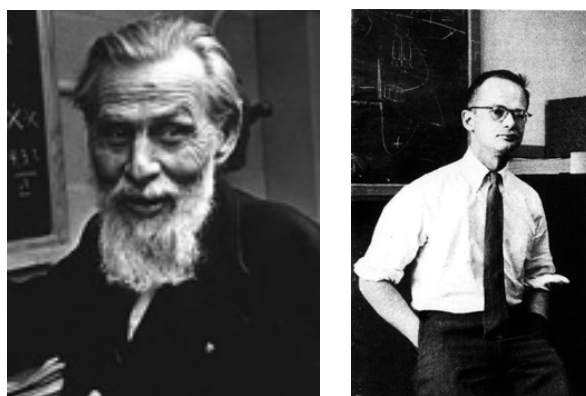


8. kapitola

Logické neuróny a neurónové siete

8.1 Logické neuróny McCullocha a Pittsa

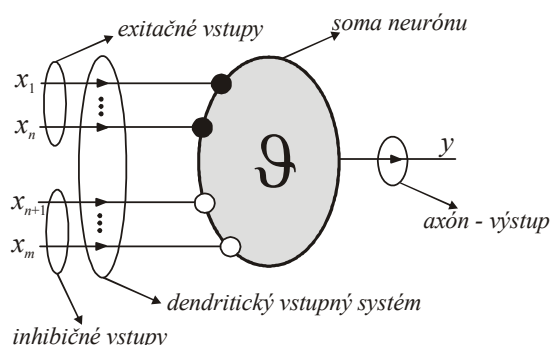
Logické neuróny a neurónové siete [2,3,6,8,9] boli prvý krát študované v publikácii Warrena McCullocha a Waltera Pittsa [5] „*A logical calculus of the ideas immanent to nervous activity*“ z r. 1943, ktorá je medzníkom v rozvoji metafory konekcionizmu v umelej inteligencii a kognitívnej vedy. V tejto práci bolo s geniálnou jasnozrivosťou ukázané, že neurónové siete sú efektívnym výpočtovým prostriedkom v doméne Boolových funkcií, t. j. ľubovoľná Boolova funkcia je simulovaná pomocou neurónovej siete obsahujúcej logické neuróny. Hneď úvodom je potrebné konštatovať, že táto práca McCullocha a Pittsa je veľmi ťažko čitateľná, matematicko-logická časť práce zrejme bola písaná Walterom Pittsom, ktorý bol tak v logike ako aj v matematike autodidaktom. Až zásluhou amerických vedcov, logika S. C. Kleeneho [1] a informatika N. Minskeho [6], táto významná práca bola „preložená“ v druhej polovici 50. rokov minulého storočia do štandardného jazyka súčasnej logiky a matematiky, čím sa stali myšlienky v nej obsiahnuté všeobecne prístupnými a akceptovanými.



Obrázok 8.1. Warren McCulloch (1889 - 1969) a Walter Pitts (1923 - 1969)

Elementárnou jednotkou neurónových sietí je **logický neurón** McCullocha a Pittsa (výpočtová jednotka), pričom stav neurónu je binárny (t. j. má dva stavy, 1 alebo 0). Takýto logický neurón možno interpretovať ako jednoduché elektrické zariadenie - relé. Predpokladajme, že dendritický systém logického neurónu obsahuje tak **excitačné vstupy** (opísané binárnymi premennými x_1, x_2, \dots, x_n , ktoré zosilňujú odozvu), ako aj **inhibičné**

vstupy (opísané binárnymi premennými $x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_m$, ktoré zoslabujú odozvu), pozri obrázok 8.1.



Obrázok 8.1. Znázornenie McCullochovho a Pittsovho neurónu, ktorý obsahuje dendritický systém pre vstupné (excitačné alebo inhibičné) aktivity, axón pre výstup neurónovej aktivity. Soma (telo neurónu) je charakterizovaná prahovým koeficientom Θ .

