

## Riešenie cvičení z 2. kapitoly

**Cvičenie 2.1.** Nájdite model pre tieto formuly

(a)  $\psi = p \Rightarrow (q \Rightarrow p)$

$\llbracket \psi \rrbracket = \{0,1\}^2$  (tautológia)

(b)  $\psi = ((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$

$\llbracket \psi \rrbracket = \{0,1\}^3$  (tautológia)

(c)  $\psi = (p \Rightarrow q) \Rightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$

$\llbracket \psi \rrbracket = \{0,1\}^2$  (tautológia)

(d)  $\psi = (p \wedge q) \Rightarrow (p \wedge \neg q)$

$\llbracket \psi \rrbracket = \{\tau_1 = (0,0), \tau_2 = (0,1), \tau_3 = (1,0)\}$  (splniteľná)

(e)  $\psi = p \Rightarrow (q \Rightarrow \neg p)$

$\llbracket \psi \rrbracket = \{\tau_1 = (0,0), \tau_2 = (0,1), \tau_3 = (1,0)\}$  (splniteľná)

(f)  $\psi = (p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r) \Rightarrow (q \vee r)$ .

$\llbracket \psi \rrbracket = \{\tau_1 = (0,0,0), \tau_2 = (0,0,1), \tau_3 = (0,1,0), \tau_4 = (1,0,1), \tau_5 = (0,1,1), \tau_6 = (1,1,0), \tau_7 = (1,1,1)\}$   
(splniteľná)

**Cvičenie 2.2.** Dokážte, že pre teóriu  $\Phi$  a pre formulu  $\varphi$  platí  $\Phi \models \varphi$

(a)  $\Phi = \{p, p \Rightarrow q, q \Rightarrow r\}$ ,  $\varphi = r$ ,

$\llbracket \Phi \rrbracket = \{\tau_1 = (1,1,1)\}$ ,

$\llbracket \varphi \rrbracket = \{\tau_1 = (0,0,1), \tau_2 = (0,1,1), \tau_3 = (1,0,1), \tau_4 = (1,1,1)\}$ ,

platí  $\llbracket \Phi \rrbracket \subset \llbracket \varphi \rrbracket$ , potom  $\Phi \models \varphi$ .

(b)  $\Phi = \{p \Rightarrow (q \Rightarrow r), q\}$ ,  $\varphi = p \Rightarrow r$ ,

$\llbracket \Phi \rrbracket = \{\tau_1 = (0,1,0), \tau_2 = (0,1,1), \tau_3 = (1,1,1)\}$

$\llbracket \varphi \rrbracket = \{\tau_1 = (0,0,0), \tau_2 = (0,0,1), \tau_3 = (0,1,0), \tau_4 = (0,1,1), \tau_5 = (1,0,1), \tau_6 = (1,1,1)\}$

platí  $\llbracket \Phi \rrbracket \subset \llbracket \varphi \rrbracket$ , potom  $\Phi \models \varphi$ .

(c)  $\Phi = \{p, \neg p\}$ ,  $\varphi = q$ ,

$\llbracket \Phi \rrbracket = \emptyset$ ,

$\llbracket \varphi \rrbracket = \{\tau_1 = (0,0), \tau_2 = (1,0)\}$

platí  $\llbracket \Phi \rrbracket \subset \llbracket \varphi \rrbracket$ , potom  $\Phi \models \varphi$ , t. j.  $p \wedge \neg p \Rightarrow q$  (tautológia).

**Cvičenie 2.3.** Zostrojte pre danú teóriu  $\Phi$  formulu  $\varphi$ , ktorá je jej sémantickým dôsledkom

(a)  $\Phi = \{p \Rightarrow q, \neg p \Rightarrow q\}$ ,  $\varphi = q$

(b)  $\Phi = \{p \Rightarrow q \vee r, q\}$ ,  $\varphi = q$

$$(c) \Phi = \{p \Rightarrow q \wedge r, q\}, \quad \varphi = p \Rightarrow p \wedge r$$

