_1 \cup \bar{A}_2) \cup \bar{A}_3 = \bar{A}_1 \cup \bar{A}_2 \cup \bar{A}_3$$

Tento jednoduchý postup sa ľahko zovšeobecní pre každé $n > 3$.

RIEŠENÉ CVIČENIA Z KAPITOLY 3

3.1. Zostrojte množinu usporiadaných dvojíc pre reláciu $R \subseteq A \times A$, $A = \{0,1,2,3,4\}$, kde $(x, y) \in R$ vtedy a len vtedy, ak

(a) $x = y$,

$$R = \{(0,0), (1,1), (2,2), (3,3), (4,4)\}$$

(b) $x + y = 4$,

$$R = \{(0,4), (4,0), (1,3), (3,1), (2,2)\}$$

(c) $x > y$,

$$R = \{(1,0), (2,0), (2,1), (3,0), (3,1), (3,2), (4,0), (4,1), (4,2), (4,3)\}$$

(d) x je deliteľné y .

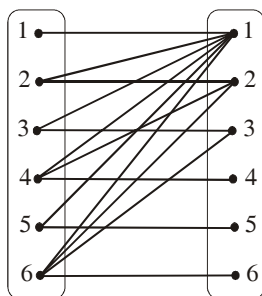
$$R = \{(0,1), (0,2), (0,3), (0,4), (1,1), (2,1), (2,2), (3,1), (3,3), (4,1), (4,2), (4,4)\}$$

3.2. Nech $R = \{(x, y); x \text{ je deliteľné } y\}$ je relácia pre $X = \{1,2,3,4,5,6\}$.

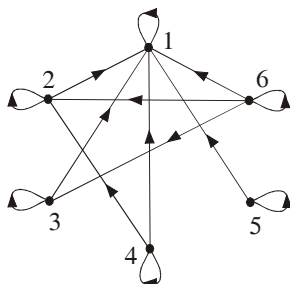
(a) Zostrojte množinu usporiadaných dvojíc pre túto reláciu,

$$R = \{(1,1), (2,1), (2,2), (3,1), (3,3), (4,1), (4,2), (4,4), (5,1), (5,5), (6,1), (6,2), (6,3), (6,6)\}$$

(b) znázorníte túto reláciu diagramaticky tak, ako je to vykonané na obr. 3.1,



(c) znázorníte túto reláciu grafom tak, ako je to vykonané na obr. 3.2,



(d) reprezentujte reláciu pomocou binárnej matice A z definície 3.4.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3.3. Pre každú z nasledujúcich relácií R nad množinou $\{1,2,3,4\}$ zistite, či je reflexívna, symetrická, antisymetrická, alebo tranzitívna.

(a) $\{(2,2), (2,3), (2,4), (3,2), (3,3), (3,4)\}$,

je tranzitívna

(b) $\{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (3,3), (4,4)\}$

je reflexívna: $\forall x((x,x) \in R)$

je symetrická

je tranzitívna

(c) $\{(2,4), (4,2)\}$

je symetrická

(d) $\{(1,2), (2,3), (3,4)\}$

je antisymetrická

(e) $\{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4)\}$

je reflexívna, symetrická a aj antisymetrická a tranzitívna

(f) $\{(1,3), (1,4), (2,3), (2,4), (3,1), (3,4)\}$

\emptyset

3.4. Zistite, či relácia R nad množinou všetkých ľudí je reflexívna, symetrická, antisymetrická, alebo tranzitívna, pričom $(x,y) \in R$ vtedy a len vtedy, ak

(a) x je menší ako y ,

tranzitívna: $\forall x \forall y \forall z ((x < y) \wedge (y < z) \Rightarrow (x < z))$

antisymetrická

(b) x a y sa narodili v rovnakom dni,

reflexívna: $\forall x((x,x) \in R)$

symetrická: $\forall x \forall y ((x,y) \in R \Rightarrow (y,x) \in R)$

tranzitívna: $\forall x \forall y \forall z ((x,y) \in R \wedge (y,z) \in R \Rightarrow (x,z) \in R)$

(c) x má rovnaké krstné meno ako y ,

reflexívna: $\forall x((x, x) \in R)$

symetrická: $\forall x \forall y((x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \in R)$

tranzitívna: $\forall x \forall y \forall z((x, y) \in R \wedge (y, z) \in R \Rightarrow (x, z) \in R)$

(d) x a y majú aspoň jednu dvojicu spoločných starých rodičov.

reflexívna: $\forall x((x, x) \in R)$

symetrická: $\forall x \forall y((x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \in R)$

3.5. Zistite, či relácia R nad množinou všetkých www stránok je reflexívna, symetrická, antisymetrická, alebo tranzitívna, pričom $(x, y) \in R$ vtedy a len vtedy, ak

(a) každý, kto navštívil túto stránku x , navštívil aj stránku y ,

reflexívna: $\forall x((x, x) \in R)$

tranzitívna

(b) neexistuje priame prepojenie medzi stránkami x a y ,

symetrická: $\forall x \forall y((x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \in R)$

(c) existuje aspoň jedno prepojenie medzi stránkami x a y ,

symetrická: $\forall x \forall y((x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \in R)$

(d) existuje stránka, ktorá obsahuje prepojenia tak na stránku x ako aj na stránku y .

symetrická: $\forall x \forall y((x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \in R)$

3.6. Zistite, či relácia R nad množinou reálnych čísel je reflexívna, symetrická, antisymetrická, alebo tranzitívna, pričom $(x, y) \in R$ vtedy a len vtedy, ak

(a) $x + y = 0$,

symetrická: $\forall x \forall y((x + y = 0) \Rightarrow (y + x = 0))$

(b) $x = \pm y$,

reflexívna: $\forall x(x = x)$

symetrická: $\forall x \forall y((x = \pm y) \Rightarrow (y = \pm x))$

tranzitívna: $\forall x \forall y \forall z((x = \pm y) \wedge (y = \pm z) \Rightarrow (x = \pm z))$

(c) $x - y$ je racionálne číslo,

reflexívna: $\forall x(x - x \text{ je rac. číslo})$

symetrická: $\forall x \forall y(x - y \text{ je rac. číslo} \Rightarrow y - x \text{ je rac. číslo})$

tranzitívna: $\forall x \forall y \forall z((x - y \text{ je rac. číslo}) \wedge (y - z \text{ je rac. číslo}) \Rightarrow (x - z \text{ je rac. číslo}))$

(d) $x = 2y$,

antisymetrická: $\forall x \forall y((x = 2y) \wedge (y = 2x) \Rightarrow (x = y = 0))$

(e) $xy \geq 0$,

reflexívna: $\forall x(x \cdot x \geq 0)$

symetrická: $\forall x \forall y((xy \geq 0) \Rightarrow (yx \geq 0))$

nie je tranzitívna: $\forall x \forall y \forall z ((xy \geq 0) \wedge (yz \geq 0) \Rightarrow (xz \geq 0))$

neplatí pre $x=-1, y=0, z=1$

(f) $xy = 0$,

symetrická: $\forall x \forall y ((xy = 0) \Rightarrow (yx = 0))$

(g) $x = 1$,

antisymetrická: $\forall x \forall y ((x = 1) \wedge (y = 1) \Rightarrow (x = y = 1))$

tranzitívna: $\forall (x, y, z \in X) ((x = 1, y) \in R \wedge (y = 1, z) \in R \Rightarrow (x = 1, z) \in R)$

(h) $x = 1$ alebo $y = 1$.

symetrická: $\forall x \forall y ((x = 1 \text{ alebo } y = 1) \Rightarrow (y = 1 \text{ alebo } x = 1))$

3.7. Zostrojte inverznú reláciu $R^{-1} \subseteq Y \times X$ pre relácie $R \subseteq X \times Y$, ktoré sú špecifikované

(a) $R = \{(x, y); x < y\}$ nad množinou celých čísel.

$$R^{-1} = \{(x, y); y < x\}$$

Inverzná relácia k relácii $R = \{(x, y); x < y\}$ je definovaná reláciou $R^{-1} = \{(y, x); x < y\}$, substitúciou $x \leftrightarrow y$ dostaneme $R^{-1} = \{(x, y); y < x\} \Rightarrow R^{-1} = \{(x, y); x > y\}$.

(b) $R = \{(x, y); x \text{ je deliteľné } y\} \subseteq X \times Y$ nad množinou $X, Y = \{1, 2, 3, \dots\}$.

Pôvodnú reláciu R prepíšeme do ekvivalentného tvaru $R = \{(x, y); x = ny\}$, kde n je nenulové celé číslo, potom $R^{-1} = \{(y, x); x = ny\}$, pomocou substitúcie $x \leftrightarrow y$ prepíšeme túto inverznú reláciu do tvaru $R^{-1} = \{(x, y); y = xn\}$.

(c) R je relácia nad všetkými európskymi štátmi, ktorá obsahuje dvojicu (x, y) vtedy a len vtedy, ak štát x susedí so štátom y .

Platí $R^{-1} = R$.

3.8. Nech $P = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4)\}$ a $Q = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4)\}$,

$P, Q \subseteq X \times X$ sú relácie nad $X = \{1, 2, 3, 4\}$. Nájdite

(a) $P \cup Q, P \cap Q$,

$$P \cup Q = Q = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4)\}$$

$$P \cap Q = P = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4)\}$$

(b) $P - Q, Q - P$,

$$P - Q = \emptyset$$

$$Q - P = \{(1, 1), (2, 1), (2, 2), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}$$

(c) \bar{P}, \bar{Q} ,

$$\bar{P} = \{(1, 1), (1, 3), (1, 4), (2, 1), (2, 2), (2, 4), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4)\}$$

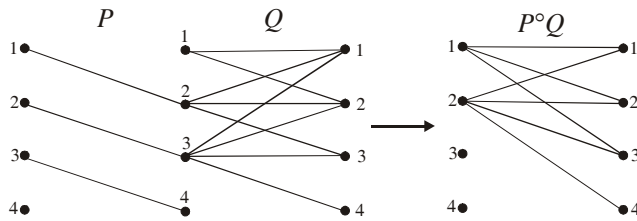
$$\bar{Q} = \{(1, 3), (1, 4), (2, 4), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4)\}$$

(d) P^{-1}, Q^{-1} ,

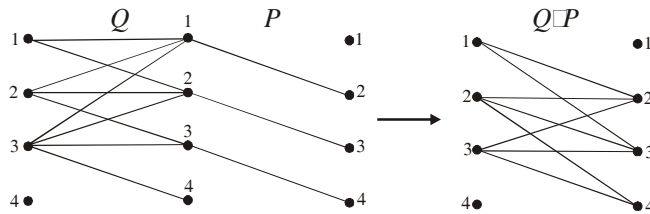
$$P^{-1} = \{(2,1), (3,2), (4,3)\}$$

$$Q^{-1} = \{(1,1), (2,1), (1,2), (2,2), (3,2), (1,3), (2,3), (3,3), (4,3)\}$$

(e) $P \circ Q, Q \circ P$,



$$P \circ Q = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (2,3), (2,4)\}$$



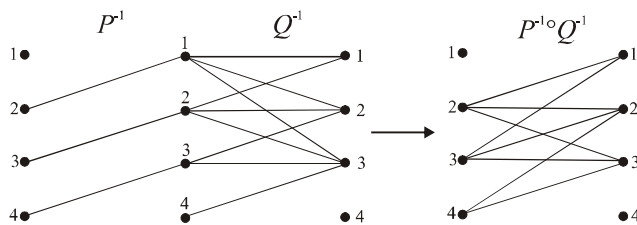
$$Q \circ P = \{(1,2), (1,3), (2,2), (2,3), (2,4), (3,2), (3,3), (3,4)\}$$

(f) $(P \circ Q)^{-1}, (Q \circ P)^{-1}$,

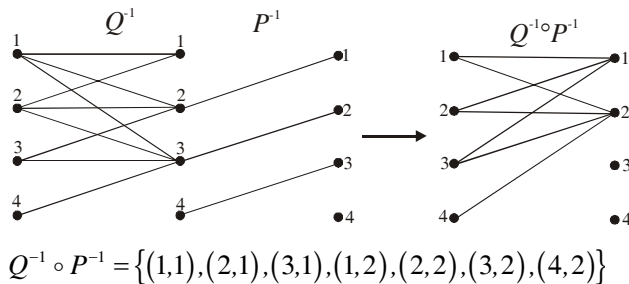
$$(P \circ Q)^{-1} = \{(1,1), (2,1), (3,1), (1,2), (2,2), (3,2), (4,2)\}$$

$$(Q \circ P)^{-1} = \{(2,1), (3,1), (2,2), (3,2), (4,2), (2,3), (3,3), (4,3)\}$$

(g) $P^{-1} \circ Q^{-1}, Q^{-1} \circ P^{-1}$.



$$P^{-1} \circ Q^{-1} = \{(2,1), (3,1), (2,2), (3,2), (4,2), (2,3), (3,3), (4,3)\}$$



3.9. Nájdite chybu v dôkaze tejto vety:

Ak relácia $R \subseteq X \times X$ je symetrická a tranzitívna, potom je aj reflexívna.

Dôkaz: Nech $x \in X$, zoberte taký element $y \in X$ pre ktorý $(x, y) \in R$. Pretože R je symetrická relácia, potom taktiež $(y, x) \in R$. Použitím vlastnosti tranzitívnosti relácie R dostaneme $(x, x) \in R$, pretože $(x, y), (y, x) \in R$.

Chybný predpoklad, že pre každé x existuje y pre ktorý $(x, y) \in R$.

3.10. Nech $R, S \subseteq X \times X$ sú reflexívne relácie. Dokážte alebo vyvráťte tieto tvrdenia:

(a) $R \cup S$ je reflexívna relácia,

$$(\forall x((x, x) \in R)) \wedge (\forall y((y, y) \in S)) \Rightarrow (\forall t((t, t) \in R \cup S)), \text{ tvrdenie je platné.}$$

(b) $R \cap S$ je reflexívna relácia,

$$(\forall x((x, x) \in R)) \wedge (\forall y((y, y) \in S)) \Rightarrow (\forall t((t, t) \in R \cap S)), \text{ tvrdenie je platné.}$$

(c) $R - S$ je reflexívna relácia,

$$(\forall x((x, x) \in R)) \wedge (\forall y((y, y) \in S)) \Rightarrow (\forall t((t, t) \notin R - S)), \text{ tvrdenie nie je platné.}$$

(d) $R \circ S$ je reflexívna relácia,

$$(\forall x((x, x) \in R)) \wedge (\forall y((y, y) \in S)) \Rightarrow (\forall t((t, t) \in R \circ S)), \text{ tvrdenie je platné.}$$

U „kontrapríkladu“ pre $R = \{(1,1), (1,2), (2,2)\}$ a $S = \{(2,2)\}$ je $R \circ S = \{(1,2), (2,2)\}$, kde chýba k reflexívnosti $(1,1)$, ale vzhľadom k tomu, že reflexívna relácia musí obsahovať (x, x) pre všetky x z X , relácia S z nášho kontrapríkladu potom nie je reflexívna a kontrapríklad teda neplatí.

3.11. Dokážte tieto tvrdenia:

(a) Relácia $R \subseteq X \times X$ je symetrická vtedy a len vtedy, ak $R = R^{-1}$.

$$(\forall x \forall y ((x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \in R)) \Rightarrow (\forall x \forall y ((y, x) \in R^{-1} \Rightarrow (x, y) \in R^{-1})), \text{ tvrdenie je platné.}$$

(b) Relácia $R \subseteq X \times X$ je antisymetrická vtedy a len vtedy, ak $R \cap R^{-1}$ je podmnožinou „diagonálnej“ relácie $\Delta = \{(x, x); x \in X\}$.

Máme dokázať

$$\left(\forall x \forall y \left(\left((x, y) \in R \wedge (y, x) \in R \right) \Rightarrow (x = y) \right) \right) \equiv \left((R \cap R^{-1}) \subseteq \Delta = \{(x, x); x \in X\} \right)$$

antisymetrickú reláciu rozdelíme na dve disjunktné časti, diagonálnu a nediagonálnu

$$R = R_{diag} \cup R_{nondiag} = \underbrace{\{(x, x); (x, x) \in R\}}_{R_{diag}} \cup \underbrace{\{(x, y); ((x, y) \in R) \wedge (x \neq y)\}}_{R_{nondiag}}$$

Pre inverznú reláciu potom platí

$$R^{-1} = R_{diag}^{-1} \cup R_{nondiag}^{-1} = \underbrace{\{(x, x); (x, x) \in R\}}_{R_{diag}^{-1}} \cup \underbrace{\{(y, x); ((x, y) \in R) \wedge (x \neq y)\}}_{R_{nondiag}^{-1}}$$

Množiny $R_{nondiag}$ a $R_{nondiag}^{-1}$ sú disjunktné. Nech majú tieto dve množiny spoločný prvok (x, y) a (y, x) , potom však zo skutočnosti, že relácia R je antisymetrická, vyplýva, že ak také dvojice existujú, potom musí platiť $x = y$, čiže ich existencia je v spore s vlastnosťou $x \neq y$ pre inverznú reláciu nediagonálnej časti. Prienik $R \cap R^{-1}$ obsahuje teda len diagonálne dvojice, takže musí byť podmnožinou množiny Δ .

(c) Relácia $R \subseteq X \times X$ je reflexívna vtedy a len vtedy, ak R^{-1} je reflexívna relácia.

K dôkazu tejto vlastnosti použijeme formuly pre R a R^{-1} z predchádzajúceho príkladu. Pretože relácia R je reflexívna, potom jej diagonálna časť R_{diag} je totožná s množinou Δ , $R_{diag} = \Delta$.

Z tvorby inverznej relácie R^{-1} vyplýva, že aj táto relácia má diagonálnu časť totožnú s Δ , $R_{diag}^{-1} = \Delta$, z čoho priamo vyplýva, že aj inverzná relácia R^{-1} je reflexívna.

(d) Ak je relácia $R \subseteq X \times X$ reflexívna a tranzitívna, potom pre každé $n > 0$ platí, že $R^n = R$, kde $R^n = \underbrace{R \circ R \circ \dots \circ R}_{n\text{-krát}}$.

Dokáže sa úplnou indukciou. Prípád $n = 1$ je triviálny, pretože je to totožné s tvrdením, že $R = R$. Predpokladajme platnosť indukčnej hypotézy, že $R^n = R$, potom musíme dokázať, že $R^{n+1} = R$. Platí, že $R^{n+1} = R^n \circ R$. Musíme teda ukázať, že $R^n \circ R \subseteq R$ a $R \subseteq R^n \circ R$. Prvý vzťah dokážeme pomocou tranzitivity R takto: predpokladajme, že dvojica $(a, c) \in R^n \circ R$, to znamená, že musí existovať taký element b , že $(a, b) \in R$ a $(b, c) \in R^n$. Pomocou indukčnej hypotézy druhý výraz môžeme zjednodušiť na $(b, c) \in R$. Ak použijeme tranzitivitu R , vidíme, že $(a, c) \in R$, čo bolo potrebné dokázať.

Dôkaz druhého vzťahu $R \subseteq R^n \circ R$ je analogický. Predpokladajme, že $(a, b) \in R$, potom musíme dokázať, že $(a, b) \in R^n \circ R$. Pomocou indukčnej hypotézy, $R^n = R$, a preto je R^n reflexívne. Potom $(b, b) \in R^n$. Pretože $(a, b) \in R$ a $(b, b) \in R^n$, potom $(a, b) \in R^n \circ R$, čo bolo potrebné dokázať.

3.12. Rozhodnite, či $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ak

(a) $f(x) = 1/x$, $D_f = \mathbb{R} - \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$, teda neplatí $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

(b) $f(x) = \sqrt{x}$, $D_f = \langle 0, \infty \rangle$, teda neplatí $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

(c) $f(x) = \sqrt{1+x^2}$, $D_f = \mathbb{R}$, teda platí $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (obor funkčných hodnôt $H_f = \langle 1, \infty \rangle \subset \mathbb{R}$, pre funkciu $f : A \rightarrow B$ musí platiť iba $A = D_f$, obor funkčných hodnôt môže byť podmnožinou kooboru B).

3.13. Nájdite definičný obor a obor hodnôt funkcií:

(a) funkcia priradí každému bitovému reťazcu rozdiel medzi počtom jednotiek a počtom núl v reťazci,

$$D_f = \{0,1\}^n, H_f = \begin{cases} \{-n, -n+2, \dots, -2, 0, 2, \dots, n-2, n\} & (\text{pre } n \text{ párne}) \\ \{-n, -n+1, \dots, -1, 1, \dots, n-1, n\} & (\text{pre } n \text{ nepárne}) \end{cases}$$

(b) funkcia priradí každému bitovému reťazcu dvojnásobok počtu núl v reťazci,

$$D_f = \{0,1\}^n, H_f = \{0, 2, 4, \dots, 2n\}$$

(c) funkcia priradí (štandardným spôsobom) každému bitovému reťazcu dekadické číslo.

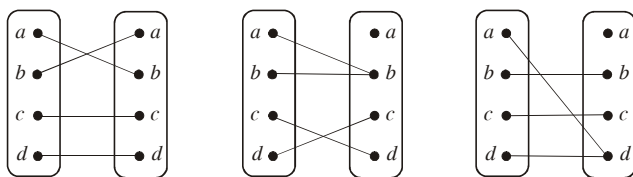
$$D_f = \{0,1\}^n, H_f = \{0, 1, \dots, 2^n - 1\}$$

3.14. Zistite, či funkcie $f : A \rightarrow A$, kde $A = \{a, b, c, d\}$, sú injektívne a nakreslite diagram zobrazenia podľa obr. 3.11:

(a) $f(a) = b, f(b) = a, f(c) = c, f(d) = d$, injekcia

(b) $f(a) = b, f(b) = b, f(c) = d, f(d) = c$, jednoznačné zobrazenie

(c) $f(a) = d, f(b) = b, f(c) = c, f(d) = d$, jednoznačné zobrazenie



(a)

(b)

(c)

3.15. Zistite, či funkcie $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, kde $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ je množina prirodzených čísel, môžu byť definované nasledujúcim spôsobom:

(a) $f(n) = n - 1$, nie, platí $f(1) = 0$, $H_f \not\subset \mathbb{N}$

(b) $f(n) = n^2$, áno, $H_f \subset \mathbb{N}$

(c) $f(n) = 1 + \text{integer}(n/2)$, kde $\text{integer}(x)$ je celá časť reálneho čísla, áno, $H_f = \mathbb{N}$

(d) $f(n) = n^3$, áno, $H_f \subset \mathbb{N}$

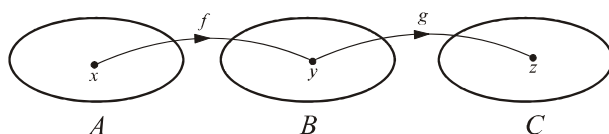
3.16. Nech $f : A \rightarrow B$, zostrojte obor hodnôt $H_f(A) \subseteq B$ kde $A = \{-1, 0, 2, 4, 7\}$, pre

- (a) $f(x) = 1, f(A) = \{1\}$,
- (b) $f(x) = 2x + 1, f(A) = \{-1, 1, 5, 9, 15\}$
- (c) $f(x) = \text{integer}(x/5), f(A) = \{0, 1\}$
- (d) $f(x) = \text{integer}((1+x^2)/3), f(A) = \{0, 1, 5, 16\}$.

3.17. Nech $f(x) = 2x$, zostrojte:

- (a) $f(A)$, kde A je množina celých čísel, $f(A) = \{2k; k \in A\}$
- (b) $f(A)$, kde A je množina kladných celých čísel, $f(A) = \{2k; k \in A\}$,
- (c) $f(\mathbb{R})$, kde \mathbb{R} je množina reálnych čísel, $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

3.18. Nech $f : A \rightarrow B$ a $g : B \rightarrow C$, dokážte, že ak funkcie f a g sú injektívne, potom aj ich kompozícia $f \circ g : A \rightarrow C$ je injektívna funkcia.



Injektívne funkcie f a g sú definované takto:

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

$$y_1 \neq y_2 \Rightarrow g(y_1) \neq g(y_2)$$

Pre zloženú funkciu platí

$$y = f(x)$$

$$z = g(y)$$

$$z = g(y) = g(f(x)) = h(x)$$

Ľahko sa dokáže, že z predpokladu injektívnosti funkcií f a g vyplýva aj injektívnosť ich zloženej funkcie h . Postuluje sa, že funkcie f a g sú injekcie

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow \underbrace{f(x_1)}_{y_1} \neq \underbrace{f(x_2)}_{y_2} \Rightarrow g(y_1) \neq g(y_2) \Rightarrow \underbrace{z_1}_{h(x_1)=g(f(x_1))} \neq \underbrace{z_2}_{h(x_2)=g(f(x_2))}$$

potom platí, že aj zložená funkcia h je injekcia.

3.19. Zostrojte zložené funkcie $f(g(x))$ a $g(f(x))$, kde $f(x) = 1 + x^2$ a $g(x) = x + 2$ sú funkcie s oborom reálnych čísel.

$$f(g(x)) = f(x+2) = 1 + (x+2)^2$$

$$g(f(x)) = g(1+x^2) = (1+x^2) + 2$$

3.20. Nech $f(x) = ax + b$ a $g(x) = cx + d$, kde a, b, c a d sú konštanty, zistite, za akých podmienok platí $f(g(x)) = g(f(x))$.

$$f(g(x)) = a g(x) + b = a(cx + d) + b = acx + ad + b$$

$$g(f(x)) = c f(x) + d = c(ax + b) + d = acx + bc + d$$

Aby platilo $f(g(x)) = g(f(x))$, musí platiť $ad + b = bc + d$.

3.21. Zistite, za ktorých podmienok existuje k funkcii $f(x) = ax + b$ funkcia inverzná $f^{-1}(x)$.

$$f(x) = y \Rightarrow ax + b = y \Rightarrow x = f^{-1}(y) = \frac{1}{a}(y - b)$$

Inverzná funkcia existuje ak $a \neq 0$.

3.22. Nech $f : A \rightarrow B$ a nech $A', A'' \subseteq A$. Dokážte platnosť týchto formúl:

(a) $f(A' \cup A'') = f(A') \cup f(A'')$,

$$f(A) = \{f(x); x \in A\},$$

$$f(A' \cup A'') = \{f(x); x \in (A' \cup A'')\} = \{f(x); x \in A'\} \cup \{f(x); x \in A''\} = f(A') \cup f(A'')$$

(b) $f(A' \cap A'') \subseteq f(A') \cap f(A'')$.

$$f(A' \cap A'') = \{f(x); x \in (A' \cap A'')\} \subseteq \{f(x); x \in A'\} \cap \{f(x); x \in A''\} = f(A') \cap f(A'')$$

3.23. Nech $f(x) = x^2$ je funkcia s oborom nezáporných reálnych čísel. Nájdite

(a) $f^{-1}(1)$, $f(1) = 1 \Rightarrow f^{-1}(1) = 1$

(b) $f^{-1}(\{x; 0 < x < 1\})$, $A = (0, 1)$, $f(A) = \{f(x) = x^2; x \in A\} = A \Rightarrow f^{-1}(A) = A$

(c) $f^{-1}(\{x; x > 4\})$, $A = (2, \infty)$, $f(A) = (4, \infty) = B \Rightarrow f^{-1}(B) = A$

3.24. Nech $f : A \rightarrow B$ a nech $B', B'' \subseteq B$. Dokážte platnosť týchto formúl:

(a) $f^{-1}(B' \cap B'') = f^{-1}(B') \cap f^{-1}(B'')$,

$$f^{-1}(B' \cap B'') = \{f^{-1}(y); y \in (B' \cap B'')\} \subseteq \{f^{-1}(y); y \in B'\} \cap \{f^{-1}(y); y \in B''\} =$$

$$f^{-1}(B') \cap f^{-1}(B'')$$

$$f^{-1}(B') \cap f^{-1}(B'') = \{f^{-1}(y); y \in B'\} \cap \{f^{-1}(y); y \in B''\} \subseteq \{f^{-1}(y); y \in (B' \cap B'')\}$$

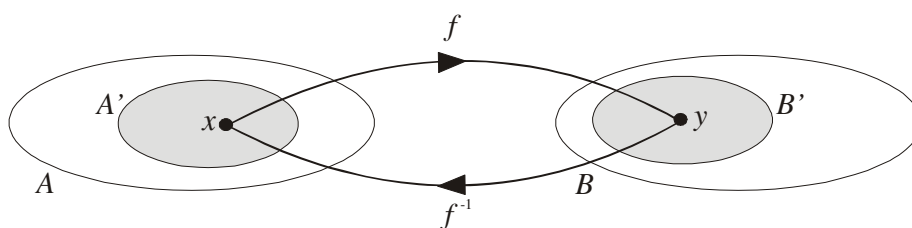
(b) $f^{-1}(B' \cup B'') = f^{-1}(B') \cup f^{-1}(B'')$.

$$f^{-1}(B' \cup B'') = \{f^{-1}(y); y \in (B' \cup B'')\} \subseteq \{f^{-1}(y); y \in B'\} \cup \{f^{-1}(y); y \in B''\} =$$

$$f^{-1}(B') \cup f^{-1}(B'')$$

$$f^{-1}(B') \cup f^{-1}(B'') = \{f^{-1}(y); y \in B'\} \cup \{f^{-1}(y); y \in B''\} \subseteq \{f^{-1}(y); y \in (B' \cup B'')\}$$

3.25. Nech $f : A \rightarrow B$ a nech $B' \subseteq B$. Dokážte platnosť formuly $f^{-1}(\overline{B'}) = \overline{f^{-1}(B')}$, kde $\overline{B'}$ je $B - B'$ a $\overline{f^{-1}(B')}$ je $A - H_{f^{-1}}(B')$.



$$\overline{A'} = A - A', \quad \overline{B'} = B - B'$$

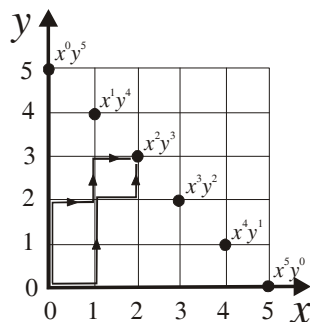
$$f(A') = \{f(x); x \in A'\} = B', \quad f(\overline{A'}) = \{f(x); x \in \overline{A'}\} = \overline{\{f(x); x \in A'\}} = \overline{f(A')} = \overline{B'}$$

$$f^{-1}(B') = \{f^{-1}(y); y \in B'\} = A', \quad f^{-1}(\overline{B'}) = \{f^{-1}(y); y \in \overline{B'}\} = \overline{\{f^{-1}(y); y \in B'\}} = \overline{f^{-1}(B')}$$

RIEŠENÉ CVIČENIA Z KAPITOLY 4

4.1. Nájdite rozvoj $(x + y)^5$ pomocou kombinatorických úvah, koľkými spôsobmi vznikajú pri rozvoji $(x + y)^5 = (x + y)(x + y)(x + y)(x + y)(x + y)$ súčiny $x^i y^j$.

Nakreslíme si pomocný obrázok, ortogonálnu mriežku 5×5 , na tejto mriežke sú vyznačené body ktoré sú interpretované ako súčiny $x^{5-i} y^i$. Každý takýto súčin je realizovaný v rozvoji $(x + y)^5 = (x + y)(x + y)(x + y)(x + y)(x + y)$ toľkokrát, koľko existuje ciest z bodu $(0, 0)$ do bodu označenom $x^{5-i} y^i$.



Platí rozvoj

$$\begin{aligned} (x + y)^5 &= \sum_{i=0}^5 \binom{5}{i} x^{5-i} y^i = \binom{5}{0} x^5 + \binom{5}{1} x^4 y + \binom{5}{2} x^3 y^2 + \binom{5}{3} x^2 y^3 + \binom{5}{4} x y^4 + \binom{5}{5} y^5 \\ &= x^5 + 5x^4 y + 10x^3 y^2 + 10x^2 y^3 + 5x y^4 + y^5 \end{aligned}$$

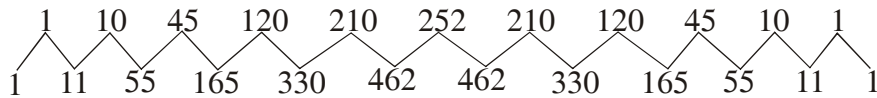
4.2. Nájdite koeficient $x^8 y^9$ v rozvoji $(3x + 2y)^{17}$.

$$(3x + 2y)^{17} = \sum_{i=0}^{17} \binom{17}{i} (3x)^{17-i} (2y)^i = \dots + \binom{17}{9} (3x)^8 (2y)^9 + \dots = \dots + \binom{17}{9} 3^8 2^9 (x^8 y^9) + \dots$$

Potom, hľadaný koeficient stojací pri $x^8 y^9$ má tvar

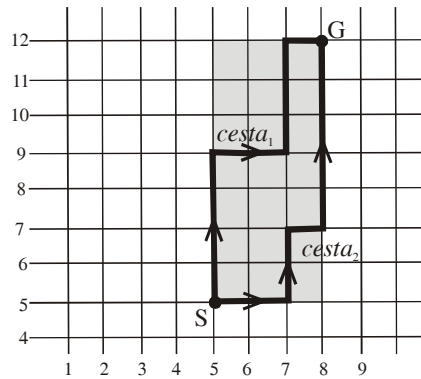
$$\binom{17}{9} 3^8 2^9 = 81662929920$$

- 4.3. Nech riadok v Pascalovom trojuholníku obsahuje binomické koeficienty $\binom{10}{k}$, pre $0 \leq k \leq 10$ má tieto členy: 1, 10, 45, 120, 210, 252, 210, 120, 45, 10, 1. Použitím Pascalovej identity (4.5d) zostrojte nasledujúci riadok.



- 4.4. John býva v New Yorku na Manhattane na rohu 5th Avenue a 5th Street. Akú minimálnu vzdialenosť prejde do práce ráno, ak jeho úrad sídli na rohu 8th Avenue a 12th Street? Koľko rôznych ciest má túto minimálnu vzdialenosť?

Minimálna vzdialenosť, ktorú John musí prejsť, je 10 blokov, $|8 - 5| + |12 - 5| = 10$.



Použijeme identitu (4.4)

$$f_{ij} = \binom{i+j}{i}$$

ktorá špecifikuje počet ciest z bodu $(0,0)$ do bodu (i,j) , v našom prípade hľadaný počet ciest je

$$\binom{10}{3} = 120$$

- 4.5. Dokážte platnosť identity $k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$.

$$n \binom{n-1}{k-1} = n \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = \frac{(n)!}{(k-1)!(n-k)!} \frac{k}{k} = k \frac{(n)!}{(k)!(n-k)!} = k \binom{n}{k}$$

- 4.6. Dokážte platnosť identity $\binom{n}{r} \binom{r}{k} = \binom{n}{k} \binom{n-k}{r-k}$.

$$\begin{aligned} \binom{n}{r} \binom{r}{k} &= \frac{n!}{r!(n-r)!} \frac{r!}{k!(r-k)!} = \frac{n!}{(n-r)!k!(r-k)!} \frac{(n-k)!}{(n-k)!} = \\ &= \frac{n!}{k!(n-k)!(n-r)!(r-k)!} = \binom{n}{k} \binom{n-k}{r-k} \end{aligned}$$

4.7. Použitím identity (4.11a) spočítajte postupne binomický koeficient $\binom{15}{4}$, pričom výpočet je inicializovaný „počiatočnou hodnotou“ binomického koeficienta $\binom{15}{0} = 1$.

$$\binom{15}{0+1} = \frac{15-0}{0+1} \binom{15}{0} = 15 \cdot 1 = 15,$$

$$\binom{15}{1+1} = \frac{15-1}{1+1} \binom{15}{1} = \frac{14}{2} \cdot 15 = 105,$$

$$\binom{15}{2+1} = \frac{15-2}{2+1} \binom{15}{2} = \frac{13}{3} \cdot 105 = 455,$$

$$\binom{15}{3+1} = \frac{15-3}{3+1} \binom{15}{3} = \frac{12}{4} \cdot 455 = 1365.$$

4.8. Postup výpočtu binomického koeficientu z cvičenia 4.7 zovšeobecnite do tvaru algoritmu špecifikovaného napr. v PseudoPascalle pre výpočet binomického koeficientu $\binom{i}{j}$, kde $i \geq j \geq 0$. Diskutujte význam tohto algoritmu vzhľadom k algoritmu, ktorý počíta binomické koeficienty pomocou ich definície, $\binom{i}{j} = i! / (j!(i-j)!)$.

$$\binom{i}{j+1} = \frac{i-j}{j+1} \binom{i}{j} \Rightarrow \binom{i}{j} = \frac{i-j+1}{j} \binom{i}{j-1}, \text{ nerekurzívny a rekurzívny algoritmus je}$$

```
function Binomial_coefficient(i, j: integer): integer;
var sum, jj: integer;
begin
  sum:=1;
  for jj:=1 to j do sum:=(sum*(i-jj+1)) div jj;
  Binomial_coefficient:=sum;
end;
```

```

function Bcoeff(i, j: integer):integer;
begin if j=0 then Bcoeff:=1 else
    Bcoeff:=(i-j+1)*Bcoeff(i, j-1) div j;
end;

```

Nie je vhodné na výpočet binomických koeficientov používať priamo formulu $\binom{i}{j} = i! / (j!(i-j)!)$, pretože pre väčšie hodnoty argumentov i alebo j je potrebné poznať ich faktoriály, čo môže spôsobiť preplnenie aritmetickej jednotky počítača, ktorá pracuje len s konečnou presnosťou.

4.9. V Pascalovom trojuholníku je pre n -tý riadok určená počiatočná časť členov, zostrojte nasledujúci člen tejto postupnosti: 1, 9, 36, 84.

$$\binom{i}{j} = \frac{i-j+1}{j} \binom{i}{j-1}$$

$$\binom{n}{0} = 1, \binom{n}{1} = 9, \text{ z tejto podmienky určíme aj } n, \binom{n}{1} = \frac{n!}{(n-1)!1!} \Rightarrow n = 9$$

$$\binom{n}{2} = 36, \binom{n}{3} = 84, \binom{n}{4} = \frac{n-3}{4} 84 = \frac{6}{4} 84 = 126$$

4.10. Zostrojte koeficient člena $x^3 y^2 z^5$ z rozvoja $(x + y + z)^{10}$.

Na riešenie tohto problému použijeme multinomickú vetu pre $n=3$

$$(x + y + z)^{10} = \sum_{\substack{n_1, n_2, n_3 \geq 0 \\ (n_1 + n_2 + n_3 = 10)}} \frac{10!}{n_1! n_2! n_3!} x^{n_1} y^{n_2} z^{n_3}$$

Potom koeficient pri súčine $x^3 y^2 z^5$ je určený zlomkom $\frac{10!}{3!2!5!} = 2520$

4.11. Nech $A = \{a, b, c, d\}$, vytvorte

(a) všetky permutácie vzhľadom k tejto množine: 24 permutácií

$(abcd), (abdc), (acbd), (acdb), (adbc), (adcb),$
 $(bacd), (badc), (bcad), (bcda), (bdac), (bdca),$
 $(cabd), (cadb), (cbad), (cbda), (cdab), (cdba),$
 $(dabc), (dacb), (dbac), (dbca), (dcab), (dcba).$

(b) všetky permutácie, ktoré končia znakom a ,

$(bcda), (bdca), (cbda), (cdba), (dbca), (dcba).$

(c) všetky permutácie, ktoré majú znak a práve raz.

$(abcd), (abdc), (acbd), (acdb), (adbc), (adcb),$
 $(bacd), (badc), (bcad), (bcda), (bdac), (bdca),$
 $(cabd), (cadb), (cbad), (cbda), (cdab), (cdba),$
 $(dabc), (dacb), (dbac), (dbca), (dcab), (dcba).$

4.12. Aký je počet 5-permutácií nad množinou A, ktorá obsahuje 8 elementov, $|A| = 8$?

$$N(8,5) = \frac{8!}{(8-5)!} = \frac{8!}{3!} = 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 = 6720$$

4.13. Koľko možností existuje pre prvé tri pozície v konškových dostihoch pre 12 koní?

$$N(12,3) = \frac{12!}{(12-3)!} = \frac{12!}{9!} = 10 \cdot 11 \cdot 12 = 1320$$

4.14. Koľko existuje binárnych reťazcov dĺžky 10, ktoré

(a) obsahujú práve jednu jednotku, 10

(b) maximálne tri jednotky, $\binom{10}{0} + \binom{10}{1} + \binom{10}{2} + \binom{10}{3} = 1 + 10 + 45 + 120 = 176$

(c) minimálne tri jednotky,

$$\binom{10}{3} + \binom{10}{4} + \binom{10}{5} + \binom{10}{6} + \binom{10}{7} + \binom{10}{8} + \binom{10}{9} + \binom{10}{10} =$$

$$120 + 210 + 252 + 210 + 120 + 45 + 10 + 1 = 968$$

$$2^{10} - \left(\binom{10}{0} + \binom{10}{1} + \binom{10}{2} \right) = 1024 - 1 - 10 - 45 = 968$$

(d) rovnaký počet jednotiek a núl.

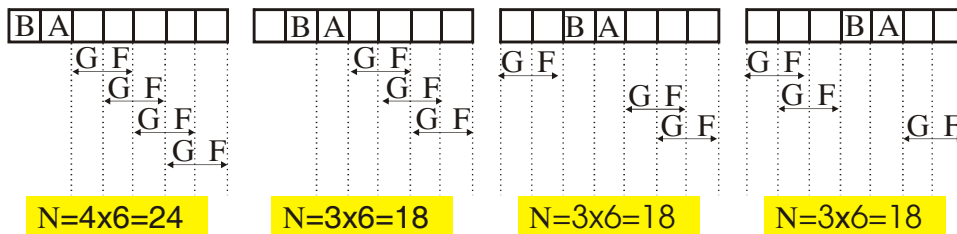
$$\binom{10}{5} = 252$$

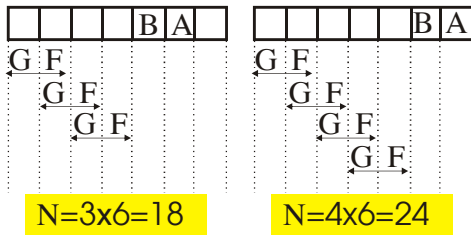
4.15. Koľko existuje permutácií nad reťazcom ABCDEFG, ktoré

(a) obsahujú podreťazec BCD, $5! = 120$

(b) obsahujú podreťazec CFGA, $4! = 24$

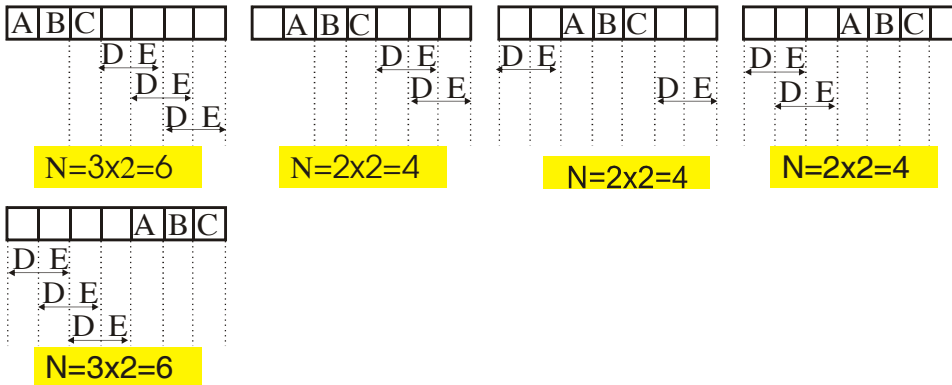
(c) obsahujú dva podreťazce BA a GF,





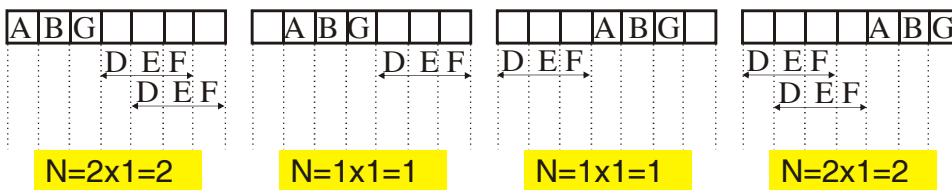
Celkový počet reťazcov je $2 \times 24 + 4 \times 18 = 120$.