Aktivita logického neurónu je jednotková, ak *vnútorný potenciál* neurónu definovaný ako rozdiel medzi sumou excitačných vstupných aktivít a inhibičných vstupných aktivít je väčší alebo rovný prahu Θ , v opačnom prípade je nulová

$$y = \begin{cases} 1 & (x_1 + \dots + x_n - x_{n+1} - \dots - x_m \geq -\Theta) \\ 0 & (x_1 + \dots + x_n - x_{n+1} - \dots - x_m < -\Theta) \end{cases} \quad (8.1)$$

Pomocou jednoduchej krokovej funkcie

$$s(\xi) = \begin{cases} 1 & (\xi \geq 0) \\ 0 & (\xi < 0) \end{cases} \quad (8.2a)$$

môžeme aktivitu y vyjadriť takto:

$$y = s \left(\underbrace{x_1 + \dots + x_n - x_{n+1} - \dots - x_m}_{\xi} + \Theta \right) \quad (8.2b)$$

Tento vzťah pre aktivitu logického neurónu môžeme alternatívne interpretovať tak, že excitačné aktivity vstupujú do neurónu cez spoje, ktoré sú ohodnotené jednotkovým váhovým koeficientom ($w = 1$), zatiaľ čo inhibičné aktivity vstupujú do neurónu cez spoje so záporným jednotkovým váhovým koeficientom ($w = -1$). Potom aktivitu logického neurónu môžeme vyjadriť takto

$$y = s \left(\underbrace{w_1 x_1 + \dots + w_m x_m}_{\xi} + \Theta \right) = s \left(\sum_{i=1}^m w_i x_i + \Theta \right) \quad (8.3a)$$

Kde váhové koeficienty w_{ij} sú definované takto

$$w_{ij} = \begin{cases} 1 & (\text{spoj } j \rightarrow i \text{ má excitačný charakter}) \\ -1 & (\text{spoj } j \rightarrow i \text{ má inhibičný charakter}) \\ 0 & (\text{spoj } j \rightarrow i \text{ neexistuje}) \end{cases} \quad (8.3b)$$

V neurónovej sieti váhové koeficienty sú fixne a sú určené topológiou syntaktického stromu špecifikujúceho Boolovu funkciu.

Jednoduchá implementácia elementárnych Boolových funkcií disjunkcie, konjunkcie, implikácie a negácie je znázornená na obrázok 8.2. Ako ilustratívny príklad študujme funkciu disjunkcie pre $n = 2$, použitím formúl z definície logického neurónu dostaneme

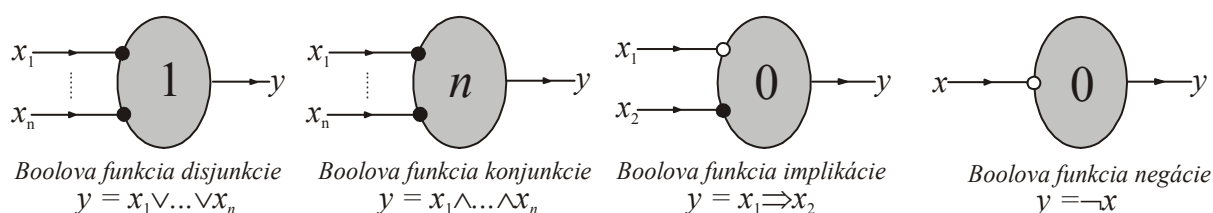
$$y_{OR}(x_1, x_2) = s(x_1 + x_2 - 1) \quad (8.4)$$

Funkčné hodnoty tejto Boolovej funkcie sú ukázané v tabuľke 8.1.