$$(d) \Phi = \{p \wedge q \Rightarrow r, p\}, \quad \varphi = q \Rightarrow r,$$

$$(e) \Phi = \{p \vee q \Rightarrow r, p\}, \quad \varphi = r.$$

**Cvičenie 2.4.** Doplňte výsledok u týchto schém usudzovania

$$(1) \frac{p \Rightarrow q}{q}, (2) \frac{p \Rightarrow q}{\emptyset}, (3) \frac{p \Rightarrow q}{\emptyset}, (4) \frac{p \Rightarrow q}{\neg p},$$

$$(5) \frac{\neg p \Rightarrow q}{\emptyset}, (6) \frac{\neg p \Rightarrow q}{\emptyset}, (7) \frac{\neg p \Rightarrow q}{q}, (8) \frac{\neg p \Rightarrow q}{p},$$

$$(9) \frac{p \Rightarrow \neg q}{\neg q}, (10) \frac{p \Rightarrow \neg q}{\neg p}, (11) \frac{p \Rightarrow \neg q}{\emptyset}, (12) \frac{p \Rightarrow \neg q}{\emptyset},$$

$$(13) \frac{\neg p \Rightarrow \neg q}{\emptyset}, (14) \frac{\neg p \Rightarrow \neg q}{p}, (15) \frac{\neg p \Rightarrow \neg q}{\neg q}, (16) \frac{\neg p \Rightarrow \neg q}{\emptyset},$$

**Cvičenie 2.5.** Doplňte výsledok u týchto schém usudzovania

$$(1) \frac{p \Rightarrow q}{q \Rightarrow r}, (2) \frac{p \Rightarrow q}{p \Rightarrow q \wedge r}, (3) \frac{p \Rightarrow q}{r \Rightarrow q}, (4) \frac{p \Rightarrow \neg q}{q \Rightarrow \neg p \wedge r}, (5) \frac{\neg p \Rightarrow q}{q \Rightarrow r}$$

**Cvičenie 2.6.** Overte správnosť/nesprávnosť dôsledkov, v prípade nesprávneho dôsledku upravte predpoklady tak, aby dôsledok bol správny:

(a) Ak motor nebeží, potom je motor chybný alebo nejde prúd.

Ak je motor chybný, potom sa musí zavolať opravár.

Prúd ide.

---

Ak nebeží motor, potom sa musí zavolať opravár.

Elementárne výroky:

$p$  = motor beží,

$q$  = motor je chybný,

$r$  = ide prúd,

$s$  = musí sa zavolať opravár.

1. predpoklad:  $\varphi_1 = (\neg p) \Rightarrow (q \vee \neg r)$

2. predpoklad:  $\varphi_2 = (q \Rightarrow s)$

3. predpoklad:  $\varphi_3 = r$

---

záver:  $\varphi = (\neg p \Rightarrow s)$

1.  $\neg p$  (aktivácia predpokladu)

2.  $(\neg p) \Rightarrow (q \vee \neg r)$  (1. predpoklad)

3.  $q \Rightarrow s$  (2. predpoklad)
4.  $r$  (3. predpoklad)
5.  $(q \vee \neg r) = (r \Rightarrow q)$  (aplikácia modus ponens na 1. a 2.)
6.  $q$  (aplikácia modus ponens na 4. a 5.)
7.  $s$  (aplikácia modus ponens na 3. a 6.)
8.  $\neg p \Rightarrow s$  (deaktivácia predpokladu)

Týmto sme dokázali, že záver je dokázateľný z predpokladov.

(b) Je doma alebo je v kaviarni.

Ak je doma, potom vás očakáva.

Ak vás neočakáva, potom je v kaviarni.

Elementárne výroky:

$p$  = je doma,

$q$  = je v kaviarni,

$r$  = očakáva vás.