(d) obsahujú dva podreťazce ABC a DE,



Celkový počet reťazcov je $2 \times 6 + 3 \times 4 = 24$.

(e) obsahujú dva podreťazce DEF a ABG.



Celkový počet reťazcov je $2 \times 2 + 2 \times 1 = 6$.

Vo všetkých týchto prípadoch môžeme tak jednotlivé písmeno, ako aj podreťazec chápať ako jednotku, ktorej pozíciu presúvame, takže potom máme počet permutácií nezávislých „jednotiek“, čo je vždy faktoriál ich počtu. Napríklad pri príklade (d) môžeme namiesto podreťazca ABC nahradiť písmenom Y a namiesto DE dať písmeno Z, potom teda máme permutácie reťazca YZFG, teda permutáciu 4 prvkov, čo je $4!$

4.16. Koľkými spôsobmi môžeme usporiadať 8 mužov a 5 žien tak, aby dve ženy nestáli vedľa seba?

Máme 7 pozícií medzi za sebou zoradenými mužmi a 1 pozíciu pred prvým mužom a jednu pozíciu za posledným mužom, kde môžeme umiestniť ženy tak, aby nestáli vedľa inej ženy. Samozrejme predpokladáme, že mužov medzi sebou a ženy medzi sebou nerozlišujeme, inak by výsledok musel byť vynásobený ešte $8!$ a $5!$

$$\binom{9}{5} = 126$$

- 4.17.** Na skúške z diskkrétnej matematiky bolo nutné vyhodnotiť 40 jednoduchých otázok tak, že musia byť označené ako pravdivé alebo nepravdivé, pričom 17 otázok je nepravdivých. Koľkými rôznymi spôsobmi môžu byť označené jednotlivé príklady za pravdivé a nepravdivé?

$$\frac{40!}{17!23!} = 88732378800$$

- 4.18.** Na Ústave kognitívnej vedy našej fakulty je zamestnaných sedem žien a deväť mužov.

- (a) Koľkými spôsobmi môžeme vytvoriť štátnicovú komisiu, ktorá má šesť členov tak, aby mala rovnaký počet mužov a žien?

$$\binom{7}{3} \binom{9}{3} = 2940$$

- (b) Koľkými spôsobmi môžeme zostaviť päťčlennú vedeckú radu ústavu, tak, aby obsahovala aspoň jedného muža a jednu ženu?

$$\binom{7}{1} \binom{9}{4} + \binom{7}{2} \binom{9}{3} + \binom{7}{3} \binom{9}{2} + \binom{7}{4} \binom{9}{1} = 4221$$

- 4.19.** Anglická abeceda má 21 spoluhlások a 5 samohlások. Koľko reťazcov dĺžky 6 môžeme zostaviť nad touto abecedou tak, aby

- (a) obsahovali práve jednu samohlásku? $5^1 \times 21^5 \times 6 = 122523030$

- (b) obsahovali práve dve samohlásky? $5^2 \times 21^4 \times \binom{6}{2} = 72930375$

- (c) obsahovali maximálne jednu samohlásku? $5^0 \times 21^6 + 5^1 \times 21^5 \times 6 = 208289151$

- (d) obsahovali maximálne dve samohlásky? $5^0 \times 21^6 + 5^1 \times 21^5 \times 6 + 5^2 \times 21^4 \times \binom{6}{2} = 281219526$

- 4.20.** Koľkými spôsobmi môžeme vytvoriť postupnosť piatich znakov nad množinou, ktorá obsahuje tri elementy, ak opakovanie je povolené?

$$3^5 = 243$$

- 4.21.** Koľkými spôsobmi môžeme vybrať päť elementov do postupnosti z množiny obsahujúcej päť elementov, pričom opakovanie je povolené?

$$5^5 = 3125$$

- 4.22.** Koľko reťazcov obsahujúcich šesť rôznych písmen môže byť vytvorených?

Anglická abeceda obsahuje 26 písmen, potom reťazcov obsahujúcich 6 znakov je $26 \times 25 \times 24 \times 23 \times 22 \times 21 = 165765600$

- 4.23.** Koľkými spôsobmi môžeme vybrať 8 mincí z detskej sporiteľničky (prasiatka), ktorá obsahuje 100 jednokorunových mincí a 50 dvojkorunových mincí? (Mince sú inak nerozlíšiteľné a nezáleží na poradí výberu mincí, iba na sume ich hodnôt.)

$M_i = (i \times 1 + (8 - i) \times 2)$, pre $i = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$, t. j. 9 rôznych spôsobov výberu mincí.

RIEŠENÉ CVIČENIA Z KAPITOLY 5

5.1. Nájdite prvých päť členov postupnosti, z ktorých každá je definovaná rekurentnou formulou a počiatočnou podmienkou:

(a) $a_n = 6a_{n-1}$, $a_0 = 2$.

$$a_1 = 6a_0 = 6 \cdot 2,$$

$$a_2 = 6a_1 = 6 \cdot (6 \cdot 2) = 6^2 \cdot 2,$$

$$a_3 = 6a_2 = 6 \cdot (6^2 \cdot 2) = 6^3 \cdot 2,$$

$$a_4 = 6a_3 = 6 \cdot (6^3 \cdot 2) = 6^4 \cdot 2,$$

$$a_5 = 6a_4 = 6 \cdot (6^4 \cdot 2) = 6^5 \cdot 2,$$

$$a_n = 6a_{n-1} = 6^n \cdot 2.$$

(b) $a_n = a_{n-1}^2$, $a_0 = 2$.

$$a_1 = a_0^2 = 2^2,$$

$$a_2 = a_1^2 = (2^2)^2 = 2^4,$$

$$a_3 = a_2^2 = (2^4)^2 = 2^8,$$

$$a_4 = a_3^2 = (2^8)^2 = 2^{16},$$

$$a_5 = a_4^2 = (2^{16})^2 = 2^{32},$$

$$a_n = a_{n-1}^2 = 2^{2^n}.$$

(c) $a_n = a_{n-1} + 3a_{n-2}$, $a_0 = 1, a_1 = 2$.

$$a_2 = a_1 + 3a_0 = 2 + 3 \cdot 1 = 5,$$

$$a_3 = a_2 + 3a_1 = 5 + 3 \cdot 2 = 11,$$

$$a_4 = a_3 + 3a_2 = 11 + 3 \cdot 5 = 26,$$

$$a_5 = a_4 + 3a_3 = 26 + 3 \cdot 11 = 59.$$

(d) $a_n = na_{n-1} + n^2a_{n-2}$, $a_0 = 1, a_1 = 1$.

$$a_2 = 2a_1 + 4a_0 = 2 + 4 = 6,$$

$$a_3 = 3 \cdot a_2 + 9a_1 = 18 + 9 = 27,$$

$$a_4 = 4 \cdot a_3 + 16a_2 = 4 \cdot 27 + 16 \cdot 6 = 204,$$

$$a_5 = 5 \cdot a_4 + 25a_3 = 5 \cdot 204 + 25 \cdot 27 = 1695.$$

(e) $a_n = a_{n-1} + a_{n-3}$, $a_0 = 1, a_1 = 2, a_2 = 0$.

$$a_3 = a_2 + a_0 = 0 + 1 = 1,$$

$$a_4 = a_3 + a_1 = 1 + 2 = 3,$$

$$a_5 = a_4 + a_2 = 3 + 0 = 3.$$

5.2. Nech $a_n = 2^n + 5 \cdot 3^n$, pre $n = 0, 1, 2, \dots$

(a) nájdite a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 ,

$$a_0 = 2^0 + 5 \cdot 3^0 = 6,$$

$$a_1 = 2^1 + 5 \cdot 3^1 = 17,$$

$$a_2 = 2^2 + 5 \cdot 3^2 = 4 + 45 = 49,$$

$$a_3 = 2^3 + 5 \cdot 3^3 = 8 + 5 \cdot 27 = 143,$$

$$a_4 = 2^4 + 5 \cdot 3^4 = 16 + 5 \cdot 81 = 421.$$

(b) ukážte, že $a_2 = 5a_1 - 6a_0$, $a_3 = 5a_2 - 6a_1$ a $a_4 = 5a_3 - 6a_2$,

$$a_2 = 5a_1 - 6a_0 = 5 \cdot 17 - 6 \cdot 6 = 49,$$

$$a_3 = 5a_2 - 6a_1 = 5 \cdot 49 - 6 \cdot 17 = 143,$$

$$a_4 = 5 \cdot 143 - 6 \cdot 49 = 421.$$

(c) ukážte, že $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}$, pre $n \geq 2$.

$$a_n = 5(2^{n-1} + 5 \cdot 3^{n-1}) - 6(2^{n-2} + 5 \cdot 3^{n-2}) =$$

$$5(2^{n-1} + 5 \cdot 3^{n-1}) - 3 \cdot 2^{n-1} - 2 \cdot 5 \cdot 3^{n-1} = 2^n + 5 \cdot 3 \cdot 3^{n-1} = 2^n + 5 \cdot 3^n$$

5.3. Ukážte, že postupnosť $\{a_n\}$ je riešením rekurentnej formuly $a_n = -3a_{n-1} + 4a_{n-2}$ ak

(a) $a_n = 0$,

$$a_n = -3a_{n-1} + 4a_{n-2} = -3 \cdot 0 + 4 \cdot 0 = 0.$$

(b) $a_n = 1$,

$$a_n = -3a_{n-1} + 4a_{n-2} = -3 \cdot 1 + 4 \cdot 1 = 1.$$

(c) $a_n = (-4)^n$,

$$a_n = -3((-4)^{n-1}) + 4((-4)^{n-2}) = -3((-4)^{n-1}) - (-4)((-4)^{n-2})$$

$$= -3((-4)^{n-1}) - ((-4)^{n-1}) = -4(-4)^{n-1} = (-4)^n$$

(d) $a_n = 2(-4)^n + 3$.

$$a_n = -3(2(-4)^{n-1} + 3) + 4(2(-4)^{n-2} + 3)$$

$$= -9 + 12 - 6 \cdot (-4)^{n-1} - 2 \cdot (-4) \cdot (-4)^{n-2}$$

$$= 3 + \frac{6}{4}(-4)^n - 2 \cdot (-4)^{n-1} \frac{-4}{-4} = 3 + \frac{6}{4}(-4)^n + \frac{2}{4}(-4)^n = 3 + 2(-4)^n$$

5.4. Do banky ste uložili 1000 EUR na 3 % ročný úrok.

(a) Zostrojte rekurentnú formulu pre výpočet veľkosti vkladu,

$$A_0 = 1000; q = 1,03; A_n = qA_{n-1}$$

(b) zostrojte explicitnú formulu na veľkosť vkladu po n rokoch,

$$A_n = q^n A_0$$

(c) zistite, aká bude veľkosť vkladu po 100 rokoch.

$$A_{100} = q^{100} A_0 = (1,03)^{100} \cdot 1000 = 19218,6$$

5.5. Akú sumu v EUR musíte vložiť do banky na 3 % ročný úrok, aby ste si po dobu 15 rokov mohli koncom každého roka vyberať z banky 12 000 EUR tak, aby po 15 rokoch bol vklad úplne vybraný? (Tento problém sa nazýva v poisťovacej matematike úloha rentiera. V anglickej literatúre bol niekoľkokrát úspešne literárne spracovaný. Rodina očakávala, že strýko John je veľmi bohatý a preto budú po ňom dediť. Nepredpokladali však, že mal svoje peniaze uložené na „rentierskom vklade“ a podarilo sa mu celkom presne odhadnúť svoju „životnosť“).

$$A_0 = x, q = 1,03, B = 12000, m = 15, A_n = qA_{n-1} - B,$$

$$A_1 = qA_0 - B = qx - B,$$

$$A_2 = qA_1 - B = q(qx - B) - B = q^2x - B(1 + q)$$

$$A_3 = qA_2 - B = q(q^2x - B(1 + q)) - B = q^3x - B(1 + q + q^2)$$

.....

$$A_m = qA_{m-1} - B = q^m x - B \left(\underbrace{1 + q + q^2 + \dots + q^{m-1}}_{\frac{q^m - 1}{q - 1}} \right) = q^m x - B \frac{q^m - 1}{q - 1}$$

$$\text{podmienka: } A_m = 0 \Rightarrow q^m x - B \frac{q^m - 1}{q - 1} = 0 \Rightarrow x = \frac{q^m - 1}{q - 1} \frac{B}{q^m} = 143255 \text{ EUR}$$

5.6. Koľko existuje binárnych reťazcov dĺžky 7, ktoré obsahujú párny počet núl (t. j. 0, 2, 4 a 6)?

$$\binom{7}{0} + \binom{7}{2} + \binom{7}{4} + \binom{7}{6} = 1 + 21 + 35 + 7 = 64$$

5.7. V rámci metódy „rozdeľuj-a-panuj“ bola odvodená rekurentná formula $f(n) = 5f(n/2) + 3$, s počiatočnou podmienkou $f(1) = 7$. Nájdite $f(2^k)$, kde k je kladné celé číslo. Taktiež vyhodnoťte $f(n)$, pre $n \rightarrow \infty$.

$$f(2) = 5f(1) + 3 = 5 \cdot 7 + 3$$

$$f(4) = 5f(2) + 3 = 5 \cdot (5 \cdot 7 + 3) + 3 = 5^2 \cdot 7 + 3(5^1 + 1)$$

$$f(8) = 5f(4) + 3 = 5(5^2 \cdot 7 + 3(5^1 + 1)) + 3 = 5^3 \cdot 7 + 3(5^2 + 5^1 + 1)$$

.....

$$\begin{aligned}
 f(2^k) &= 5f(2^{k-1}) + 3 = 5^k 7 + 3 \left(\underbrace{5^{k-1} + 5^{k-2} + \dots + 5^1 + 1}_{\frac{5^k - 1}{5 - 1}} \right) \\
 &= 5^k 7 + 3 \frac{5^k - 1}{4} = 5^k \left(7 + \frac{3}{4} \right) - \frac{3}{4} = \frac{31}{4} 5^k - \frac{3}{4}
 \end{aligned}$$

Tento výsledok po jednoduchej úprave (založenej na substitúcii $5^k = 2^x \Rightarrow x = k \log_2 5$) prepíšeme do tvaru

$$f(2^k) = \frac{31}{4} (2^k)^{\log_2 5} - \frac{3}{4}$$

zavedieme pôvodnú premennú $n = 2^k$, potom $f(n) = \frac{31}{4} (n)^{\log_2 5} - \frac{3}{4}$, pre $n \rightarrow \infty$ táto funkcia sa asymptoticky správa ako $o(n^{\log_2 5})$, alebo $o(n^{2,32})$.

5.8. Nájdite, koľko porovnaní hľadaného čísla s číslom v usporiadanej postupnosti je potrebných pre binárne prehľadávanie v postupnosti, ktorá obsahuje 64 elementov.

Počet porovnaní potrebných na riešenie binárneho prehľadávania dimenzie $n = 2^k$ je určený rekurentnou formulou $f(n) = f(n/2) + 1$, s okrajovou podmienkou $f(1) = 1$. (V prednáškach uvedená formula $f(n) = f(n/2) + 2$ do dvojky zahŕňa aj porovnanie, či zvyšný zoznam je prázdny, toto porovnanie v našom príklade neuvažujeme). Iteračným riešením rekurentnej formuly dostaneme $f(2^k) = k + 1$. Pretože $2^k = 64$ implikuje $k = 6$, odpoveď na otázku je, že potrebujeme 7 porovnaní.

5.9. Predpokladajme, že $f(n) = f(n/3) + 1$, pričom n je deliteľné 3 a $f(1) = 1$. Nájdite

(a) $f(3)$, $f(3) = f(1) + 1 = 2$

(b) $f(27)$, $f(27) = f(9) + 1 = (f(3) + 1) + 1 = 4$

(c) $f(729)$, $f(729) = f(243) + 1 = (f(81) + 1) + 1 = f(27) + 3 = 7$

5.10. Predpokladajme, že $f(n) = 2f(n/2) + 3$, pričom n je párne a $f(1) = 5$. Nájdite

(a) $f(2)$, $f(2) = 2f(1) + 3 = 13$

(b) $f(8)$, $f(8) = 2f(4) + 3 = 2(2f(2) + 3) + 3 = 2(26 + 3) + 3 = 61$

(c) $f(64)$, $f(64) = 2f(32) + 3 = 2(2f(16) + 3) + 3 = 4f(16) + 9 = 4(2f(8) + 3) + 9 =$
 $= 8f(8) + 21 = 8 \cdot 61 + 21 = 509$

(d) $f(1024)$.

$$\begin{aligned} f(1024) &= 2f(512) + 3 = 2(2f(256) + 3) + 3 = 4f(256) + 9 \\ &= 4(2f(128) + 3) + 9 = 8f(128) + 21 = 8(2f(64) + 3) + 21 \\ &= 8(2f(64) + 3) + 21 = 16f(64) + 45 = 16 \cdot 509 + 45 = 8189 \end{aligned}$$

5.11. Nájdite $f(n)$, kde $n = 2^k$, funkcia f je určená rekurentnou funkciou $f(n) = f(n/2) + 1$, $f(1) = 1$. Ako sa správa funkcia f pre $n \rightarrow \infty$.

Položíme $n = 2^k$, potom

$$f(2) = f(1) + 1 = 2,$$

$$f(4) = f(2) + 1 = 3,$$

$$f(8) = f(4) + 1 = 4,$$

$$f(16) = f(8) + 1 = 5,$$

.....

$$f(2^k) = k + 1.$$

Vrátíme sa k pôvodnej premennej $n = 2^k$, kde $k = \log_2 n$, potom $f(n) = \log_2 n + 1$. Asymptotické správanie tejto funkcie má tvar $o(\log_2 n)$.

5.12. Nech na turnaji je 2^k družstiev, turnaj prebieha eliminačným spôsobom, t. j. do ďalšieho kola postupujú len víťazi z predchádzajúceho kola. Zostrojte rekurentnú funkciu pre počet vzájomných zápasov v turnaji a formulu, z ktorej počet zápasov spočítate naraz bez iterácií.

1. kolo: pre 2^k družstiev existuje 2^{k-1} zápasov.

2. kolo: pre 2^{k-1} družstiev existuje 2^{k-2} zápasov.

.....

($k-1$). kolo: pre 2^2 družstiev existuje 2^1 zápas (semifinále).

(k). kolo: pre 2^1 družstiev existuje $2^0 = 1$ zápas (finále).

Rekurentná funkcia pre počet zápasov v danom kole je pre $n = 2^k$, $f(n) = f(n/2) \cdot 2$, $f(2) = 1$

a celkový počet zápasov je teda $2^{k-1} + 2^{k-2} + \dots + 2 + 1 = \frac{2^k - 1}{2 - 1} = 2^k - 1$. Rekurentná funkcia pre

celkový počet zápasov je pre $n = 2^k$, $f(n) = f(n/2) \cdot 2 + 1$, $f(2) = 1$.

5.13. Nech funkcia f vyhovuje rekurentnej funkcii $f(n) = 2f(\sqrt{n}) + 1$, kde n je väčšie ako 1 a je odmocniteľné, počiatočná podmienka má tvar $f(2) = 1$. Nájdite

(a) $f(16)$,

$$f(16) = 2f(4) + 1 = 2(2f(2) + 1) + 1 = 4f(2) + 3 = 7$$

(b) asymptotickú formulu pre $n \rightarrow \infty$.

Zavedieme substitúciu $n = 2^{2^k}$, potom

$$f(2^{2^k}) = 2f(2^{2^{k-1}}) + 1,$$

$$k = 0 \Rightarrow f(2) = 1$$

$$k = 1 \Rightarrow f(4) = 2f(2) + 1 = 2 \cdot 1 + 1$$

$$k = 2 \Rightarrow f(16) = 2f(4) + 1 = 2(2 \cdot 1 + 1) + 1 = 2^2 \cdot 1 + (2 + 1)$$

$$k = 3 \Rightarrow f(256) = 2f(16) + 1 = 2(2^2 \cdot 1 + (2 + 1)) + 1 = 2^3 \cdot 1 + (2^2 + 2^1 + 2^0)$$

Vo všeobecnosti platí

$$f(2^{2^k}) = 2^k \cdot 1 + \underbrace{(2^{k-1} + 2^{k-2} + \dots + 2^1 + 2^0)}_{\frac{2^k - 1}{2 - 1}} = 2^k + 2^k - 1 = 2^{k+1} - 1$$

Vrátime sa k pôvodnej premennej $n = 2^{2^k}$, potom $f(n) = 2 \log_2 n - 1$, asymptotické správanie sa tejto funkcie pre $n \rightarrow \infty$ má tvar $o(\log_2 n)$.

5.14. Koľko elementov obsahuje zjednotenie $A_1 \cup A_2$, ak $|A_1| = 12$, $|A_2| = 18$,

- (a) $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, $|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| = 30$
- (b) $|A_1 \cap A_2| = 1$, $|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2| = 29$
- (c) $|A_1 \cap A_2| = 6$, $|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2| = 24$
- (d) $A_1 \subseteq A_2$, $|A_1 \cup A_2| = |A_2| = 18$

5.15. Na fakulte je 345 študentov, ktorí si zapísali predmet Matematická analýza, 212 študentov, ktorí si zapísali predmet Diskrétna matematika a 188 študentov, ktorí si zapísali súčasne predmety Matematická analýza a Diskrétna matematika. Koľko študentov má zapísaný aspoň jeden z predmetov Matematická analýza alebo Diskrétna matematika?

$$|MA| = 345, |DM| = 212, |MA \cap DM| = 188$$

$$|MA \cup DM| = |MA| + |DM| - |MA \cap DM| = 345 + 212 - 188 = 369$$

5.16. Zistite, koľko elementov obsahuje zjednotenie $A_1 \cup A_2 \cup A_3$, ak každá množina obsahuje 100 elementov, pričom

- (a) množiny sú po dvojiciach disjunktné, $|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = 300$
- (b) každá dvojica množín obsahuje 50 spoločných elementov a žiadny element, ktorý by sa súčasne nachádzal vo všetkých troch množinách, $|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = 300 - 3 \cdot 50 = 150$
- (c) každá dvojica množín obsahuje 50 spoločných elementov a 25 elementov, ktoré sa nachádzajú súčasne vo všetkých troch množinách, $|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = 300 - 3 \cdot 50 + 25 = 175$

5.17. Nájdite počet kladných celých čísel, ktoré nie sú väčšie ako 100 a ktoré nie sú súčasne deliteľné 7 ani 5.

$$U = \{1, 2, \dots, 100\},$$

$$A_1 = \{n; (n \in U) \wedge (\text{mod}(n, 7) = 0)\} = \{n = 7 \cdot k; k = 1, 2, 3, \dots, 10, 11, 12, 13, 14\}, |A_1| = 14$$

$$A_2 = \{n; (n \in U) \wedge (\text{mod}(n, 5) = 0)\} = \{n = 5 \cdot k; k = 1, 2, 3, \dots, 20\}, |A_2| = 20$$

pričom

$$A_1 \cap A_2 = \{n = 35 \cdot k; k = 1, 2\}, |A_1 \cap A_2| = 2$$

$$\begin{aligned} |\bar{A}_1 \cup \bar{A}_2| &= |\bar{A}_1| + |\bar{A}_2| - |\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2| = (|U| - |A_1|) + (|U| - |A_2|) - (|U| - |A_1 \cup A_2|) \\ &= |U| - |A_1| - |A_2| + |A_1 \cup A_2| \\ &= |U| - |A_1| - |A_2| + (|A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|) \\ &= |U| - |A_1 \cap A_2| = 100 - 2 = 98 \end{aligned}$$

- 5.18.** Nájdite počet kladných celých čísel, ktoré nie sú väčšie ako 100 a ktoré sú párne alebo sú kvadrátom nejakého celého čísla.

$$U = \{1, 2, \dots, 100\},$$

$$A_1 = \{n; (n \in U) \wedge \exists k (n = 2k)\} = \{n = 2k; k = 1, 2, 3, \dots, 50\}, |A_1| = 50$$

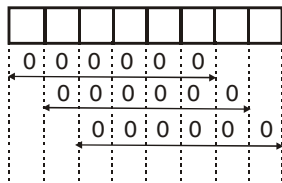
$$A_2 = \{n; (n \in U) \wedge (\exists k (n = k^2))\} = \{n = k^2; k = 1, 2, 3, \dots, 10\}, |A_2| = 10$$

$$|A_1 \cap A_2| = |\{4, 16, 36, 64, 100\}| = 5$$

$$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2| = 50 + 10 - 5 = 55$$

- 5.19.** Koľko binárnych reťazcov dĺžky 8 neobsahuje podreťazec '000000'?

Budeme riešiť inverznú úlohu, koľko binárnych reťazcov dĺžky 8 obsahuje reťazec '000000'.



Z tohto obrázku vyplýva, že reťazec '000000' môže byť umiestnený v reťazci dĺžky 8 tromi rôznymi spôsobmi, pričom dve bitové polohy môžu byť ľubovoľné, z toho vyplýva, že počet reťazcov $3 \cdot 2^2 = 12$. Z toho ale 3 reťazce z 12 sa vyskytujú viackrát, konkrétne (00000000 je generovaný 3x, 00000001 je 2x a 10000000 je 2x), teda rozdielných je iba 8. Z tohto výsledku vyplýva, že počet binárnych reťazcov dĺžky 8, ktoré neobsahujú reťazec '000000' je

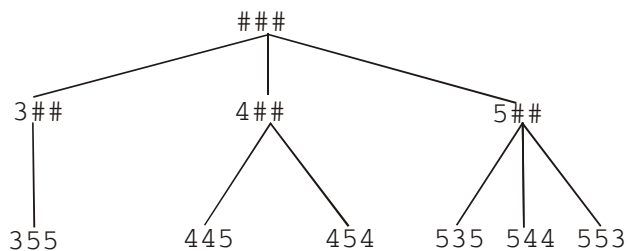
$$2^8 - 8 = 248$$

- 5.20.** V koši máme 100 jabĺčok, z ktorých je 20 červivých a 15 nahnitých. Nech v koši je 10 jabĺčok, ktoré sú červivé a nahnité, koľko jabĺčok v koši nie je ani červivých a ani nahnitých?

$$A_1 = \{\text{červivé jabĺčka}\}, A_2 = \{\text{nahnité jabĺčka}\} |A_1| = 20, |A_2| = 15, |A_1 \cap A_2| = 10,$$

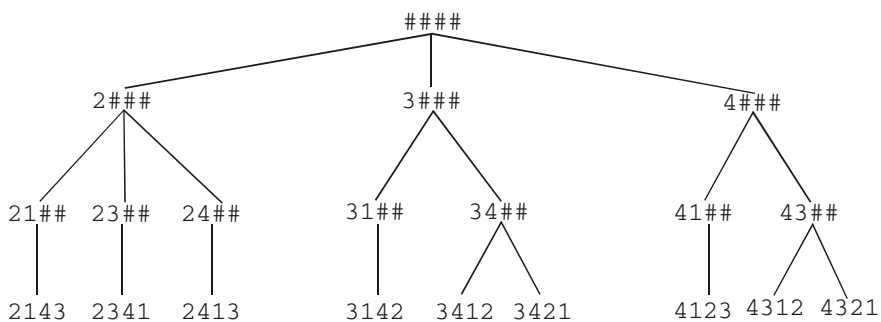
$$\begin{aligned} |\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2| &= |\overline{A_1 \cup A_2}| = |U| - |A_1 \cup A_2| = |U| - (|A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|) \\ &= |U| - |A_1| - |A_2| + |A_1 \cap A_2| = 100 - 20 - 15 + 10 = 75 \end{aligned}$$

5.21. Koľko nezáporných celočíselných riešení menších ako 6 má rovnica $x_1 + x_2 + x_3 = 13$?



Počet možných riešení je 6

5.22. Napíšte všetky derangementy 4 objektov.



$$D_4 = 4! \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} \right) = 2 \cdot 3 \cdot 4 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{24} \right) = 24 \frac{12 - 4 + 1}{24} = 9$$

RIEŠENÉ CVIČENIA Z KAPITOLY 6

6.1. Pre každý uvedený prípad rozhodnite, či symbol $x * y$ špecifikuje binárnu operáciu na množine A . Ak nie, tak vysvetlite prečo.

Binárna operácia „súčin“ je definovaná podmienkou

$$\forall (x \in A) \forall (y \in A) \exists! (z \in A) (z = x * y)$$

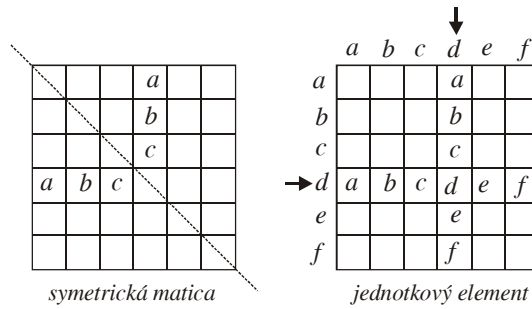
- (a) $x * y = x - y$, $A = \mathbb{R}_+ = (0, \infty)$. Nie je binárna operácia, pretože pre $x, y \in A$ výsledok binárnej operácie $x * y \notin A$ (napr. pre $x < y$ dostaneme záporný výsledok $x - y$), čo je v protiklade s definíciou binárnej operácie, ktorá požaduje, aby aj jej výsledok patril do A .
- (b) $x * y = x + y$, pre $A = \mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$. Je binárna operácia. Takto definovaná binárna operácia vyhovuje podmienke, že výsledok musí patriť do A .
- (c) $x * y = x^y$, $A = \mathbb{R}_+ = (0, \infty)$. Je binárna operácia, $x * y = x^y \in A$
- (d) $x * y = \text{maximálny spoločný deliteľ } x \text{ a } y$, $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 24\}$. Je binárna operácia, jej výsledok vždy patrí do A .

6.2. Nech binárna operácia na množine \mathbb{R} obsahujúcej reálne čísla je definovaná ako rozdiel, $x * y = x - y$. Rozhodnite, či táto operácia je

- (a) asociatívna,
nie je asociatívna, $x - (y - z) \neq (x - y) - z$.
- (b) komutatívna,
nie komutatívna, $(x - y) \neq (y - x)$.
- (c) existuje neutrálny prvok,
neexistuje neutrálny prvok e , pre ktorý by platilo $e * x = x * e = x$, potom by v tomto konkrétnom prípade muselo platiť $e - x = x - e = x$, čo nemôže byť splnené.

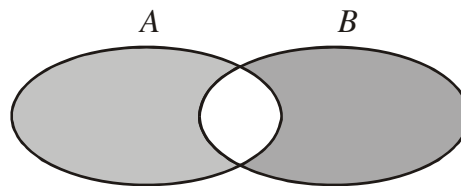
6.3. Nech A je konečná množina a nech pre túto množinu A je binárna operácia definovaná pomocou multiplikačnej tabuľky. Na základe čoho je možné rozhodnúť pomocou tejto tabuľky, či

- (a) binárna operácia je komutatívna,
potom multiplikačná tabuľka musí byť symetrická vzhľadom k diagonále tabuľky.
- (b) existuje neutrálny prvok,
potom existuje taký riadok a aj stĺpec s rovnakým indexom, že poradie ich prvkov je totožné s indexovaním riadkov a stĺpcov.



- 6.4. Nech $X = \mathcal{P}(A)$, kde $\mathcal{P}(A)$ je potenčná množina, binárna operácia nad touto množinou je definovaná ako prienik množín, $(\forall x, y \in \mathcal{P}(A))(x * y = x \cap y)$, rozhodnite:
- (a) Je binárna operácia komutatívna? Operácia prieniku je komutatívna, $x \cap y = y \cap x$.
 - (b) Čo je neutrálny prvok? Neutrálny prvok vzhľadom k prieniku je univerzálna množina U .
 - (c) Ktoré prvky majú inverzné prvky (ak existujú)? Inverzný prvok pre prvky z $\mathcal{P}(A)$ vo všeobecnosti neexistuje. Iba pre $x=U$ je $x^{-1}=U$. Ak by sme postulovali komplement \bar{x} ako inverzný prvok vzhľadom k x , potom platí $x \cap \bar{x} = \bar{x} \cap x = \emptyset$, čo je však v kontradikcii s požiadavkou, aby platilo $x \cap \bar{x} = \bar{x} \cap x = U$ (pre inverzný prvok platí, že $x * x^{-1} = e$, kde $e=U$).

- 6.5. Nech $X = \mathcal{P}(A)$, binárna operácia nad touto množinou je definovaná ako symetrický rozdiel $(\forall x, y \in \mathcal{P}(A))(x * y = (x - y) \cup (y - x))$. Použite Vennove diagramy na odôvodnenie odpovedí na nasledujúce otázky:
- (a) Je operácia $*$ binárna operácia?
Interpretácia symetrického rozdielu pomocou Vennovho diagramu má tvar

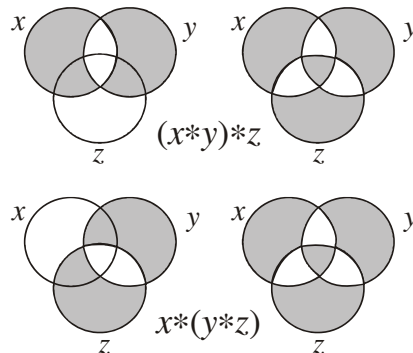


Symetrický rozdiel môže byť použitý ako binárna operácia nad $X = \mathcal{P}(A)$. Pre každé $x, y \in \mathcal{P}(A)$ platí, že $x * y \in \mathcal{P}(A)$.

- (b) Je táto operácia komutatívna?
Symetrický rozdiel je komutatívna operácia, alternatívna definícia je $x * y = (x \cup y) - (x \cap y)$.

(c) Je táto operácia asociatívna?

Symetrický rozdiel je asociatívna operácia



(d) Existuje neutrálny prvok v množine X ?

Neutrálny prvok je prázdna množina.

(e) Ak existuje neutrálny prvok, existuje potom ku každému prvku $x \in \mathcal{P}(A)$ inverzný prvok $x^{-1} \in \mathcal{P}(A)$?

Ku každému prvku $x \in \mathcal{P}(A)$ je inverzným prvkom $x^{-1} \in \mathcal{P}(A)$ prvok samotný, $x^{-1} = x$.

6.6. Nech množina $X = \{a, b, c, d\}$, binárna operácia pre túto množinu je definovaná pomocou multiplikačnej tabuľky

*	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	d	a	a
c	c	a	b	d
d	d	a	b	c

(a) Je táto operácia asociatívna?

Nie je asociatívna operácia

$$(c * b) * d = a * d = d$$

$$c * (b * d) = c * a = c$$

(b) Je táto operácia komutatívna?

Nie je komutatívna operácia, $c * d \neq d * c$

6.7. Nech X je neprázdna množina a binárna operácia je definovaná vzťahom $x * y = x$, pre každé $x, y \in X$.

(a) Dokážte, že algebraická štruktúra $(X, *)$ je pogrúpa.

K tomu, aby algebraická štruktúra $(X, *)$ bola pogrúpa, binárna operácia $'*'$ musí byť asociatívna.

$$x * (y * z) = x * y = x$$

$$(x * y) * z = x * z = x$$

týmto sme dokázali asociatívnosť binárnej operácie, čiže algebraická štruktúra $(X, *)$ je pologrupa.

(b) Rozhodnite, či táto algebraická štruktúra je monoid.

Ak pologrupa $(X, *)$ má neutrálny prvok, potom je monoid. Nech $e \in X$ je hypotetický neutrálny prvok, potom z definície binárnej operácie vyplýva $x * e = x$ a $e * x = e$, to znamená, že nemôže existovať neutrálny prvok, ktorý by vyhovoval podmienke $x * e = e * x = x$. Algebraická štruktúra $(X, *)$ nie je monoid.

6.8. Nech dve algebraické štruktúry $(X, *)$ a (Y, \circ) sú grupy. Definujte nad karteziánskym súčinom $X \times Y$ binárnu operáciu takto

$$(x_1, y_1) \bullet (x_2, y_2) = (x_1 * x_2, y_1 \circ y_2)$$

pre každé $x_1, x_2 \in X$ a $y_1, y_2 \in Y$.

(a) Ukážte, že \bullet je binárna asociatívna operácia na $X \times Y$.

Musíme dokázať, že ak $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in X \times Y$, potom aj pre ich súčin platí, že $(x_1, y_1) \bullet (x_2, y_2) \in X \times Y$. Táto vlastnosť priamo vyplýva z predpokladu, že algebraické štruktúry $(X, *)$ a (Y, \circ) sú grupy. Súčin \bullet vyhovuje podmienke

$$(x_1, y_1) \bullet (x_2, y_2) = \left(\underbrace{x_1 * x_2}_{\in X}, \underbrace{y_1 \circ y_2}_{\in Y} \right) \in X \times Y$$

Týmto sme dokázali, že súčin \bullet definovaný nad karteziánskym súčinom $X \times Y$ zachováva túto množinu, čiže je binárna operácia.

Asociatívnosť tejto binárnej operácie dokážeme priamo z definície

$$\begin{aligned} ((x_1, y_1) \bullet (x_2, y_2)) \bullet (x_3, y_3) &= (x_1 * x_2, y_1 \circ y_2) \bullet (x_3, y_3) \\ &= ((x_1 * x_2) * x_3, (y_1 \circ y_2) \circ y_3) \end{aligned}$$

Pretože algebraické štruktúry $(X, *)$ a (Y, \circ) sú grupy, potom binárne operácie $*$ a \circ sú asociatívne, čiže

$$\begin{aligned} ((x_1 * x_2) * x_3, (y_1 \circ y_2) \circ y_3) &= (x_1 * (x_2 * x_3), y_1 \circ (y_2 \circ y_3)) \\ &= (x_1, y_1) \bullet ((x_2, y_2) \bullet (x_3, y_3)) \end{aligned}$$

čo bolo potrebné dokázať.

(b) Ako je definovaný neutrálny prvok na $X \times Y$?

Pretože algebraické štruktúry $(X, *)$ a (Y, \circ) sú grupy, potom množiny X a Y musia obsahovať neutrálne prvky $e_X \in X$ resp. $e_Y \in Y$, potom nad $X \times Y$ môžeme definovať neutrálny prvok $e = (e_X, e_Y) \in X \times Y$, ktorý vyhovuje dvom podmienkam

$$e \bullet (x, y) = (e_X, e_Y) \bullet (x, y) = \left(\underbrace{e_X * x}_x, \underbrace{e_Y \circ y}_y \right) = (x, y)$$

$$(x, y) \bullet e = (x, y) \bullet (e_x, e_y) = \left(\underbrace{x * e_x}_x, \underbrace{y \circ e_y}_y \right) = (x, y)$$

Dokázali sme, že v rámci karteziánskeho súčinu $X \times Y$ existuje neutrálny prvok.

(c) Ako je definovaný inverzný prvok $(x, y)^{-1}$?

Inverzný prvok vzhľadom k $(x, y) \in X \times Y$ je definovaný vzťahom $(x, y)^{-1} = (x^{-1}, y^{-1})$, potom musí platiť

$$(x, y) \bullet (x, y)^{-1} = (x, y) \bullet (x^{-1}, y^{-1}) = \left(\underbrace{x * x^{-1}}_{e_x}, \underbrace{y \circ y^{-1}}_{e_y} \right) = (e_x, e_y) = e$$

$$(x, y)^{-1} \bullet (x, y) = (x^{-1}, y^{-1}) \bullet (x, y) = \left(\underbrace{x^{-1} * x}_{e_x}, \underbrace{y^{-1} \circ y}_{e_y} \right) = (e_x, e_y) = e$$

Dokázali sme, že pre každý $(x, y) \in X \times Y$ existuje inverzný prvok

$$(x, y)^{-1} = (x^{-1}, y^{-1}) \in X \times Y.$$

(d) Dokážte, že algebraická štruktúra $(X \times Y, \bullet)$ je grupa.

Dôkazom vlastností (a), (b) a (c) sme dokázali, že algebraická štruktúra $(X \times Y, \bullet)$ je grupa.

6.9. Nech $(\mathbb{N}, *)$ je algebraická štruktúra, kde \mathbb{N} je množina obsahujúca nezáporné celé čísla. Binárna operácia je definovaná takto

$$x * y = \max\{x, y\}$$

(a) Dokážte, že algebraická štruktúra $(\mathbb{N}, *)$ je pogrúpa.

K dôkazu, že algebraická štruktúra $(\mathbb{N}, *)$ je pogrúpa musíme dokázať, že binárna operácia $*$ je asociatívna. K dôkazu asociatívnosti binárnej operácie použijeme metódu vymenovania prípadov (pozri kapitolu 1.4)

(a1) $x < y < z$

$$(x * y) * z = y * z = z, \quad x * (y * z) = x * z = z$$

(a2) $x < z < y$

$$(x * y) * z = y * z = y, \quad x * (y * z) = x * y = y$$

(a3) $y < x < z$

$$(x * y) * z = x * z = z, \quad x * (y * z) = x * z = z$$

.....

Vo všetkých 6 prípadoch sme dostali vždy rovnosť $(x * y) * z = x * (y * z)$, z čoho vyplýva, že binárna operácia je asociatívna, t. j. algebraická štruktúra $(\mathbb{N}, *)$ je pogrúpa.