Tabuľka 8.1. Binárna Boolova funkcia disjunkcie

#	x_1	x_2	$y_{OR}(x_1, x_2)$	$x_1 \vee x_2$
1	0	0	$s(-1)$	0
2	0	1	$s(0)$	1
3	1	0	$s(0)$	1
4	1	1	$s(1)$	1

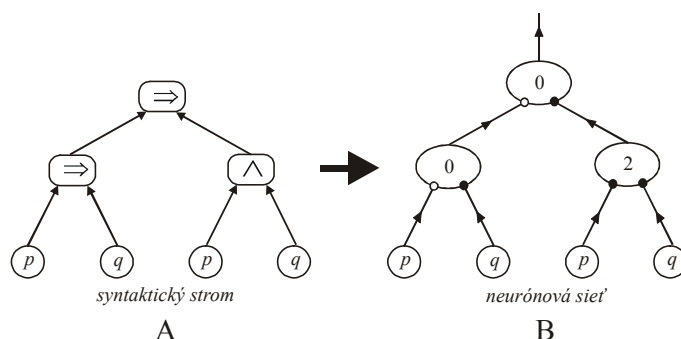
Z tabuľky vyplýva, že Boolova funkcia y_{OR} simuluje Boolovu funkciu disjunkcie.



Obrázok 8.2. Tri realizácie logických neurónov na implementáciu Boolových funkcií disjunkcií, konjunkcií a negácie. Excitačné spoje sú znázornené plným krúžkom, inhibičné prázdny krúžkom. Pre Boolovej funkcie implikácie je použité vetvenie excitačnej aktivity na dva vstupy, to znamená, že táto excitačná aktivita je započítaná dvakrát v (4.4) pre výpočte výstupnej aktivity neurónu.

8.2 Neurónové siete

Každá Boolova funkcia (pozri kap. 1.3) je reprezentovaná pomocou syntaktického stromu, ktorý reprezentuje jej rekurentnú výstavbu inicializovanú Boolovými premennými a končiacu danou Boolovou funkciou (funkciou výrokovej logiky), pozri obrázok 8.3, diagram A. Syntaktický strom je dôležitý keď hľadáme podformuly danej formuly, každý uzol stromu špecifikuje podformulu: najnižšie položené uzly reprezentujú triviálne podformuly p a q , nasledujúce dva vrcholy reprezentujú podformuly $p \Rightarrow q$ a $p \wedge q$, najvyššie položený vrchol – koreň stromu – reprezentuje samotnú formulu $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \wedge q)$.



Obrázok 8.3. (A) Syntaktický strom Boolovej funkcie (výrokovej formuly) $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \wedge q)$. Koncové vrcholy stromu reprezentujú Boolove premenné (výrokové premenné) p a q , vrcholy z nasledujúcich vrstiev sú priradené spojкам implikácie a konjunkcie. Vyhodnocovanie tohto stromu prebieha postupne zdola nahor. (B) Neurónová sieť obsahujúca logické neuróny spojok, ktoré sa vyskytujú v príslušnom syntaktickom strome diagramu A. Vidíme, že medzi syntaktickým stromom a príslušnou neurónovou sieťou existuje veľmi tesná

previazanosť, ich topológia je identická, odlišujú sa len vo vrcholoch. Obrazne môžeme povedať, že neurónovú sieť pre Boolovu funkciu ϕ zostrojíme pomocou jej syntaktického stromu tak, že vrcholy zo syntaktického stromu, ktoré reprezentujú logické spojky, nahradíme príslušnými logickými neurónmi, koreň syntaktického stromu je zamenený.

Pomocou syntaktického stromu ľahko zostrojíme neurónovú sieť tak, že jednotlivé vrcholy reprezentujúce Boolove elementárne funkcie (logické spojky) nahradíme príslušnými logickými neurónmi podľa obrázku 8.2. Na obrázku 8.3 je znázornená táto konštrukcia neurónovej siete pre formulu $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \wedge q)$. Tento postup konštrukcie neurónovej siete zosumarizujeme pomocou nasledujúcej vety.

Veta 8.1. Každá Boolova funkcia môže byť vyjadrená pomocou „neurónovej siete“ zloženej z logických neurónov vyjadrujúcich logické spojky.

Táto veta patrí medzi základné výsledky slávnej práce McCullocha a Pittsa [5], kde bolo ukázané, že pomocou niekoľkých jednoduchých logických neurónov je možné zostrojiť neurónovú sieť, ktorá simuluje ľubovoľnú Boolovu funkciu. Môžeme teda hovoriť o tom, že neurónové siete s logickými neurónmi majú univerzálny charakter v doméne Boolových funkcií, vyššie naznačený konštruktívny postup reprezentuje všeobecne platnú metódu pre zostrojenie neurónovej siete, ktorá simuluje Boolove funkcie.