1. predpoklad:  $\varphi_1 = (p \vee q)$

2. predpoklad:  $\varphi_2 = (p \Rightarrow r)$

záver:  $\varphi = (\neg r \Rightarrow q)$

1.  $\neg r$  (aktivácia predpokladu)
2.  $p \vee q \Rightarrow (\neg r \Rightarrow q)$  (1. predpoklad)
3.  $p \Rightarrow r$  (2. predpoklad)
4.  $\neg p$  (modus tollens pre 1. a 3.)
5.  $q$  (modus ponens pre 2. a 4.)
6.  $\neg r \Rightarrow q$  (deaktivácia predpokladu)

Týmto sme dokázali, že záver je dokázateľný z predpokladov.

(c) Nie je pravda, že študent vie po nemecky a anglicky.

Študent nevie po anglicky.

Študent nevie po nemecky.

Elementárne výroky:

$p$  = študent vie po nemecky,

$q$  = študent vie po anglicky,

1. predpoklad:  $\varphi_1 = \neg(p \wedge q) = (\neg p \vee \neg q) = (p \Rightarrow \neg q)$

2. predpoklad:  $\varphi_2 = \neg q$

záver:  $\varphi = \neg p$

Záver nie je dokázateľný, ak sa však predpoklady zmodifikujú takto:

Nie je pravda, že študent vie po nemecky a nevie po anglicky.  
Študent nevie po anglicky.

---

Študent nevie po nemecky.

1. predpoklad:  $\varphi_1 = \neg(p \wedge \neg q) = (\neg p \wedge q) = (p \Rightarrow q)$

2. predpoklad:  $\varphi_2 = \neg q$

---

záver:  $\varphi = \neg p$

Záver jednoducho odvodíme aplikáciou modus tollens na 1. a 2.

(d) Ak študujem, získam dobré postavenie.

Ak neštudujem, potom si užívam.

---

Užívam si alebo dosiahnem dobré postavenie.

Elementárne výroky:

$p$  = študujem,

$q$  = získam dobré postavenie,

$r$  = užívam si

1. predpoklad:  $\varphi_1 = p \Rightarrow q$

2. predpoklad:  $\varphi_2 = \neg p \Rightarrow r$

---

záver:  $\varphi = (q \vee r) \equiv (\neg q \Rightarrow r)$

- |    |                                            |                                      |
|----|--------------------------------------------|--------------------------------------|
| 1. | $\neg q$                                   | (aktivovaný predpoklad)              |
| 2. | $p \Rightarrow q$                          | (1. predpoklad)                      |
| 3. | $\neg p \Rightarrow r$                     | (2. predpoklad)                      |
| 4. | $\neg p$                                   | (aplikácia modus tollens na 1. a 2.) |
| 5. | $r$                                        | (aplikácia modus ponens na 3. a 4.)  |
| 6. | $(\neg q \Rightarrow r) \equiv (q \vee r)$ | (deaktivácia predpokladu)            |

Týmto sme dokázali, že záver je dokázateľný z predpokladov.

**Cvičenie 2.7.** Aké sú dôsledky týchto predpokladov:

(a)

Karol pocestuje vlakom alebo autobusom

Ak pocestuje Karol autobusom alebo autom, potom pricestuje neskoro

Karol nepricestoval neskoro

---

?

Riešenie: Karol pricestoval vlakom.

(b)

Karol pocestuje vlakom alebo lietadlom

ak pocestuje lietadlom, potom navštívi priateľov

nenavštívilo priateľov

---

?

Riešenie: Karol pocestuje vlakom.

(c)  
ak pocestujem do zahraničia, potom si zoberiem dovolenku  
ak si zoberiem dovolenku, potom som necestoval do zahraničia  
?

Riešenie: Nepocestujem do zahraničia.

(d)  
nie som občanom štátu XY  
ak by som sa narodil v AB, potom by som bol občanom XY  
?

Riešenie: Nenarodil som sa v AB

(e)  
som absolventom univerzity v PQ  
ak by som bol sociológom, potom nemôžem byť absolventom univerzity v PQ  
?

Riešenie: Nie som sociológom

(f)  
som učiteľom a taktiež som aj informatikom

ak je niekto informatikom, potom má vysoké IQ  
?

(g)  
Jano je informatikom  
ak je Jano informatikom alebo matematikom, potom studoval v CD  
?

Riešenie: Mám vysoké IQ.