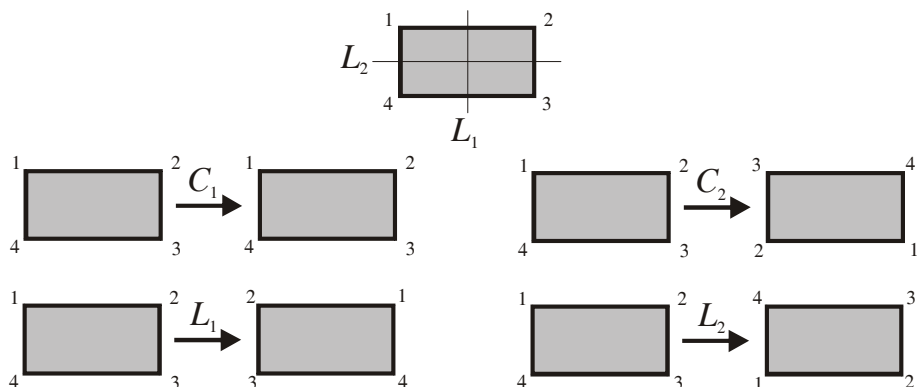
(b) Rozhodnite, či $(\mathbb{N}, *)$ je monoid.

K tomu, aby sme dokázali, že algebraická štruktúra $(\mathbb{N}, *)$ je monoid, stačí dokázať, že existuje neutrálny prvok $e = 0$, ktorý patrí do množiny \mathbb{N}

$$x * e = \max\{x, 0\} = x$$

$$e * x = \max\{0, x\} = x$$

6.10. Uvažujme neštvorcový obdĺžnik, ktorého vrcholy sú označené číslicami 1, 2, 3 a 4.



Tento obdĺžnik má štyri operácie symetrie

C_1 : rotácia o 0° stupňov okolo stredu obdĺžnika,

C_2 : rotácia o 180° stupňov okolo stredu obdĺžnika,

L_1 : reflexia priamkou L_1 a

L_2 : reflexia priamkou L_2 .

Na lepšie pochopenie týchto prvkov symetrie ich budeme špecifikovať ich aplikáciou na postupnosť (1,2,3,4)

$$C_1(1,2,3,4) = (1,2,3,4)$$

$$C_2(1,2,3,4) = (3,4,1,2)$$

$$L_1(1,2,3,4) = (2,1,4,3)$$

$$L_2(1,2,3,4) = (4,3,2,1)$$

Pre takto definované prvky môžeme zostrojiť ich kompozíciu (binárnu operáciu), napríklad

$$C_2 * L_1(1,2,3,4) = C_2(L_1(1,2,3,4)) = C_2(2,1,4,3) = (4,3,2,1) = L_2$$

(a) Zostavte multiplikačnú tabuľku pre kompozíciu dvoch operácií symetrie.

Multiplikačná tabuľka má tvar

*	C_1	C_2	L_1	L_2
C_1	C_1	C_2	L_1	L_2
C_2	C_2	C_1	L_2	L_1
L_1	L_1	L_2	C_1	C_2
L_2	L_2	L_1	C_2	C_1

(b) Dokážte, že algebraická štruktúra $(A = \{C_1, C_2, L_1, L_2\}, *)$ je grupa.

(b1) Binárna operácia $*$ je asociatívna. K dôkazu tejto vlastnosti by sme mali preskúmať 4^3 trojíc prvkov z množiny $A = \{C_1, C_2, L_1, L_2\}$, či je splnená vlastnosť $(x * y) * z = x * (y * z)$.

Iný postup k dôkazu tejto vlastnosti je, že prvky z množiny $A = \{C_1, C_2, L_1, L_2\}$ môžeme formálne interpretovať ako permutácie nad 4 objektmi. Ako bolo ukázané v kapitole 6.2, súčin permutácií môže byť interpretovaný ako kompozícia 1-1-značných funkcií; súčin permutácií je asociatívny.

(b2) V množine $A = \{C_1, C_2, L_1, L_2\}$ prvok $e = C_1$ môže byť interpretovaný ako neutrálny prvok, ktorý vyhovuje podmienke $\forall (x \in A)(e * x = x * e = x)$, splnenie tejto podmienky je jednoducho verifikované multiplikačnou tabuľkou, kde prvý riadok a prvý stĺpec je totožný s „indexovaním“ tabuľky.

(b3) Z tabuľky taktiež vyplýva, že ku každému $x \in A$ existuje práve jeden prvok $x^{-1} \in A$, ktorý vyhovuje podmienke $x * x^{-1} = x^{-1} * x = e$. Z multiplikačnej tabuľky vyplýva, že $\forall (x \in A)(x^{-1} = x)$.

Týmto sme dokázali, že algebraická štruktúra $(A = \{C_1, C_2, L_1, L_2\}, *)$ je grupa.

6.11. Pred riešením tohto príkladu je potrebné dodefinovať pojem „podmonoid“ v duchu teórie grúp. Nech algebraická štruktúra $(X, *)$ je monoid, potom algebraická štruktúra $(X', *)$ je taktiež monoid, ak X' je neprázdna podmnožina X , $X' \subseteq X$. Hovoríme, že $(X', *)$ je podmonoid, $(X', *) \subseteq (X, *)$. Nech $(X, *)$ je komutatívny monoid. Ukážte, že množina idempotentných prvkov $X' = \{x; (x \in X) \wedge (x * x = x)\}$ tvorí algebraickú štruktúru $(X', *)$, ktorá je podmonoid.

(A1) Musíme dokázať, že podmnožina $X' = \{x; (x \in X) \wedge (x * x = x)\}$ je uzavretá vzhľadom k binárnej operácii $*$. Nech $x, y \in X'$, potom

$$x * y = (x * x) * (y * y) = (x * y) * (x * y)$$

potom aj $x * y \in X'$. Pri dôkaze tejto vlastnosti bola použitá komutatívnosť binárnej operácie.

(A2) Existencia neutrálneho prvku v podmnožine $X' = \{x; (x \in X) \wedge (x * x = x)\}$, ktorá obsahuje idempotentné prvky je zabezpečená tým, že neutrálny prvok $e \in X$ musí z definície byť idempotentný, $e * e = e$, čiže $e \in X'$.

Týmto sme dokázali, že algebraická štruktúra $(X', *)$ je podmonoid.

6.12. Nech algebraická štruktúra $(X, *)$ je grupa. Stred tejto štruktúry je definovaný ako podmnožina X , ktorá obsahuje prvky komutujúce so všetkými prvkami X , $X_{center} = \{x; (x \in X) \wedge (\forall y (x * y = y * x))\}$. Dokážte, že algebraická štruktúra $(X_{center}, *)$ je podgrupa grupy $(X, *)$, $(X_{center}, *) \subseteq (X, *)$.

(A1) Musíme dokázať, že množina $X_{center} = \{x; (x \in X) \wedge (\forall y (x * y = y * x))\}$ je uzavretá vzhľadom k binárnej operácii $*$. Nech $u, v \in X_{center}$, potom pre každé $y \in X$ by malo platiť

$$(u * v) * y = y * (u * v)$$

Táto vlastnosť je priamym dôsledkom, že $u, v \in X_{center}$

$$(u * v) * y = u * (v * y) = u * (y * v) = (u * y) * v = (y * u) * v = y * (u * v)$$

Týmto sme dokázali, že $(u * v) \in X_{center}$, t. j. podmnožina X_{center} je uzavretá vzhľadom k binárnej operácii $*$.

(A2) Množina X_{center} obsahuje neutrálny prvok, pretože $\forall (x \in X) (e * x = x * e = x)$, čiže $e \in X_{center}$.

(A3) Pre každé $x \in X_{center}$ existuje $x^{-1} \in X_{center}$, že $x * x^{-1} = x^{-1} * x = e$. Dôkaz budeme robiť sporom. Predpokladajme, že $x^{-1} \notin X_{center}$ a teda existuje také $y \in X$, pre ktoré platí $x^{-1} * y \neq y * x^{-1}$. Aplikujme na túto nerovnicu x:

$x * (x^{-1} * y) \neq x * (y * x^{-1})$. Keďže ide o grupu, platí asociatívnosť, teda

$$(x * x^{-1}) * y \neq x * (y * x^{-1}) \Rightarrow e * y \neq x * (y * x^{-1}) \Rightarrow y \neq x * (y * x^{-1})$$

Keďže platí aj to, že x komutuje so všetkými prvkami, môžeme ho presunúť

$$y \neq (y * x^{-1}) * x \Rightarrow y \neq y * (x^{-1} * x) \Rightarrow y \neq y * e \Rightarrow y \neq y$$

Týmto sme ukázali, že predpoklad viedol ku kontradikcii, a teda že $x^{-1} \in X_{center}$.

Týmto sme dokázali, že algebraická štruktúra $(X_{center}, *)$ je podgrupa.

RIEŠENÉ CVIČENIA Z KAPITOLY 7

7.1. Aká je hodnota Boolovej premennej, ktorá je určená podmienkou

(a) $x \cdot \mathbf{1} = \mathbf{0}$, $x = \mathbf{0}$.

(b) $x + x = \mathbf{0}$, $x = \mathbf{0}$.

(c) $x \cdot \mathbf{1} = x$, $x = \mathbf{1}$ alebo $x = \mathbf{0}$.

(d) $x + \bar{x} = \mathbf{1}$, $x = \mathbf{0}$ alebo $x = \mathbf{1}$.

(e) $x \cdot \bar{x} = \mathbf{0}$, $x = \mathbf{0}$ alebo $x = \mathbf{1}$.

7.2. Zostrojte tabuľku funkčných hodnôt Boolovej funkcie

(a) $f(x, y, z) = \bar{x}y$,

x	y	z	\bar{x}	$\bar{x}y$
0	0	0	1	0
0	0	1	1	0
0	1	0	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	1	0	0
1	1	0	0	0
1	1	1	0	0

(b) $f(x, y, z) = x + yz$,

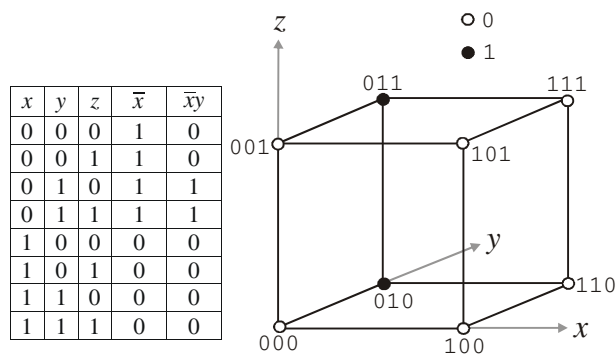
x	y	z	yz	$x + yz$
0	0	0	0	0
0	0	1	0	0
0	1	0	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	0	1
1	0	1	0	1
1	1	0	0	1
1	1	1	1	1

(c) $f(x, y, z) = x\bar{y} + \overline{xyz}$,

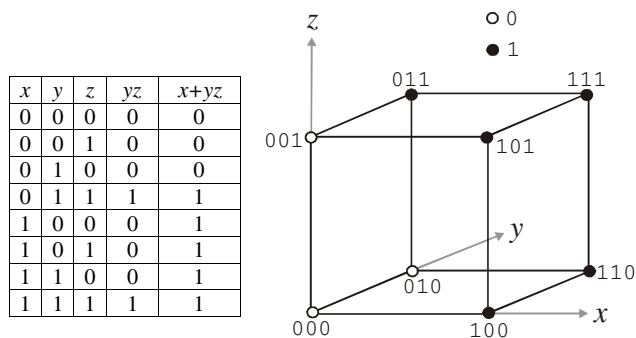
x	y	z	\bar{y}	$x\bar{y}$	xyz	\overline{xyz}	$x\bar{y} + \overline{xyz}$
0	0	0	1	0	0	1	1
0	0	1	1	0	0	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1
0	1	1	0	0	0	1	1
1	0	0	1	1	0	1	1
1	0	1	1	1	0	1	1
1	1	0	0	0	0	1	1
1	1	1	0	0	1	0	0

7.3. Znázornite Boolove funkcie $f(x, y, z)$ z cvičenia 7.2 na 3-rozmernej kocke tak, že hodnoty 1 (0) budú reprezentované na kocke čiernym (bielym) bodom.

(a)



(b)



7.7. Dokážte, že platia rovnosti

(a) $x \oplus y = (x + y)(\overline{xy})$,

x	y	$x+y$	xy	\overline{xy}	$(x+y)\overline{xy}$	$x \oplus y$
0	0	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1
1	1	1	1	0	0	0

(b) $x \oplus y = \overline{xy} + x\overline{y}$.

x	y	\overline{xy}	$x\overline{y}$	$\overline{xy} + x\overline{y}$	$x \oplus y$
0	0	0	0	0	0
0	1	1	0	1	1
1	0	0	1	1	1
1	1	0	0	0	0

7.8. Zostrojte duálne výrazy k týmto Boolovým rovnostiam

(a) $x + \overline{x} = \mathbf{1}$

$x \cdot \overline{x} = \mathbf{0}$

(b) $\overline{x} \overline{y} (x + y) = \mathbf{0}$

$(\overline{x} + \overline{y}) + (x \cdot y) = \mathbf{1}$

(c) $xyz + \overline{x} y \overline{z} = ((x + z)z + \overline{x} \overline{z})y$.

$(x + y + z) \cdot (\overline{x} + y + \overline{z}) = (((x \cdot z) + z) \cdot (\overline{x} + \overline{z})) + y$

7.9. Dokážte, že duálny tvar $f_d(x_1, x_2, \dots, x_n)$ k Boolovej funkcii $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ vyhovuje podmienke

$f_d(x_1, x_2, \dots, x_n) = \overline{f(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \dots, \overline{x}_n)}$.

Dôkaz tohto vzťahu vykonáme indukciou vzhľadom k podformulám $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

(a) $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \Phi(x_1, x_2, \dots, x_n) + \Psi(x_1, x_2, \dots, x_n)$, duálny tvar tejto formuly je

$$\begin{aligned} f_d(x_1, x_2, \dots, x_n) &= \overline{\Phi(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \dots, \overline{x}_n) + \Psi(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \dots, \overline{x}_n)} \\ &= \overline{\Phi(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \dots, \overline{x}_n)} \cdot \overline{\Psi(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \dots, \overline{x}_n)} \\ &= \Phi_d(x_1, x_2, \dots, x_n) \cdot \Psi_d(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{aligned}$$

(b) $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \Phi(x_1, x_2, \dots, x_n) \cdot \Psi(x_1, x_2, \dots, x_n)$, duálny tvar tejto formuly je

$$\begin{aligned} f_d(x_1, x_2, \dots, x_n) &= \overline{\Phi(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \dots, \overline{x}_n) \cdot \Psi(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \dots, \overline{x}_n)} \\ &= \overline{\Phi(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \dots, \overline{x}_n)} + \overline{\Psi(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \dots, \overline{x}_n)} \\ &= \Phi_d(x_1, x_2, \dots, x_n) + \Psi_d(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{aligned}$$

Tento postup opakujeme tak dlho, až dosiahneme elementárne výrazy, ktoré obsahujú podformuly rovné premenným, kde konštrukciu duálnych formúl vykonáme jednoducho pomocou De Morganových vzťahov a negáciou konštant

$$\overline{\overline{x_i + x_j}} = x_i \cdot x_j, \quad \overline{\overline{x_i \cdot x_j}} = x_i + x_j, \quad \overline{\mathbf{0}} = \mathbf{1} \text{ a } \overline{\mathbf{1}} = \mathbf{0}.$$

Týmto indukčným postupom sme dokázali formulu $f_d(x_1, x_2, \dots, x_n) = \overline{f(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \dots, \overline{x_n})}$.

7.10. Zostrojte Boolovu funkciu $f(x, y, z)$ vo forme sumy súčinových klauzúl k premenným x, y a z , ktorá má hodnotu **1** vtedy a len vtedy, ak

(a) $x = y = \mathbf{0}, z = \mathbf{1}, f(x, y, z) = \overline{x} \overline{y} z$.

(b) $x = \mathbf{0}, y = \mathbf{1}, z = \mathbf{0}, f(x, y, z) = \overline{x} y \overline{z}$.

(c) $y = z = \mathbf{1}, f(x, y, z) = x y z + \overline{x} y z = \left(\frac{x + \overline{x}}{\mathbf{1}} \right) y z = y z$.

7.11. Zostrojte Boolovu funkciu $f(x, y, z)$ vo forme sumy súčinových klauzúl k premenným x, y a z (DNF forme), ktorá je ekvivalentná s funkciou $F(x, y, z)$.

(a) $F(x, y, z) = x + y + \overline{z}$,

DNF tvar tejto Boolovej funkcie je

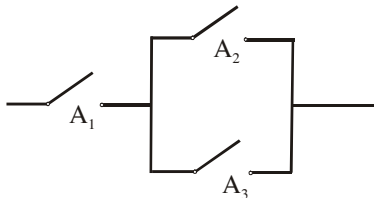
$$\begin{aligned} F(x, y, z) &= x + y + \overline{z} = x(y + \overline{y})(z + \overline{z}) + (x + \overline{x})y(z + \overline{z}) + (x + \overline{x})(y + \overline{y})\overline{z} \\ &= x y z + x y \overline{z} + x \overline{y} z + x \overline{y} \overline{z} \\ &\quad + x y z + x y \overline{z} + \overline{x} y z + \overline{x} y \overline{z} \\ &\quad + x y \overline{z} + x \overline{y} \overline{z} + \overline{x} y \overline{z} + \overline{x} \overline{y} \overline{z} \\ &= x y z + x y \overline{z} + x \overline{y} \overline{z} + x \overline{y} z + \overline{x} \overline{y} \overline{z} + \overline{x} y \overline{z} + \overline{x} y z \end{aligned}$$

(b) $F(x, y, z) = x \overline{z}$.

$$F(x, y, z) = x(y + \overline{y})\overline{z} = x y \overline{z} + x \overline{y} \overline{z}$$

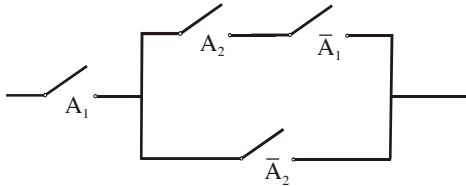
7.12. Zostrojte spínacie funkcie pre spínacie obvody

(a)



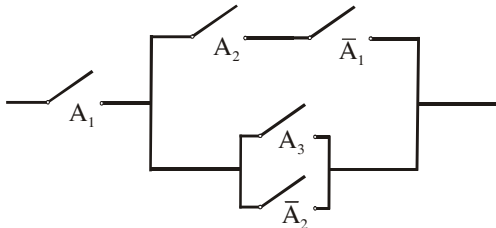
$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1(x_2 + x_3)$$

(b)



$$f(x_1, x_2) = x_1(x_2\bar{x}_1 + \bar{x}_2) = x_1\bar{x}_2$$

(c)

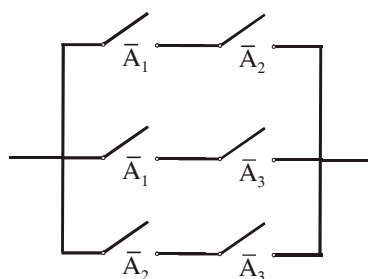


$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1(x_2\bar{x}_1 + (x_3 + \bar{x}_2)) = x_1(x_3 + \bar{x}_2)$$

7.13. Ústredné kúrenie v rodinnom dome je riadené troma termostatmi, ktoré sú umiestnené v každej izbe domu. Termostaty sú nastavené na 18 °C, pričom z dôvodu šetrenia energiou sa požaduje, aby systém ústredného kúrenia bol zapnutý len ak teplota aspoň v dvoch izbách je menšia ako 18 °C, v opačnom prípade je systém vypnutý. Navrhňte spínačový systém, ktorý prijíma signály z termostatov a ktorý riadi ústredné kúrenie. Pokúste sa minimalizovať navrhnutý systém, aby bol čo najjednoduchší.

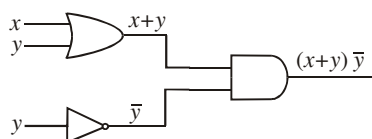
x_1	x_2	x_3	$F(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	0

$$\begin{aligned}
 F(x_1, x_2, x_3) &= \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 + \bar{x}_1\bar{x}_2x_3 + \bar{x}_1x_2\bar{x}_3 + x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 = \\
 &= \underbrace{\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 + \bar{x}_1\bar{x}_2x_3 + \bar{x}_1x_2\bar{x}_3}_{\bar{x}_1\bar{x}_2} + \bar{x}_1\bar{x}_2x_3 + \bar{x}_1x_2\bar{x}_3 + x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 = \\
 &= \bar{x}_1\bar{x}_2(\underbrace{\bar{x}_3 + x_3}_1) + \bar{x}_1(\underbrace{x_2 + \bar{x}_2}_1)\bar{x}_3 + (\underbrace{\bar{x}_1 + x_1}_1)\bar{x}_2\bar{x}_3 = \\
 &= \bar{x}_1\bar{x}_2 + \bar{x}_1\bar{x}_3 + \bar{x}_2\bar{x}_3
 \end{aligned}$$



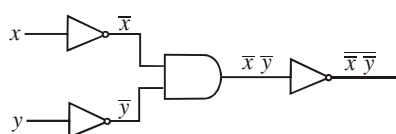
7.14. Zostrojte tabuľku výstupov logických obvodov

(a)



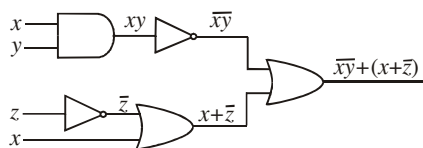
x	y	\bar{y}	$x+y$	$(x+y)\bar{y}$
0	0	1	0	0
0	1	0	1	0
1	0	1	1	1
1	1	0	1	0

(b)



x	y	\bar{x}	\bar{y}	$\bar{x}\bar{y}$	$\overline{\bar{x}\bar{y}}$
0	0	1	1	1	0
0	1	1	0	0	1
1	0	0	1	0	1
1	1	0	0	0	1

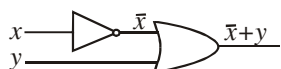
(c)



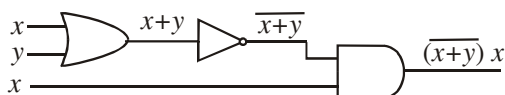
x	y	z	xy	\overline{xy}	\overline{z}	$x + \overline{z}$	$\overline{xy} + (x + \overline{z})$
0	0	0	0	1	1	1	1
0	0	1	0	1	0	0	1
0	1	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	0	1
1	0	0	0	1	1	1	1
1	0	1	0	1	0	1	1
1	1	0	1	0	1	1	1
1	1	1	1	0	0	1	1

7.15. Zostrojte logické obvody, ktoré simulujú Boolove funkcie

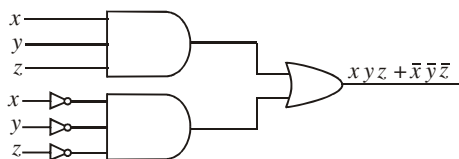
(a) $\overline{x} + y$,



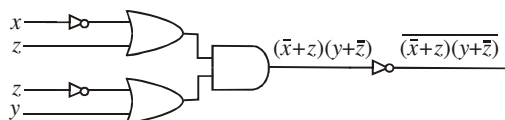
(b) $(\overline{x + y})x$,



(c) $xyz + \overline{x}\overline{y}\overline{z}$,

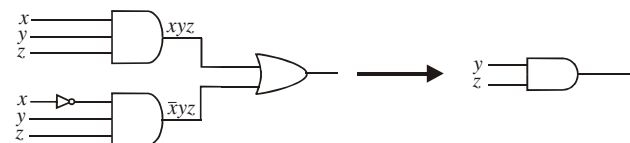


(d) $\overline{(\overline{x + z})(y + \overline{z})}$.



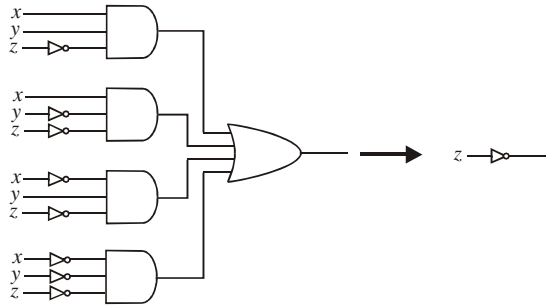
7.16. Zjednodušte logické obvody

(a)



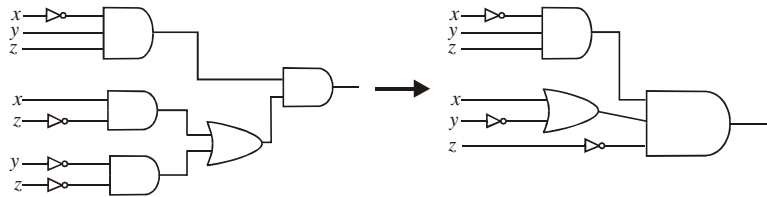
$$f(x, y, z) = xyz + \overline{x}yz = (x + \overline{x})yz = yz$$

(b)



$$f(x, y, z) = xy\bar{z} + x\bar{y}\bar{z} + \bar{x}y\bar{z} + \bar{x}\bar{y}\bar{z} = xy\bar{z} + x\bar{y}\bar{z} + \bar{x}(y + \bar{y})\bar{z} = xy\bar{z} + x\bar{y}\bar{z} + \bar{x}\bar{z} = x(y + \bar{y})\bar{z} + \bar{x}\bar{z} = x\bar{z} + \bar{x}\bar{z} = \bar{z}$$

(c)



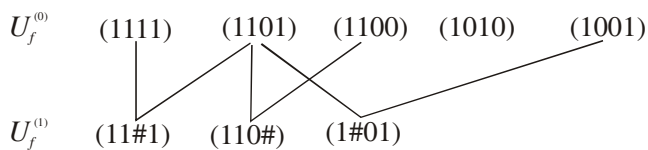
$$f(x, y, z) = \bar{x}yz \cdot (\bar{x}\bar{z} + \bar{y}\bar{z}) = \bar{x}yz(x + \bar{y})\bar{z}$$

Táto Boolova funkcia sa identicky rovná „nule“, čo jasne plynie z upravenej pravej strany, ktorá v konjunkcii obsahuje premennú z a jej negáciu \bar{z} . Preto obvod, ktorý ju simuluje, môže byť pokladaný za „podivný“.

7.17. Pomocou Quinovej a McCluskeyho metódy nájdite optimálne výrazy k Boolovým funkciám

(a) $wxyz + wx\bar{y}z + wx\bar{y}\bar{z} + w\bar{x}y\bar{z} + w\bar{x}\bar{y}z$,

0. etapa			1. etapa		
1	(1111)		1	(1,2)	(11#1)
2	(1101)		2	(2,3)	(110#)
3	(1100)		3	(2,5)	(1#01)
4	(1010)				
5	(1001)				



Klauzule z 1. etapy sú minimálne a pokrývajú až na 4. klauzulu všetky klauzuly z 0. etapy, preto vyberieme klauzuly ktoré pokrývajú pôvodnú množinu klauzúl takto

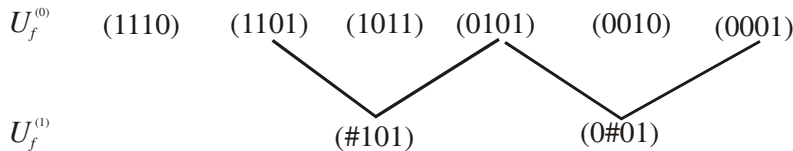
$$\tilde{V} = \{(11\#1), (110\#), (1\#01), (1010)\}$$

Optimálna Boolova funkcia priradená tejto množine má tvar

$$f(w, x, y, z) = wxz + wx\bar{y} + w\bar{y}z + w\bar{x}y\bar{z}$$

(b) $wxy\bar{z} + wx\bar{y}z + w\bar{x}yz + \bar{w}x\bar{y}z + \bar{w}\bar{x}y\bar{z} + \bar{w}\bar{x}\bar{y}z$,

0. etapa			1. etapa		
1	(1110)		1	(2,4)	(#101)
2	(1101)		2	(4,6)	(0#01)
3	(1011)				
4	(0101)				
5	(0010)				
6	(0001)				

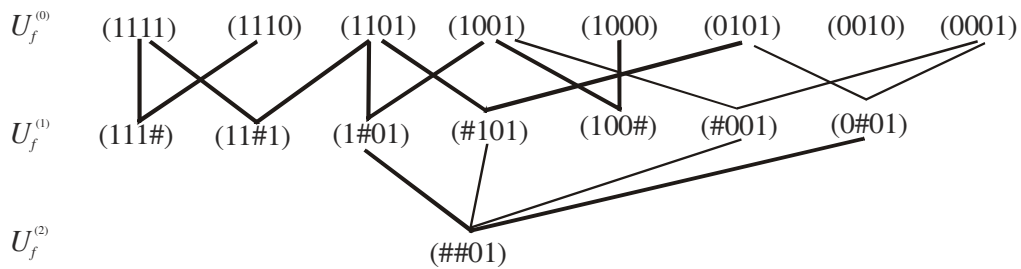


$$\tilde{V} = \{(\#101), (0\#01), (1110), (1011), (0010)\}$$

$$f(w, x, y, z) = x\bar{y}z + \bar{w}\bar{y}z + wxy\bar{z} + w\bar{x}yz + \bar{w}\bar{x}y\bar{z}$$

(c) $wxyz + wxy\bar{z} + wx\bar{y}z + w\bar{x}\bar{y}z + w\bar{x}y\bar{z} + \bar{w}x\bar{y}z + \bar{w}\bar{x}\bar{y}z$.

0. etapa			1. etapa			2. etapa		
1	(1111)		1	(1,2)	(111#)	1	(3,4),(6,8)	(##01)
2	(1110)		2	(1,3)	(11#1)	2	(3,6),(4,8)	(##01)
3	(1101)		3	(3,4)	(1#01)			
4	(1001)		4	(3,6)	(#101)			
5	(1000)		5	(4,5)	(100#)			
6	(0101)		6	(4,8)	(#001)			
7	(0010)		7	(6,8)	(0#01)			
8	(0001)							



$$\tilde{V} = \{(111\#), (\#\#01), (100\#), (0010)\}$$

$$f(w, x, y, z) = wxy + \bar{y}z + w\bar{x}\bar{y} + \bar{w}\bar{x}y\bar{z}$$

RIEŠENÉ CVIČENIA Z KAPITOLY 8

8.1. Stanovte typ matice a jej názov

- (a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, $t = (2,2)$, štvorcová matica
- (b) $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $t = (2,4)$, obdĺžniková matica
- (c) $(1 \ 2 \ 1 \ -1)$, $t = (1,4)$, riadkový vektor
- (d) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $t = (3,1)$, stĺpcový vektor.

8.2. Nájdite hodnoty a , b , c a d tak, aby platilo

$$\begin{pmatrix} 3a & -b \\ c & 2d+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Musí platiť:

$$3a = 1 \Rightarrow a = 1/3, \quad -b = 3 \Rightarrow b = -3, \quad c = -1, \quad 2d + 1 = 2 \Rightarrow d = 1/2.$$

8.3. Rozhodnite o pravdivosti týchto tvrdení:

- (a) $\{\mathbf{A}; \mathbf{A} \text{ je jednotková matica}\} \subset \{\mathbf{A}; \mathbf{A} \text{ je symetrická matica}\}$,
pravdivé tvrdenie, každá jednotková matica je aj symetrická matica
- (b) $\{\mathbf{A}; \mathbf{A} \text{ je symetrická matica}\} \subset \{\mathbf{A}; \mathbf{A} \text{ je diagonálna matica}\}$,
nepravdivé tvrdenie, symetrická matica nemusí byť diagonálnou maticou
- (c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \{\mathbf{A}; \mathbf{A} \text{ je jednotková matica}\}$,
pravdivé tvrdenie, pretože $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ je jednotková matica
- (d) $\{\mathbf{A}; \mathbf{A} \text{ je štvorcová matica}\} \subset \{\mathbf{A}; \mathbf{A} \text{ je diagonálna matica}\}$,
nepravdivé tvrdenie, pretože štvorcová matica nemusí byť diagonálna matica
- (e) $\{\mathbf{A}; \mathbf{A} \text{ je jednotková matica}\} \subset \{\mathbf{A}; \mathbf{A} \text{ je diagonálna matica}\}$.
pravdivé tvrdenie, pretože jednotková matica je aj diagonálna matica

8.4. (a) Zostrojte matice $\mathbf{A} = (A_{ij})$, $\mathbf{B} = (B_{ij})$ a $\mathbf{C} = (C_{ij})$, typu $(3,2)$, pre ktoré platí

$$A_{ij} = i - j, \quad B_{ij} = i - 2j, \quad C_{ij} = 4i + 3j.$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 0 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 11 & 14 \\ 15 & 18 \end{pmatrix}$$

(b) Zostrojte maticu $\mathbf{A} = (A_{ij})$ typu (4,4), ktorá je symetrická a má tieto vlastnosti:

$$A_{ii} = i^2, A_{13} = A_{24} = 0, A_{14} = 3, A_{12} = A_{23} = A_{11} + A_{22}, A_{34} = A_{23} - A_{14}.$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 & 3 \\ 5 & 4 & 5 & 0 \\ 0 & 5 & 9 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & 16 \end{pmatrix}$$

(c) Zostrojte maticu, ktorá je súčasne riadkovým a stĺpcovým vektorom.

$$\text{Matica typu } (1,1), \mathbf{A} = (A_{11})$$

(d) Nájdite x a y pre maticu

$$\mathbf{A} = (A_{ij}) = \begin{pmatrix} x+y & 10 \\ 2x-y & 4 \end{pmatrix}$$

$$\text{pre } A_{11} = A_{22} \text{ a } A_{12} = A_{21}/2.$$

$$x+y = A_{11}, 2x-y = A_{21}, A_{22} = 4, A_{12} = 10.$$

Potom platí $x+y=4$, $2x-y=20$, sčítaním týchto rovníc dostaneme $3x=24 \Rightarrow x=8$, potom z prvej rovnice dostaneme $y=-4$. Matica \mathbf{A} má potom tvar

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 10 \\ 20 & 4 \end{pmatrix}$$

8.5. Zostrojte transponované matice k maticiam

$$(a) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, (1 \ 2 \ 0 \ -1)$$

$$(b) (-1 \ 1 \ 2), \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$(c) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(d) \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

8.6. Pre matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

vypočítajte matice (ak existujú)

$$(a) 2\mathbf{A}, \quad 2\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(b) \mathbf{A} + \mathbf{B}, \quad \mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

(c) $\mathbf{A} + \mathbf{C}$, neexistuje, pretože matice sú rôzneho typu.

$$(d) \mathbf{AC}, \quad \mathbf{AC} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

(e) \mathbf{CB} , neexistuje, pretože matice typu (2,3) a (2,2) nie je možné násobiť.

$$(f) \mathbf{C}^T \mathbf{B}, \quad \mathbf{C}^T \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 4 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}.$$

8.7. Pre maticu $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ riešte rovnicu

$$2\mathbf{X} + \mathbf{B} = \mathbf{E}$$

kde \mathbf{X} je matica typu (2,2) a \mathbf{E} je jednotková matica typu (2,2).

$$\mathbf{X} = \frac{1}{2}(\mathbf{E} - \mathbf{B}) = \frac{1}{2} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1 & -1/2 \end{pmatrix}$$

8.8. Pre riadkové vektory \mathbf{u} a \mathbf{v} spočítajte \mathbf{uv}^T (ak existuje) pre

$$(a) \mathbf{u} = (1 \ 2 \ 0 \ -1), \quad \mathbf{v} = (0 \ -2 \ 0 \ 2),$$

$$\mathbf{uv}^T = 1 \cdot 0 - 2 \cdot 2 + 0 \cdot 0 - 1 \cdot 2 = -4 - 2 = -6$$

$$(b) \mathbf{u} = (1 \ 2 \ 1), \quad \mathbf{v} = (-1 \ 1 \ 2), \quad \mathbf{uv}^T = 3$$

$$(c) \mathbf{u} = (1 \ 0 \ -1), \quad \mathbf{v} = (-1 \ 1 \ 2), \quad \mathbf{uv}^T = -3$$

8.9. Dokážte, že pre $\mathbf{u} = (u_1 \ u_2 \ \dots \ u_n)$ platí $\mathbf{uu}^T \geq 0$, pričom rovnosť platí len pre nulový vektor.

$$\mathbf{uu}^T = u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_n^2 \geq 0, \text{ rovná sa nule len pre } \mathbf{u} = (0 \ 0 \ \dots \ 0).$$

8.10. Pre každú dvojicu matíc A a B určite ich typ a či súčin matíc existuje, ak existuje, tak ho vypočítajte.

$$(a) \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$t(\mathbf{A}) = (3,2), t(\mathbf{B}) = (2,3), \mathbf{AB} = \begin{pmatrix} 17 & 8 & 7 \\ 2 & 3 & 0 \\ 32 & 13 & 14 \end{pmatrix},$$

$$(b) \mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix},$$

$$t(\mathbf{A}) = (2,2), t(\mathbf{B}) = (3,2), \text{ súčin } \mathbf{AB} \text{ neexistuje,}$$

$$(c) \mathbf{A} = (1 \ 4 \ 2 \ -5), \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 1 \\ 3 & -3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix},$$

$$t(\mathbf{A}) = (1,4), t(\mathbf{B}) = (4,2), \mathbf{AB} = (29 \ 3).$$

8.11. Nech $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ a $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, vypočítajte

$$(a) \mathbf{A} + 2\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 10 & -1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix},$$

$$(b) 3\mathbf{A} - 6\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -18 & -15 \\ -12 & 3 \end{pmatrix},$$

$$(c) \mathbf{AB} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$(d) \mathbf{A}^2 = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$(e) \mathbf{BA} = \begin{pmatrix} 8 & -13 \\ 4 & -5 \end{pmatrix},$$

$$(f) \mathbf{B(AB)} = \begin{pmatrix} 6 & 21 \\ 6 & 9 \end{pmatrix},$$

$$(g) (\mathbf{AB})\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & -11 \\ -4 & 5 \end{pmatrix},$$

$$(h) \mathbf{A}(\mathbf{A}-\mathbf{B}) = \begin{pmatrix} 2 & -8 \\ 2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$(i) \mathbf{A}^T \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ -14 & -2 \end{pmatrix},$$

$$(j) (\mathbf{AB})^T = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

8.12. Nech $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ a $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ sú diagonálne matice, vypočítajte \mathbf{AB} , \mathbf{BA} , \mathbf{A}^2 a \mathbf{B}^2 .

$$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \mathbf{BA} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \mathbf{A}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}, \mathbf{B}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

8.13. Nájdite greedy algoritmom také zátvorkovanie produktu týchto matíc, aby sa vykonal čo možno najmenší počet elementárnych súčinov (greedy algoritmus nezaistíuje globálne minimum).

(a) Nech matice majú typ $t(\mathbf{A}_1) = (4,5)$, $t(\mathbf{A}_2) = (5,8)$, $t(\mathbf{A}_3) = (8,3)$ a $t(\mathbf{A}_4) = (3,2)$.

Použitím „greedy“ algoritmu dostaneme zátvorkovanie $(\mathbf{A}_1(\mathbf{A}_2(\mathbf{A}_3\mathbf{A}_4)))$, ktoré obsahuje 168 elementárnych súčinov.

(b) Nech matice majú typ $t(\mathbf{A}_1) = (2,3)$, $t(\mathbf{A}_2) = (3,8)$, $t(\mathbf{A}_3) = (8,2)$, $t(\mathbf{A}_4) = (2,5)$, $t(\mathbf{A}_5) = (5,4)$.

Pokiaľ by sme u greedy algoritmu pri rovnakých ohodnoteniach zobrali prvé z riešení, použitím „greedy“ algoritmu dostaneme zátvorkovanie $((\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2)\mathbf{A}_3)(\mathbf{A}_4\mathbf{A}_5)$, ktoré obsahuje 136 elementárnych súčinov. Pokiaľ by sme u greedy algoritmu ale pri rovnakých ohodnoteniach nezobrali prvé z riešení, ale vyskúšali všetky možnosti (alebo sa rozhodli náhodne), mohli by sme dospieť aj k zátvorkovaniu $((\mathbf{A}_1(\mathbf{A}_2\mathbf{A}_3))(\mathbf{A}_4\mathbf{A}_5))$, ktoré obsahuje 116 elementárnych súčinov.

8.14. Ukážte, že ak \mathbf{A} je štvorcová matica, potom $\mathbf{A}+\mathbf{A}^T$ je symetrická matica.

Nech $\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{A}^T$, potom $C_{ij} = A_{ij} + A_{ij}^T = A_{ij} + A_{ji}$, potom $C_{ij} = C_{ji}$, \mathbf{C} je symetrická matica.

8.15. Dokážte tieto vlastnosti transponovanej matice:

$$(a) (\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A},$$

Nech $\mathbf{B} = \mathbf{A}^T$, potom $B_{ij}^T = B_{ji} = A_{ji}^T = A_{ij}$.

$$(b) (\mathbf{A} + \mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T,$$

Nech $\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$, potom $C_{ij} = A_{ij} + B_{ij}$, alebo $C_{ij}^T = C_{ji} = A_{ji} + B_{ji} = A_{ij}^T + B_{ij}^T$.

$$(c) (\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T,$$

$$\text{Nech } \mathbf{C} = \mathbf{AB}, \text{ potom } C_{ij} = \sum_k A_{ik} B_{kj} \Rightarrow C_{ij}^T = C_{ji} = \sum_k A_{jk} B_{ki} = \sum_k B_{ik}^T A_{kj}^T \Rightarrow \mathbf{C}^T = \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T$$

8.16. Stanovte hodnotu matíc

$$(a) \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, h(\mathbf{A}) = 3.$$

$$(b) \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, h(\mathbf{A}) = 3.$$

$$(c) \text{ Pre ktoré hodnoty } p, \text{ má matica } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ p & -1 \end{pmatrix} \text{ hodnotu } 1?$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ p & -1 \end{pmatrix} \cdot (-p) \sim \begin{pmatrix} -p & -2p \\ p & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -p & -2p \\ 0 & -1-2p \end{pmatrix}$$

Trojuholníková matica na pravej strane má $h(\mathbf{A}) = 1$ len vtedy, ak druhý riadok je nulový, čiže $p = -1/2$.

$$(d) \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, h(\mathbf{A}) = 3.$$

$$(e) \text{ Pre ktoré hodnoty parametrov } p \text{ a } q \text{ má matica } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ p & 1 & 1 & 1 \\ q & 1 & -3 & 3 \end{pmatrix} \text{ hodnotu } 2?$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ p & 1 & 1 & 1 \\ q & 1 & -3 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & 3 \\ 1 & p & 1 & 1 \\ 1 & q & -3 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & q & -3 & 3 \\ \boxed{1} & 2 & -1 & 2 \\ 1 & p & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & q & -3 & 3 \\ 0 & 2-q & 2 & -1 \\ 0 & p-q & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 & q \\ 0 & -1 & 2 & 2-q \\ 0 & \boxed{-2} & 4 & p-q \\ 0 & \boxed{-1} & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 & q \\ 0 & -1 & 2 & 2-q \\ 0 & 0 & 0 & -4+p+q \\ 0 & 0 & 0 & -1+q \end{pmatrix}$$

Ak v poslednej matici položíme $p = 3$ a $q = 1$, potom matica má tvar, v ktorom sú posledné dva riadky nulové

$$\mathbf{A} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

To znamená, že $h(\mathbf{A}) = 2$ pre $p = 3$ a $q = 1$.