Ako už bolo spomenuté v úvodnej časti tejto kapitoly bolo naznačené, že použitie techniky váhových koeficientov umožňuje formálne zjednodušiť teóriu logických neurónov, potom nie je potrebné a-priori odlišovať excitačné a inhibičné vstupy do neurónu. Aktivita i -teho neurónu v neurónovej sieti je vyjadrená zovšeobecnenou formulou

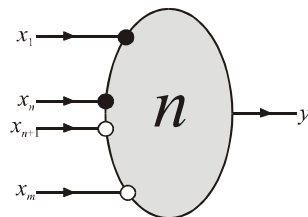
$$x_i = t \left(\sum_j w_{ij} x_j + \theta_i \right) \quad (8.5)$$

kde sumácia prebieha nad všetkými neurónmi, ktoré v neurónovej sieti predchádzajú i -ty neurón. Váhové koeficienty w_{ij} sú definované takto

$$w_{ij} = \begin{cases} 1 & (\text{spoj } j \rightarrow i \text{ má excitačný charakter}) \\ -1 & (\text{spoj } j \rightarrow i \text{ má inhibičný charakter}) \\ 0 & (\text{spoj } j \rightarrow i \text{ neexistuje}) \end{cases} \quad (8.6)$$

To znamená, že v neurónovej sieti váhové koeficienty sú fixne a dané a sú určené topológiou syntaktického stromu špecifikujúceho Boolovu funkciu.

Architektúra neurónovej siete, ktorá je zostrojená pre danú Boolovu funkciu môže byť podstatne zjednodušená na tzv. 3-vrstvovú neurónovú sieť, t. j. obsahuje vrstvu vstupných neurónov (ktoré len kopírujú vstupné aktivity, nie sú výpočtovými jednotkami), vrstva skrytých neurónov a posledná vrstva obsahujúca výstupný neurón. Táto architektúra je minimalistická a už zrejme nemôže byť zjednodušená. Ukážeme ako zostrojiť takúto neurónovú sieť pre danú Boolovu funkciu.



Obrázok 8.4. Logický neurón, ktorý simuluje konjunktívnu klauzulu, ktorá obsahuje konjunkciu konečného prvku výrokových premenných alebo ich negácií, $y = x_1 \wedge \dots \wedge x_n \wedge \neg x_{n+1} \wedge \dots \wedge \neg x_m$.

Jednoduchým zovšeobecnením logických spojok možno ukázať, že logický neurón je schopný simulovať aj Boolovu funkciu, ktorá obsahuje konjunkcie premenných alebo ich negácií, $x_1 \wedge \dots \wedge x_n \wedge \neg x_{n+1} \wedge \dots \wedge \neg x_m$, pozri obrázok 8.4. Táto Boolova funkcia sa rovná 1 len pre $x_1 = \dots = x_n = 1$ a $x_{n+1} = \dots = x_m = 0$, vo všetkých ostatných pravdivostných kombináciách argumentov jej hodnota je 0 (nepravdivý výrok)

$$val_{\tau}(x_1 \wedge \dots \wedge x_n \wedge \neg x_{n+1} \wedge \dots \wedge \neg x_m) = \begin{cases} 1 & (\text{pre } \tau = \tau_0) \\ 0 & (\text{pre } \tau \neq \tau_0) \end{cases} \quad (8.7)$$

kde $\tau_0 = (x_1/1, \dots, x_n/1, x_{n+1}/0, \dots, x_m/0)$ je špecifikácia pravdivostných hodnôt premenných. Ľahko sa presvedčíme o tom, že táto klauzula je simulovaná logickým neurónom znázorneným na obr. 2.3. jeho výstupná aktivita je určená formulou

$$y = s(x_1 + \dots + x_n - x_{n+1} - \dots - x_m - n) \quad (8.8a)$$

Funkčná hodnota tejto funkcie sa rovná 1 vtedy, ak

$$x_1 + \dots + x_n - x_{n+1} - \dots - x_m \geq n \quad (8.8b)$$

Táto podmienka je dosiahnutá len vtedy, keď prvých n vstupných (excitačných) aktivít sa rovná 1 a ďalších $(m-n)$ vstupných (inhibičných) aktivít sa rovná 0.