8.17. Nájdite inverznú maticu (ak existuje) k matici:

$$(a) \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -6 \\ -1 & 1 & 2 \\ -3 & 5 & 3 \end{pmatrix}, \mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 7/8 & 9/2 & -5/4 \\ 3/8 & 3/2 & -1/4 \\ 1/4 & 2 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

$$(b) \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}, \text{ matica nie je regulárna, } h(\mathbf{A}) < 3, \text{ inverzná matica neexistuje.}$$

$$(c) \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}, \mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$(d) \mathbf{A} = \begin{pmatrix} -4 & 8 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -3/4 & 2 \\ -1/4 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$(e) \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}, \text{ matica nie je regulárna, } h(\mathbf{A}) < 2, \text{ inverzná matica neexistuje.}$$

$$(f) \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$(g) \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}, \text{ matica nie je regulárna, } h(\mathbf{A}) < 3, \text{ inverzná matica neexistuje.}$$

$$(h) \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & 1 & -1/2 \\ -1 & 2 & 0 \\ -5/2 & 4 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

8.18. Dokážte matematickou indukciou formulu $(\mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 \dots \mathbf{A}_n)^{-1} = \mathbf{A}_n^{-1} \dots \mathbf{A}_2^{-1} \mathbf{A}_1^{-1}$.

Východiskový indukčný predpoklad je $(\mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2)^{-1} = \mathbf{A}_2^{-1} \mathbf{A}_1^{-1}$. Predpokladajme, že formula platí pre $n-1$, $(\mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 \dots \mathbf{A}_{n-1})^{-1} = \mathbf{A}_{n-1}^{-1} \dots \mathbf{A}_2^{-1} \mathbf{A}_1^{-1}$. Potom

$$(\mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 \dots \mathbf{A}_n)^{-1} = ((\mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 \dots \mathbf{A}_{n-1}) \mathbf{A}_n)^{-1} = \mathbf{A}_n^{-1} (\mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 \dots \mathbf{A}_{n-1})^{-1} = \mathbf{A}_n^{-1} \mathbf{A}_{n-1}^{-1} \dots \mathbf{A}_1^{-1}$$

8.19. Nech \mathbf{A} , \mathbf{B} a \mathbf{C} sú štvorcové matice rovnakého typu (n, n) . Dokážte, že ak \mathbf{A} je regulárna matica, potom zo vzťahu $\mathbf{AB} = \mathbf{AC}$ vyplýva $\mathbf{B} = \mathbf{C}$.

Z predpokladu regulárnosti matice \mathbf{A} vyplýva existencia inverznej matice \mathbf{A}^{-1} , potom rovnicu $\mathbf{AB} = \mathbf{AC}$ môžeme zľava vynásobiť inverznou maticou \mathbf{A}^{-1}

$$\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{AB}) = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{AC}) \Rightarrow \underbrace{(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A})}_{\mathbf{E}}\mathbf{B} = \underbrace{(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A})}_{\mathbf{E}}\mathbf{C} \Rightarrow \mathbf{EB} = \mathbf{EC} \Rightarrow \mathbf{B} = \mathbf{C}$$

8.20. Ukážte, že ak \mathbf{A} a \mathbf{B} sú štvorcové matice rovnakého typu (n, n) a \mathbf{A} je regulárna matica, potom $(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{BA})^2 = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}^2\mathbf{A}$.

$$(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{BA})^2 = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\underbrace{\mathbf{AA}^{-1}}_{\mathbf{E}}\mathbf{BA} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}^2\mathbf{A}$$

8.21. Ukážte, že ak \mathbf{A} a \mathbf{B} sú štvorcové matice rovnakého typu (n, n) a \mathbf{A} je regulárna matica, potom $(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{BA})^n = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}^n\mathbf{A}$, pre každé kladné celé číslo n .

Dôkaz vykonáme pomocou indukcie, v predchádzajúcom príklade bola dokázaná formula pre $n = 2$, nech formula platí pre $(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{BA})^{n-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}^{n-1}\mathbf{A}$, potom

$$(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{BA})^n = (\mathbf{A}^{-1}\mathbf{BA})^{n-1}(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{BA}) = (\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}^{n-1}\mathbf{A})(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{BA}) = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}^n\mathbf{A}$$

8.22. Nech \mathbf{A} je regulárna matica, ukážte, že $(\mathbf{A}^n)^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^n$.

Dôkaz vykonáme pomocou indukcie, musíme dokázať, že táto formula platí aj pre hodnotu $n = 2$, $(\mathbf{A}^2)^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^2$. Pretože inverzná matica existuje jednoznačne, potom predpokladajme, že platí $(\mathbf{A}^2)^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^2$, správnosť tejto formuly dokážeme tak, že preveríme dosadením platnosť $\mathbf{A}^2(\mathbf{A}^2)^{-1} = \mathbf{AAA}^{-1}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{E}$; podobne by sme dokázali aj $(\mathbf{A}^2)^{-1}\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{AA} = \mathbf{E}$. Nech platí formula $(\mathbf{A}^{n-1})^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^{n-1}$, potom

$$(\mathbf{A}^n)^{-1} = (\mathbf{A}^{n-1}\mathbf{A})^{-1} = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{A}^{n-1})^{-1} = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{A}^{-1})^{n-1} = (\mathbf{A}^{-1})^n,$$

čo bolo potrebné dokázať.

8.23. Nech matice \mathbf{A} a \mathbf{B} majú blokovú štruktúru

$$\mathbf{A} = \left(\begin{array}{cc|cc} 4 & 2 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & -3 & 0 & -2 & 3 \end{array} \right) \text{ a } \mathbf{B} = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & -1 \\ \hline 3 & -2 & 0 \\ -1 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Potom ich formálne môžeme písať v tvare

$$A = (A_1 \ A_2) \text{ a } B = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix}$$

Vypočítajte AB a ukážte

$$AB = (A_1B_1 + A_2B_3 \quad A_1B_2 + A_2B_4)$$

Ukážte taktiež

$$B^T = \begin{pmatrix} B_1^T & B_3^T \\ B_2^T & B_4^T \end{pmatrix}$$

Dôkaz prvej formuly vyplýva priamo z definície súčinu matíc, druhá formula vyplýva priamo z definície transponovanej matice.

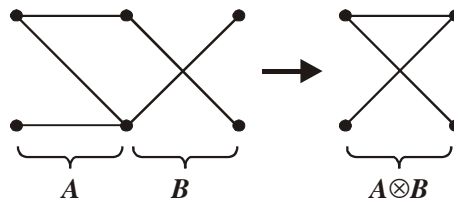
8.24. Nech $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ a $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ sú binárne matice, zostrojte

(a) $A \wedge B$, $A \wedge B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(b) $A \vee B$, $A \vee B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

(c) $A \otimes B$, $A \otimes B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Tento výsledok môžeme jednoducho graficky znázorniť pomocou grafickej reprezentácie matíc A a B ako binárných relácií (pozri obr. 8.9)

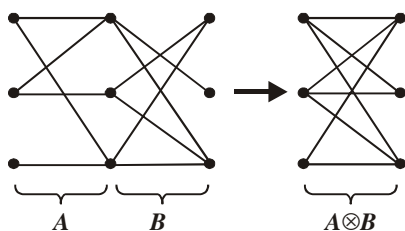


8.25. Nech $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ a $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ sú binárne matice, zostrojte

(a) $A \wedge B$, $A \wedge B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$(b) A \vee B, A \vee B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(c) A \otimes B, A \otimes B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



8.26. Nech A je binárna matica, dokážte $A \wedge A = A$ a $A \vee A = A$.

Tieto vlastnosti vyplývajú zo skutočnosti, že operácie konjunkcie a disjunkcie sú idempotentné, čiže $x \wedge x = x$ a $x \vee x = x$.

RIEŠENÉ CVIČENIA Z KAPITOLY 9

9.1. Definujte maticu koeficientov A , stĺpcový vektor neznámych \mathbf{x} a stĺpcový vektor pravých strán \mathbf{b} pre sústavy

(a) $x_1 + x_2 = 1$
 $2x_1 - x_2 = 0$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(b) $x_2 = 1$
 $x_1 = 0$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

(c) $x_1 - x_2 + x_3 = 0$
 $x_1 + x_2 - x_3 = 1$

$$x_1 - x_2 - x_3 = -1$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

(d) $x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = 1$

$$A = (1 \ 1 \ 1 \ -2), \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = (1)$$

9.2. Pomocou inverznej matice riešte sústavu rovníc

$$2x + 2y - 6z = 4$$

$$-x + y + 2z = 3$$

$$-3x + 5y + 3z = -1$$

Inverzná matica koeficientov bola spočítaná v cvičení 8.17a.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -6 \\ -1 & 1 & 2 \\ -3 & 5 & 3 \end{pmatrix}, \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 7/8 & 9/2 & -5/4 \\ 3/8 & 3/2 & -1/4 \\ 1/4 & 2 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 73/4 \\ 25/4 \\ 15/2 \end{pmatrix}$$

9.3. Pomocou Gaussovej eliminačnej metódy riešte sústavy lineárnych rovníc

$$x + y + z = 2$$

(a) $2x - 2y - z = 2$

$$3x + y - 2z = -2$$

$$\mathbf{A}' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -2 & -2 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -4 & -3 & -2 \\ 0 & -2 & -5 & -8 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -4 & -3 & -2 \\ 0 & 4 & 10 & 16 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -4 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 7 & 14 \end{array} \right)$$

$$7z = 14 \Rightarrow z = 2, -4y - 3z = -2 \Rightarrow y = -1, x + y + z = 2 \Rightarrow x = 1, \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

$$2x + 2y + z = 4$$

(b) $x - y - z = 2$

$$3x + y = 6$$

$$\mathbf{A}' = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 & 6 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$z = t, y = -\frac{3}{4}t, x = 2 + \frac{1}{4}t, \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 + (1/4)t \\ -(3/4)t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1/4 \\ -3/4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$2x_1 - x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 5$$

(c) $x_1 + x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 7$

$$x_1 + 3x_3 + 2x_4 = 4$$

$$x_2 + x_3 + x_4 = 3$$

$$\mathbf{A}' = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 5 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 4 & 3 & 7 \\ 1 & 0 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 4 & 3 & 7 \\ 2 & -1 & 5 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & -3 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \end{array} \right)$$

$$x_4 = l, x_3 = k, x_2 = 3 - k - l, x_1 = 4 - 3k - 2l, \text{ kde } k, l \in \mathbb{R},$$

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 4-3k-2l \\ 3-k-l \\ k \\ l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + l \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$2x - 3y = -4$$

$$(d) \quad x + 2y = 5$$

$$-4x + 6y = 8$$

$$\mathbf{A}' = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -3 & -4 \\ 1 & 2 & 5 \\ -4 & 6 & 8 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -3 & -4 \\ 0 & -7 & -14 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & 2 \end{array} \right)$$

$$y = 2, \quad 2x - 3 \cdot 2 = -4 \Rightarrow x = 1, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

$$(e) \quad \begin{array}{rcl} 3x & -2y & +z = -4 \\ x & +y & +2z = 2 \end{array}$$

$$\mathbf{A}' = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 1 & -4 \\ 0 & -5 & -5 & -10 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right)$$

$$z = k, \quad y = 2 - k, \quad 3x - 2(2 - k) + k = -4 \Rightarrow x = -k$$

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -k \\ 2-k \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(f) \quad \begin{array}{rcl} x_1 & -x_2 & +2x_3 = 0 \\ 2x_1 & +3x_2 & -x_3 = 0 \end{array}$$

$$\mathbf{A}' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & -5 & 0 \end{array} \right)$$

$$z = k, \quad y = k, \quad x = -k$$

$$\mathbf{x} = k \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

9.4. Vypočítajte determinanty matíc:

$$(a) \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad |\mathbf{A}| = -1$$

$$(b) \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, |\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$(c) \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 4 & 2 & 5 & -1 \\ 3 & 1/2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 4 & 2 & 5 & -1 \\ 3 & 1/2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 5 & 4 \\ 2 & 1/2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 4 & 5 & 2 \\ 2 & 3 & -1 & 1/2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 5 & 1 \\ 0 & 7 & -1 & 5/2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{7}{2} \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 5 & 1 \\ 0 & -2 & 2/7 & -5/7 \\ 0 & -2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \frac{7}{2} \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 37/7 & 2/7 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{vmatrix} = -\frac{7}{2} \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 2/7 & 37/7 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= -\frac{7}{2}(-1)2\frac{2}{7}4 = 8$$

$$(d) \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \sin \alpha & -\cos \alpha \\ \cos \alpha & \sin \alpha \end{pmatrix}, |\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} \sin \alpha & -\cos \alpha \\ \cos \alpha & \sin \alpha \end{vmatrix} = \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$(e) \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, |\mathbf{A}| = 18$$

9.5. Zistite pomocou determinantu, či sústava lineárnych vektorov je lineárne závislá alebo nezávislá.

(a) $\mathbf{a}_1 = (0, 1, 2)$, $\mathbf{a}_2 = (1, 1, 1)$, $\mathbf{a}_3 = (-1, 0, 1)$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \text{vektory sú lineárne závislé.}$$

(b) $\mathbf{a}_1 = (1, 1, -2)$, $\mathbf{a}_2 = (p, 1, 0)$, $\mathbf{a}_3 = (-1, 1, 1)$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ p & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 - 3p \Rightarrow \text{pre } p = -1/3 \text{ je sústava lineárne závislá, v opačnom prípade je lineárne nezávislá.}$$

9.6. Pomocou Cramerovho pravidla riešte tieto sústavy lineárnych rovníc

$$x_1 + x_2 + x_3 = 6$$

$$(a) \quad x_1 - x_2 + x_3 = 2$$

$$x_1 + x_2 - x_3 = 0$$

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 4, D_1 = \begin{vmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 4, D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 8, D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 12$$

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{4}{4} = 1, x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{8}{4} = 2, x_3 = \frac{D_3}{D} = \frac{12}{4} = 3$$

$$x_1 + x_4 = 5$$

$$(b) \quad x_1 + x_2 = 3$$

$$x_2 - x_3 = -1$$

$$x_3 + x_4 = 7$$

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2, D_1 = \begin{vmatrix} 5 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 7 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2, D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 7 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -4,$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 1 \end{vmatrix} = -6, D_4 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \end{vmatrix} = -8$$

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{-2}{-2} = 1, x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{-4}{-2} = 2, x_3 = \frac{D_3}{D} = \frac{-6}{-2} = 3, x_4 = \frac{D_4}{D} = \frac{-8}{-2} = 4$$

(c) sústava rovníc z príkladu 9.2.

$$2x + 2y - 6z = 4$$

$$-x + y + 2z = 3$$

$$-3x + 5y + 3z = -1$$

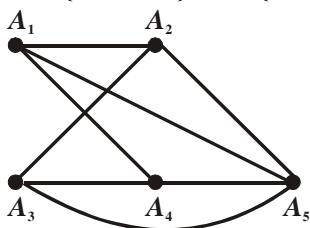
$$D = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -6 \\ -1 & 1 & 2 \\ -3 & 5 & 3 \end{vmatrix} = -8, D_1 = \begin{vmatrix} 4 & 2 & -6 \\ 3 & 1 & 2 \\ -1 & 5 & 3 \end{vmatrix} = -146, D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 4 & -6 \\ -1 & 3 & 2 \\ -3 & -1 & 3 \end{vmatrix} = -50, D_3 = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & 3 \\ -3 & 5 & -1 \end{vmatrix} = -60$$

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{-146}{-8} = \frac{73}{4}, x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{-50}{-8} = \frac{25}{4}, x_3 = \frac{D_3}{D} = \frac{-60}{-8} = \frac{15}{2}$$

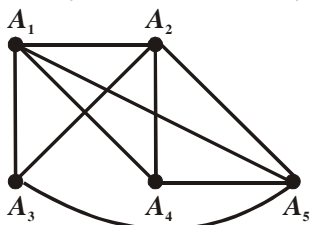
RIEŠENÉ CVIČENIA Z KAPITOLY 10

10.1. Prienikový graf (intersection graph) súboru množín A_1, A_2, \dots, A_n je graf, ktorého vrcholy reprezentujú tieto množiny a hrana spája tieto vrcholy, keď im odpovedajúce množiny majú neprázdny prienik. Skonstruujte prienikové grafy pre nasledujúce súbory množín.

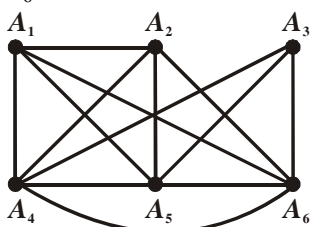
(a) $A_1 = \{0,2,4,6,8\}, A_2 = \{0,1,2,3,4\}, A_3 = \{1,3,5,7,9\}, A_4 = \{5,6,7,8,9\}, A_5 = \{0,1,8,9\}$



(b) $A_1 = \{\dots, -4, -3, -2, -1, 0\}, A_2 = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}, A_3 = \{\dots, -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, \dots\}, A_4 = \{\dots, -5, -3, -1, 1, 3, 5, \dots\}, A_5 = \{\dots, -6, -3, 0, 3, 6, \dots\}$

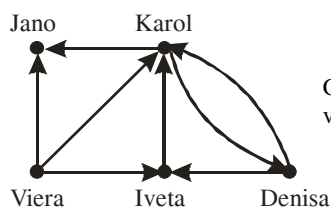


(c) $A_1 = \{x \mid x < 0\}, A_2 = \{x \mid -1 < x < 0\}, A_3 = \{x \mid 0 < x < 1\}, A_4 = \{x \mid -1 < x < 1\}, A_5 = \{x \mid x > -1\}, A_6 = \mathbf{R}$



10.2. Koho v nasledujúcom grafe vplyvu na obr. 10.27 ovplyvňuje Karol a kto vplýva na Karola?

OBRÁZOK 10.27.
GRAF
OVPLYVŇOVANIA



Graf ovplyvňovania využívaný v psychológii.

Karol ovplyvňuje Jana a Denisu, na Karola vplýva Viera, Iveta a Denisa

10.3. Skonstruujte graf plánovania udalostí pre nasledujúci program:

$S_1: x:=0$

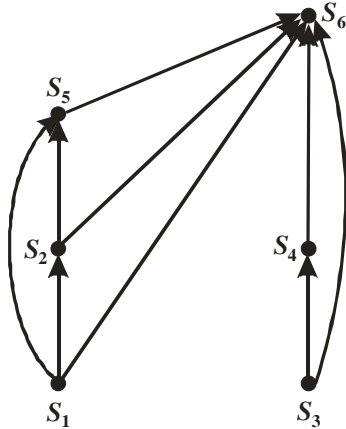
$S_2: x:=x+1$

$S_3: y:=2$

$S_4: z:=y$

$S_5: x:=x+2$

$S_6: y:=x+z$



10.4. Môže existovať obyčajný graf s 15 vrcholmi, pričom každý z nich má stupeň 5?

Nemôže, taký graf by mal nepárny počet vrcholov nepárneho stupňa, čo odporuje vete 10.1.

10.5. Keď pre každého člena spoločnosti spočítame, s koľkými ľuďmi si potriasol rukou a tieto počty sčítame, ukážte, že súčet je páry. Predpokladajte, že nikto si nepotriasol rukou sám zo sebou.

Keď si niekto potrasie rukou s niekým iným, pribúda k celkovému súčtu 2, pretože sa započítava prírastok pre každého z dvojice. Platí, že súčet stupňov vrcholov je dvojnásobkom počtu hrán, v našom prípade vrcholy predstavujú ľudí, hrany podanie ruky medzi dvojicou ľudí.

10.6. Pre ktoré hodnoty n sú nasledujúce grafy bipartitné?

(a) K_n

Iba pre $n = 1$ a $n = 2$, pre viac ako 2 sú vždy aspoň dva vrcholy v jednej partícii, a ľubovoľné 2 vrcholy musia byť spojené hranou.

(b) C_n

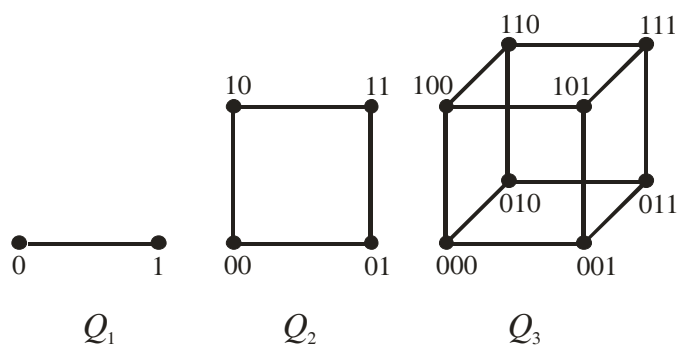
Pre kružnice párneho stupňa, keď si oindexujeme postupne vrcholy idúc po hranách kružnice, do jednej partície dáme vrcholy indexované párnym číslom, do druhej nepárnym číslom.

(c) W_n , čo je označenie tzv. kolesá, čo je hviezda so stredovým vrcholom, kde obvodové vrcholy sú prepojené kružnicou ako u C_n

Pre žiadne n , v jednej partícii musí byť samostatný stred kolesa spojený so všetkými ostatnými vrcholmi, a keď je v druhej partícii viac vrcholov ako len jeden, musí byť ako v kružnici medzi nimi hrana.

- (d) Q_n , tzv. n -kocky (alebo n -rozmerná kocka, n -cube), kde vrcholy reprezentujú binárne reťazce dĺžky n . Vrcholy sú spojené hranou vtedy, ak sa im odpovedajúce bitové reťazce líšia práve v jednej pozícii, pozri obr. 10.28.

OBRÁZOK 10.28.
N-ROZMERNÉ
KOCKY

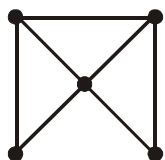


Prvé tri n -rozmerné kocky (pre $n = 1, 2$ a 3).

Pre všetky n , v žiadnej n -rozmernej kocke sa nenachádza n -uholník C_n nepárneho stupňa.

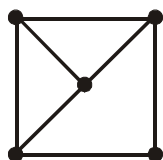
- 10.7.** Koľko hrán má graf, keď má vrcholy stupňa 4, 3, 3, 2, 2? Nakreslite taký graf.

Graf má $(4 + 3 + 3 + 2 + 2)/2 = 7$ hrán, možnou realizáciou je napr.



- 10.8.** Existuje obyčajný graf o piatich vrchoch nasledujúcich stupňov? Keď áno, nakreslite ho.

(a) 3, 3, 3, 3, 2



(b) 1, 2, 3, 4, 5

Neexistuje, nepárny počet vrcholov nepárneho stupňa.

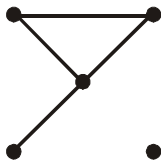
(c) 1, 2, 3, 4, 4

Podľa Havlovej vety nie je postupnosť grafová, pretože nie je grafová ani postupnosť 0, 1, 2, 3

(d) 3, 4, 3, 4, 3

Neexistuje, nepárny počet vrcholov nepárneho stupňa.

(e) 0, 1, 2, 2, 3



(f) 1, 1, 1, 1, 1

Neexistuje, nepárny počet vrcholov nepárneho stupňa.

10.9. Koľko podgrafov bez izolovaných vrcholov majú grafy K_2 , K_3 a W_3 ?

$$1, 7, \binom{6}{1} + \binom{6}{2} + \binom{6}{3} + \binom{6}{4} + \binom{6}{5} + \binom{6}{6} = 63$$

10.10. Nech G je graf o $|V|$ vrcholoch a $|E|$ hranách. Nech M je maximálny stupeň vrcholov z G a nech m je minimálny stupeň vrcholov z G . Ukážte, že $2|E|/|V| \geq m$ a $2|E|/|V| \leq M$.

$$2|E| = \sum_{v \in V} \deg(v) \geq \sum_{v \in V} m = |V|m$$

$$2|E| \geq |V|m$$

$$2|E|/|V| \geq m$$

$$2|E| = \sum_{v \in V} \deg(v) \leq \sum_{v \in V} M = |V|M$$

$$2|E| \leq |V|M$$

$$2|E|/|V| \leq M$$

10.11. Obyčajný graf sa volá *pravidelný* (regular), keď každý z jeho vrcholov má rovnaký stupeň. Koľko vrcholov stupňa 4 má pravidelný graf o 10 hranách?

$$2|E| = |V| \deg(v)$$

$$2 \times 10 = |V| \times 4$$

$$5 = |V|$$

10.12. *Doplnkový* (príp. komplementárny, complementary) graf \bar{G} ku grafu G má rovnakú vrcholovú množinu ako G . Dva vrcholy sú spojené hranou v \bar{G} vtedy, keď nie sú spojené v G . Nájdite

(a) \bar{K}_n

Graf z n izolovaných vrcholov.

(b) $\bar{K}_{m,n}$

$K_m \cup K_n$, kde zjednotenie je disjunktné, teda K_m a K_n nemajú spoločné hrany ani vrcholy.

(c) \bar{C}_n

$K_n \setminus C_n$ (Graf C_5 je samokomplementárny, teda doplnkový sám k sebe)
grafy s hranami medzi v_i a v_j , pokiaľ $i \neq j \pm 1 \pmod{n}$

(d) \bar{Q}_n

graf s vrcholmi reprezentovanými bitovými reťazkami dĺžky n , ktoré sú spojené, pokiaľ zodpovedajúca Hammingova norma je väčšia ako 1

10.13. Keď je G obyčajný graf o 15 hranách a \bar{G} má 13 hrán, koľko vrcholov má graf G ?

Graf zjednotený s komplementom dáva kompletný graf

$$2|E| = |V| \deg(v)$$

$$2 \times 28 = |V| \times (|V| - 1)$$

$$|V| = 8$$

10.14. Keď je G obyčajný graf o $|V|$ vrchoch a $|E|$ hranách, koľko hrán má graf \bar{G} ?

$$|V|(|V|-1)/2 - |E|$$

10.15. Ukážte, že keď je G obyčajný bipartitný graf o $|V|$ vrchoch a $|E|$ hranách, potom $|E| \leq |V|^2/4$.

Keď je bipartitný, počet hrán sa rovná násobku počtov vrcholov jednotlivých partícií, ktorý je najväčší, keď sú partície rovnako veľké, teda každá o $|V|/2$ vrchoch, čo je maximum $|V|/2 \times |V|/2 = |V|^2/4$.

10.16. Nájdite incidenčné matice pre

(a) K_n

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

(b) C_n

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(c) W_n , čo je označenie tzv. kolesa, čo je hviezda so stredovým vrcholom, kde obvodové vrcholy sú prepojené kružnicou ako u C_n

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ & & & & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & & & B & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ & & & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ & & & & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}, \text{ kde } B \text{ je odpoveď z (b)}$$

(d) $K_{m,n}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & 0 & 0 & & \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

10.17. Predpokladajme, že G a H sú obyčajné izomorfné grafy. Ukážte, že ich komplementárne grafy \bar{G} a \bar{H} sú tiež izomorfné.

Keď grafy G a H sú obyčajné izomorfné grafy, dajú sa ich vrcholy indexovať tak, že im zodpovedajúce matice susednosti sa rovnajú. Pokiaľ z týchto grafov vyrobíme komplementárne grafy, pre zodpovedajúce matice susednosti to s výnimkou diagonálnych elementov znamená, že nuly sa vymenia za jednotky a naopak. Keď sa rovnali pôvodné matice, transformované matice pre \bar{G} a \bar{H} sa tiež musia navzájom rovnať. To znamená, že aj grafy \bar{G} a \bar{H} sú tiež izomorfné.

10.18. Ukážte, že vrcholy bipartitného grafu s dvoma alebo viac vrcholmi môžu byť indexované tak, že ich matica susednosti má tvar $\begin{bmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{bmatrix}$, kde štyri vstupy sú obdĺžnikové bloky.

Indexujte vrcholy tak, že ako prvé sú indexované všetky vrcholy jednej z partícií, a potom všetky vrcholy druhej z partícií. Vzhľadom na to, že neexistuje žiadna hrana medzi partíciami, matica má požadovanú formu.

- 10.19.** Obyčajný graf sa volá samokomplementárny (selfcomplementary), keď grafy G a \bar{G} sú izomorfné. Ukážte, že cesta na štyroch vrcholoch je samokomplementárna.

Vrcholy cesty môžeme indexovať tak, že graf má nasledujúcu maticu susednosti A a k nej komplementárnu maticu \bar{A}

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \bar{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Maticu komplementárneho grafu môžeme ale transformovať na pôvodnú maticu výmenou prvkov matice A_{ij} za prvky A_{p_i, p_j} pre permutáciu $p = (2, 4, 1, 3)$, čo zodpovedá tomu, že z pôvodného grafu dostaneme po zmene indexovania vrcholov $1 \rightarrow 2, 2 \rightarrow 4, 3 \rightarrow 1, 4 \rightarrow 3$ graf totožný s grafom zodpovedajúcim matici susednosti \bar{A} .

- 10.20.** Ukážte, že keď je G samokomplementárny obyčajný graf s $|V|$ vrcholmi, potom $|V|$ modulo 4 = 0 alebo 1.

Keďže samokomplementárny graf musí mať v matici susednosti okrem hlavnej diagonály zaplnených jednotkou presne polovicu prvkov, súčet ktorých sa musí rovnať dvojnásobku počtu hrán, platí $2|E| = \frac{|V|^2 - |V|}{2}$.

$$2|E| = \frac{|V|^2 - |V|}{2}$$

Keďže počet hrán musí byť celé číslo, potom aj $\frac{|V|^2 - |V|}{4}$ musí byť celé číslo, teda $\frac{|V|(|V| - 1)}{4}$

musí byť celé číslo, čo je vtedy, keď alebo $|V|$ je deliteľné 4 bezo zvyšku, alebo $|V| - 1$ je deliteľné 4 bezo zvyšku. Keď $(|V| - 1) \bmod 4 = 0$, potom $|V| \bmod 4 = 1$.

- 10.21.** Pre ktoré celé čísla je C_n samokomplementárny?

C_5 . Keďže kružnica je regulárny graf, musí platiť

$$2|E| = |V| \deg(v) = |V|_{\text{complementary}} \deg_{\text{complementary}}(v)$$

$$|V| \times 2 = |V| \times (|V| - 3)$$

$$|V| = 5$$

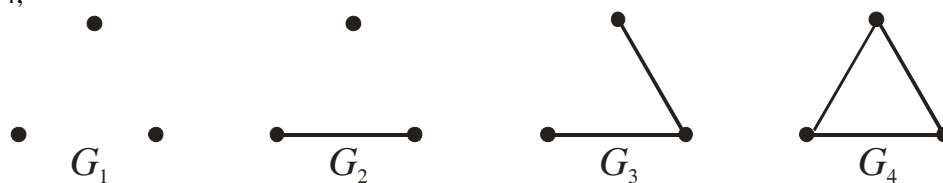
- 10.22.** Koľko neizomorfných obyčajných grafov s n vrcholmi existuje pre n rovné

(a) 2



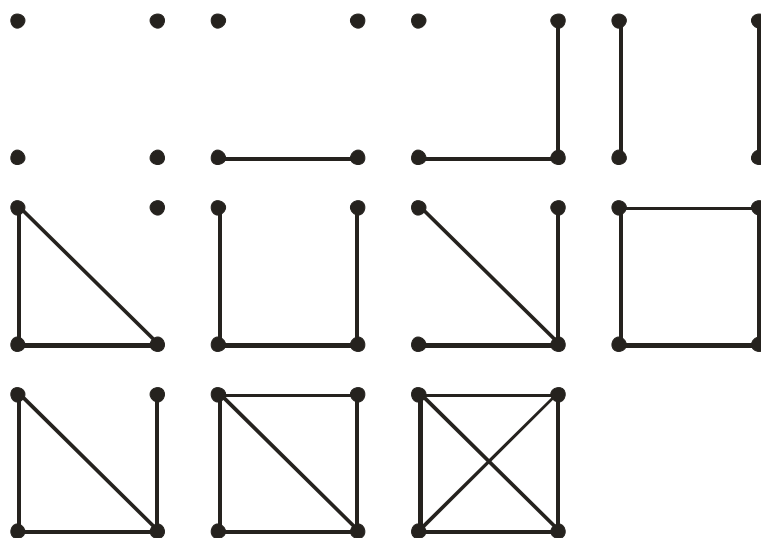
(b) 3

4,



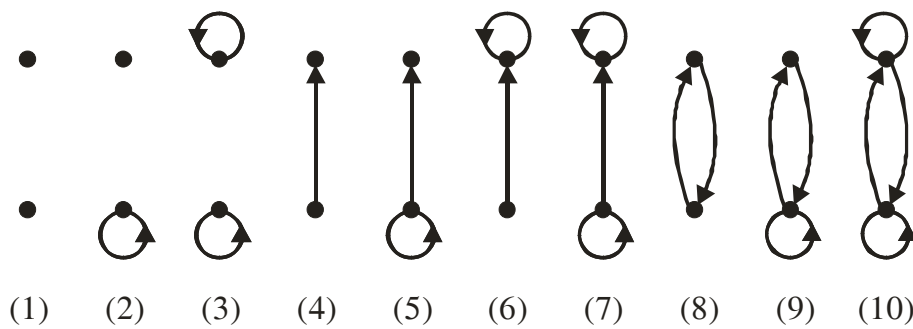
(c) 4

11



10.23. Koľko neizomorfných obyčajných orientovaných grafov s n vrcholmi existuje pre n rovné 2?

10



10.24. Keď vynásobíme maticu susednosti pre neorientovaný graf s maticou k nej transponovanou, čo je výsledkom vynásobenia?

Násobok je matica $A = [a_{ij}]$, kde a_{ij} je počet hrán z v_i do v_j pre $i \neq j$ a a_{ii} je počet hrán incidentných s v_i .

10.25. Zistite, či grafy zadané maticou susednosti sú izomorfné

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Sú izomorfné, stačí vymeniť prvky prvej matice A_{ij} za prvky $A_{p_i p_j}$ pre permutáciu $p = (3,4,1,2)$.

10.26. Definujte izomorfizmus pre orientované grafy.

Grafy sú izomorfné, keď medzi nimi existuje mapovanie 1-1 vrcholov, ktoré zachováva tak existenciu ako aj orientáciu hrán.

10.27. Koľko pamäti (aký počet celočíselných premenných) je potrebné na reprezentáciu obyčajného súvislého grafu o $|V|$ vrcholoch a $|E|$ hranách, keď použijeme

(a) zoznam dvojíc vrcholov

$2|E|$, minimálne $2(|V|-1)$, maximálne $2(|V|^2-|V|)$

(b) maticu susednosti

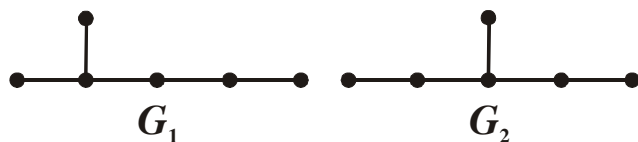
$|V|^2$

(c) incidenčnú maticu

$|E| \times |V|$

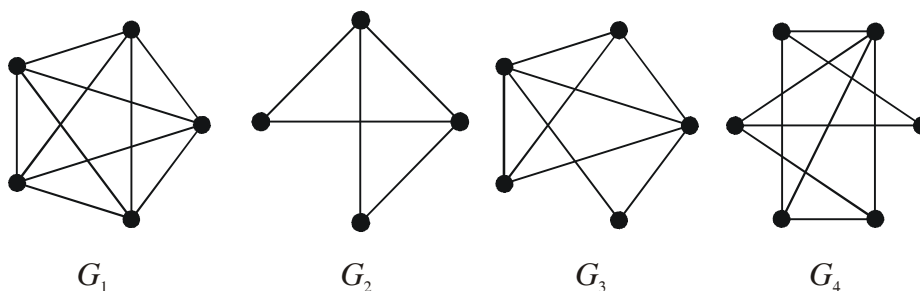
10.28. Nájdite dvojicu obyčajných grafov s rovnakou multimnožinou stupňov vrcholov, ktoré ale nie sú izomorfné.

Grafová postupnosť 3, 2, 2, 1, 1, 1



10.29. Ktorý z grafov na obr. 10.29 sa dá nakresliť jedným ťahom?

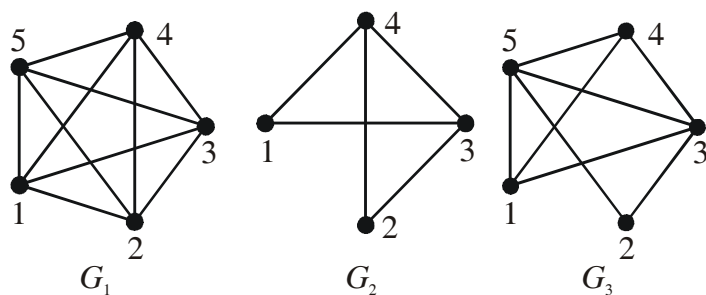
OBRÁZOK 10.29.
SÚ TO
JEDNOŤAŽKY?



Sú to jednoťažky?

Graf G_1 má sekvenciu stupňov vrcholov 4, 4, 4, 4, 4, všetky vrcholy majú párny stupeň a teda sa dá nájsť uzavretý eulerovský ťah. Grafy G_2 a G_3 majú sekvenciu stupňov vrcholov 3, 3, 2, 2, resp. 4, 4, 3, 3, 2, práve 2 vrcholy majú nepárny stupeň a teda sa dá nájsť otvorený eulerovský ťah. Graf G_4 má sekvenciu stupňov vrcholov 4, 3, 3, 3, 3, 2 a teda preň neexistuje eulerovský ťah.

10.30. Pomocou algoritmov z príkladov 10.5 a 10.6 nájdite uzavreté a otvorené eulerovské ťahy pre prvé tri grafy z obr. 10.29 cvičenia 10.29.



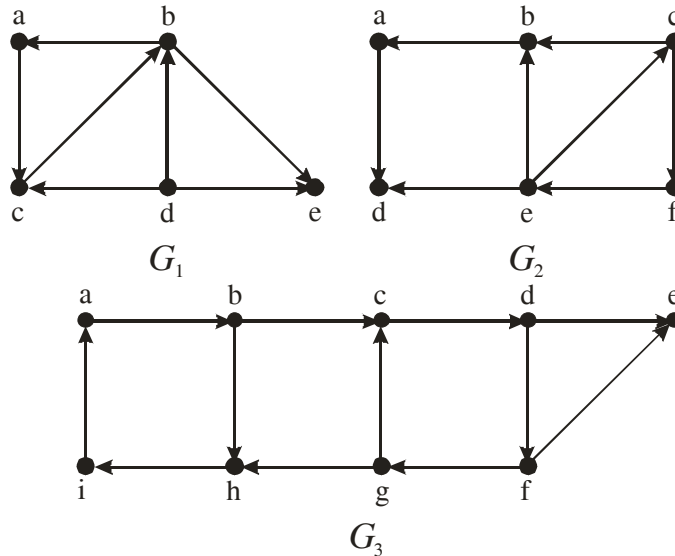
uzavretý eulerovský ťah kružnica pre G_1 : 1, 2, 3, 4, 5, 1, 3, 5, 2, 4, 1

otvorený eulerovský ťah pre G_2 : 3, 1, 4, 2, 3, 4

otvorený eulerovský ťah pre G_3 : 1, 5, 4, 3, 2, 5, 3, 1, 4

10.31. Nájdite také najväčšie silno súvislé podgrafy (také, ku ktorým sa nedá pridať vrchol, aby neprestali byť silno súvislé), ktoré zároveň majú spomedzi najväčších silno súvislých podgrafov aj najviac vrcholov, pre grafy z obr. 10.30.

OBRÁZOK 10.30.
NAJVÄČŠIE SILNO
SÚVISLÉ
PODGRAFY?



Nájdite najväčšie silno súvislé podgrafy.

Najväčšie silno súvislé podgrafy pre G_1 sú indukované množinami vrcholov: $\{a, b, c\}$

Najväčšie silno súvislé podgrafy pre G_2 sú indukované množinami vrcholov: $\{c, e, f\}$

Najväčšie silno súvislé podgrafy pre G_3 sú indukované množinami vrcholov: $\{a, b, c, d, f, g, h, i\}$

10.32. Nájdite počet ťahov dĺžky n medzi dvoma rôznymi vrcholmi u $K_{3,3}$ pre n rovné

- (a) 2, ak sú oba vrcholy v jednej množine bipartície $K_{3,3}$
3 (iba prostredný vrchol cesty je voliteľný, volí sa medzi 3 vrcholmi)
- (b) 3, ak sú oba vrcholy v rôznych množinách bipartície $K_{3,3}$
9

Celkovo vyberáme pre výber vnútorných vrcholov cesty z 3×3 možností poradia pre x, y u ťahu a, x, y, b , kde nemusíme uvažovať o možnosti opakovania dvojice vrcholov za sebou, pretože berieme nasledujúci vrchol vždy z ostatnej, disjunktné množiny vrcholov.

- (c) 4, ak sú oba vrcholy v jednej množine bipartície $K_{3,3}$
27

Celkovo vyberáme na výber vnútorných vrcholov cesty z $3 \times 3 \times 3$ možností poradia pre x, y, z u ťahu a, x, y, z, b , kde nemusíme uvažovať o možnosti opakovania dvojice vrcholov za sebou, pretože berieme nasledujúci vrchol vždy z ostatnej, disjunktné množiny vrcholov.

- (d) 5, ak sú oba vrcholy v rôznych množinách bipartície $K_{3,3}$
 $81 = 3 \times 3 \times 3 \times 3$

10.33. Nájdite počet sledov dĺžky n medzi dvoma rôznymi vrcholmi u K_4 pre rovnaké hodnoty n ako v predchádzajúcom prípade.

- (a) 2
2 (iba prostredný vrchol cesty je voliteľný, volí sa medzi 2 vrcholmi)

(b) 3

7

(2 cesty obsahujúce všetky 4 vrcholy, iba poradie prostredných 2 vrcholov je voliteľné; 3 sledy idúce z východzieho vrcholu na niektorý iný, naspäť, a potom do cieľového vrcholu; 2 sledy idúce z východzieho vrcholu do cieľového vrcholu, potom na niektorý iný okrem východzieho a naspäť.)

Predpokladajme, že máme vrcholy a, b, c, d .