Tabuľka 8.2. Zadanie funkčných hodnôt Boolovej funkcie.

#	x_1	x_2	x_3	$y = f(x_1, x_2, x_3)$	klauzula
1	0	0	0	0	-
2	0	0	1	0	-
3	0	1	0	1	$\neg x_1 \wedge x_2 \wedge \neg x_3$
4	0	1	1	1	$\neg x_1 \wedge x_2 \wedge x_3$
5	1	0	0	0	-
6	1	0	1	1	$x_1 \wedge \neg x_2 \wedge x_3$
7	1	1	0	0	-
8	1	1	1	0	-

V teórii Boolových funkcií je dokázana dôležitá vlastnosť Boolových funkcií, podľa ktorej každá Boolova funkcia môže byť prepísaná do ekvivalentného disjunktívneho tvaru (pozri kap. 1.5)

$$\varphi = \bigvee_{\substack{\tau \\ (val_{\tau}(\varphi)=1)}} x_1^{(\tau)} \wedge x_2^{(\tau)} \wedge \dots \wedge x_n^{(\tau)} \quad (8.9a)$$

kde

$$x_i^{(\tau)} = \begin{cases} x_i & (\text{ak } val_{\tau}(x_i) = 1) \\ \neg x_i & (\text{ak } val_{\tau}(x_i) = 0) \end{cases} \quad (8.9b)$$

Ako ilustračný príklad použitia tejto vlastnosti, študujme Boolovu funkciu, ktorej funkčné hodnoty sú zadané tabuľkou 8.2. V tejto tabuľke v riadkoch 3, 4 a 6 sú jednotkové funkčné hodnoty (Boolova funkcia je pre tieto tri hodnoty premenných pravdivá), v poslednom stĺpci sú uvedené v týchto riadkoch aj príslušné klauzuly zostrojene pomocou (8.9b). Použitím (8.9a) dostaneme „analytický“ tvar Boolovej funkcie určenej len tabuľkou jej funkčných hodnôt

$$y = f(x_1, x_2, x_3) = (\bar{x}_1 \wedge x_2 \wedge \bar{x}_3) \vee (\bar{x}_1 \wedge x_2 \wedge x_3) \vee (x_1 \wedge \bar{x}_2 \wedge x_3) \quad (8.10)$$

Táto Boolova funkcia môže byť zjednodušená tak, že prvá a druhá klauzula sa zjednodušia

$$(\bar{x}_1 \wedge x_2 \wedge \bar{x}_3) \vee (\bar{x}_1 \wedge x_2 \wedge x_3) = \bar{x}_1 \wedge x_2 \wedge \underbrace{(\bar{x}_3 \vee x_3)}_1 = \bar{x}_1 \wedge x_2 \quad (8.11)$$

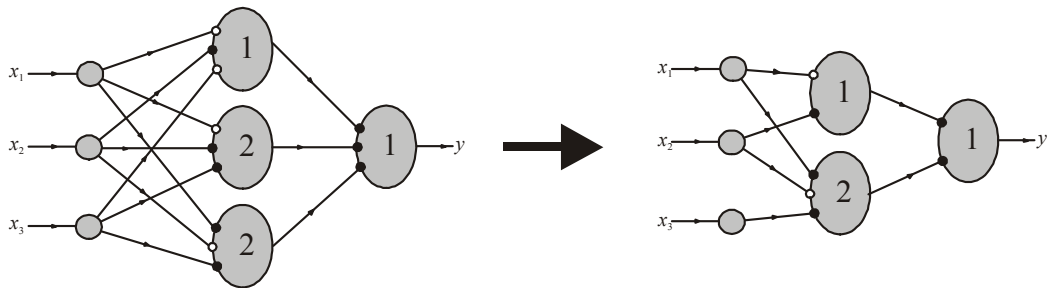
Potom

$$y = f(x_1, x_2, x_3) = (\bar{x}_1 \wedge x_2) \vee (x_1 \wedge \bar{x}_2 \wedge x_3) \quad (8.12)$$

Klauzule $x_1^{(\tau)} \wedge x_2^{(\tau)} \wedge \dots \wedge x_n^{(\tau)}$ môžeme vyjadriť jedným logickým neurónom, pozri obr. 8.4. Výstupy z týchto neurónov spojíme do disjunkcie pomocou neurónu reprezentujúceho disjunkciu (pozri obr. 8.2). Potom neurónová sieť, reprezentujúca Boolovu funkciu (2.10) má tvar znázornený na obr. 8.5.

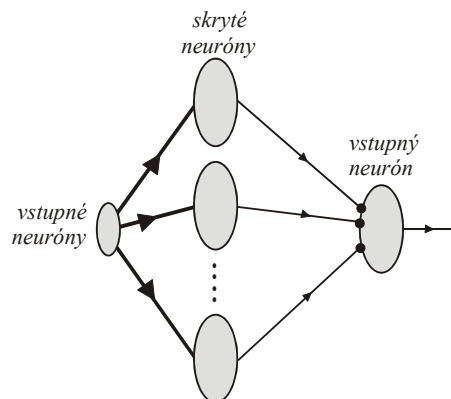
Výsledky z tohto ilustračného príkladu sú zosumarizované pomocou tejto vety.

Veta. 8.2. *Lubovoľná Boolova funkcia f je simulovaná pomocou 3-vrstvovej neurónovej siete.*



Obrázok 8.5. Trojvrstvová neurónová sieť, ktorá simuluje Boolovu funkciu zadanú primárne Tab. 8.2, z ktorej je zostrojený pomocou formule (8.9) ja „analytický“ tvar (8.10). Skryté neuróny reprezentujú jednotlivé klauzuly z Tab. 8.2, ich disjunkcia je realizovaná pomocou výstupného neurónu. Táto neurónová sieť môže byť zjednodušená tak, že prvé dve klauzule sa spoja do jednej jednoduchšej klauzule, pozri (8.7-7).

Všeobecný tvar 3-vrstvovej neurónovej siete je znázornený na obr. 8.6.

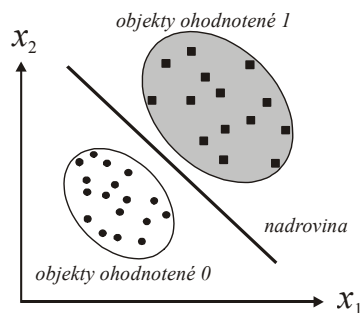


Obrázok 8.6. Schématické znázornenie 3-vrstvovej neurónovej siete. Idúc zľava doprava, prvá je vstupná vrstva obsahujúca vstupné neuróny, ktoré nie sú výpočtové elementy, ale len formálne reprezentujú vstupné aktivity. Druhá vrstva obsahuje skryté neuróny, ktoré reprezentujú jednotlivé klauzule danej Boolovej funkcie. Tretia (posledná) vrstva obsahuje výstupný neurón, ktorý vykonáva disjunkciu aktivít zo skrytých neurónov.

Poznamenajme, že podľa vety 8.2 3-vrstvové neurónové siete obsahujúce logické neuróny sú *univerzálne výpočtové zariadenia* pre doménu Boolových funkcií. Tento výsledok predznačil moderný výsledok neurónových sietí z prelomu 80. a 90. rokov minulého storočia,

podľa ktorého trojvrstvové dopredné neurónové siete so spojenou aktivačnou funkciou (1.1) majú vlastnosť univerzálneho aproximátora. Navyše, pretože dôkaz vety bol konštruktívny, poznáme jednoduchý postup, ako túto sieť systematickým spôsobom zostrojiť pre ľubovoľnú Boolovu funkciu.