Celkovo vyberáme na výber vnútorných vrcholov sledu z 3^2 možností poradia pre x, y u sledu a, x, y, b , kde $x \neq a$ a $y \neq b$, ale nesmú sa opakovať dva rovnaké vrcholy za sebou a, x, x, b , čo sa mohlo stať v dvoch prípadoch, teda $3 \times 3 - 2 = 7$.

(c) 4

20

Celkovo vyberáme pre výber vnútorných vrcholov cesty z $3 \times 4 \times 3$ možností poradia pre x, y, z u sledu a, x, y, z, b , kde $x \neq a$ a $z \neq b$, ale nesmú sa opakovať dva rovnaké vrcholy za sebou a, x, x, y, b , pri $x \neq y$, čo sa mohlo stať v $2 \times 2 + 3 = 7$ prípadoch, tiež sa nesmú opakovať dva rovnaké vrcholy za sebou a, x, y, y, b , pri $x \neq y$, čo sa mohlo stať v $2 \times 2 + 3 = 7$ prípadoch, a nesmú sa opakovať 3 rovnaké symboly za sebou, a, x, x, x, b , čo sa mohlo stať v 2 prípadoch, celkovo $3 \times 4 \times 3 - 7 - 7 - 2 = 20$.

(d) 5

Nech sled je označený a, w, x, y, z, b . Keď $w \neq a$ a $w \neq b$, ide o niektorý z ostatných dvoch vrcholov, kedy pre každý z nich máme 20 možností, podobne ako v prípade (c). Keď $w = b$, potom $x \neq b$ a máme voľbu 3 možností pre x . Pre každú z týchto možností máme podľa časti (b) 7 možností pre kombináciu y, z , teda máme 21 možností. Celkovo máme $20 + 20 + 21 = 61$ možností.

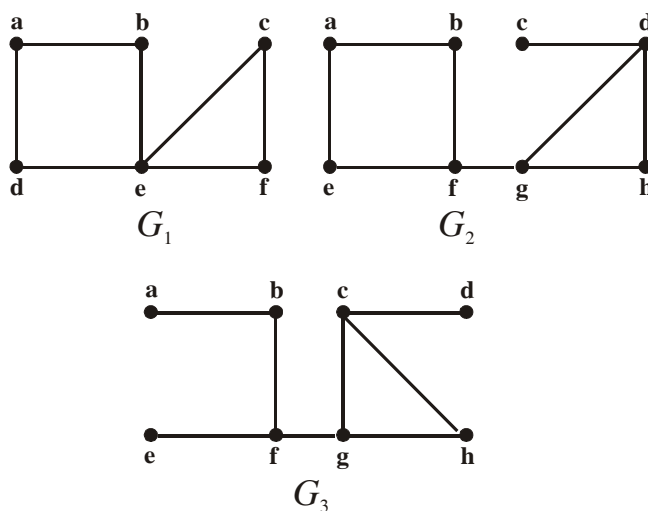
Inou možnosťou je jednoducho zobrať maticu susednosti u K_4 a urobiť jej druhú, tretiu, štvrtú a piatu mocninu, výsledky by boli hodnoty mimodiagonálnych prvkov.

10.34. Ukážte, že v akomkoľvek obyčajnom grafe existuje cesta z ľubovoľného vrcholu nepárneho stupňa do nejakého iného vrcholu nepárneho stupňa.

Zoberme si graf (alebo, v prípade, že je graf nesúvislý, tak komponent) s vybraným vrcholom nepárneho stupňa. Keďže daný graf (alebo komponent) je súvislý, dá sa zo zvoleného vrcholu nepárneho stupňa prejsť do ľubovoľného iného vrcholu grafu, resp. komponentu. Teraz ostáva dokázať, že v danom grafe, resp. komponente existuje aspoň jeden ďalší vrchol nepárneho stupňa. Podľa vety 10.1 ale existuje párný počet vrcholov nepárneho stupňa (nech už v súvislom grafe, alebo v komponente), a teda keď existuje jeden taký vrchol, musí existovať nepárny počet ďalších vrcholov nepárneho stupňa, teda najmenej ešte jeden ďalší.

10.35. Nájdite všetky artikulácie grafov z obr. 10.31.

OBRÁZOK 10.31.
NÁJDITE
ARTIKULÁCIE



Nájdite artikulácie

Artikuláciou pri grafe G_1 je vrchol e .

Artikulácie pri grafe G_2 sú vrcholy f, g, d .

Artikulácie pri grafe G_3 sú vrcholy b, c, f, g .

10.36. Nájdite všetky mosty pri grafoch z obr. 10.31.

Mosty pri grafe G_1 nie sú.

Mosty pri grafe G_2 sú hrany $\{f, g\}, \{c, d\}$.

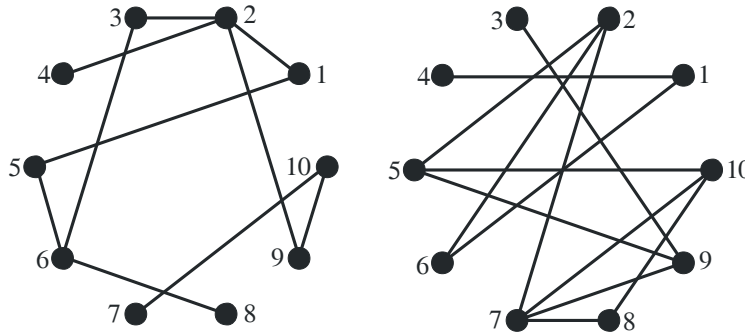
Mosty pri grafe G_3 sú hrany $\{f, g\}, \{c, d\}, \{a, b\}, \{e, f\}, \{b, f\}$.

10.37. Dokážte, že každý vrchol mostu obyčajného grafu je artikuláciou, pokiaľ má stupeň väčší ako 1.

Obmedzíme našu pozornosť na komponent, v ktorom most leží (ostatné komponenty sú pre nás irelevantné). Nech most tvorí dvojica vrcholov uv . Keď je most odstránený, graf má dva komponenty, kde jedna obsahuje vrchol u a druhá vrchol v . Keď mal vrchol v stupeň jedna, potom je jasné, že jeho odstránením nevzniklo viac komponentov. Keď vrchol v mal stupeň väčší ako jedna, potom je jasne spojený ešte aspoň s nejakým vrcholom w v rámci komponentu. Teda, keď v je odstránený, dostávame aspoň dva komponenty, jeden s vrcholom u a druhý s vrcholom w .

10.38. Komunikačná linka v komunikačnej sieti by mala byť zdvojená, keď jej nefunkčnosť znemožňuje prenos signálu medzi nejakou dvojicou vrcholov. Ktoré spoje by mali byť zdvojené v grafoch na obr. 10.32?

OBRÁZOK 10.32.
MOSTY?



Ktoré hrany by mali byť zdvojené pre dvojité zabezpečenie súvislosti komunikačnej siete?

$\{\{6, 8\}, \{2, 4\}, \{7, 10\}, \{9, 10\}, \{2, 9\}\}, \{\{1, 4\}, \{3, 9\}, \{2, 6\}, \{1, 6\}\}$

10.39. Ukážte, že obyčajný graf o n vrcholoch je súvislý, pokiaľ obsahuje viac ako $(n-1)(n-2)/2$ hrán.

Predpokladajme, že graf nie je súvislý. Potom v sebe obsahuje komponent s k vrcholmi, kde $k \in [1, n-1]$. Zvyšných $n-k$ vrcholov je v jednom alebo viac ďalších komponentoch. Maximálny možný počet hrán tohto grafu je teda $\binom{k}{2} + \binom{n-k}{2}$, čo sa dá rozpísať ako $k^2 - nk + (n^2 - n)/2$. To je

kvadratická funkcia k , ktorá je minimálna pre $k = n/2$, a maximálna pre okrajové hodnoty definičného oboru, teda pre $k = 1$ a $k = n-1$. V druhom prípade dostávame po dosadení za k vzorec $(n-1)(n-2)/2$. Preto najväčší počet hrán, ktorý môže nesúvislý graf mať, je $(n-1)(n-2)/2$, takže každý graf s viac hranami je súvislý.

10.40. Ukážte, ako sa dá veta 10.7 využiť na nájdenie dĺžky najkratšej cesty medzi dvoma vrcholmi.

Hľadáme dĺžky najkratšej cesty medzi vrcholmi v_i a v_j . Zostrojíme maticu susednosti A a pokiaľ má pre indexy vrcholov i, j prvok a_{ij} rovný jednej, je dĺžka 1. V opačnom prípade robíme mocniny A^r pre stále väčšie r , dokiaľ nedostaneme na pozícii a_{ij} nenulovú hodnotu a zároveň dokiaľ sa $r < n-1$. V prvom prípade je mocnina r rovná hľadanej dĺžke cesty, v druhom prípade je graf nesúvislý a cesta neexistuje.

10.41. Ukážte, ako sa dá veta 10.7. využiť na zistenie, či je graf súvislý.

Nech A je matica susednosti daného grafu. Veta 10.7 nám hovorí, že A^r obsahuje počet ciest dĺžky r medzi vrcholmi. Keď prvok matice A^r je väčší ako 0, potom medzi odpovedajúcimi vrcholmi existuje cesta (alebo sled) dĺžky r . Najdlhšia cesta v grafe môže mať dĺžku $n-1$. Preto stačí posčítavať $A^1 + A^2 + \dots + A^{n-1}$ a pokiaľ je každý nediagonálny prvok nenulový, potom je graf súvislý.

10.42. Ukážte, že obyčajný graf je bipartitný práve vtedy, keď nemá žiadne kružnice nepárnej dĺžky.

Musíme dokázať obidva smery implikácie.

Keď je graf bipartitný (partície pomenujeme A a B), potom vrcholy každej cesty musí ležať striedavo v A a B . Preto cesta začínajúca v A skončí po nepárnom počte krokov v B a po párnom počte krokov v A . Keďže kružnica končí v rovnakom vrchole, v ktorom začínala, dĺžka kružnice musí byť párna.

Opačný smer je zložitejšie dokázať. Predpokladáme, že všetky kružnice majú párnú dĺžku a chceme dokázať, že graf je bipartitný. Môžeme predpokladať súvislosť grafu, keby nebol súvislý, budeme pracovať s každým komponentom zvlášť. Nech v je vrchol grafu a nech A je množina všetkých vrcholov, do ktorých vedie cesta nepárnej dĺžky začínajúca vo v a nech B je množina všetkých vrcholov do ktorých vedie cesta párnej dĺžky začínajúca vo v . Pretože komponent je súvislý, každý vrchol leží v A alebo v B . Žiaden vrchol nemôže súčasne byť v A aj v B , pretože spojením ciest nepárnej dĺžky do A a párnej do B by sme dostali sled nepárnej dĺžky a ten obsahuje kružnicu nepárnej dĺžky, čo je v rozpore s predpokladom. Teda vrcholy môžu byť rozdelené na dve disjunktné podmnožiny. Teraz iba musíme ukázať, že každá hrana spája vrcholy z rôznych podmnožín. Keď xy je hrana kde $x \in A$, potom cesta nepárnej dĺžky z v do x nasledovaná hranou xy vytvára cestu párnej dĺžky z v do y , teda $y \in B$.

- 10.43.** Ukážte, že graf reprezentujúci prípustné ťahy koňom na šachovnici $m \times n$ (kde m, n sú kladné celé čísla), je bipartitný graf.

Dve partície grafu budú stotožnené s množinami vrcholov zodpovedajúcimi políčkam čiernej, resp. bielej farby. Keďže kôň na šachovnici ťahá vždy z bielej farby na čiernu a naopak, hrany zodpovedajúce ťahom definujú bipartitný graf.

- 10.44.** Ukážte, že neexistuje uzavretá cesta koňom pre šachovnicu $m \times n$, kde m, n sú nepárne čísla.

Dokážeme sporom. Keď m, n sú nepárne čísla, ich násobok je tiež nepárny. Podľa predchádzajúceho cvičenia je graf bipartitný. Keďže musíme vždy skákať z jednej partície A na druhú B a žiaden vrchol sa nesmie opakovať, teda hamiltonovská kružnica by vyzerala ako $a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_k, b_k, a_1$, počet vrcholov v partíciách musí byť rovnaký, čo nám dáva ako súčet vrcholov párne číslo. To vedie k sporu s tým, že $m \times n$ je nepárne číslo.

- 10.45.** Ukážte, že existuje Grayov kód dĺžky n bitov pre akékoľvek pozitívne číslo n , alebo, ekvivalentne, ukážte, pomocou matematickej indukcie, že n -kocka Q_n má vždy hamiltonovskú kružnicu.

Trik je použiť Grayov kód pre n na vygenerovanie kódu pre $n + 1$. Zoberieme Grayov kód pre n a pridáme nulu pred každý reťazec, aby sme dostali prvú polovicu Grayovho kódu pre $n + 1$, potom zoberieme znova Grayov kód pre n a pridáme jednotku pred každý reťazec, aby sme dostali druhú polovicu. Pri druhej polovici prevrátíme poradie kódov, aby sa tam, kde budú obidve polovice susediť, líšili iba o 1 bit. Na formálny dôkaz použijeme indukciu. Pre $n = 1$ je kód $0, 1$ (čo ale ešte nie je hamiltonovská kružnica). Predpokladajme indukčnú hypotézu, že c_1, c_2, \dots, c_{2^n} je Grayov kód pre n . Potom $0c_1, 0c_2, \dots, 0c_{2^n}, 1c_{2^n}, \dots, 1c_2, 1c_1$ je Grayov kód pre $n + 1$.

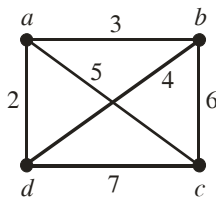
RIEŠENÉ CVIČENIA Z KAPITOLY 11

11.1. Upravte Dijkstrov algoritmus na nájdenie najkratšej vzdialenosti medzi dvoma vrcholmi a a z v obyčajnom súvislom ohodnotenom grafe tak, aby bola nájdená dĺžka najkratšej cesty od východzieho vrcholu a ku každému inému vrcholu.

Jediné, čo je potrebné upraviť, je nezastaviť algoritmus, keď sa druhý zvolený vrchol z dostane do množiny S . Podmienku u **while** zmeníme na niečo ako $S \neq V$.

11.2. Vyriešte problém obchodného cestujúceho pre graf na obr. 11.19 nájdením celkového súčtu váh pre všetky hamiltonovské kružnice a určením kružnice s najmenším celkovým súčtom.

OBRÁZOK 11.19.
HAMILTONOVSKÉ
KRUŽNICE A ICH
DĹŽKY?



Hľadajte hamiltonovské kružnice a ich dĺžky (váhy).

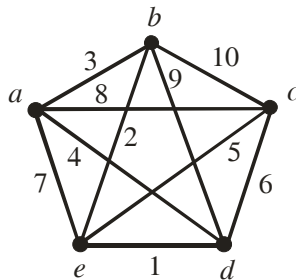
Nasledujúca tabuľka určuje tri rôzne hamiltonovské kružnice a ich váhy.

Kružnica	váha
a-b-c-d-a	$3 + 6 + 7 + 2 = 18$
a-b-d-c-a	$3 + 4 + 7 + 5 = 19$
a-c-b-d-a	$5 + 6 + 4 + 2 = 17$

Najmenší súčet váh má posledná kružnica.

11.3. Vyriešte problém obchodného cestujúceho pre graf na obr. 11.20 nájdením celkového súčtu váh pre všetky hamiltonovské kružnice a určením kružnice s najmenším celkovým súčtom.

OBRÁZOK 11.20.
HAMILTONOVSKÉ
KRUŽNICE A ICH
DĹŽKY?



Hľadajte hamiltonovské kružnice a ich dĺžky (váhy).

Všetky hamiltonovské kružnice s ich súčtom váh:

a, b, c, d, e, a, 27	a, c, b, d, e, a, 35	a, d, b, c, e, a, 35	a, e, b, c, d, a, 29
a, b, c, e, d, a, 23	a, c, b, e, d, a, 25	a, d, b, e, c, a, 28	a, e, b, d, c, a, 32
a, b, d, c, e, a, 30	a, c, d, b, e, a, 32	a, d, c, b, e, a, 29	a, e, c, b, d, a, 35
a, b, d, e, c, a, 26	a, c, d, e, b, a, 20	a, d, c, e, b, a, 20	a, e, c, d, b, a, 30
a, b, e, c, d, a, 20	a, c, e, b, d, a, 28	a, d, e, b, c, a, 25	a, e, d, b, c, a, 35
a, b, e, d, c, a, 20	a, c, e, d, b, a, 26	a, d, e, c, b, a, 23	a, e, d, c, b, a, 27

- 11.4.** Navrhnete ohodnotený graf tak, že celková suma váh uzavretého sledu, ktorý navštívi každý vrchol aspoň raz, je minimálna pre sled, ktorý navštívi niektoré vrcholy viackrát.

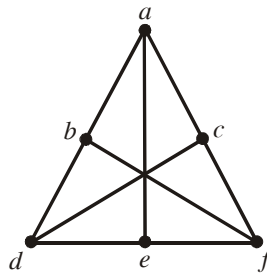
Keď zoberieme trojuholník ABC a urobíme jednu z váh, povedzme AC, veľmi veľkú (napr. 100), potom sa minimálny ťah bude tejto hrane vyhýbať. Povedzme, že hrane AB dáme váhu 1 a hrane BC 2, potom by hamiltonovská kružnica mala váhu 103, ale ťah A-B-C-B-A navštívi každý vrchol aspoň raz a má váhu $1 + 2 + 2 + 1 = 6$. Tento ťah navštívi vrchol B dvakrát, aby sa vyhol prechodu cez „ťažkú“ hranu AC.

- 11.5.** Dajú sa z piatich domov viesť cesty ku dvom studniam tak, aby sa žiadna z ciest nekrížila?

Ide o rovinnú reprezentáciu grafu $K_{5,2}$, ktorá sa dá jednoducho nájsť tak, že päťci vrcholov z jednej partície (rozkladu) usporiadame na priamke, na jednej strane priamky bude jeden vrchol z druhej partície, na druhej strane priamky bude vrchol z druhej partície.

- 11.6.** Zistite, či je graf na obr. 11.21 planárny. Keď áno, nakreslite ho bez kríženia hrán.

OBRÁZOK 11.21.
ROVINNÁ
REPREZENTÁCIA?

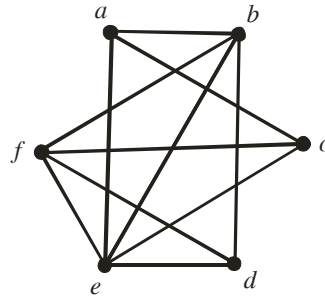


Dá sa nájsť rovinná reprezentácia daného grafu?

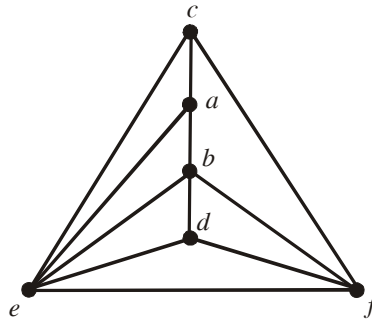
Nedá sa nájsť rovinná reprezentácia daného grafu, graf je izomorfný s $K_{3,3}$, s partíciami $\{a, d, f\}$ a $\{b, c, e\}$.

- 11.7.** Zistite, či je graf na obr. 11.22 planárny. Keď áno, nakreslite ho bez kríženia hrán.

OBRÁZOK 11.22.
ROVINNÁ
REPREZENTÁCIA?



Dá sa nájsť rovinná reprezentácia daného grafu?



Rovinná reprezentácia grafu z obr. 11.22

- 11.8.** Ukážte, že kompletý graf K_5 nie je planárny pri použití podobných argumentov, aké boli použité v príklade s oblasťami R pre $K_{3,3}$.

Dôkaz robíme kontradikciou. Predpokladajme, že existuje rovinná reprezentácia K_5 , a volajme vrcholy v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 . Z každého vrcholu ku všetkým ostatným musí viesť hrana. Pre sekvenciu $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_1$, musí platiť, že tvorí päťuholník. Ten rozdeľuje rovinu na vonkajšiu časť a vnútornú časť. Hrana $\{v_1, v_3\}$ musí existovať, predpokladajme, že vo vnútornej časti. Potom hrany $\{v_2, v_4\}$, $\{v_2, v_5\}$ musia byť vo vonkajšej časti. To zabraňuje hranám $\{v_1, v_4\}$ a $\{v_3, v_5\}$, aby boli vo vonkajšej časti. Ale obidve tieto hrany nemôžu byť vo vnútri bez kríženia, Preto neexistuje rovinná reprezentácia grafu K_5 .

- 11.9.** Predpokladajme, že súvislý planárny graf má šesť vrcholov, každý stupňa 4. Na koľko strán (oblastí) je rovina rozdelená planárnou reprezentáciou tohto grafu?

Použijeme Eulerovu formulu $|R| = |E| - |V| + |K| + 1$, teda $|R| = 6 \times 4/2 - 6 + 1 + 1 = 8$.

- 11.10.** Dokážte vetu 11.4.

Stupeň každej oblasti je najmenej 4 (graf neobsahuje slučky, čo by vytvorilo oblasti stupňa 1, násobné hrany, čo by vytvorilo oblasti dĺžky 2, ani trojuholníky, čo by vytvorilo oblasti dĺžky 3). Dĺžka vonkajšej oblasti je tiež aspoň 4, keďže predpokladáme počet vrcholov väčší ako 3. Preto, podobne ako v dôkazu vety 11.2, $2|E| \geq 4|R|$ alebo $|R| \leq |E|/2$. Dosadením do Eulerovej formuly dostávame $|E| - |V| + 2 \leq |E|/2$, z čoho vychádza $|E| \leq 2|V| - 4$.

- 11.11.** Predpokladajme, že súvislý planárny obyčajný graf s $|E|$ hranami a $|V|$ vrcholmi neobsahuje kružnice dĺžky 4 alebo kratšie. Dokážte, že $|E| \leq (5/3)|V| - (10/3)$, keď počet vrcholov je väčší ako 4.

Dôkaz je rovnaký ako u cvičení 11.10, iba dĺžky každej oblasti teraz musí byť aspoň 5. Tak dostaneme $2|E| \geq 5|R|$.

- 11.12.** Ktorý z nasledujúcich neplanárnych grafov má vlastnosť, že po odstránení ľubovoľného vrcholu a všetkých s ním incidentných hrán dostávame planárny graf?

(a) K_5

Keď odstránime vrchol z K_5 , dostávame K_4 , pre ktorý sme si ukázali v príklade v texte, že je planárny.

(b) K_6

Keď odstránime vrchol z K_6 , dostávame K_5 , pre ktorý sme si ukázali v texte, že nie je planárny.

(c) $K_{3,3}$

Keď odstránime vrchol z $K_{3,3}$, dostávame $K_{3,2}$, pre ktorý je v obr. 11.5, graf G_3 ukázané, že je planárny.

(d) $K_{3,4}$

Keď odstránime vrchol z $K_{3,4}$ vrchol z partície o 4 vrcholoch, dostávame $K_{3,3}$, pre ktorý sme si ukázali v texte, že nie je planárny.

- 11.13.** *Priesečníkové číslo (crossing number)* obyčajného grafu je najmenší možný počet preŕatí dvoch hrán inde ako v s nimi incidentných vrcholoch (pričom žiadne tri hrany sa nesmú pretnúť v spoločnom bode). Vo všeobecnosti ide o veľmi zložitý problém, dôležitý na návrh elektronických obvodov (definuje počet izolovaných drôtov potrebných na pridanie k plošnému obvodu). Vašou úlohou je ukázať, že $K_{3,3}$ má priesečníkové číslo rovné jednej.

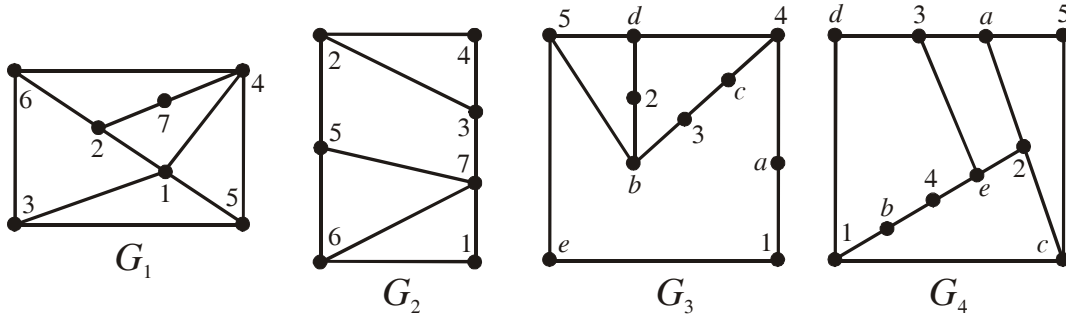
Konstruktia je ukázaná pri obr. 11.5, ukazujúc, že $K_{3,3}$ je neplanárny.

- 11.14.** *Hrúbka (Thickness)* jednoduchého grafu je najmenší počet planárnych podgrafov, ktoré majú graf G ako ich zjednotenie. Táto veličina je dôležitá pre návrh elektronických obvodov, aby bolo možné zistiť, koľko najmenej vrstiev je potrebné na stavbu obvodu. Ukážte, že graf $K_{3,3}$ má hrúbku 2.

Konstruktia je podobná ako pri obr. 11.5 graf G_3 , ukazujúc, že $K_{3,3}$ je neplanárny. Druhý podgraf tvorí iba hrana, ktorá by inak po pridaní spôsobila kríženie.

- 11.15.** Nájdite hrúbku grafov (a) K_5 (b) K_6 (c) K_7 (d) $K_{3,4}$ (e) $K_{4,4}$ (f) $K_{5,5}$

Všetky zo zmienených grafov sú neplanárne, prvé tri obsahujú ako podgraf K_5 , ostatné tri podgraf $K_{3,3}$. Ich hrúbka bude teda najmenej 2. Problém môžeme zobrať z opačného pohľadu, každý z prvých troch grafov je podgrafom grafu K_7 , a každý z ostatných troch grafov je podgrafom grafu $K_{5,5}$. Stačí teda ukázať, že grafy K_7 a $K_{5,5}$ sa dajú rozložiť na dva planárne podgrafy. To je zobrazené na nasledujúcom obrázku, kde G_1 a G_2 sú planárne podgrafy grafu K_7 a G_3 a G_4 sú planárne podgrafy grafu $K_{5,5}$.



11.16. Ukážte, že keď je G súvislý obyčajný graf s $|V|$ vrcholmi a $|E|$ hranami, potom jeho hrúbka je najmenej $\lceil |E|/(3|V| - 6) \rceil$.

Podľa Vety 11.2 pre súvislý planárny obyčajný graf G s $|E|$ hranami a $|V|$ vrcholmi, kde $|V| \geq 3$, platí, že $|E| \leq 3|V| - 6$. Každý graf s viac hranami bude teda neplanárny, a keď máme graf rozložiť na čo najmenej planárnych grafov, každý z týchto grafov bude mať maximálne $3|V| - 6$ hrán, všetky zvyšné hrany už musia tvoriť ďalšiu vrstvu. Minimálny počet vrstiev je teda horná celá časť podielu počtu hrán k podielu maximálneho počtu hrán, čo sa vojde do planárneho grafu o danom počte vrcholov.

11.17. Použite cvičenie 11.16 na to, aby ste ukázali, že hrúbka pre K_n je najmenej $\lfloor (n+7)/6 \rfloor$.

Vzorec je isto platný pre $n \leq 4$, teda predpokladajme, že budeme baviť o príkladoch pre $n > 4$. Podľa cvičenia 11.16 hrúbka pre K_n je najmenej

$$\frac{C(n,2)}{3n-6} = \frac{n(n-1)/2}{3n-6} = \frac{n(n-1)}{6(n-2)} = \frac{1}{6} \left(n+1 + \frac{2}{n-2} \right)$$

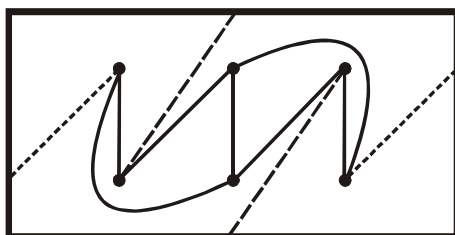
zaokrúhlené nahor. Pretože to nikdy nie je celé číslo, rovná sa to o jednotku viac a zaokrúhlené nadol, teda

$$\frac{1}{6} \left(n+1 + \frac{2}{n-2} \right) + 1 = \frac{n+7}{6} + \frac{2}{6(n-2)}$$

zaokrúhlené nadol. Posledný člen môže byť ignorovaný: je to vždy menej ako $1/6$ a preto neovplyvní proces zaokrúhľovania (pretože prvý člen má menovateľ 6). Tým sme dokázali, že hrúbka pre K_n je najmenej $\lfloor (n+7)/6 \rfloor$.

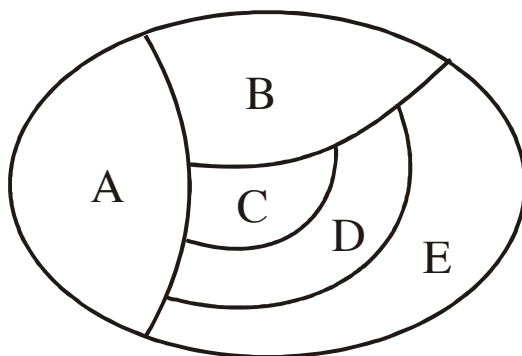
11.18. Nakreslite $K_{3,3}$ na torus, aby sa hrany neprekrývali.

Povrch torusu si môžeme zobrazit' ako obdĺžnik, kde ľavá strana je zlepená s pravou stranou a vrchná so spodnou. Čiarkované hrany sú spojené na ľavej a pravej strane a horná s dolnou.

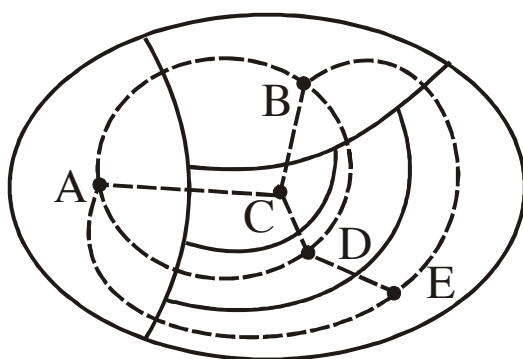


11.19. Skonstruujte duálny graf pre mapu na obr. 11.23. Nájdite počet farieb potrebných na zafarbenie mapy tak, aby žiadne dve susedné oblasti (steny) nemali rovnakú farbu.

OBRÁZOK 11.23.
DUÁLNY GRAF
A ZAFARBENIE
MAPY?



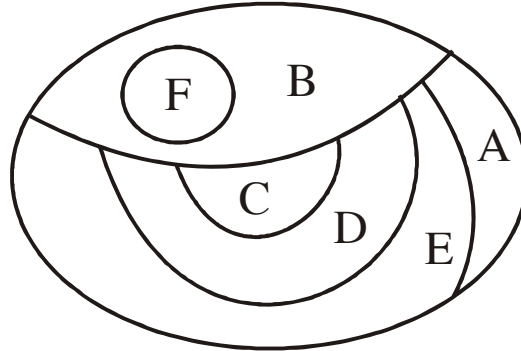
Nájdite duálny graf a zafarbenie mapy.



Pretože vrcholy ABCD tvoria kompletný graf izomorfný s K_4 , musia byť na farbenie mapy najmenej 4 farby. Oblasti E môžeme dať rovnakú farbu ako C.

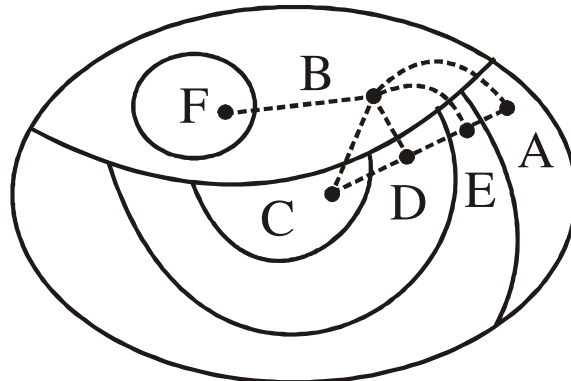
11.20. Skonstruujte duálny graf pre mapu na obr. 11.24. Nájdite počet farieb potrebných na zafarbenie mapy tak, aby žiadne dve susedné oblasti (steny) nemali rovnakú farbu.

OBRÁZOK 11.24.
DUÁLNY GRAF
A ZAFARBENIE
MAPY?



Nájdite duálny graf a zafarbenie mapy.

Pretože vrcholy BCD tvoria kompletný graf izomorfný s K_3 , musia byť na farbenie mapy najmenej 3 farby. Oblasti E,F môžeme dať rovnakú farbu ako C, a A ako D.

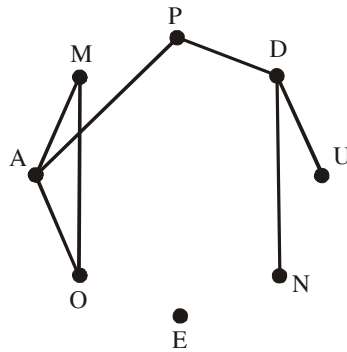


11.21. Aké je chromatické číslo grafu typu "koleso" W_n ?

V príklade v textu sme videli, že chromatické číslo C_n je 2 pre párne n a 3 pre nepárne n . Pretože koleso W_n je iba C_n s centrálnym vrcholom navyše, prepojeným so všetkými vrcholmi C_n na obode, W_n potrebuje iba o jednu farbu viac ako C_n , práve pre centrálny vrchol. Preto je chromatické číslo W_n je 3 pre párne n a 4 pre nepárne n .

11.22. Navrhňte rozvrh na skúšky z predmetov Analýza algoritmov (A), Modelovanie a simulácia (M), Počítačová grafika (P), Databázy (D), Umelá inteligencia (U), Neurónové siete (N), Evolučné algoritmy (E), Operačné systémy (O), keď žiadni študenti nemajú naraz zapísané predmety Analýza algoritmov a Operačné systémy, nemajú naraz zapísané predmety Modelovanie a simulácia a Operačné systémy, nemajú naraz zapísané predmety Databázy a Umelá inteligencia, nemajú naraz zapísané predmety Databázy a Neurónové siete, nemajú naraz zapísané predmety Analýza algoritmov a Modelovanie a simulácia, nemajú naraz zapísané predmety Analýza algoritmov a Počítačová grafika, nemajú naraz zapísané predmety Počítačová grafika a Databázy, ale existujú študenti, ktorí majú zapísané všetky ostatné možné kombinácie.

Uvažujme graf reprezentujúci daný problém. Vrcholy reprezentujú 8 predmetov a sú spojené hranou, keď existujú študenti idúci na obidva predmety. Existujú teda hrany medzi všetkými okrem siedmich vymenovaných dvojíc. Je oveľa ľahšie nakresliť komplement grafu zobrazujúci iba hrany pre vymenované dvojice.



Chceme nájsť chromatické číslo grafu, ktorého komplement sme nakreslili, farby budú časové periódy pre skúšky. Pretože vrcholy PUNEO tvoria K_5 , chromatické číslo je najmenej 5. Aby sme ukázali, že je práve 5, stačí zafarbiť ostávajúce 3 vrcholy. D môže mať rovnakú farbu ako U, a A a M môžu mať rovnakú farbu ako O. Preto je 5 časových periód (farieb) postačujúcich.

11.23. V slučke počítačového programu sa objavuje 7 premenných. Premenné a kroky, v priebehu ktorých musia byť uložené sú:

- t kroky 1-6
- u krok 2
- v kroky 2-4
- w kroky 1,3 a 5
- x kroky 1 a 6
- y kroky 3-6
- z kroky 4-5

Koľko rozdielnych indexových registrov potrebujeme na uloženie týchto premenných v priebehu výpočtu?

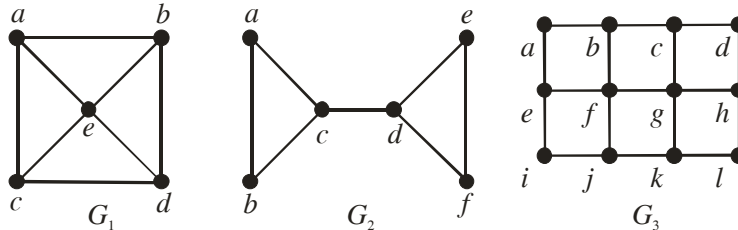
Tento problém môže byť modelovaný pomocou prienikového grafu množín krokov, v priebehu ktorých musia byť jednotlivé premenné uchovávané. Tento graf má 7 vrcholov, od t po z . Hrana medzi dvoma vrcholmi existuje, pokiaľ obidve im odpovedajúce premenné musia byť uschovávané v priebehu niektorého spoločného kroku. Odpoveďou na problém je chromatické číslo takého grafu. Skôr ako by sme analyzovali tento graf, zoberieme si jeho komplement, ktorý má oveľa menej hrán. Tu sú dva vrcholy spojené v prípade, keď im odpovedajúce množiny krokov nemajú spoločný prienik. Jediné také hrany sú $\{u, w\}$, $\{u, x\}$, $\{u, y\}$, $\{u, z\}$, $\{v, x\}$, $\{x, z\}$. Žiadna z hrán v komplemente nespája žiadnu dvojicu z množiny $\{t, v, w, y, z\}$, takže tieto vrcholy tvoria K_5 v pôvodnom grafe. Aby sme ukázali, že je práve 5, stačí zafarbiť vrchol u rovnakou farbou ako w , a x rovnako ako z (tieto páry sú spojené v komplementu hranou). Pretože chromatické číslo je 5, potrebujeme 5 registrov, s premennými u a w zdieľajúcimi register, rovnako ako x so z .

- 11.24.** Frekvencie mobilných telefónov sú priradované podľa zón. Každá zóna má priradenú sadu frekvencií, ktoré môžu byť použité mobilnými telefónmi v tej zóne. Rovnaká frekvencia nemôže byť použitá v zónach, kde by bol problém s interferenciou. Vysvetlite, ako k -tuple zafarbovanie môže byť použité na priradenie k frekvencií každému mobilného telefónu v oblasti.

Frekvencie budú farby, zóny budú vrcholy a dve zóny, ktoré sú tak blízko, že interferencia by spôsobila problém, sú spojené hranou. Potom je jasné, že k -tuple zafarbenie presne odpovedá priradeniu frekvencií, ktoré nebude mať problémy s interferenciou.

- 11.25.** Nájdite minimálne dominujúce množiny grafov na obr. 11.25.

OBRÁZOK 11.25.
MINIMÁLNE
DOMINUJÚCE
MNOŽINY?



Minimálne dominujúce množiny?

Pre graf G_1 je to vrchol e , pre graf G_2 je to ktorákoľvek dvojica vrcholov, kde jeden vrchol je z množiny $\{a, b, c\}$ a druhý z množiny $\{d, e, f\}$, ako napr. množina vrcholov $\{a, d\}$, pre graf G_3 je to napr. štvorica vrcholov $\{e, c, k, h\}$ (existuje viac podobných štvorprvkových množín).

- 11.26.** Nájdite minimálny počet dám dominujúcich $n \times n$ šachovnicu

- pre $n = 3$,
1 dáma v pozícii (2,2)
- pre $n = 4$,
2 dámy, napr. v pozíciách (2,2) a (4,4)
- pre $n = 5$,
3 dámy, napr. v pozíciách (2,2) a (3,4) a (5,1). Na skontrolovanie, či 2 dámy nie sú dosť, by sme potrebovali skontrolovať $C(25,2) = 300$ dvojíc.

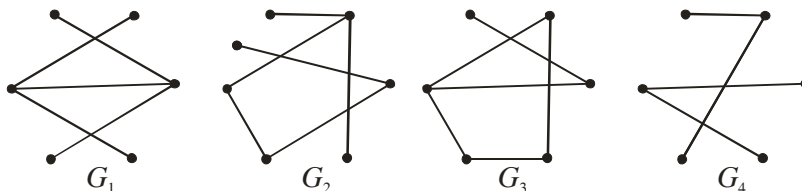
- 11.27.** Ukážte, že počet vrcholov obyčajného grafu je menší alebo rovný násobku čísla vrcholovej nezávislosti (= maximálneho počtu vrcholov nezávislej množiny vrcholov, t. j. independence set) a chromatického čísla grafu.

Nech n je počet vrcholov grafu, k je jeho chromatické číslo a i je číslo vrcholovej nezávislosti. Potom existuje zafarbenie vrcholov grafu k farbami. Pretože žiadne dva rovnako zafarbené vrcholy nie sú spojené hranou, rovnako zafarbené vrcholy tvoria nezávislú množinu vrcholov. Preto je takých vrcholov maximálne i . To znamená, že celkovo je vrcholov maximálne ik , teda $ik \geq n$, čo bolo potrebné dokázať.

RIEŠENÉ CVIČENIA Z KAPITOLY 12

12.1. Ktoré z nasledujúcich grafov na obr. 12.19 nie sú stromy a prečo?

OBRÁZOK 12.19.
KTORÉ SÚ
STROMY?



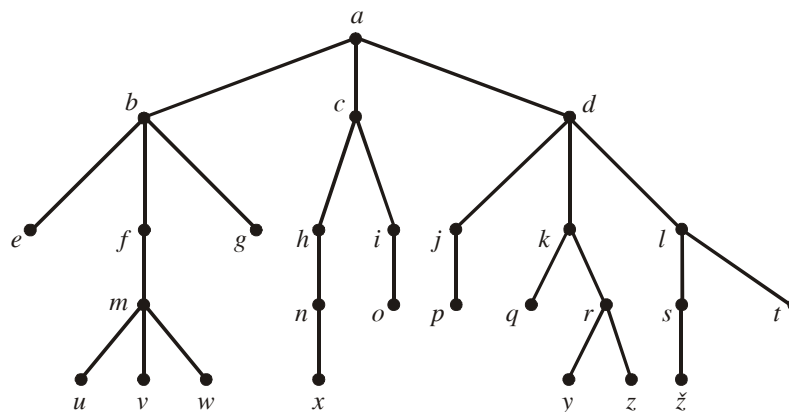
Ktoré sú stromy?

Grafy G_1 a G_2 sú stromy, neobsahujú cyklus a sú súvislé, graf G_3 nie je strom, obsahuje cyklus, graf G_4 nie je strom, nie je súvislý.

12.2. Odpovedzte pre graf na obr. 12.20 nasledujúce dotazy:

- (a) Ktorý z vrcholov je koreň? Koreň je a .
- (b) Ktoré vrcholy sú vnútorné? Vnútorné vrcholy sú $\{a, b, c, d, f, h, i, j, k, l, m, n, r, s\}$.
- (c) Ktoré vrcholy sú listy? Listy sú $\{e, u, v, w, g, x, o, p, q, y, z, ž, t\}$.
- (d) Ktoré vrcholy sú nasledovníci (synovia) vrcholu k ? Nasledovníci vrcholu k sú vrcholy q a r .
- (e) Ktoré vrcholy sú rodičia vrcholu k ? Rodič vrcholu k je d .
- (f) Ktoré vrcholy sú predkovia k ? Predkovia vrcholu k sú vrcholy d a a .
- (g) Ktoré vrcholy sú potomkovia vrcholu k ? Potomkovia vrcholu k sú vrcholy q, r, y, z .

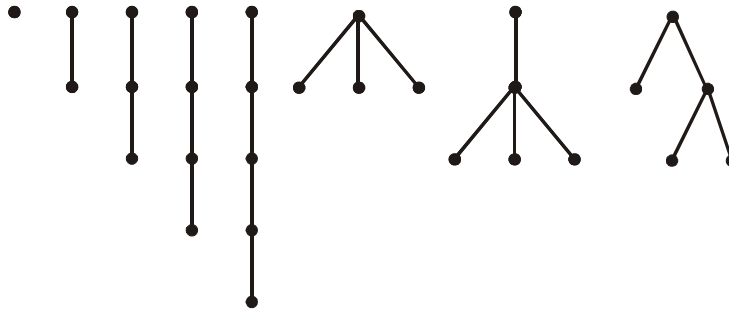
OBRÁZOK 12.20.
KOREŇOVÝ
STROM



Koreňový strom.

12.3. Koľko neizomorfných podstromov do 5 vrcholov obsahuje graf na obr. 12.20?

Neizomorfných podstromov je 8, všetky stromy, ktoré do 5 vrcholov existujú.



12.4. Majme n nenulových prirodzených čísel $s_1, s_2, s_3, \dots, s_n$, kde $n \geq 2$. Nutná a postačujúca podmienka, aby existoval strom na n vrcholoch taký, že $s_1, s_2, s_3, \dots, s_n$, sú po poriadku stupne jeho vrcholov, je

$$\sum_{i=1}^n s_i = 2n - 2$$

Dokážte.

Keď existuje strom so stupňami $s_1, s_2, s_3, \dots, s_n$, potom z vzorca (10.1) určujúceho $\sum_{i=1}^n s_i = 2|E|$, a zo vzorca pre stromy vety 12.2 $|E| = |V| - 1$ vychádza vzorec, ktorý máme dokázať.

V opačnom prípade, keď platí dokazovaný vzorec, postupujeme matematickou indukciou, aby sme dokázali, že existuje strom so stupňami $s_1, s_2, s_3, \dots, s_n$. Pre $n = 2$ je $s_1 = s_2 = 1$ a strom existuje. Nech $n > 2$ a predpokladáme existenciu stromu pre každú $(n-1)$ ticu čísel s_i , ktoré spĺňajú dokazovaný vzorec. Keď zvolíme n čísel s_i , ktoré spĺňajú dokazovaný vzorec, je vidno, že aspoň dve z nich (povedzme s_1, s_2) sa rovnajú 1 a aspoň jedno ďalšie (povedzme s_3) je väčšie ako 1. Čísla $s_2, s_3-1, s_4, \dots, s_n$ spĺňajú indukčný predpoklad a existuje teda strom o $n-1$ vrcholoch s príslušnými stupňami. Označme v ňom x vrchol (s_3-1) ého stupňa a nech y je ďalší vrchol nepatriaci do uvedeného stromu o $n-1$ vrcholoch. Teraz doplníme tento strom vrcholom y a hranou xy .

12.5. Nech G je jednoduchý graf o n vrcholoch. Ukážte, že G je strom vtedy a len vtedy, keď je súvislý a má $n - 1$ hrán.

Dokážeme toto tvrdenie indukciou pre n , počet vrcholov grafu G . Keď $n = 1$, ide o izolovaný vrchol, ktorý je formálne strom, je súvislý a má $1-1 = 0$ hrán. Tvrdenie je teda pravdivé. Teraz predpokladajme, že tvrdenie je pravdivé pre obyčajné grafy o n vrcholoch, a nech G je obyčajný graf o $n + 1$ vrcholoch.

Po prvé predpokladajme, že G je strom; musíme ukázať že G je súvislý a že má $(n + 1) - 1 = n$ hrán. Samozrejme, G je súvislý podľa definície. Aby sme dokázali, že G má požadovaný počet hrán, potrebujeme nasledujúcu skutočnosť: strom s aspoň jednou hranou musí obsahovať vrchol stupňa 1. (Aby sme to ukázali, stačí si zobrať najdlhšiu jednoduchú cestu. Nejaká cesta maximálnej dĺžky musí v konečnom grafe existovať. Konce tejto cesty musia byť v strome vr-

choly stupňa 1, pretože inak by táto cesta mohla byť predĺžená.) Nech v je vrchol stupňa 1 v G , a nech G' je G s v a s ním incidentnou hranou odstránený. Nový graf G' je stále strom, nemá žiadne kružnice (graf G nemal žiadne) a je stále súvislý (odstránená hrana nie je potrebná na vytvorenie cesty medzi vrcholmi rozdielnymi od v). Preto podľa indukčnej hypotézy, G' , ktorý má n vrcholov, má $n-1$ hrán; keďže G má o hranu viac ako G' , má teda n hrán.

Z druhej strany, predpokladajme, že G je súvislý a má n hrán a $(n+1)$ vrcholov. Keď G nie je strom, potom musí obsahovať kružnicu. Keď z tejto kružnice odstránime jednu hranu, výsledný graf G' bude stále súvislý. Keď je G' strom, potom s odstraňovaním hrán končíme; v opačnom prípade proces opakujeme. Pretože G má konečný počet hrán, tento proces musí skončiť pre nejaký strom o $n+1$ vrcholoch (strom má rovnaký počet vrcholov ako pôvodný graf G). Podľa predchádzajúceho odseku má tento strom n hrán. To je ale v protiklade s tým, že sme odstránili najmenej jednu hranu. Preto náš predpoklad, že G nie je strom, je zlý. ■

- 12.6.** Predpokladajme, že 1024 ľudí sa účastní šachového turnaja. Použite koreňový strom ako model turnaja na určenie, koľko hier musí byť odohraných, aby sa určil víťaz, pokiaľ je hráč eliminovaný po jednej prehre a turnaj pokračuje, dokiaľ iba jeden účastník neprehral. Predpokladáme, že nebudú žiadne remízy.

Turnaj môžeme modelovať ako úplný binárny strom. Každý vnútorný vrchol reprezentuje výhercu hry hranej jeho dvoma deťmi. Máme 1024 listov, jeden pre každého hráča. Koreň je víťaz turnaja. Podľa vety 12.3, pre $m=2$ a $l=1024$, $n=i+l=m \times i+1$; z toho dostávame $i=(l-1)/(m-1)=1023$. Preto musí byť odohraných presne 1023 hier na určenie víťaza.

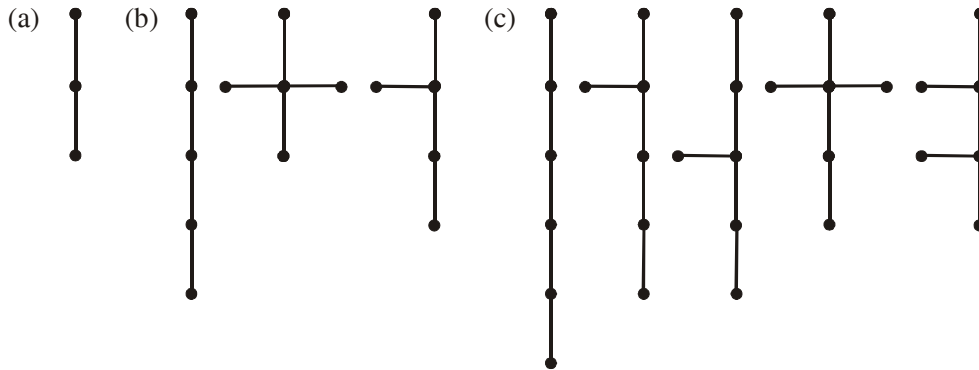
- 12.7.** Reťazový list začína človekom posielajúcim list desiatim ďalším ľuďom. Každý príjemca je požiadaný, aby poslal list ďalším desiatim a každý list obsahuje zoznam predchádzajúcich šiestich ľudí v reťazci. Pokiaľ zoznam neobsahuje menej ako šesť mien, každý príjemca pošle dvadsať korún prvému človeku v zozname, odstráni jeho meno zo zoznamu a pridá svoje vlastné meno na koniec zoznamu. Keď všetci takto odpovedia na list a nikto nedostane viac ako jeden list, koľko peňazí človek zapojený do reťazca nakoniec dostane?

Nech P je človek rozposielajúci list. Potom 10 ľudí dostane jeho list na konci zoznamu (na 6. pozícii). Potom 100 ľudí dostane list s jeho menom na piatej pozícii atď., až 1 000 000 ľudí dostane list s menom P na prvej pozícii. Preto by P mal dostať 20 000 000. Model je tu úplný strom s vetvením stupňa 10.

- 12.8.** Koľko rôznych izomérov majú nasledujúce nasýtené uhľovodíky?

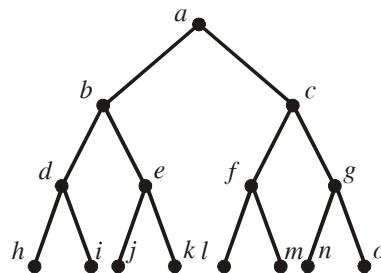
- (a) C_3H_8
 (b) C_5H_{12}
 (c) C_6H_{14}

Z definície alkánov (nasýtených uhľovodíkov) vyplýva, že alkány majú štruktúru stromov. Stačí si všimnúť iba stromy z uhľíkových atómov týchto uhľovodíkov, hrany s vodíkovými atómami stupňa vrcholov 1 potom iba automaticky dopĺňajú počet incidentných hrán s každým uhľíkovým atómom stupeň 4. Ak chceme teda spočítať alkány s daným počtom n atómov uhlíka, stačí spočítať všetky typy stromov s n vrcholmi, v ktorých sa nevyskytujú vrcholy stupňa väčšieho ako 4. Pre prípad (a) je to iba jeden graf, pre prípad (b) 3 a pre (c) 5, ako je vidno na nasledujúcom obrázku.



12.9. Ukážte, ako môže byť 16 čísel sčítaných pomocou 15 procesorov v priebehu 4 časových krokov potrebných na sčítanie dvojice čísel (vstup a prenos informácie neuvažujeme za časovo náročné kroky a ich čas zanedbávame v porovnaní so sčítaním).

Vytvoríme kompletný binárny strom o 15 vrcholoch, ktorý reprezentuje sieť so stromovou štruktúrou o 15 procesoroch. V prvom kroku sčítame prvých 8 dvojíc čísel v procesoroch h, \dots, o . V druhom časovom okamihu sčítame výsledky týchto súčtov v procesoroch d, \dots, g , v treťom časovom okamihu sú to súčty výsledkov procesorov d, e v b a f, g v c a v poslednom štvrtom časovom okamihu sčítame výsledky z b, c v a .



12.10. Nech n je mocnina dvoch. Ukážte, že n čísel môže byť sčítané v $\log_2 n$ krokoch pri použití siete so stromovou štruktúrou o $n - 1$ procesoroch.

Predpokladajme, že $n = 2^k$, kde k je kladné celé číslo. Chceme ukázať ako sčítať n čísel za $\log_2 n$ krokov pri použití siete so stromovou štruktúrou o $n - 1$ procesoroch. Dokážme to matematickou indukciou na k . Keď $k = 1$, potom $n = 2$ a $n - 1 = 1$ a v $\log_2 2 = 1$ kroku dokážeme sčítať 2 čísla jedným procesorom. Predpokladajme ako indukčnú hypotézu, že môžeme sčítať $n = 2^k$ v $\log_2 n$ krokoch pri použití siete so stromovou štruktúrou o $n - 1$ procesoroch. Predpokladajme teraz, že máme $2n = 2^{k+1}$ čísel na sčítanie, x_1, x_2, \dots, x_{2n} . Sieť so stromovou štruktúrou o $2n - 1$ procesoroch spočíva zo siete so stromovou štruktúrou o $n - 1$ procesoroch spolu s dvoma novými procesormi ako deťmi každého listu v $(n - 1)$ -procesorovej sieti. V jednom kroku môžeme použiť listy rozšírenej siete pre sčítanie $x_1 + x_2, x_3 + x_4, x_{2n-1} + x_{2n}$. To nám dáva n čísel. Podľa indukčnej hypotézy teraz môžeme použiť zvyšok siete na sčítanie týchto čísel v $\log_2 n$ krokoch. Dovedna sme použili $1 + \log_2 n$ krokov a ako sme potrebovali ukázať $\log_2(2n) = \log_2 2 + \log_2 n = 1 + \log_2 n$. ■

- 12.11.** Koľko vážení na rovnoramenných váhach je potrebné na nájdenie ľahšej falošnej mince spomedzi štyroch mincí? Opíšte algoritmus na nájdenie tejto ľahšej mince pri použití tohto počtu vážení.

Mince rozdelíme na dve dvojice a tie porovnáme, zoberieme ľahšiu dvojicu a tú porovnáme. Potrebujeme teda dve porovnania.

- 12.12.** Koľko vážení na rovnoramenných váhach je potrebné na nájdenie falošnej mince spomedzi štyroch mincí, ktorá môže byť ľahšia alebo ťažšia ako ostatné tri?

Pretože sú 4 rôzne výsledky na túto testovaciu procedúru, potrebujeme aspoň dve váženia, pretože jedno váženie nám môže dať iba 3 možné výsledky (ternárny rozhodovací strom výšky 1 má iba 3 listy). Označme si mince písmenami A, B, C, D . Porovnáme mince A a B . Pokiaľ sú v rovnováhe, falošná minca je medzi druhými dvoma. V tom prípade, porovnajme C s A , pokiaľ sú v rovnováhe, D je falošná minca, keď nie, C je falošná. Na druhej strane, keď A a B nie sú v rovnováhe, jedna z nich je falošná. Opäť porovnajme C s A . Keď sú v rovnováhe, B je falošná, v opačnom prípade je A falošná.

- 12.13.** Koľko vážení na rovnoramenných váhach je potrebné na nájdenie falošnej mince, ktorá je ľahšia ako ostatné, spomedzi 12 mincí?

Pretože existuje 12 rozdielnych výsledkov testovacej procedúry, potrebujeme aspoň 3 váženia, pretože 2 váženia by nám dali 9 možných výsledkov (rozhodovací strom hĺbky 2 má iba 9 listov). Rozdeľte mince na 3 skupiny po 4 minciach, a porovnajme dve skupiny. Keď sú vyvážené, falošná minca je medzi ostatnými štyrmi mincami. Keď nie sú v rovnováhe, falošná minca je medzi ľahšou štvoricou. Teraz môžeme využiť cvičenie 12.11, pomocou dvoch ďalších vážení určíme falošnú mincu.

- 12.14.** Ktorý z nasledujúcich kódov je prefixový kód?

(a) $a: 11, e: 00, t: 10, s: 01$

Je prefixový kód, žiaden z kódov nie je začiatkom iného kódu.

(b) $a: 0, e: 1, t: 01, s: 001$

Nie je prefixový kód, napríklad kód pre a je začiatkom kódu pre s .

(c) $a: 101, e: 11, t: 001, s: 011, n: 010$

Je prefixový kód, žiaden z kódov nie je začiatkom iného kódu.

(d) $a: 010, e: 11, t: 011, s: 1011, n: 1001, p: 10101$

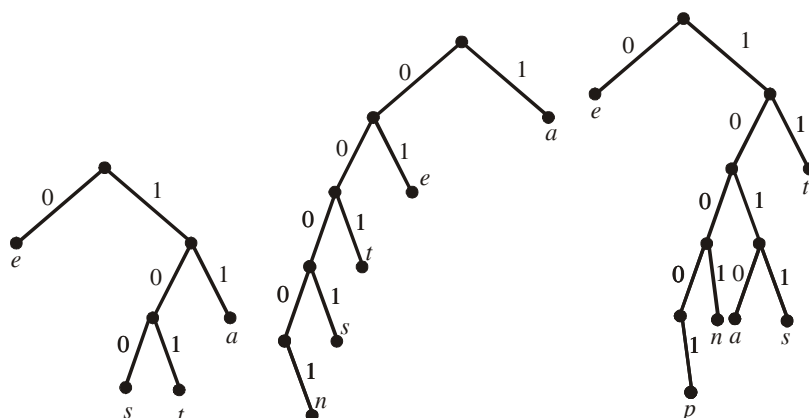
Je prefixový kód, žiaden z kódov nie je začiatkom iného kódu.

- 12.15.** Skonstruujte binárny strom s prefixovými kódmi reprezentujúcimi tieto kódové schémy:

(a) $a: 11, e: 0, t: 101, s: 100$

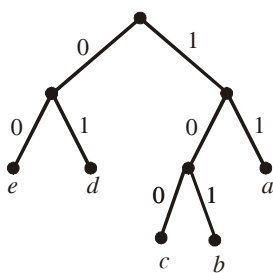
(b) $a: 1, e: 01, t: 001, s: 0001, n: 00001$

(c) $a: 1010, e: 0, t: 11, s: 1011, n: 1001, p: 10001$



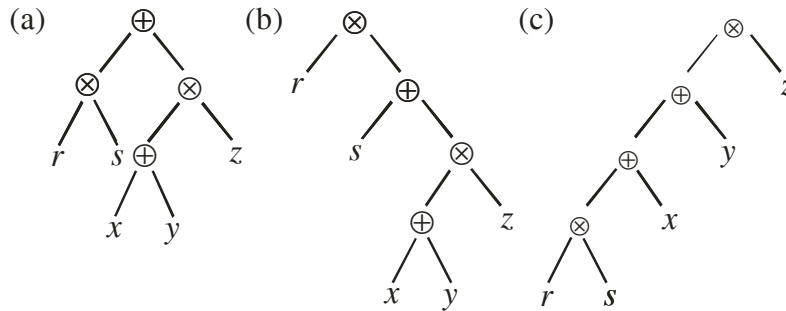
- 12.16.** Skonstruujte binárny strom reprezentujúci Huffmanove kódovanie pre nasledujúce symboly s frekvenciami: a: 0,2; b: 0,1; c: 0,15; d: 0,25; e: 0,3.

Riadime sa algoritmom pre Huffmanove kódovanie. Pretože b a c sú symboly s najmenšou váhou, skombinujeme ich do podstromu, ktorý budeme tu volať T1, s váhou $0,1 + 0,15 = 0,25$, so symbolom s väčšou váhou naľavo. Teraz dva stromy o najmenšej váhe sú samostatný symbol a a buď T1 alebo samostatný symbol d , oba o váhe 0,25. Náhodne si zvolíme T1, a dostávame tak strom T2 s ľavým podstromom T1 a pravým podstromom a (mohli sme zvoliť aj druhú možnosť, výsledkom by bol odlišný, no rovnako kvalitný strom v ohľade priemerného počtu bitov na zakódovanie). Ďalším krokom je kombinácia e a d do podstromu T3 s váhou 0,55. Konečným krokom je kombinácia T2 a T3.



- 12.17.** Reprezentujte nasledujúce výrazy ako binárne stromy

- $(r \otimes s) \oplus ((x \oplus y) \otimes z)$
- $r \otimes (s \oplus ((x \oplus y) \otimes z))$
- $((r \otimes s) \oplus x) \oplus y \otimes z$



12.18. Koľko rozdielnych možných interpretácií má každý z nasledujúcich výrazov, keď predpokladáme asociatívnosť operácie \otimes a keď ju nepredpokladáme?

- (a) $x \otimes y \otimes z$
 (b) $t \oplus x \otimes y \otimes z$
 (c) $t \otimes x \oplus y \otimes z$

Keď predpokladáme asociatívnosť operácie \otimes :

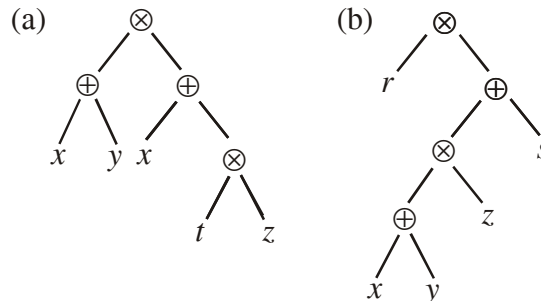
- (a) 1 interpretácia, $x \otimes y \otimes z$
 (b) 3 interpretácie, $(t \oplus x) \otimes y \otimes z$, $t \oplus (x \otimes y \otimes z)$, $(t \oplus (x \otimes y)) \otimes z$
 (c) 4 interpretácie, $(t \otimes x) \oplus (y \otimes z)$, $((t \otimes x) \oplus y) \otimes z$, $(t \otimes (x \oplus y)) \otimes z$, $t \otimes (x \oplus (y \otimes z))$

Keď nepredpokladáme asociatívnosť operácie \otimes :

- (a) 2 interpretácie, $(x \otimes y) \otimes z$, $x \otimes (y \otimes z)$
 (b) 5 interpretácií, $(t \oplus x) \otimes (y \otimes z)$, $t \oplus ((x \otimes y) \otimes z)$, $t \oplus (x \otimes (y \otimes z))$, $(t \oplus (x \otimes y)) \otimes z$, $((t \oplus x) \otimes y) \otimes z$
 (c) 5 interpretácií, $(t \otimes x) \oplus (y \otimes z)$, $((t \otimes x) \oplus y) \otimes z$, $(t \otimes (x \oplus y)) \otimes z$, $t \otimes (x \oplus (y \otimes z))$, $t \otimes ((x \oplus y) \otimes z)$

12.19. Zostrojte infixovú, prefixovú a postfixovú formu výrazov reprezentovaných nasledujúcimi binárnymi stromami na obr. 12.21.

OBRÁZOK 12.21.
 ZOSTROJTE
 INFIXOVÚ,
 PREFIXOVÚ A
 POSTFIXOVÚ
 FORMU STROMOV

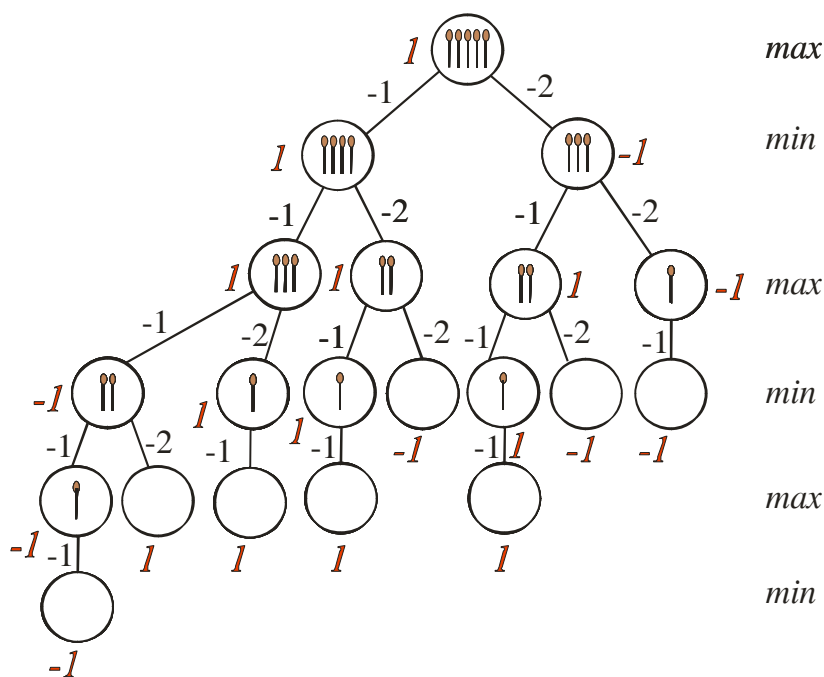


Zostrojte infixovú, prefixovú a postfixovú formu stromov.

- (a) Infix $(x \oplus y) \otimes (x \oplus (t \otimes z))$, prefix $\otimes \oplus xy \oplus x \otimes tz$, postfix $xy \oplus xtz \otimes \oplus \otimes$
 (b) Infix $r \otimes (((x \oplus y) \otimes z) \oplus s)$, prefix $\otimes r \oplus \otimes \oplus xyzs$, postfix $rx y \oplus z \otimes s \oplus \otimes$

- 12.20.** Zostrojte strom riešení hry odoberania zápaličiek, keď máte na začiatku hry 5 zápaličiek, každý hráč môže odobrať jednu, alebo 2 zápaličky a kto odoberie poslednú zápaličku, tak prehral. Vrcholy z jednotlivých vrstiev stromu ohodnot'te pomocou minimax princípu.

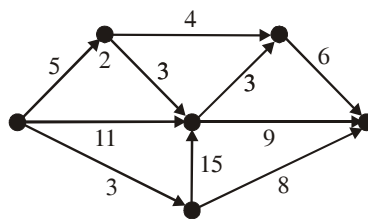
Na obrázku sú vrcholy s počtom zápaličiek na hromádke, jednotka označená kurzívou znamená, že ide o podstrom, kde vyhráva 1. hráč (voliaci stratégiu max, teda vyberajúci pre seba ako ideálnu stratégiu maximálne ohodnotený zo svojich podstromov), -1 označená kurzívou znamená, že ide o podstrom, kde vyhráva 2. hráč (min). Ohodnotenia hrán -1 a -2 znamenajú odobratie jednej alebo dvoch zápaličiek hráčom. Z ohodnotenia koreňa je zrejmé, že pre prvého hráča existuje víťazná stratégia. Existuje aj trochu zložitejšia populárnejšia verzia tejto hry, volaná **nim**, kde sú zápaličky na niekoľkých hromádkach a hráč môže odobrať 1 alebo 2 iba z jednej z hromádok.



RIEŠENÉ CVIČENIA Z KAPITOLY 13

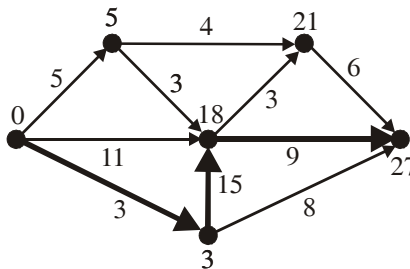
13.1. Pre siete projektu na obr. 13.17 a 13.18 určite minimálny celkový čas, ktorý zaberie dokončenie projektu, minimálne časové ohodnotenie $E(v)$ u jednotlivých vrcholov a kritickú cestu. Každá z hrán je ohodnotená časom potrebným na splnenie úlohy jej priradené.

OBRÁZOK 13.17. (a)
ČASOVÝ PLÁN
PROJEKTU

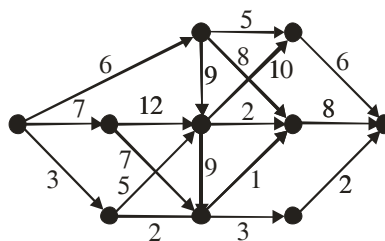


Časový plán projektu, určite kritickú cestu

Minimálny celkový čas je 27, ohodnotenie $E(v)$ je uvedené u vrcholov, kritická cesta je tučne vyznačená.

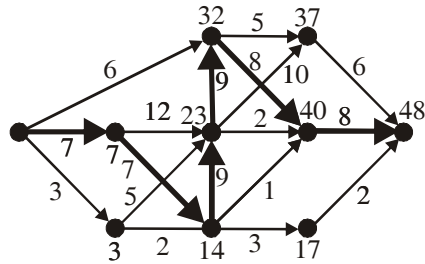


OBRÁZOK 13.18. (b)
ČASOVÝ PLÁN
PROJEKTU



Časový plán projektu, určite kritickú cestu

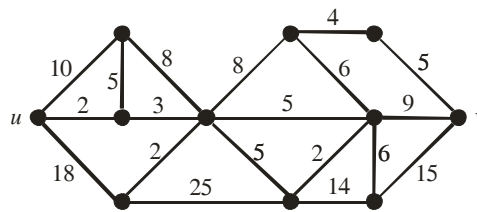
Minimálny celkový čas je 48, ohodnotenie $E(v)$ je uvedené u vrcholov, kritická cesta je tučne vyznačená.



13.2. Pre nasledujúce kapacitné siete na obr. 13.19 a 13.20 s ohodnotením hrán ich kapacitami (namiesto dvojice opačne orientovaných hrán je vždy vykreslená iba neorientovaná hrana) nájdite maximálny tok z u do v a dokážte, že je tok maximálny nájdením minimálneho rezu, ktorého kapacita sa rovná hodnote vami nájdeného toku.

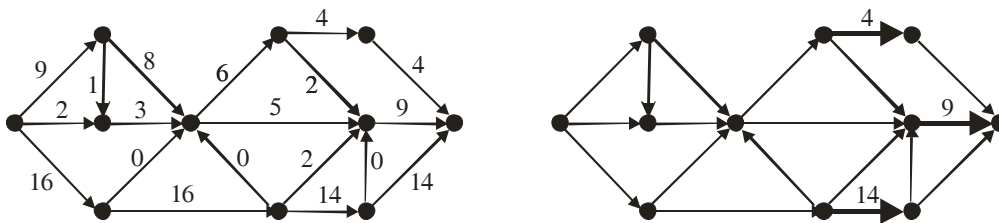
OBRÁZOK 13.19.
MAXIMÁLNY TOK A
MINIMÁLNY REZ?

(a)



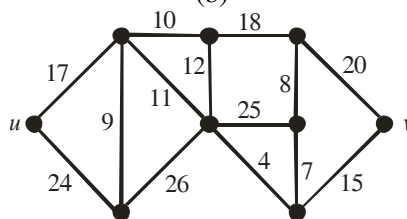
Nájdite maximálny tok a minimálny rez siete.

Maximálny tok je 27, minimálny rez je zobrazený v druhom grafe.



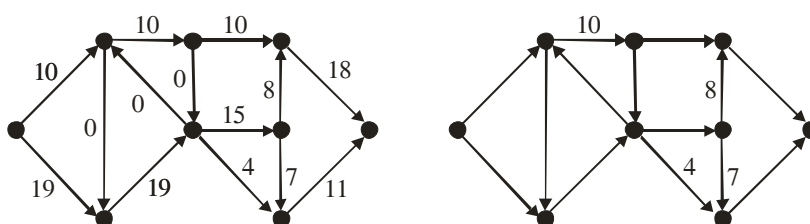
OBRÁZOK 13.20.
MAXIMÁLNY TOK A
MINIMÁLNY REZ?

(b)



Nájdite maximálny tok a minimálny rez siete.

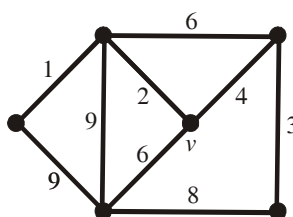
Maximálny tok je 29, minimálny rez je zobrazený v druhom grafe.



13.3. Pre grafy z obr. 13.21 a 13.22 použite Primov algoritmus, začínajúci na vyznačenom vrchole v , na nájdenie minimálnej kostry a určite jej váhu.

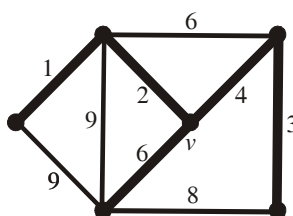
OBRÁZOK 13.21.
MINIMÁLNA
KOSTRA?

(a)



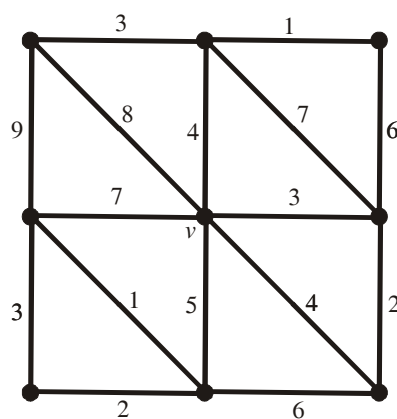
Nájdite minimálnu kostru.

Váha minimálnej kostry je 16, kostra je zvýraznená tučnými hranami v grafe.



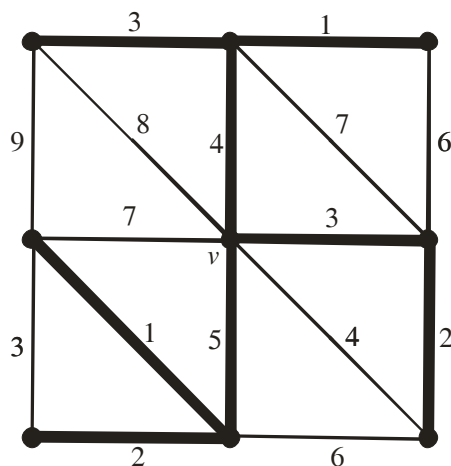
OBRÁZOK 13.22.
MINIMÁLNA
KOSTRA?

(b)



Nájdite minimálnu kostru.

Váha minimálnej kostry je 21, kostra je zvýraznená tučnými hranami v grafe.

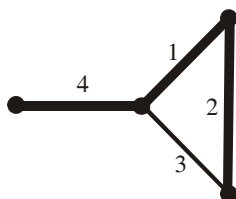


- 13.4.** Použite Kruskalov algoritmus na nájdenie minimálnej kostry pri grafoch z príkladu 13.3 a určite jej váhu.

Riešenie: Nájdené kostry sú rovnaké, ale keby niektoré z hrán s vyššími váhami mali rovnaké váhy, potom tak Kruskalov, aj Primov algoritmus by mohli viesť k rozdielnym kostrám kvôli náhodnosti výberu u rovnako ohodnotených hrán.

- 13.5.** Nech T je minimálna kostra ohodnoteného grafu G . Určte, či nasledujúce tvrdenia sú pravdivé:
 (a) Váha každej hrany patriacej do T je menšia alebo rovná váhe ľubovoľnej hrany z G nepatriacej do T .

Kontrapríklad

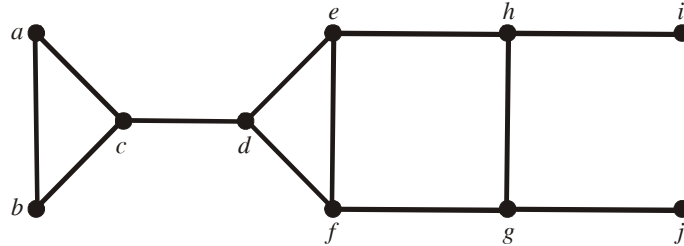


- (b) Keď žiadne dve hrany nemajú rovnakú váhu, potom Kruskalov algoritmus vyberie kostru T jednoznačne.

Tvrdenie je pravdivé, Kruskalov algoritmus potom pri výbere hrán nemá voľbu, postup je striktno deterministický.

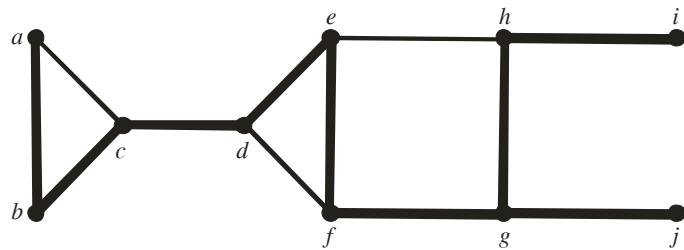
- 13.6.** Použite prehľadávanie do hĺbky na nájdenie kostry daného jednoduchého grafu z obr. 13.23. Zvoľte vrchol a ako koreň tejto kostry a predpokladajte, že vrcholy sú usporiadané abecedne (namiesto typického postupu prehľadávania vykresleného grafu „zľava doprava“).

OBRÁZOK 13.23.
KOSTRA
PREHLADÁVANÍM
DO HLĚBKY?



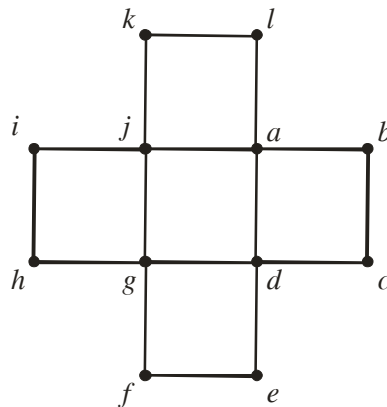
Nájdite kostru prehľadávaním do hĺbky.

Keď začneme vo vrchole a a ideme v abecednom poradí, potom je kostra nájdená pomocou prehľadávania do hĺbky jednoznačne definovaná. Začneme vo vrchole a a vytvoríme cestu vyznačenú tučnými hranami až do bodu i predtým, ako sme nútení sa vrátiť. Z vrcholu h nejde cesta na žiaden ešte nenavštívený vrchol, ale z vrcholu g ide cesta na nenavštívený vrchol j . Dostávame kostru vyznačenú tučnými hranami.



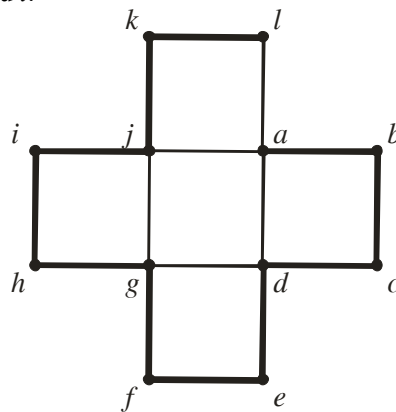
- 13.7.** Použite prehľadávanie do hĺbky na nájdenie kostry daného jednoduchého grafu z obr. 13.24. Zvoľte vrchol a ako koreň tejto kostry a predpokladajte, že vrcholy sú usporiadané abecedne (namiesto typického postupu prehľadávania vykresleného grafu „zľava doprava“).

OBRÁZOK 13.24.
KOSTRA
PREHLADÁVANÍM
DO HLĚBKY?



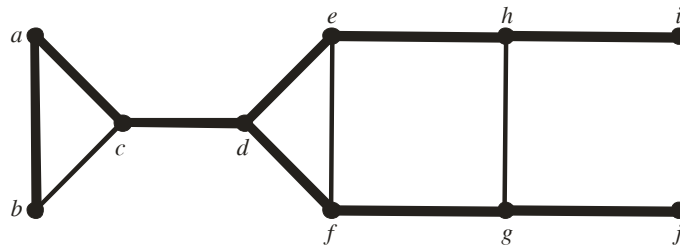
Nájdite kostru prehľadávaním do hĺbky.

Keď začneme vo vrchole a a ideme v abecednom poradí, potom je kostra nájdená pomocou prehľadávania do hĺbky jednoznačne definovaná. Začneme vo vrchole a a vytvoríme cestu vyznačenú tučnými hranami až do bodu l .



- 13.8.** Použite prehľadávanie do šírky na nájdenie kostry daného jednoduchého grafu zadaného v cvičení 13.6. Zvoľte vrchol a ako koreň tejto kostry a predpokladajte, že vrcholy sú usporiadané abecedne (namiesto typického postupu prehľadávania vykresleného grafu „zľava doprava“).

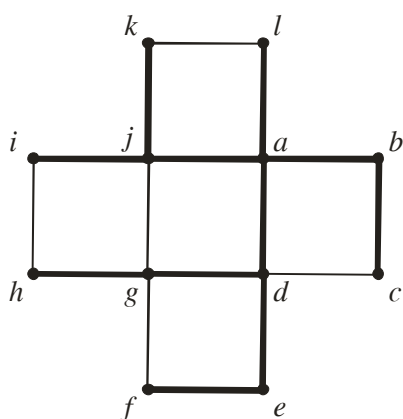
Postup pridávania hrán do kostry T by bol $\{a, b\}, \{a, c\}, \{c, d\}, \{d, e\}, \{d, f\}, \{e, h\}, \{f, g\}, \{h, i\}, \{g, j\}$



- 13.9.** Použite prehľadávanie do šírky na nájdenie kostry daného jednoduchého grafu zadaného v cvičení 13.7. Zvoľte vrchol a ako koreň tejto kostry a predpokladajte, že vrcholy sú usporiadané abecedne (namiesto typického postupu prehľadávania vykresleného grafu „zľava doprava“).

Postup pridávania hrán do kostry T by bol

$\{a, b\}, \{a, d\}, \{a, j\}, \{a, l\}, \{b, c\}, \{d, e\}, \{d, g\}, \{j, i\}, \{j, k\}, \{e, f\}, \{g, h\}$



13.10. Čo musí platiť pre danú hranu jednoduchého súvislého grafu, aby bola v každej kostre tohto grafu?

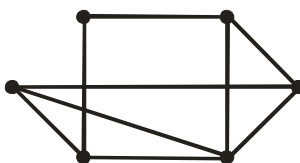
V prípade, že je táto hrana mostom.

13.11. Kedy má jednoduchý súvislý graf práve jednu kosťu?

Vtedy, keď je graf stromom a kosťu je s týmto grafom totožná. V prípade, že graf obsahuje kružnicu o k hranách, potom existujú kosťu obsahujúce akúkoľvek podmnožinu o $k-1$ týchto hranách.

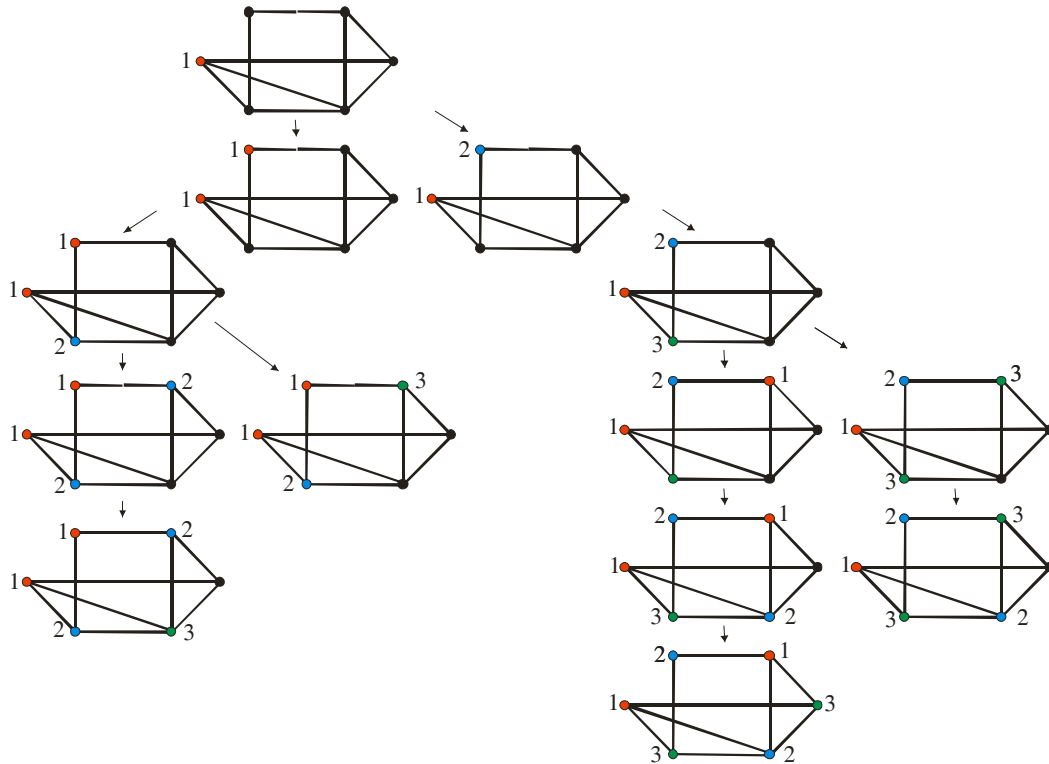
13.12. Použite prehľadávanie do hĺbky na nájdenie priradenia farieb vrcholom grafu z obr. 13.25 s využitím iba troch farieb.