Môžeme si položiť otázku, aké Boolove funkcie je schopný logický neurón vyjadriť [6]? Táto otázka sa dá pomerne jednoducho vyriešiť pomocou geometrickej interpretácie výpočtu prebiehajúceho v logickom neuróne. Výpočtová funkcia logického neurónu rozdeľuje priestor vstupov na dva polpriestory pomocou roviny $w_1x_1 + w_2x_2 + \dots + w_nx_n = \vartheta$, pre koeficienty $w_i = 0, \pm 1$. Hovoríme, že Boolova funkcia $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ je *lineárne separovateľná*, ak existuje taká rovina $w_1x_1 + w_2x_2 + \dots + w_nx_n = \vartheta$, ktorá separuje priestor vstupných aktivít tak, že v jednej časti priestoru sú vrcholy ohodnotené 0, zatiaľ čo v druhej časti priestoru sú vrcholy ohodnotené 1 (pozri obr. 2.6).



Obrázok 8.8. Schematické znázornenie pojmu lineárnej separovateľnosti, kde okrúhle a štvorcové objekty sú separované nadrovinou $w_1x_1 + \dots + w_nx_n - \vartheta = 0$ tak, že v jednom polopriestore sú objekty jedného druhu, zatiaľ čo v druhom polopriestore sú objekty druhého druhu.

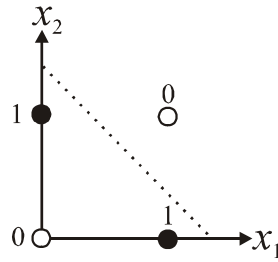
Veta 8.3. *Logický neurón je schopný simulovať len tie Boolove funkcie, ktoré sú lineárne separovateľné.*

Klasický príklad Boolovej funkcie, ktorá nie je lineárne separovateľná, je výroková spojka exkluzívna disjunktia, ktorá je formálne definovaná ako negácia ekvivalencie $(x \oplus y) \Leftrightarrow \neg(x \equiv y)$, v informatickej literatúre sa obvykle označuje ako Boolova funkcia *XOR*, $\varphi_{XOR}(x, y) = x \oplus y$, jej funkčné hodnoty sú uvedené v tab. 8.3.

Tabuľka 8.3. Boolova funkcia XOR

#	x	y	$\varphi_{XOR}(x, y)$
1	0	0	0
2	0	1	1
3	1	0	1
4	1	1	0

Ak si jej funkčné hodnoty vynesieme do stavového priestoru $x - y$ dostaneme obr. 2.7, z ktorého jasne vyplýva, že táto funkcia nie je lineárne separovateľná.

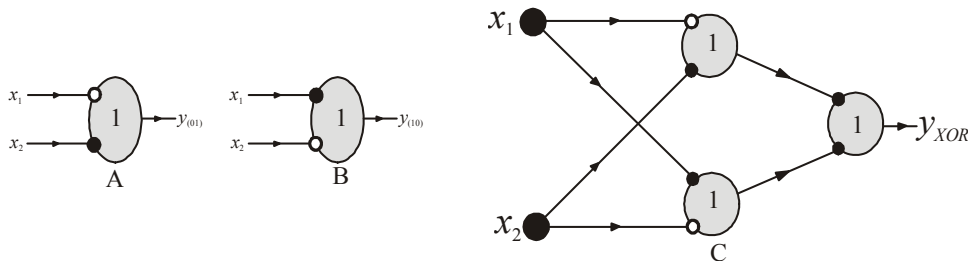


Obrázok 8.8. Znáročenie objektov Boolovej funkcie XOR v stavovom priestore jej argumentov. Z obrázku jasne plynie, že neexistuje priamka, ktorá by separovala celú rovinu na dve polroviny tak, že objekty (otvorené krúžky) s ohodnotením 0 budú v jednej polrovine, zatiaľ čo objekty s ohodnotením 1 (čierne krúžky) budú v druhej polrovine.