OBRÁZOK 13.25.
FARBENIE
PREHĽADÁVANÍM
DO HĽBKY?



Nájdite farbenie 3 farbami prehľadávaním do hĺbky.

Uvádzame strom prehľadávania, kedy v prípade ešte nepoužitých farieb pokladáme všetky farby za ekvivalentné a preto neuvádzame permutácie nájdeného riešenia s výmenou farieb medzi množinami vrcholov rovnakej farby. V takom prípade existuje iba jedno riešenie. Farby sú označené prirodzenými číslami



13.13. Použite prehľadávanie do hĺbky na nájdenie riešenia problému n dám na šachovnici pre zadané hodnoty n .

(a) $n = 3$

Pre 3×3 šachovnicu začneme prehľadávanie umiestnením dámy na pozícii (1,1). Jediná možnosť na umiestnenie dámy v druhom stĺpci je pozícia (3,2). Teraz neexistuje pozícia, na ktorú umiestniť dámu v treťom stĺpci. Preto sa vrátíme v prehľadávaní naspäť a pokúsime sa umiestniť prvú dámu na pozíciu (2,1). Potom nie je možné umiestniť dámu do druhého stĺpca. Na základe symetrie nepotrebujeme uvažovať pozíciu prvej dámy v štvorci (3,1), bola by ekvivalentná pozícii (1,1) cez stredovú čiaru. Tým sme ukázali, že riešenie neexistuje.

(b) $n = 5$

Začneme s umiestnením dámy v pozícii (1,1). Prvá pozícia, kam sa dá umiestniť dáma v druhom stĺpci, je (3,2). Jediná možná pozícia v treťom stĺpci je (5,3), podobne vo štvrtom stĺpci (2,4) a v piatom (4,5). Na nájdenie tohto riešenia sme našťastie vôbec nepotrebovali použiť prehľadávanie do hĺbky.

(c) $n = 6$

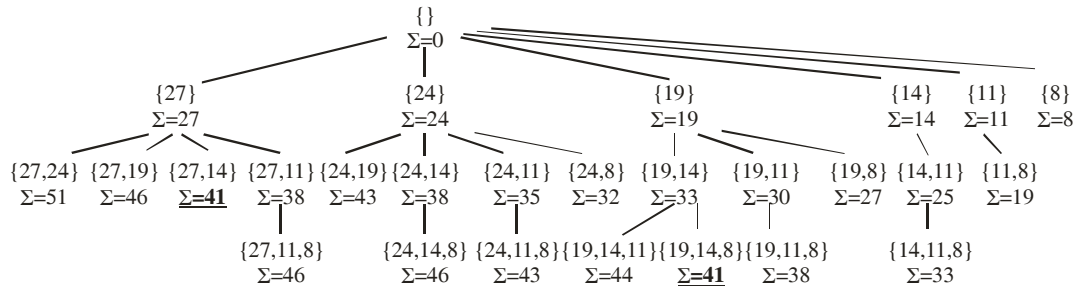
Časť stromu riešení odpovedajúca umiestneniu prvej dámy na pozíciu (1,1) je dosť veľká a nevedie k riešeniu. (Druhá dáma môže byť na pozíciách (3,2), (4,2), (5,2), alebo (6,2).) Keď je druhá dáma na pozícii (3,2), potom tretia môže byť na pozíciách (5,3) alebo (6,3). Po ďalšom preskúmaní a návratoch zistíme, že pre pozíciu začínajúcu na (1,1) neexistuje

riešenie. Ako ďalšiu začneme pozíciu (2,1) pre prvú dámu. Po niekoľkých návratoch v strome riešeni nájde umiestnenie zvyšných dám na pozíciách (4,2), (6,3), (1,4), (3,5), a (5,6).

13.14. Použite prehľadávanie do hĺbky na nájdenie podmnožiny, pokiaľ existuje, pre množinu {27, 24, 19, 14, 11, 8} so súčtom rovným

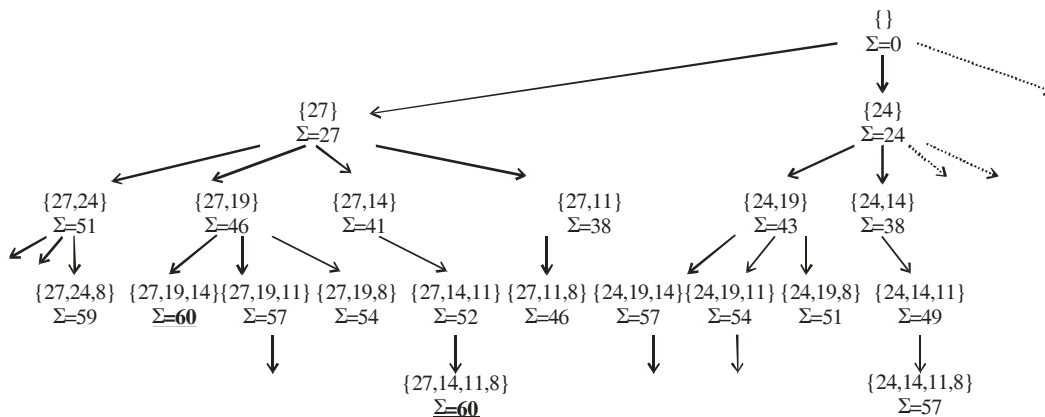
(a) 41

Po prekročení hľadaného súčtu sa už nepokračuje hlbšie do stromu prehľadávania a pridávajú sa vždy iba menšie čísla, ako je už najmenšie obsiahnuté vo vytváranej podmnožine.



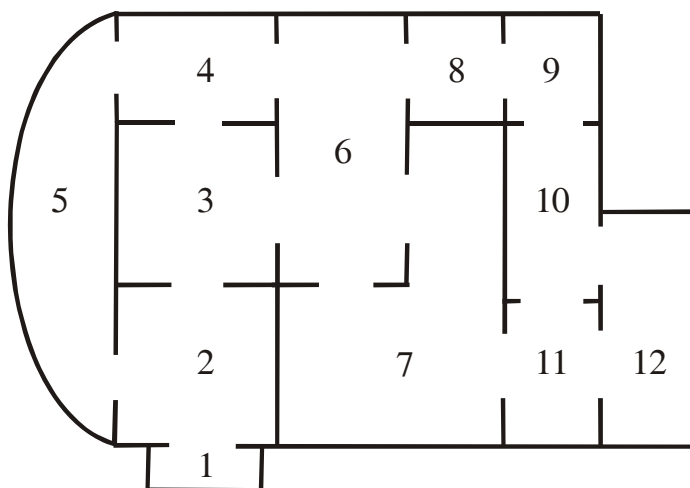
(b) 60

Po prekročení hľadaného súčtu sa už nepokračuje hlbšie do stromu prehľadávania a pridávajú sa vždy iba menšie čísla, ako je už najmenšie obsiahnuté vo vytváranej podmnožine. Pre prípady, ktoré by prekročili 60, uvádzame kvôli úspore miesta iba šípky. Bodkované šípky značia, že celková suma pre akúkoľvek kombináciu zloženú zo zvyšných čísel nemôže dosiahnuť 60 a preto už podstrom riešeni nie je uvádzaný (aj keď do prehľadávania do hĺbky by sa takéto osekávanie stromu muselo špeciálne zaviesť).



13.15. Vysvetlite, ako je možné prehľadávanie do hĺbky využiť na nájdenie cesty v múzeu, pri zadanej štartovnej pozícii a cieľovej pozícii. Múzeum má plán poschodia nakreslený na obr. 13.26.

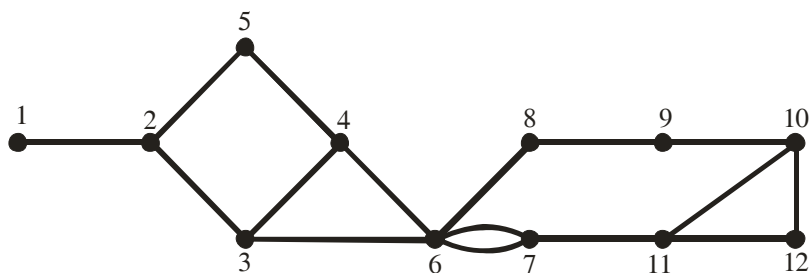
OBRÁZOK 13.26.
 PLÁN MÚZEA
 PREROBIŤ NA
 GRAF



Plán múzea reprezentovať grafom.

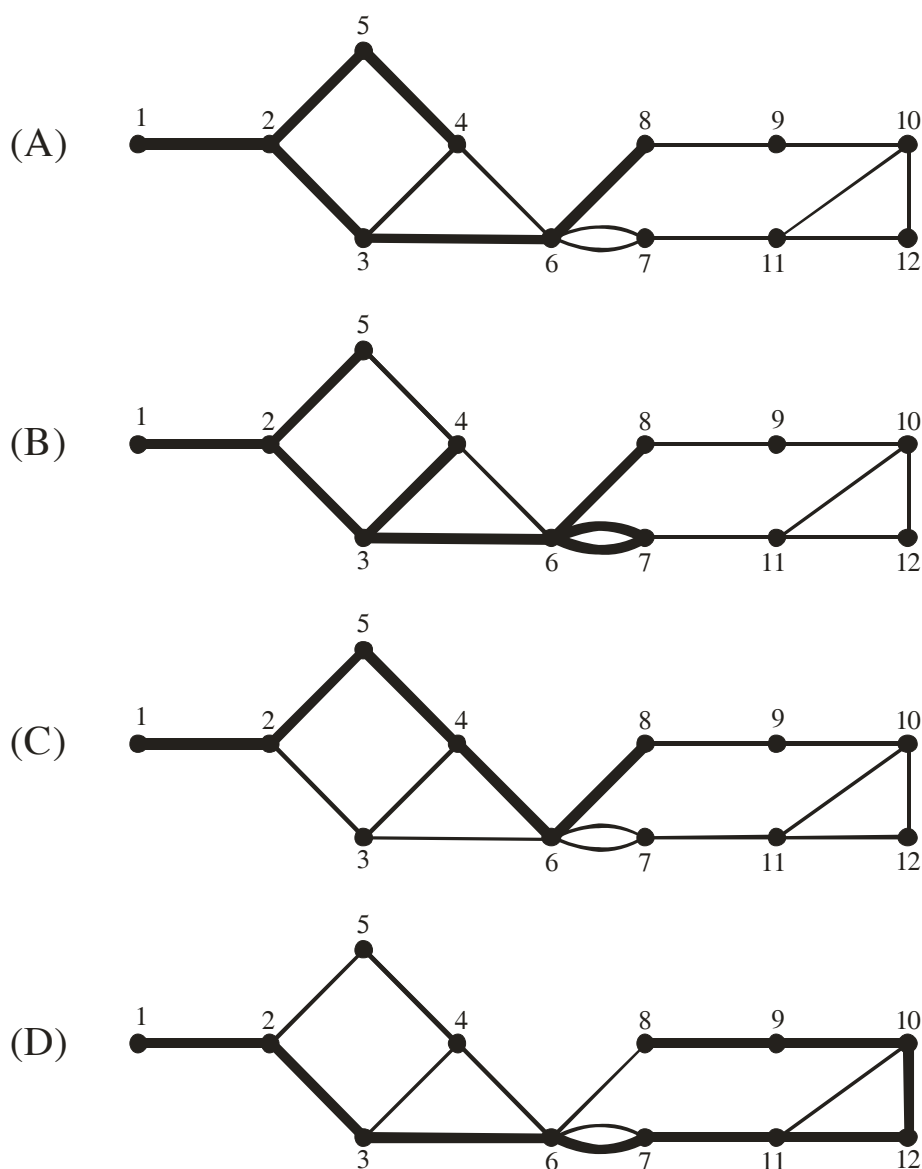
- (a) Nakreslite graf reprezentujúci plán poschodia, kde každá miestnosť bude ako vrchol a každé dvere ako hrana.

Graf reprezentujúci plán poschodia:



- (b) Urobte prehľadávanie do šírky a do hĺbky, so štartom v miestnosti 1 a cieľom v miestnosti 8.

Grafy prehľadávania do šírky a do hĺbky, so štartom v miestnosti 1, keď cieľom je prísť do miestnosti 8. Uvádžeme kostru vytváranú pri prehľadávaní. Pri prehľadávaní do šírky – grafy (A), (B) aj do hĺbky – grafy (C), (D) uvádzame najprv graf, kedy prehľadáваме miestnosti podľa poradia „najprv vľavo“, ako druhý uvádzame graf pre poradie „najprv vpravo“:



(c) Porovnajete, ktorý zo spôsobov prehľadávania by ste odporučili.

Pokiaľ meriame iba počet nových dverí, ktorými sme prešli, najvýhodnejšie je prehľadávanie do hĺbky podľa poradia „najprv vľavo“, potom ide prehľadávanie do šírky podľa poradia „najprv vľavo“, za ním ide prehľadávanie do šírky podľa poradia „najprv vpravo“, a nakoniec ide prehľadávanie do hĺbky podľa poradia „najprv vpravo“. Samozrejme, pri prehľadávaní neznámeho grafu sa nedá vopred odporučiť najlepšia stratégia.

PRÍLOHA B
VZOROVÉ PÍSOMKY

VZOROVÉ PÍ SOMKY

Cieľom tejto prílohy je pomôcť študentom (a prípadne aj pedagógom) získať odhad náročnosti pri skúške. Skúška sa skladá z 3 písomiek písaných v priebehu semestra a záverečnej písomky ku skúške. Písomky v priebehu semestra trvajú 30 minút, záverečná písomka 1,5 hodiny. Ďalej uvádzame vzorové písomky spolu s ich riešením.

1. KONTROLNÁ PÍ SOMKA

1. **príklad.** Dokážte pomocou matematickej indukcie pre prirodzené číslo $n \geq 1$, že platí

$$\sum_{i=1}^n 2^{i-1} = 2^n - 1$$

Riešenie:

(1) Indukčný predpoklad $P(n): \sum_{i=1}^n 2^{i-1} = 2^n - 1$

(2) Platnosť pre $n=1$ $P(1): 2^{1-1} = 2^1 - 1$ (tento predpoklad je platný)

(3) Dôkaz platnosti pre $n+1$ $P(n+1): \sum_{i=1}^{n+1} 2^{i-1} = \sum_{i=1}^n 2^{i-1} + 2^{n+1-1} = 2^n - 1 + 2^n = 2 \cdot 2^n - 1 = 2^{n+1} - 1$

2. **príklad.** Dokážte pomocou nepriameho dôkazu, že keď pre $p, q \geq 0$ platí $\sqrt{(pq)} \neq \frac{p+q}{2}$, potom $p \neq q$.

Riešenie: Dokazujeme, že keď $p = q$, potom $\sqrt{(pq)} = \frac{p+q}{2}$

$$\sqrt{(pq)} = \sqrt{(pp)} = \sqrt{(p)^2} = p = \frac{p+p}{2} = \frac{p+q}{2}$$

3. **príklad.** Pomocou pravidiel o charakteristických funkciách dokážte, že $(C - B) \cap A = (C \cap A) - B$

Riešenie: $(C - B) \cap A = \{x; \min\{\min\{\mu_C(x), 1 - \mu_B(x)\}, \mu_A(x)\} = 1\}$

$$(C \cap A) - B = \{x; \min\{\min\{\mu_C(x), \mu_A(x)\}, 1 - \mu_B(x)\} = 1\}$$

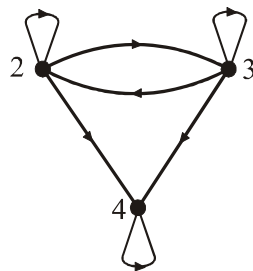
$$\min\{x, \min\{y, z\}\} = \min\{\min\{x, y\}, z\}$$

(Pre dôkaz posledného vzťahu pozrite cvičenie 1.10b).

4. príklad. Znázornite každú reláciu pomocou orientovaného grafu a rozhodnite, či daná relácia je reflexívna, symetrická, antisymetrická alebo tranzitívna.

(a) $\{(2,2), (2,3), (2,4), (3,2), (3,3), (3,4), (4,4)\}$

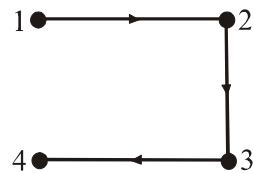
Riešenie:



Relácia je reflexívna, nie je symetrická, nie je antisymetrická a je tranzitívna.

(b) $\{(1,2), (2,3), (3,4)\}$

Riešenie:



Relácia nie je reflexívna, nie je symetrická, je antisymetrická a nie je tranzitívna.

5. príklad. Nájdite koeficient $x^5 y^3$ v rozvoji $(2x + 3y)^8$

Riešenie: $(2x + 3y)^8 = \sum_{j=0}^8 \binom{8}{j} (2x)^{8-j} (3y)^j = \dots + \binom{8}{3} 2^5 x^5 3^3 y^3 + \dots$

Koeficient pri $x^5 y^3$ je binomiálny koeficient $\binom{8}{3}$

$$2^5 3^3 \binom{8}{3} = 2^5 3^3 \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 2^5 3^3 \frac{8 \cdot 7}{1} = 2^{5+3} 3^3 7 = 2^8 3^3 7$$

6. (prémiový) príklad. Pomocou De Morganovho vzťahu pre komplement zjednotenia dvoch množín dokážte formulu

$$\overline{(A_1 \cup A_2 \cup A_3)} = \bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3$$

kde A_i sú množiny.

Riešenie: $\overline{(A_1 \cup A_2 \cup A_3)} = \overline{(A_1 \cup (A_2 \cup A_3))} = \bar{A}_1 \cap \overline{(A_2 \cup A_3)} = \bar{A}_1 \cap (\bar{A}_2 \cap \bar{A}_3) = \bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3$

2. KONTROLNÁ PÍSOMKA

1. **príklad.** Päť dvojíc chlapec–dievča stojí za sebou v dvojstupe. Koľko existuje takých možností zmeny pozície dievčat, aby žiadna nebola u svojho pôvodného partnera?

Riešenie: Počet derangementálnych permutácií 5 objektov je

$$D_5 = 5! \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} \right) = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{24} - \frac{1}{120} \right) = 120 \frac{60 - 20 + 5 - 1}{120} = 44$$

2. **príklad.** Na fakulte je 300 študentov, ktorí si zapísali predmet Matematická analýza, 200 študentov, ktorí si zapísali predmet Diskrétne matematika a 150 študentov, ktorí si zapísali súčasne predmety Matematická analýza a Diskrétne matematika. Koľko študentov má zapísaný aspoň jeden z predmetov Matematická analýza alebo Diskrétne matematika.

Riešenie: $|MA| = 300$, $|DM| = 200$, $|MA \cap DM| = 150$

$$|MA \cup DM| = |MA| + |DM| - |MA \cap DM| = 300 + 200 - 150 = 350$$

2. **príklad.** Na množine prirodzených čísel $A = \{0, 1, 2, 3\}$ je daná operácia $\nabla : x \nabla y = (x + y)$ modulo 4
- (a) Dokážte alebo vyvráťte, že (A, ∇) je algebraická štruktúra.

Riešenie: Zostavíme multiplikačnú tabuľku

∇	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

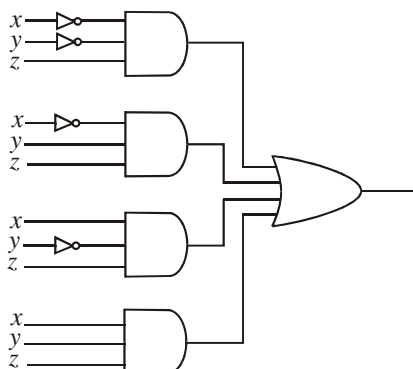
Z tabuľky vyplýva, že ktorákoľvek kombinácia $x, y \in A$ produkuje $z = x \nabla y$, kde $z \in A$, a teda ide o algebraickú štruktúru.

- (b) Vypočítajte, koľko rôznych možností ozátvorkovaní je treba ohodnotiť, aby ste dokázali, že binárna operácia je asociatívna (na overenie jednej rovnosti nech uvažujú dve ohodnotenia – zvlášť pre ľavú a pre pravú stranu). Uveďte aspoň dve rovnosti.

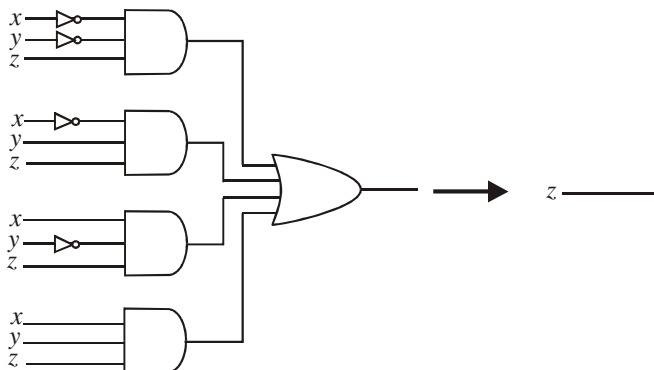
Riešenie: Počet ozátvorkovaní je $4^3 \cdot 2 = 128$,

rovnosti sú napr. $(0 \nabla 0) \nabla 0 = 0 \nabla (0 \nabla 0)$, $(0 \nabla 0) \nabla 1 = 0 \nabla (0 \nabla 1)$, ...

3. príklad. Maximálne zjednodušte pomocou Quinovej a McCluskeyho metódy logický obvod



Riešenie:



0. etapa		1. etapa			2. etapa		
1	(001)	1	(1,2)	(0#1)	1	(1,2), (3,4) alebo (1,3), (2,4)	##1
2	(011)	2	(1,3)	(#01)			
3	(101)	3	(2,4)	(#11)			
4	(111)	4	(3,4)	(1#1)			

$$f(x, y, z) = \bar{x} \bar{y} z + \bar{x} y z + x \bar{y} z + x y z = \bar{x} (\bar{y} + y) z + x (\bar{y} + y) z = \bar{x} z + x z = (\bar{x} + x) z = z$$

5. príklad. Pre ktoré hodnoty parametrov p a q má matica

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ p & 1 & 1 & 1 \\ q & 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

hodnosť 2?

Riešenie:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ p & 1 & 1 & 1 \\ q & 1 & -3 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -5 & 4 \\ 0 & 1 & 1-2p & 1+p \\ 0 & 1 & -3-2q & 3+q \end{pmatrix}$$

Z podmienky rovnosti 3. a 4. riadku dostaneme $1-2p = -3-2q$ a $1+p = 3+q$, riešením tejto sústavy dostaneme $p = 3$ a $q = 1$, potom posledná ekvivalentná matica má tvar

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -5 & 4 \\ \cancel{0} & \cancel{1} & \cancel{-5} & \cancel{4} \\ \cancel{0} & \cancel{1} & \cancel{-5} & \cancel{4} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -5 & 4 \end{pmatrix}$$

6. (prémiový) príklad. Zostrojte inverznú maticu pre

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

Riešenie:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$$

3. KONTROLNÁ PÍŠOMKA

1. príklad. Riešte systém lineárnych rovníc metódou GEM.

$$\begin{array}{ccccrc} x_1 & -x_2 & +x_3 & +x_4 & = & 5 \\ 2x_1 & +x_2 & +4x_3 & -x_4 & = & 7 \\ 3x_1 & 0 & +5x_3 & +0 & = & 12 \\ x_1 & 2x_2 & +3x_3 & -2x_4 & = & 2 \end{array}$$

Riešenie:

$$A' = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 4 & -1 & 7 \\ 3 & 0 & 5 & 0 & 12 \\ 1 & 2 & 3 & -2 & 2 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 4 & -1 & 7 \\ 3 & 0 & 5 & 0 & 12 \\ 1 & 2 & 3 & -2 & 2 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & 2 & -3 & -3 \\ 0 & 3 & 2 & -3 & -3 \\ 0 & 3 & 2 & -3 & -3 \end{array} \right)$$

Zavedieme substitúcie $x_3 = u$, $x_4 = v$, kde $u, v \in R$, potom z prvých dvoch rovníc dostaneme

$$\begin{aligned} x_1 &= 4 - (5/3)u \\ x_2 &= -1 - (2/3)u + v \\ x_3 &= u \\ x_4 &= v \end{aligned}$$

Vektor neznámych má tvar

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} -5/3 \\ -2/3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

pre $\forall u, v \in R$. Ak položíme napr. $u = v = 0$, potom vektor neznámych má tvar

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

t. j. $x_1 = 4, x_2 = -1, x_3 = 0, x_4 = 0$.

2. príklad. Vypočítajte determinant matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Riešenie:

$$\begin{aligned} \det(A) &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & -1 & -6 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & -3 & -1 & -6 \\ 0 & -2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} \\ &= - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 \end{aligned}$$

3. príklad. Existuje obyčajný graf s 7 vrcholmi, ktorého stupne sú 4, 4, 4, 1, 1, 1, 1? Ak áno, nakreslite ho, ak neexistuje, zdôvodnite prečo.

Riešenie:

Podľa vety 10.3. upravujeme postupnosť takto:

4, 4, 4, 1, 1, 1, 1

3, 3, 0, 0, 1, 1

3, 3, 1, 1, 0, 0

2, 0, 0, 0, 0

0, -1, -1, 0, 0

Postupnosť nie je grafová, neexistuje obyčajný graf s danými stupňami vrcholov.

4. príklad. *Doplnkový* (complementary) graf \bar{G} ku grafu G má rovnakú vrcholovú množinu ako G . Dva vrcholy sú spojené hranou v \bar{G} vtedy, keď nie sú spojené v G . Keď je G obyčajný graf o 16 hranách a \bar{G} má 50 hrán, koľko vrcholov má graf G ?

Riešenie:

Graf zjednotený s komplementom dáva kompletný graf

$$2|E| = |V| \deg(v)$$

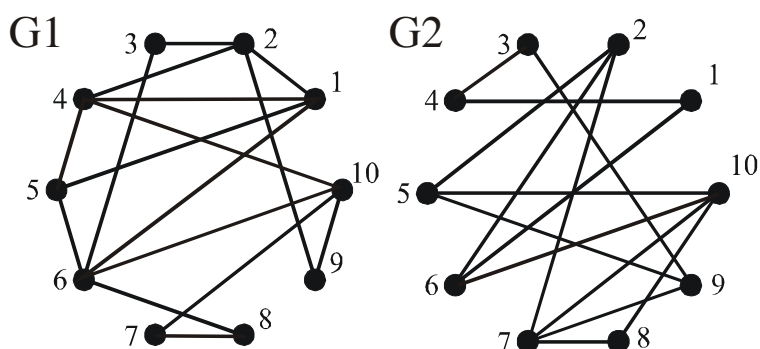
$$2 \times 66 = |V| \times (|V| - 1)$$

$$|V| = 12$$

5. príklad. Predpokladajme, že planárny graf má dve komponenty, každú s 6 vrcholmi stupňa 3. Na koľko strán (oblastí) je rovina rozdelená planárnou reprezentáciou tohto grafu?

Riešenie: Použijeme Eulerovu formulu $|R| = |E| - |V| + |K| + 1$, teda $|R| = 12 \times 3/2 - 12 + 2 + 1 = 9$.

6. (prémiový) príklad. Dá sa niektorý z grafov na nasledujúcom obrázku nakresliť jedným ťahom? Prečo áno a prečo nie? (Číslice u vrcholov sú iba indexy)



Riešenie: V grafe G1 sú iba dva vrcholy (s indexmi 5 a 6) nepárneho stupňa, teda existuje eulerovský ťah. V grafe G2 sú 4 vrcholy (s indexmi 2, 5, 6, 9) nepárneho stupňa, teda neexistuje eulerovský ťah.

ZÁVEREČNÁ PÍSOMKA

1. **príklad.** Dokážte metódou vymenovaním prípadov tieto vlastnosti:

$\max\{a, \min\{b, c\}\} = \min\{\max\{a, b\}, \max\{a, c\}\}$, kde a, b, c sú reálne čísla.

Riešenie:

(a) $a \leq b \leq c$

$$\underbrace{\max\{a, \underbrace{\min\{b, c\}}_b\}}_b = \min\left\{\underbrace{\max\{a, b\}}_b, \underbrace{\max\{a, c\}}_c\right\}$$

(b) $a \leq c \leq b$

$$\underbrace{\max\{a, \underbrace{\min\{b, c\}}_c\}}_c = \min\left\{\underbrace{\max\{a, b\}}_b, \underbrace{\max\{a, c\}}_c\right\}$$

(c) $b \leq a \leq c$

$$\underbrace{\max\{a, \underbrace{\min\{b, c\}}_b\}}_a = \min\left\{\underbrace{\max\{a, b\}}_a, \underbrace{\max\{a, c\}}_c\right\}$$

(d) $b \leq c \leq a$

$$\underbrace{\max\{a, \underbrace{\min\{b, c\}}_b\}}_a = \min\left\{\underbrace{\max\{a, b\}}_a, \underbrace{\max\{a, c\}}_a\right\}$$

(e) $c \leq a \leq b$

$$\underbrace{\max\{a, \underbrace{\min\{b, c\}}_c\}}_a = \min\left\{\underbrace{\max\{a, b\}}_b, \underbrace{\max\{a, c\}}_a\right\}$$

(f) $c \leq b \leq a$

$$\underbrace{\max\{a, \underbrace{\min\{b, c\}}_c\}}_a = \min\left\{\underbrace{\max\{a, b\}}_a, \underbrace{\max\{a, c\}}_a\right\}$$

Vo všetkých prípadoch sme dostali rovnosť, čiže identita platí pre každé a, b, c .

2. príklad. Dokážte pomocou matematickej indukcie $(a+b)^n \geq a^n + b^n$ pre $a, b \geq 0$.

Riešenie:

(1) Indukčný predpoklad $P(n): (a+b)^n \geq a^n + b^n$

(2) Platnosť pre $n = 1$ $P(1): (a+b) \geq a^1 + b^1$ (tento predpoklad je platný)

(3) Dôkaz platnosti pre $n + 1$ $P(n+1): (a+b)^{n+1} = (a+b)^n (a+b) \geq (a^n + b^n)(a+b)$
 $= a^{n+1} + b^{n+1} + \underbrace{a^n b + a b^n}_{\geq 0} \geq a^{n+1} + b^{n+1}$

3. príklad. Zistite, či relácia R nad množinou všetkých ľudí je reflexívna, symetrická, antisymetrická, alebo tranzitívna, pričom $(x, y) \in R$ vtedy a len vtedy, ak

(a) x je menší ako y ,

Riešenie:

tranzitívna: $\forall x \forall y \forall z ((x < y) \wedge (y < z) \Rightarrow (x < z))$

antisymetrická: $\forall x \forall y ((x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \notin R)$

(b) x má rovnaké krstné meno ako y ,

Riešenie:

reflexívna: $\forall x ((x, x) \in R)$

symetrická: $\forall x \forall y ((x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \in R)$

tranzitívna: $\forall x \forall y \forall z ((x, y) \in R \wedge (y, z) \in R \Rightarrow (x, z) \in R)$

(c) x a y sa narodili v rovnakom dni,

Riešenie:

reflexívna: $\forall x ((x, x) \in R)$

symetrická: $\forall x \forall y ((x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \in R)$

tranzitívna: $\forall x \forall y \forall z ((x, y) \in R \wedge (y, z) \in R \Rightarrow (x, z) \in R)$

4. príklad. Koľko existuje binárnych reťazcov dĺžky 10, ktoré

(a) obsahujú práve jednu jednotku,

Riešenie: 10

(b) maximálne tri jednotky,

Riešenie: $\binom{10}{0} + \binom{10}{1} + \binom{10}{2} + \binom{10}{3} = 1 + 10 + 45 + 120 = 176$

(c) minimálne tri jednotky,

Riešenie:

$$\binom{10}{3} + \binom{10}{4} + \binom{10}{5} + \binom{10}{6} + \binom{10}{7} + \binom{10}{8} + \binom{10}{9} + \binom{10}{10} =$$

$$120 + 210 + 252 + 210 + 120 + 45 + 10 + 1 = 968$$

$$= 2^{10} - C(10,0) - C(10,1) - C(10,2) = 1024 - 1 - 10 - 45 = 968$$

5. príklad. V koši máme 100 jabĺčok, z ktorých 20 je červivých a 15 je nahnitých. Nech v koši je 10 jabĺčok, ktoré sú červivé a nahnité, koľko jabĺčok v koši nie je ani červivých a ani nahnitých?

Riešenie: $A_1 = \{\text{červivé jabĺčka}\}$, $A_2 = \{\text{nahnité jabĺčka}\}$ $|A_1| = 20$, $|A_2| = 15$, $|A_1 \cap A_2| = 10$,

$$|\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2| = |\overline{A_1 \cup A_2}| = |U| - |A_1 \cup A_2| = |U| - (|A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|)$$

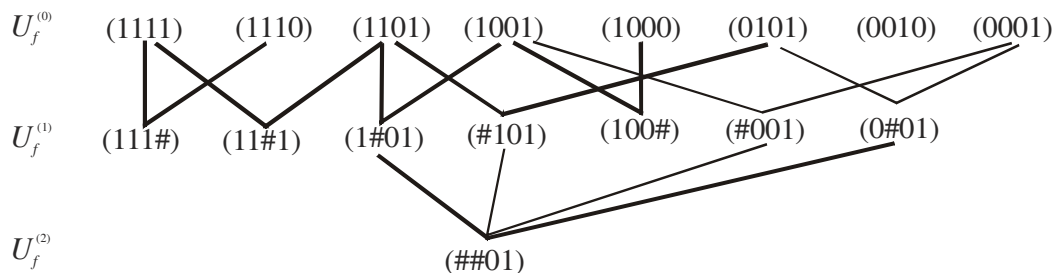
$$= |U| - |A_1| - |A_2| + |A_1 \cap A_2| = 100 - 20 - 15 + 10 = \boxed{75}$$

6. príklad. Pomocou Quinovej a McCluskeyho metódy nájdite optimálne výrazy k Boolovým funkciám

$$wxyz + wxy\bar{z} + wx\bar{y}z + w\bar{x}yz + w\bar{x}\bar{y}\bar{z} + \bar{w}x\bar{y}z + \bar{w}\bar{x}yz + \bar{w}\bar{x}\bar{y}z.$$

Riešenie:

0. etapa		1. etapa			2. etapa		
1	(1111)	1	(1,2)	(111#)	1	(3,6),(4,8)	(##01)
2	(1110)	2	(1,3)	(11#1)	2	(3,4),(6,8)	(##01)
3	(1101)	3	(3,4)	(1#01)			
4	(1001)	4	(3,6)	(#101)			
5	(1000)	5	(4,5)	(100#)			
6	(0101)	6	(4,8)	(#001)			
7	(0010)	7	(6,8)	(0#01)			
8	(0001)						



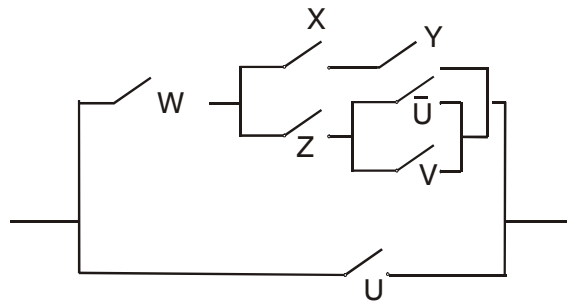
$$\tilde{V} = \{(111\#), (\##01), (100\#), (0010)\}$$

$$f(w, x, y, z) = wxy + \bar{y}z + w\bar{x}\bar{y} + \bar{w}\bar{x}\bar{y}z$$

7. **príklad.** Zostrojte spínacie zariadenie zodpovedajúce spínacej funkcii f

$$f(x, y, z, u, v, w) = (xy + z(\bar{u} + v))w + u$$

Riešenie:



8. **príklad.** Nájdite riešenie sústavy lineárnych rovníc pomocou Cramerovho pravidla

$$2x_1 - 3x_2 + x_3 = 1$$

$$x_1 + 2x_2 - x_3 = 0$$

$$2x_1 + x_2 + x_3 = -1$$

Riešenie:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 12, \quad |A_1| = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2,$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -6, \quad |A_3| = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -10$$

Potom riešenie

$$x_1 = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}, \quad x_2 = \frac{-6}{12} = -\frac{1}{2}, \quad x_3 = \frac{-10}{12} = -\frac{5}{6}$$

9. **príklad.** Riešte pomocou inverznej matice sústavu rovníc

$$x + y = 3$$

$$x + y + z = 0$$

$$x - y - z = 2$$

Riešenie:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ II - I \\ III - I \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & | & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ II + III \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & | & -2 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & | & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ -III + II \end{matrix}$$

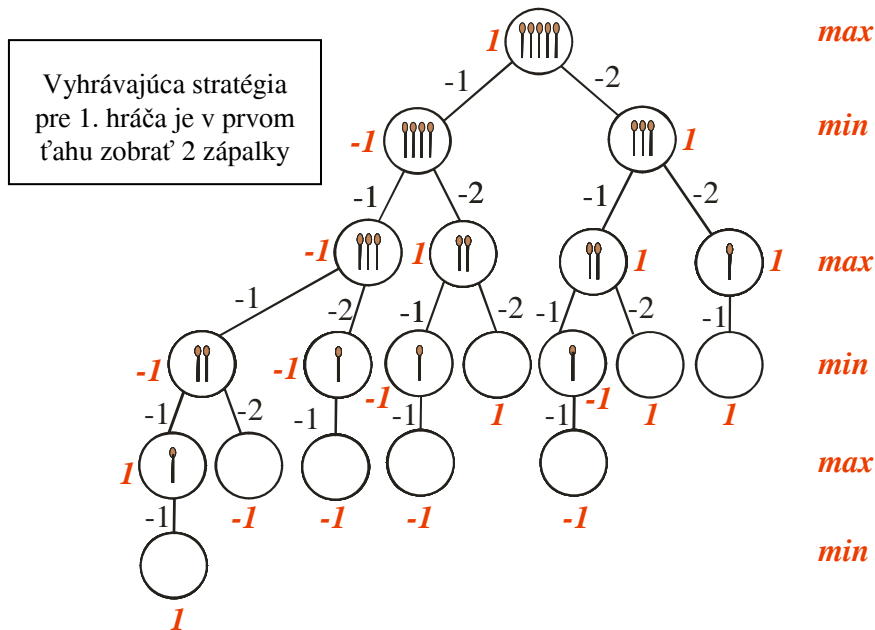
$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right) I + 1/2 II \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right) *(-1/2)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1/2 & 1/2 & & & \\ 1 & -1/2 & -1/2 & & & \\ -1 & 1 & 0 & & & \end{array} \right) \times \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$x=1, y=2, z=-3$

10. príklad. Zostrojte strom riešení hry odoberania zápaličiek, keď máte na začiatku hry 5 zápaličiek, každý hráč môže odobrať buď jednu alebo dve zápaličky, hráč, ktorý odoberie poslednú zápaličku (posledné zápaličky) vyhral. Vrcholy z jednotlivých vrstiev stromu ohodnoťte pomocou minimax princípu a špecifikujte optimálnu stratégiu (ak existuje) pre 1. hráča.

Riešenie: Na obrázku sú vrcholy s počtom zápaličiek na hromádke, jednotka kurzívou znamená, že ide o podstrom, kde vyhráva 1. hráč (voliaci stratégiu max, teda vyberajúci pre seba ako ideálnu stratégiu maximálne ohodnotený zo svojich podstromov), kurzívou označená -1 znamená, že ide o podstrom, kde vyhráva 2. hráč (min). Ohodnotenia hrán -1 a -2 znamenajú odobratie jednej alebo dvoch zápaličiek hráčom. Z ohodnotenia koreňa vyplýva, že pre prvého hráča existuje víťazná stratégia.



11. príklad. Koľko rozdielnych možných interpretácií má každý z nasledujúcich výrazov, keď predpokladáme asociatívnosť operácie \otimes a keď ju nepredpokladáme?

- (a) $x \otimes y \otimes z$
- (b) $t \oplus x \otimes y \otimes z$
- (c) $t \otimes x \oplus y \otimes z$

Riešenie:

Keď predpokladáme asociatívnosť operácie \otimes

- (a) 1 interpretácia, $x \otimes y \otimes z$
- (b) 3 interpretácie, $(t \oplus x) \otimes y \otimes z$, $t \oplus (x \otimes y \otimes z)$, $(t \oplus (x \otimes y)) \otimes z$
- (c) 4 interpretácie, $(t \otimes x) \oplus (y \otimes z)$, $((t \otimes x) \oplus y) \otimes z$, $(t \otimes (x \oplus y)) \otimes z$, $t \otimes (x \oplus (y \otimes z))$

Keď nepredpokladáme asociatívnosť operácie \otimes

- (a) 2 interpretácie, $(x \otimes y) \otimes z$, $x \otimes (y \otimes z)$
- (b) 5 interpretácií, $(t \oplus x) \otimes (y \otimes z)$, $t \oplus ((x \otimes y) \otimes z)$, $t \oplus (x \otimes (y \otimes z))$, $(t \oplus (x \otimes y)) \otimes z$, $((t \oplus x) \otimes y) \otimes z$
- (c) 5 interpretácií, $(t \otimes x) \oplus (y \otimes z)$, $((t \otimes x) \oplus y) \otimes z$, $(t \otimes (x \oplus y)) \otimes z$, $t \otimes (x \oplus (y \otimes z))$, $t \otimes ((x \oplus y) \otimes z)$

LITERATÚRA

- [1] Bečvář, J.: *Lineární algebra*. Matfyzpress, Praha, 2000.
- [2] Bučko, M.; Klešč, M.: *Diskrétna matematika*. Elfa, Košice, 2006.
- [3] Čada, R.; Kaiser, T.; Ryjáček, T.: *Diskrétní matematika*. Západočeská univerzita v Plzni. Plzeň, 2004.
- [4] Galanová, J.; Kaprálik, P.: *Diskrétna matematika*. STU, Bratislava, 1997.
- [5] Garnier, R.; Taylor, J.: *Discrete Mathematics for New Technology*. Institute of Physics Publishing, Bristol and Philadelphia, 1999.
- [6] Hein, J. L.: *Discrete Structures, Logic, and Computability*. Jones and Bartlett Publishers, Sudbury, MA, 2002.
- [7] Jablonskij, S. V.: *Úvod do diskrétnej matematiky*. Alfa, Bratislava, 1984.
- [8] Knor, M.: *Kombinatorika a teória grafov I*. Univerzita Komenského, Bratislava, 2000.
- [9] Knor, M.; Niepel, L.: *Kombinatorika a teória grafov II*. Univerzita Komenského, Bratislava, 2000.
- [10] Kolář, J.; Štěpánková, O.; Chytil, M.: *Logika, algebry a grafy*. SNTL, Praha, 1989.
- [11] Kvasnička, V.; Pospíchal, J.: *Matematická logika*. STU, Bratislava, 2006.
- [12] Matoušek J.; Nešetřil, J.: *Kapitoly z diskrétní matematiky*. Matfyzpress, Praha, 1996.
- [13] Preparata, F. P.; Yeh, R. T.: *Úvod do teórie diskrétnych matematických štruktúr*. Alfa, Bratislava, 1982.
- [14] Rosen, K. H.: *Discrete Mathematics and Its Applications*. McGraw Hill, Boston, 2003.

REGISTER

- \neg negácia, 6, 47, 144, 160
 - \vee disjunktia, 5, 13, 46, 47, 144, 146, 160, 187
 - \oplus exkluzívna disjunktia, XOR, 174
 - \otimes súčin binárnych matíc, **187-189**
 - \exists existenčný kvantifikátor, 11-14
 - \Rightarrow implikácia, 4, 5, 9, 12-13, 15-16
 - \wedge konjunktia, 4, 12, 21, 46-47, 144, 160, 187
 - \forall univerzálny (všeobecný) kvantifikátor, 11-13
 - U univerzum, 11-13, 30-35, 113, 119
 - \emptyset prázdna množina, **31**, 128, 145
 - \subset , vlastná podmnožina $A \subset B$, **32**
 - \subseteq , podmnožina, tiež podgrupa, $A \subseteq B$, **32**, 40, 113, 131, podmonoid 142
 - \cup zjednotenie množín, **32-33**, 37-38, **46**, 113, 124, 144, 168, zjednotenie relácií **54**, zjednotenie grafov, **234**
 - \cap prienik množín, **32-33**, **46**, 113-114, 124, 144, prienik relácií **54**, prienik grafov, **234**
 - \bar{A} doplnok (komplement) množiny, **32**, **47**, **113**, 144, doplnok relácie, **54**, doplnkový graf, **252**
 - \bar{x} komplement premennej Boolovej algebry, **144-148**
 - \setminus rozdiel množín (relatívny doplnok), $A \setminus B$, **32-34**
 - \in prvok a patrí do množiny, $a \in A$, **30-32**
 - \notin prvok a nepatrí do množiny, $a \notin A$, **30-32**
 - $\exists!x$ existuje práve jeden prvok x , ktorý spĺňa dané podmienky, 66, 70, 123
 - $\lceil x \rceil, \lfloor x \rfloor$ horná, dolná celá časť, 62, 84, 116
 - \mathbb{Z} množina celých čísel, 60, 129
 - $\mathcal{P}(A)$ potenčná množina množiny A , **40**, 124, 137
 - \mathbb{R}_+ množina kladných reálnych čísel, 129, 136
 - e neutrálny prvok, **124-126**, 128, 145
 - E jednotková matica, **179**, 183, 194
 - a^{-1} inverzný prvok (v grupe), **124-126**, 129
 - A^{-1} inverzná matica, **194-197**
 - R^{-1} inverzná relácia, **53**
 - f^{-1} inverzná funkcia, **69-70**
 - A^T transponovaná matica, **179**
 - \equiv ekvivalentnosť, 144, 146, **149**
 - $\#'$ „prázdny“ symbol, 166
 - ε prázdny znak, 128, prázdny reťazec 137
 - $\chi(G)$ chromatické číslo grafu, **266**, **269**
 - C_n kružnica (graf), **233**, 237, 244
 - K_n kompletný graf, **233**
 - $K_{n,m}$ kompletný bipartitný graf, 234
 - W_n graf typu koleso, 251
 - Q_n hyperkocka, 246, 260-261
- ## A
- Abel, Niels Henrik, **127**
 - Abelova pologrupa, **127**
 - absorpcia, **34**, **147**
 - adícia, **4**, **5**
 - aktivačná (alebo sigmoidová prechodová) funkcia, **71**
 - algebra 19, 244
 - teórie množín, **33**, 46
 - Boolova, **143-147**, 155-156
 - maticová, **177-226**
 - algebraické štruktúry, **123-176**
 - algebraický výraz, strom, **287-288**
 - algoritmus
 - 4.1., náhodne generovanie permutácie, **88**
 - 4.2., systematické generovanie všetkých permutácií, **89**
 - 5.1., rekurzívny pre výpočet faktoriálu, **100**
 - 5.2., Hanojské veže, **106-107**
 - 5.3., rekurzívne delenie intervalu pri hľadaní minimálneho prvku, **110**

- 5.4., Eratostenovo sito, **116**
- 8.1., násobenie matíc, **184**
- 10.1., konštrukcia uzavretého eulerovského ťahu prehl'adávaním do hĺbky, **240**
- 10.2., konštrukcia otvoreného eulerovského ťahu prehl'adávaním do hĺbky, **241**
- 10.3., pre konštrukciu všetkých možných hamiltonovských ciest, **248**
- 11.1., Dijkstrov, **259**
- 11.2., greedy, zafarbenie obyčajného grafu, **267**, greedy Quinova a McCluskeyho metóda, 169, greedy konštrukcia zátvorkovania pri násobení matíc, 186
- 12.1., prehl'adávanie binárneho stromu, resp. priradenie nového záznamu, **282**
- 12.2., Huffmanove kódovanie, **286-287**
- 13.1., minimálne časové ohodnotenie v sieti, **302-304**
- 13.2., maximálne časové ohodnotenie v sieti, **304-305**
- 13.3., určenie maximálneho toku v sieti, **305-307**
- 13.4., Primov, na minimálnu kostru, **308-309**
- 13.5., Kruskalov, na minimálnu kostru, **309**, 322
- 13.6., prehl'adávanie do hĺbky s rekurziou, **310-311**
- 13.7., prehl'adávanie do hĺbky pomocou zásobníka, **311-312**
- 13.8., prehl'adávanie do hĺbky s výpisom cesty od koreňa, **313-314**
- 13.9., prehl'adávanie do šírky s radom, **319-321**
- Ford-Fulkersonov, **306-307**
- polynomiálny, 260, 284
- „rozdeľuj a panuj“, **108-113**
- usporiadania so spájaním (merge sort), **111-113**
- binárne prehl'adávanie, **108-109**
- algoritmus, zložitost', 100, 108-109, 112, 169, 184, 237, 259, 267, **284**, 295, 309, 310, 319
- alkány, 277-278
- antisymetrická relácia, **58**
- argument, 1-2, **66**

- artikulácia, **238**
- asociatívna binárna operácia, **124**, 127, 129
- asociatívnot', **33**, **145**, 183
- axióma, 1-3, 15, 20
- axiomatická výstavba teórie množín, 29, 39
- axiomatický systém, 2-4, 20
- axiomatizácia, 39

B

- backtracking, **310-311**
- bijekcia, **70**, 136, 215, 236
- bijektívne zobrazenie, 71, 88, 133, 137
- binárna matica, 55, **187**
- , disjunkcia, 187
- , konjunkcia, 187
- , mocnina, 188
- , súčin, 187
- binárna relácia, **53-55**
- binárne prehl'adávanie, **108-109**, **282-283**
- binárny strom, **280**, **282-283**, 286
- binomická veta, **82**
- binomický koeficient, **81-82**, 83-84, 91, 185
- bipartitný graf, **233-234**, 260
- Boole, George, **143**
- Boolova algebra, 33, **143-147**
- Boolova formula, **148**
- Boolova premenná, **148**
- Boolova funkcia, 143-144, 148, **149-155**, 159, 164, 172
- Brooks, Rowland Leonard, 266

C

- Cantor, Georg, 29
- Cayley, Arthur, **277**
- Cayleyho (multiplikačná) tabuľka, 124
- cesta, 3, **237-238**, 279, 307, 310
- , dĺžka, **79**, **242**, 243, 248, **257-259**, 280, 302, 312, 321
- hamiltonovská, **244**, 260
- minimálnej dĺžky, 243, 257-259, 312-313
- optimálna (alebo minimálna), 79-80, 248
- orientovaná, 58, 242
- kritická, **301-305**
- Cramer, Gabriel, **222**

Cramerovo pravidlo, **222**
 cyklomatické číslo grafu, **281**
 cyklus, okruh, **237, 242**
 časové ohodnotenie earliest a latest, **302**
 čiastočne usporiadaná množina (poset), **63**
 čiastočné usporiadanie, **62-65**, 167-168
 číslo grafu
 – cyklomatické, **281**
 – hranové chromatické $\chi_{\text{hranové}}(G)$, **269**
 – chromatické $\chi(G)$, **266-267**
 – priesečníkové (crossing number), **274**
 – vrcholovej nezávislosti, **269-270**

D

dámy, problém n dám, 269-270, **316**
 De Morgan, August, 267
 De Morganove zákony, 17, 27, **34**, 113, **144**,
147
 dedukcia, veta o, **8**
 deduktívny dôkaz, **2**
 definícia, obor definície funkcie, **66**
 derangementálna permutácia, **117-118**
 Descartes, René, **43**
 determinant, 194, **214-222**
 –, výpočet, 217, 220-221, 222
 diagonálna matica, **179**
 diagonálny prvok, **179**, 192, 219, 221
 diagram Hasseho, **64-65**, 168, 170
 diagram Vennov, 33-34, 43
 dihedrálna grupa, **133**, 135
 Dijkstra, Edsger, 258-259, 308
 Dijkstrov algoritmus, **258-259**
 Diracova teoréma, **245**
 disjunkcia binárnych matíc, 187
 disjunkcia, logická brána, 160
 disjunktívna normálna forma (DNF), 151-154,
 165
 disjunktívny sylogizmus, **5**
 disjunktívny rozklad, 37, 60, **61-62**
 distributívne zákony pre rozdiel množín, **34**, 36
 distributívnosť, **33**, 45, 57, **145**
 dĺžka cesty, **79**, **242**, 243, 248, **257-259**, 280,
 302, 312, 321
 dĺžka oblasti (stupeň steny), **262**

dodekaéder (dodekahedron), **244**
 dominujúca množina, **269**
 dominancia, **34**, 230
 doplnkový (príp. komplementárny, comple-
 mentary) graf, **252**
 doplnok (komplement) množiny, **32**, 33
 doplnok relácie, **54-55**
 doplnok, relatívny (rozdiel množín), **32-33**, **34**,
 36
 dôkaz „kombinatorický“, **91**, 92-93
 dôkaz nepriamy, **16**
 dôkaz priamy, **15**, 106
 dôkaz sporom, **16**, **22-23**
 dôkaz vymenovaním prípadov, **17-19**, 57
 dôkaz deduktívny, **2**
 dôsledok, potvrdenie, 16, 18
 „dualizmus“ výrokovej logiky a teórie množín,
144
 duálna forma rovnosti, **146**
 duálny graf k mape, **264-265**
 dvojité sumátor, **162-163**

E

ekvivalencia, 144, relácia **60**, 146
 –, trieda, **61-62**
 – Boolových formúl, **149-150**
 ekvivalentné matice, **191-192**
 elektronický obvod, 143, 172, 228, 261, 274
 – spínací **155-159**
 – logický **159-163**
 element (prvok), 11, **29-30**, 63, 123-124, 171,
 178, 182, 197
 elementárny pojem, 2, 29, 30
 enumerácia, **37-42**, 103, 105, 107, 115
 Eratosthenes, **115**
 Eratostenovo sito, **115-116**
 Euler, Leonhard, **227-228**
 Eulerova formula, **262**
 eulerovský ťah, **237-238**, 240-241
 existenčný kvantifikátor, konkretizácia, 11, 13
 existenčný kvantifikátor, zovšeob., 11, 14
 existuje práve jeden prvok $x, \exists!x$, 66, 123
 exklúzia a inklúzia, metóda, **113-118**
 exkluzívna disjunkcia, \oplus , XOR, 174

F

- faktoriál, 100
- rekurzívne, **100**
- falzifikácia, **13**
- farbenie **264-269**
- “k-tuple”, **268**
- grafu, 266-267
- grafu pomocou prehľadávania do hĺbky, 316
- grafu pomocou greedy algoritmu, **267**
- mapy, 264-265
- Fermatova veta, Veľká, **19**
- Fibonacci, vlastným menom Leonardo Pisano, **102**
- Fibonacciho čísla, **102**, 104
- Ford, Lester Randolph, 306
- Ford-Fulkersonov algoritmus, **306-307**
- forma, disjunktívna normálna (DNF), 151-154, 165
- forma, konjunktívna normálna (KNF), 154
- formula
- Boolova, **148-149**, 150, 165
- Eulerova, **262-263**
- Stirlingova, 285
- , ekvivalentnosť Boolových formúl, **149-150**
- rekurentná, **99-108**
- Frobeniova veta, **208**, 212
- Frobenius, Ferdinand Georg, **208**
- Fulkerson, Delbert Ray, 306
- funkcia
- Boolova, 143-144, 148, **149-155**, 159, 164, 172
- charakteristická, **31-32**, 36, 42, **46**, 53, 55-56
- inverzná, **69-72**
- jedno-jednoznačná (injekcia), **69**, 136, 137, 139
- jednotková, **67**, 70-72
- sigmoidová prechodová (alebo aktivačná), **71**
- spínacia, **156-157**
- zložená, **67-69**
- funkcie, rovnosť, **67**
- funkčná hodnota (obraz), **66**, 152-155
- , obor, **66-67**

G

- Gauss, Carl Friedrich, **210**
- Gaussova eliminačná metóda, **210-212**
- generovanie permutácií, **88-89**
- genetické programovanie, 288
- geometrická interpretácia rovnice, **206-208**
- graf, 228
- bipartitný, **233-234**, 260
- doplnkový (príp. komplementárny, complementary), **252**
- duálny k mape, **264-265**
- kompletný, **233**, 261, 266
- kompletný bipartitný, 233-234, 260-261
- neorientovaný, **228**, 231, 236-237, 278
- obyčajný, 229, 235-236, 245, 253, 262, 308
- ohodnotený, 258, 283, 293, 301
- orientovaný, 59, **228-229**, 230, 231, 235-236, 242, 302, 305
- ovplyvňovania, 250
- Petersenov, **264**, 266
- planárny, **260-264**, 267, 274
- plánovania udalostí, **230**
- pravidelný (regular), **252**
- prienikový (intersection graph), **250**
- riedky, 259, 309
- samokomplementárny (selfcomplementary), **253**
- silno/slabo súvislý, **242**
- súvislý, **237-243**, 262-263, 277, 308
- zmiešaný, 228
- , farbenie, 266-267
- , hranové chromatické číslo $\chi_{\text{hranové}}(G)$, 269
- , chromatické číslo $\chi(G)$, **266-267**
- , multigraf, **228-229**, 236
- , pseudograf, 229, 235
- , rovinná (planárna) reprezentácia, **260-262**
- grafová postupnosť, **231-232**
- grafy Kuratowského, **263**
- grafy, zjednotenie, **234**, 237
- Gray, Frank, 246
- Grayov kód, **246**
- greedy algoritmus, 169, 186, 187, 267, 308

grupa, **129**

- dihedrálna, **133**, 135
- permutácií, **133-135**, 215
- symetrická, 133-135, 215
- , rád, **129**, 131
- , stred, **142**
- grupoid, **123**

H

- Hamilton, William Rowan, **244**, 267
- hamiltonovská cesta, **244**, 245-246, 248
- hamiltonovská kružnica, **244-248**, 259-260, 319
- Hammingova vzdialenosť, **165**, 166
- Hanojské veže, **104-107**
- Hasseho diagram, **64-65**, 168, 170
- Havlova a Hakimiho veta, **232**
- hierarchicky usporiadané pravidlá, **289**
- hlavná diagonála, **179**
- hlúbka stromu, **280**, 281, 284, 285, 289, 318
- hodnosť matice, **189-194**, 209, 213-214, 218
- homogénna sústava lineárnych rovníc, **212-214**
- homomorfizmus, **137-138**
- hra, 104, 118, 244, 288
- , stav, 288-290, **292**, 315
 - , stavový priestor, **292**
- hrana, 2-3, 58-60, 64, 227, **228**
- incidentná s vrcholmi, **230**
 - násobná, **229**, 235
 - orientovaná, **229**, 231, 236
 - , váha, **257**, **301**
 - , zafarbenie, **269**
- hranové chromatické č. grafu $\chi_{\text{hranové}}(G)$, **269**
- hrúbka (thickness) jednoduchého grafu, **274**
- Huffman, David, 286
- Huffmanove kódovanie, **286-287**
- hviezda (topológia grafu), 234, 251
- hyperkocka, 246, 260-261
- hypotetický sylogizmus, **4-5**

CH

- charakteristická funkcia, **31-32**, 36, 42, **46**, 53, 55-56

chemický vzorec, 277-278

chromatické číslo grafu $\chi(G)$, **281**

I

- idempotentnosť, **34**, **147**
- idempotentný prvok, 142
- identita
- Pascalova, **82**, 86
 - Vandermondeova, **86**
- implikácia, inverzia, **5**, **16**
- incidenčná matica, **236**
- incidentná hrana s vrcholmi, **230**
- indexový register, farbenie, 268
- indukcia, matematická, **19-21**, 37-38, 45, 82, 101, 106, 108, 151, 243, 262, 280, 281
- indukcia, silná matematická, **21**
- induktívne usudzovanie, **2**
- induktívne zovšeobecnie, **2**, **13**
- infixová notácia, **288**
- injekcia (jedno-jednoznačná funkcia), **69**, 136, 137, 139
- inklúzia a exklúzia, metóda, **113-118**
- interpretácia, 3, 5, 8, 11, 58-60, 146, 188
- interpretácia množiny, geometrická, **206-208**
- invariant vzhľadom na izomorfizmus, 236
- invarianty, 269
- inverzia implikácie, **5**, **16**
- inverzia permutácie, 134-135, 215
- inverzná funkcia, **69-72**
- inverzná matica, **194-197**
- , konštrukcia, **195-197**
- inverzná relácia, **53**
- inverzný prvok, **124-126**, 129, 136, 147
- involúcia, **34**
- involutívnosť komplementu, **147**
- izolovaný vrchol, **231**
- izomorfizmus, **136-137**, **234-237**

J

- Jarník, Vojtěch, 308
- jedno-jednoznačná funkcia (injekcia), **69**, 136, 137, 139
- jednotková funkcia, **67**, 70-72

jednotková matica E , **179**, 183, 194
 „jednotkový“ prvok, 125, 128
 jednoznačnosť neutrálnych a inverzných prvkov, **126**, **129**, 130, 147

K

„kanonická“ reprezentácia Boolovej funkcie, 150, 152
 kapacita rezu, **305-307**
 kapacita spojenia (priepustnosť), **305**
 kapacitná sieť, **305**
 kardinalita (mohutnosť), **36**, 37, 42, 45, 48, 113, 129, 134
 Karnaughove mapy, 164
 karteziánsky súčin, **42-46**, 53-54, 58, 127
 klauzula, **150**
 – minimálna, 168-170
 – súčinová, **150**, 152, 165-166
 – súčtová, **150**, 152
 –, „pokrytie“, **167-171**
 kocka, (n -kocka), 246, 251, 261
 kód Grayov, **246**
 kód prefixový, **285-287**, 288
 kódovanie Huffmanove, **286-287**
 kódovanie nestratové, 285
 koleso, 251
 kombinácie, 91, 93, 246
 „kombinatorický dôkaz“, **91**, 92-93
 komplement (doplnok) množiny, **32**, 33
 –, involutívnosť, **147**
 komplement grafu, **252**
 komplementy konštánt, **147**
 kompletný bipartitný graf, 233-234, 260-261
 kompletný graf, **233**, 261, 266
 komponent grafu, 3, **237-238**, 262, 281
 kompozícia relácií, **56-58**, 188
 kompozicionalita, princíp, **35**
 komunikačná sieť, 255, 278
 komutatívna
 – binárna operácia, **124**
 – operácia, 129, 146, 152, 183
 – pologrupa, **127**
 – grupa, **129**, 136-137
 komutatívnosť, **33**, 137, **144**

konjunkcia, **4**, 12, 21, 46, 144, 146
 – binárnych matíc, **187**
 –, logická brána, **160**
 konjunktívna normálna forma (KNF), 154
 konkretizácia
 – existenčného kvantifikátora, 11, 13
 – univerzálneho kvantifikátora, 11, 12
 konštanta 0 a 1, **144-145**, 148
 konštrukcia inverznej matice, **195-197**
 kontradikcia, 5, 16-17, 39, 146
 konzistentnosť, 2, 5, 29
 koobor, **66**
 korektnosť, 1-2, 33-34, 39
 koreň
 – algebraickej rovnice, 86
 – stromu, **279**, 282
 koreňový strom, **279-281**, 287-288
 kostra (spanning tree), 308, 310-313, 321
 kostra, minimálna, 308-309
 kôň, problém knight tour, **245-246**, **318-319**, **321-322**
 krátenie sprava a zľava, 130
 kritická cesta siete, **301-305**
 Kruskal, Joseph, 309
 Kruskalov algoritmus, **309**, 322
 kružnica
 – v grafe, **233**, 237-239, 242, 263, 278, 281
 – hamiltonovská, **244-248**, 259-260, 319
 Kuratowského grafy, **263**
 Kuratowského veta, **263**
 Kuratowski, Kazimierz, **263**
 kvantifikátor
 – existenčný, konkretizácia, 11, 13
 – existenčný, zovšeobecnenie, 11, 14
 – univerzálny, konkretizácia, 11, 12
 – univerzálny, zovšeobecnenie, 11, 12, 13, 20

L

Lagrangeova veta, **131**
 ľavý nasledovník, **280**, 282
 Leibniz, Gottfried Wilhelm, 43
 lema, 1
 les, 278, 281, 286-287
 lineárna kombinácia vektorov, **190**, 192

lineárna závislosť vektorov, **189-190**, 193,
218-219
lineárne rovnice, sústava, **205-214**, 221-222
lineárny priestor, **44**, 219
list, **279**, 280-281, 288
literál, **148**, 150, 163-164
logické brány disjunkcie, konjunkcie a negácie
160
logický obvod, **159-163**
logický obvod, optimalizácia, **163-171**
logické siete, **172**
logika, predikátová, 11-15
Lucas, Édouard, 104

M

mapa 258
– Karnaughova, 164
– politická, 264-265
– rovinná, 262
–, farbenie, 264-265
matematická indukcia, **19-21**, 37-38, 45, 82,
101, 106, 108, 151, 243, 262, 280, 281
matica
–, α -násobok, **182**
– binárna, 55, **187**
–, definícia, **177-181**
–, determinant, **214**
– diagonálna, **179**
–, hlavná diagonála, **179**, 219, 235
–, hodnosť, **189-194**
– incidenčná, **236**
– inverzná, **194**
– inverzná, konštrukcia, **195-197**
– jednotková, **179**
– koeficientov (m. sústavy), **205**, 209, 213
– nulová, **179**
– obdĺžniková, **179**
– regulárna, **194**, 221
– relácie, 55
– susednosti, **235-236**, 243
– sústavy (m. koeficientov), **205**, 209, 213
– sústavy, rozšírená, **208**
– symetrická, **180**
– štvorcová, **179**

– transponovaná, **179-180**
– trojuholníková, **180**
–, typ, **178**
matice, ekvivalentné, **191**
matice, rovnosť, **182**
matice, súčet, **182**
matice, súčin, **182**, **187**
matice, zložitost' násobenia, 184
maticová algebra, **177-226**
Maurolico, Francisco, 20
maximálny prvok, **63**, 65
maximálny tok, **305-307**
McCluskey, Edward J., **165**
McCulloch, Warren, a Pitts, Walter, 159
merge sort - usporiadanie so spájaním, **111-113**
metóda inklúzie a exklúzie, **113-118**
metóda kritickej cesty, CPM Critical path met-
hod, **301-305**
metóda Gaussova eliminačná, **210-212**
metrika, **79**, 165
minimalizácia Boolových výrazov, **164-171**
minimálna dominujúca množina, **269**
minimálna kostra, 308-309
minimálne klauzuly, 168-170
minimálny prvok, **63**, 65
minimálny rez, **305-307**
minimax princíp, 293-294
množina
– dominujúca, **269**
–, doplnok, **32**, 33
–, komplement, **32**, 33
– minimálna dominujúca, **269**
–, mohutnosť, **36**, 37, 42, 45, 103, 113-114,
129, 134, 178
–, operácie, 31-33, 46-47, 123-124, 144-146
– potenčná, **40-42**, 63-64, 124-125, 128, 137
– prázdna, **31**, 125, 128
– prípustných akcií, 292
–, prvok (element), 11, **29-30**, 63, 123-124,
171, 178, 182, 197
–, rodina, **39-40**
– vlastná, **32**
množinová algebra, **33**, 46

množiny
 –, karteziánsky súčin, **42-46**, 53-54, 58, 127
 –, prienik, **32-33**, 40, 46-47, 54, 68, 113-114, 124, 128, 144
 –, rovnosť, **31-32**, 42, 144
 –, rozdiel, **32-33**, 34
 –, zjednotenie, **32-33**, 38, 40, 46, 54, 113, 124, 144
 mocnina binárnych matíc, 188
 mocniny relácie R , 188
 model, 3, 144, 290
 modus ponens, **4-5**
 modus tollens, **4-5**
 Mohamedova šabl'a, **239**
 mohutnosť (kardinalita), **36**, 37, 42, 45, 48, 113, 129, 134
 monoid, **128-129**, 137, 142
 Montmort, de, Pierre Raymond, 118
 morfizmy, **135-138**, **234-237**
 most grafu, **238**, 262
 mosty Královca, 227-228
 multigraf, 228, 229, 236
 multimnožina, 92-93
 multinomická veta, **87**
 multiplicita, 229
 multiplikačná (Cayleyho) tabuľka, 124

N

n -árny strom, **280**
 nasledovník, 279-280, 282
 α -násobok matice, **182**
 násobenie matíc, **182**, **187**
 –, zložitost', 184
 násobná hrana, 227, 228, **229**, 235-236
 negácia, logická brána, 160
 neorientovaný graf, **228**, 231, 237
 nepriamy dôkaz, **16**
 nerovnosť, „trojuholníková“, **79**, 260
 nestratové kódovanie, 285
 neurónové siete, 71, 159, 172
 neutrálny prvok, **124-126**, 128, 129, **145**, 147
 notácia
 – Omega, 284
 – Omikron, 284

– infixová, **288**
 – postfixová (reverzná poľská), **288**
 – prefixová (poľská), **288**
 – Theta, **284**
 notácie Boolovej algebry, 145, 148
 NP-úplný problém, 260, 284
 n -uholník, **233**, 234, 237
 nulitnosť, **147**
 nulová matica, **179**
 „nulový“ prvok, **125**

O

obchodný cestujúci, problém, **248**, 258-260
 oblasť, dĺžka (stupeň steny), **262**
 oblasti v množine univerza, 35
 obor definície, **66**
 obor funkčných hodnôt, **66-67**
 obraz, funkčná hodnota, **66**, 152-155
 obvod elektronický, 143, 172, 228, 261, 274
 obvod logický, **159-163**
 obvod spínací, **155-159**
 obyčajný graf, 229, 235-236, 245, 253, 262, 308
 odlišiteľné prvky, **29-30**, 92-93
 odvodenie, strom, 7-8
 ohodnotený graf, 258, 283, 293, 301
 okruh, cyklus, **237**, **242**
 Omega notácia, 284
 Omikron notácia, 284
 operácia
 – symetrie, 132-133
 – asociatívna binárna, **124**, 127, 129
 – binárna, **123-124**
 – komutatívna, 129, 146, 152, 183
 – komutatívna binárna, **124**
 – nad množinami, **31-34**, **46-47**
 – nad reláciami, **54-56**
 optimalizácia logických obvodov, **163-171**
 optimálna (alebo minimálna) cesta, 79-80, 243, 248, 257-259, 312-313
 Oreho teoréma, **245**
 orientovaná cesta, 58, 242
 orientovaný graf, 59, **228-229**, 230, 231, 235-236, 242, 302, 305

P

paralelné zapojenie – súčet premenných, 156
 paralelné spracovanie, 230, 301

Pascal, Blaise, **81**

Pascalov trojuholník, **81**, 82-83, 85

Pascalova identita, 82

Peano, Giuseppe, 20

permutácia, **88**, 152, 216, 260, 317

– ako bijekcia, 88, **215**

– ako postupnosť ťahov piškvoriek, 294

– derangementálna, **117-118**

–, generovanie, **88, 89**

–, grupa, **133-135**

– s opakovaním, **92, 93**

–, strom konštrukcie, **90**

–, súčin, 134-135

Petersen, Julius, 264

Petersenov graf, 264, 266

Pisano, Leonardo, nazývaný Fibonacci, **102**

piškvoriky, 288-295

planárna (rovinná) reprezentácia grafu, 260-261

planárny graf, **260-264**, 267, 274

plánovanie udalostí, graf, **230**

plne n -árny strom, **280-281**

počet riešení sústavy lineárnych rovníc, 206-208

–, 1 riešenie, 206-208

–, nekonečne veľa riešení, 206-208

–, nemá riešenie, 206-208

počítačové, transportné siete, 228, 237, 257, 305, 308

podgraf, **234**, 237, 263, 266, 279, 308, 310

podgrupa, **131-132**, 135, 136, 142

podgrupa, triviálna, **131**

podmnožina, 13, **32-33**, 37, 40, 53-54, 67, 91, 131, 132, 142, 233

podmonoid, **142**

podstrom, **279**

pohyb v stavovom priestore hry, 292

pojmem, elementárny, 2, 29, 30

„pokrytie“ klauzúl, **167-171**

pokrytie prvku, **64, 167**

politická mapa, 264-265

pologrupa, **127-128**

– Abelova, **127**

– komutatívna, **127**

polosumátor, **161-163**

polynomiálny algoritmus, 260, 284

Popper, Karl 13

popretie predpokladu, **10**

poset (čiastočne usporiadaná množina), **63**

postfixová (reverzná poľská) notácia, **288**

postupnosť stupňov vrcholov grafu, **231-232**

postupnosť ťahov piškvoriek – permutácia, 294

potenčná množina, **40-42**, 63-64, 124-125, 128, 137

potomok, **279-280**

potvrdenie dôsledku, 16, 18

pravidelný (regular) graf, **252**

pravidlá odvodzovania, 2, 16

pravidlo

– Cramerovo, **222**

– Sarrusovo, **216-217**

pravý nasledovník, 279-280, 282

prázdna množina \emptyset , **31**, 128, 145

„prázdny“ symbol '#', 166

predchodca, **279-280**

predikát, 13, **30**

predikátová logika, 11-15

predok, **279-280**

predpoklad, popretie, **10**

prefixová (poľská) notácia, **288**

prefixový kód, **285-287**, 288

prehľadávanie

– binárne, **108-109, 282-283**

– binárneho stromu, **282**

– do hĺbky (Depth-First Search, DFS), spätné, backtracking, **310-311**

– do šírky (Breadth-First Search, BFS), **319-322**

– stromu riešení, 89, 186, **289-290**, 293, 317

premenná, Boolova, **148**

priamy dôkaz, **15**, 106

prienik množín, **32-33**, 40, 46-47, 54, 68, 113-114, 124, 128, 144

prienik relácií, **54**

- prienikový graf (intersection graph), **250**
 priepustnosť (kapacita spojenia), **305**
 priesečníkové číslo (crossing number) obyčajného grafu, **274**
 priestor, lineárny, **44**, 219
 Prim, Robert, 308
 Primov algoritmus, **309**, 322
 princíp
 – kompozicionality, **35**
 – minimax, 293-294
 – duality, **144**, **146**
 prípustné akcie, množina, 292
 priradenie frekvencií, farbenie, 267-268
 problém
 – knight tour, **245-246**, **318-319**, **321-322**
 – n dám, 269-270, **316**
 – NP-úplný, 260, 284
 – obchodného cestujúceho, **248**, 258-260
 – sumy podmnožín, 317-318
 projekt, sieť, 301-305
 prvok (element), 11, **29-30**, 63, 123-124, 171, 178, 182, 197
 – idempotentný, 142
 – inverzný, **124-126**, 129, 136, 147
 – „jednotkový“, 125, 128
 – maximálny, **63**, 65
 – minimálny, **63**, 65
 – neutrálny, **124-126**, 128, 129, **145**, 147
 – „nulový“, **125**
 –, pokrytie, **64**, **167**
 pseudograf, **229**, 235
- Q**
- Quine, Willard Van Orman, **165**
 Quinova a McCluskeyho metóda, **164-171**
- R**
- rad – queue, 319-321
 rád grupy, **129**, 131
 recontres, 118
 reductio ad absurdum, **5**, 16, 22
 reflexívna relácia, **58**, 59-60, 62
 regulárna matica, **194**, 221
 rekurentná formula, **99-108**
 rekurzia, **100**, 311
 relácia, 42, **53-65**
 – ako orientovaný graf, **59-60**
 – antisymetrická, **58**
 – binárna, **53-55**
 –, doplnok, **54-55**
 – inverzná, **53**
 –, mocnina, 188
 – reflexívna, **58**, 59-60, 62
 – symetrická, **58**, 59-60
 – tranzitívna, **58**, 60, 63
 relácie
 –, kompozícia, **56-58**, 188
 –, operácie, **54-56**
 –, prienik, **54**
 –, zjednotenie, **54**
 reprezentácia grafu rovinná (planárna), 260-261
 rez
 –, kapacita, **305-307**
 – minimálny, **305-307**
 rezolventa, 9-10
 riadkový vektor, 178, **180**, 189-190, 192, 219
 riedky graf, 259, 309
 riešenie sústavy, **206-208**, 201, 214, 222
 r -kombinácia, **91**
 r -kombinácie z k znakov, **93**
 rodina množín, **39-40**
 rovinná (planárna) reprezentácia grafu, 260-261
 rovinná mapa, 262
 rovnosť
 – funkcií, **67**
 – matíc, **182**
 – množín, **31-32**, 42, 144
 rozdiel množín (relatívny doplnok), **32-33**, 34
 rozhodovací strom, **283-285**, 314
 rozklad disjunktný, 37, 60, **61-62**
 rozšírená matica sústavy, **208**
 rozvrh, farbenie, 267
 r -permutácie, **88**, **90**
 r -permutácie pre k znakov, **93**
 r -permutácie s opakovaním, **92**
 Russell, Bertrand, 29, 39

S

- samokomplementárny (selfcomplementary)
 graf, **253**
- Sarrusovo pravidlo, **216-217**
- separátor, 93-94
- sériové zapojenie – súčin premenných, 155
- Shannon, Claude Elwood, 269
- schéma usudzovania, **4-6, 11-14, 20**
- sieť
- kapacitná, **305**
 - komunikačná, 255, 278
 - , metóda kritickej cesty, **301-305**
 - neurónová, 71, 159, 172
 - počítačová, transportná, 228, 237, 257, 305, 308
 - projektu, 301-305
 - logická, **172**
- sieťová analýza, **302**
- sigmoidová prechodová (alebo aktivačná)
 funkcia, **71**
- silná matematická indukcia, **21**
- silno súvislý graf, **242**
- simplifikácia, **4, 12**
- sito, Eratostenovo, **115-116**
- slabo súvislý graf, **242**
- sled, **237-238, 243**
- uzavretý, **237-238**
- spätne prehľadávanie, do hĺbky (Depth-First Search, DFS), backtracking, **310-311**
- spínací obvod, **155-159**
- spínacia funkcia, **156-157**
- spínač, **155**
- spoj, tlačný, 228, 260
- spor, dôkaz, **16, 22-23**
- spor, zákon, **34**
- stack, zásobník, 310, **311-312, 314, 321**
- stav hry, 288-290, **292, 315**
- stavový priestor hry, **292, 318**
- stena, stupeň (dĺžka oblasti), **262**
- Stirlingova formula, 285
- stĺpcová (riadková) hodnosť, **190**
- stĺpcový vektor, **180-181, 190, 208, 212**
- stred grupy, **142**
- strom, 277-296
- ako model, 277-278
 - algebraického výrazu, **287-288**
 - binárny, **280, 282-283, 286**
 - binárny, prehľadávanie, **282**
 - , hĺbka, **280, 281, 284, 285, 289, 318**
 - konštrukcie permutácií, **90**
 - koreňový, **279-281, 287-288**
 - n -árny, **280**
 - odvodenia, 7-8
 - plne n -árny, **280-281**
 - riešení pre uzavretý eulerovský ťah, 240-241
 - rozhodovací, **283-285, 314**
 - ternárny, **280**
 - usporiadaný koreňový, **280, 282**
 - vyvážený koreňový, **281, 283**
- stupeň steny (dĺžka oblasti), **262**
- stupeň vrcholu, **230-231**
- súčet matíc, **182**
- súčin
- karteziánsky, **42-46, 53-54, 58, 127**
 - matíc, **182, 187**
 - permutácií, 134-135
- súčinová klauzula, **150, 152, 165-166**
- súčtová klauzula, **150, 152**
- suma podmnožín, 317-318
- sumátor binárnych čísel, **161-163**
- susedia, zoznam, **235**
- susedné vrcholy, **230**
- susednosť, matica, **235-236, 243**
- sústava lineárnych rovníc, **205-214, 221-222**
- homogénna, **212-214**
- sústava
- , matica, **205, 208-209, 213**
 - , riešenie, **206-208, 201, 214, 222**
- súvislý graf, **237-243, 262-263, 277, 308**
- sylogizmus
- disjunktívny, **5**
 - hypotetický, **4-5**
- symetrická
- grupa, 133-135, 215
 - matica, **180**
 - relácia, **58, 59-60**
- systém, axiomatický, 2-4, 20

šabl'a Mohamedova, **239**
 špeciálne matice, 179-180
 štruktúry, algebraické, **123-176**
 štvorcová a obdĺžniková matica, **179**

T

tabuľková metóda pre verifikáciu, 35
 ťah, 237
 – eulerovský, **237-238**, 240-241
 – uzavretý, 228, **237**, 238-240
 – uzavretý eulerovský, **238**, 239-241, 247
 tautológia, 5, 9
 teoréma
 – Diracova, **245**
 – Oreho, **245**
 teória, 2, 29, 33, 39, 123, 144, 227
 ternárny strom, **280**
 Theta notácia, **284**
 tlačný spoj, 228, 260
 tok, maximálny v sieti, **305-307**
 torus, 274, 437
 transformácia, **66**, 133, 143, 193
 transformácia stavu akciou, 105, **292**
 transponovaná matica, **179-180**
 tranzitívna relácia, **58**, 60, 63
 trieda ekvivalencie, **61-62**
 triviálna podgrupa, **131**
 trojuholník Pascalov, **81**, 82-83, 85
 trojuholníková matica, **180**
 „trojuholníková“ nerovnosť, **79**, 260
 typ matice, **178**

U

umelá inteligencia, 2, **159**, 290
 univerzálny kvantifikátor
 –, konkretizácia, 11, 12
 –, zovšeobecnenie, 11, 12, 13, 20
 univerzum U , 11-14, **31**, 113
 úrokovanie, zložitý, **101**
 úroveň vrcholu, 186, **280**, 281, 290, 294, 317,
 320
 usporiadanie, 18, 42
 – so spájaním-merge sort, **111-113**

– čiastočné, **62-65**, 167-168
 usporiadaný koreňový strom, **280**
 ústie, 301, 302, 305-306
 usudzovanie, induktívne, **2**, **13**
 usudzovanie, schéma, **4-6**, **11-14**, 20
 uzavretý eulerovský ťah, **238**, 239-241, 247
 uzavretý sled, **237-238**
 uzavretý ťah, 228, **237**, 238-240

V

váha hrany, **257**, **301**
 Vandermonde, Alexandre Théophile, **86**
 Vandermondeova identita, **86**
 variácia, 88
 vektor neznámych, **205**
 vektor pravých strán (vektor konštantných členov), **205**, 209, 212, 222
 vektor, riadkový, 178, **180**, 189-190, 192, 219
 vektor, stĺpcový, **180-181**, 190, 208, 212
 vektory, lineárna kombinácia vektorov, **190**, 192
 vektory, lineárna závislosť, **189-190**, 193, 218-219
 Veľká Fermatova veta, **19**
 veľkosť toku, **305-306**
 Vennove diagramy, 33-34, 43
 Venn, John, **33**
 verifikácia, tabuľková metóda, 35
 veta
 – binomická, **82**
 – Frobeniova, **208**, 212
 – Havlova a Hakimiho, **232**
 – Kuratowského, **263**
 – Lagrangeova, **131**
 – multinomická, **87**
 – o štyroch farbách, **267**
 – o dedukcii, **8**
 – Veľká Fermatova, **19**
 Vizing, Vadim Georgievich, 269
 vlastná podmnožina $A \subset B$, **32**
 vlastnosť konštanty 0, **145**, 147, 148
 vlastnosť konštanty 1, **145**, 147, 148
 vnútorný vrchol, **279-281**

vrchol
– izolovaný, **231**
– vnútorný, **279**
–, stupeň, **230-231**
–, úroveň, 186, **280**, 281, 290, 294, 317, 320
–, vstupný stupeň, **231**, 302
–, výstupný stupeň, **231**, 302
vrcholová nezávislosť, číslo, **269-270**
vrcholy susedné, **230**, 235
vstupný stupeň vrcholu, **231**, 302
vymenovanie prípadov, dôkaz, **17-19**, 57
vymenovanie prvkov, 30
výpočet determinantov, 217, 220-221, 222
výstupný stupeň vrcholu, **231**, 302
vyvážený koreňový strom, **281**, 283
vzdialenosť Hammingova, **165**, 166
vzťah rekurentnej formuly a rekurzcie, 100

W

Wiles, Andrew, 19

X

XOR, exkluzívna disjunkcia, \oplus , 174

Z

zafarbenie hranové, **269**
zákon sporu, **34**
zákon vylúčenia tretieho, **34**
zákony De Morganove, 17, 27, **34**, 113, **144**,
147
zásobník, 310, **311-312**, 314, 321
zátvorkovanie súčinu matíc, **184-187**
zdroj, **301-302**, 305
zjednotenie
– dvoch grafov, **234**, 237
– množín, **32-33**, 38, 40, 46, 54, 113, 124, 144
– relácií, **54**
zložená funkcia, **67-69**
zložité úrokovanie, **101**
zložitosť algoritmu, 100, 108-109, 112, 169,
184, 237, 259, 267, **284**, 295, 309, 310, 319
zložitosť násobenia matíc, 184
zmiešaný graf, 228

zobrazenie
– bijektívne, 71, 88, 133, 137
zovšeobecnenie
– pomocou existenčného kvantifikátora, 11, 14
– pomocou univerzálneho kvantifikátora, 11,
12, 13, 20
– induktívne, **2**, **13**
zoznam susedov, **235**