Použitím techniky z predchádzajúcej časti tejto kapitoly, zostrojíme neurónovú sieť, ktorá simuluje túto elementárnu lineárne neseparovateľnú Boolovu funkciu. Pomocou Tab. 8.3. zostrojíme jej ekvivalentnú funkciu pomocou klauzúl

$$\Phi_{XOR}(x_1, x_2) = (\neg x_1 \wedge x_2) \vee (x_1 \wedge \neg x_2) \quad (8.13)$$

Potom neurónová sieť zostrojená pomocou tejto funkcie má tvar znázorený na obr. 8.9.

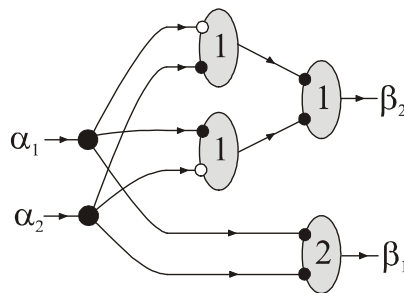


Obrázok 8.9. Diagramy A a B znázorňujú jednotlivé klauzuly z formuly (8.13). Diagram C reprezentuje 3-vrstvovú neurónovú sieť, ktorá ako skryté neuróny obsahuje neuróny z diagramu A a B, výstupný neurón reprezentuje disjunkciu výstupných aktivít zo skrytých neurónov.

Príklad 8.1. Zostrojme neurónovú sieť, ktorá simuluje sčítanie dvoch binárnych čísiel:

$$\begin{array}{r} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \hline \beta_1 \beta_2 \end{array}$$

kde jednotlivé binárne premenné výsledku – sumy sú určené takto: $\beta_2 = \alpha_1 \oplus \alpha_2$ a $\beta_1 = \alpha_1 \wedge \alpha_2$. Druhú výstupnú premennú β_2 prepíšeme do disjunktívnej formy $\beta_2 = (\neg \alpha_1 \wedge \alpha_2) \vee (\alpha_1 \wedge \neg \alpha_2)$, príslušná neurónová sieť je znázorená na obrázku 8.10.



Obrázok 8.10. Neurónová sieť vykonávajúca súčet dvoch binárnych čísiel.

V predchádzajúcej časti tejto kapitoly bolo ukázané, že samotné logické neuróny sú schopné korektné klasifikovať len lineárne separovateľné Boolove funkcie. Toto podstatné obmedzenie logických neurónov môže byť odstránené pomocou logických neurónov vyšších rádo [6], ktorých aktivita je určená zovšeobecnením formuly (2.3) o členy vyšších rádo

$$y = s \left(\underbrace{\sum_{i=1}^n w_i x_i + \sum_{\substack{i,j=1 \\ (i < j)}}^n w_{ij} x_i x_j + \dots + \vartheta}_{\xi} \right) \quad (8.14)$$

Ak vnútorný potenciál neurónu ξ je určený len ako lineárna kombinácia vstupných aktivít (t.j. len prvou sumou), potom logický neurón je štandardný a nazýva sa "logický neurón prvého rádu". Ak tento potenciál neurónu ξ obsahuje aj kvadratické a prípadne aj ďalšie členy, potom sa nazýva "logický neurón vyššieho rádu". Podľa Minského a Paperta [6] platí nasledujúca veta, ktorá hovorí o tom, že perceptróny vyššieho rádu sú schopné simulovať aj množiny objektov, ktoré nie sú lineárne separovateľné.

Veta 8.4. Ľubovoľná Boolova funkcia f je simulovaná logickým neurónom vyššieho rádu.

Táto veta hovorí o tom, že každá Boolova funkcia môže byť simulovaná logickým neurónom vyššieho rádu, existujú také váhové koeficienty a prah, že pre každú špecifikáciu premenných x_1, x_2, \dots, x_n vypočítaná binárna aktivita sa rovná požadovanej hodnote.

Príklad 8.2. Ako ilustračný príklad vety študujme Boolovu funkciu XOR , ktorá nie je lineárne separovateľná a ktorej funkčné hodnoty sú uvedené v tabuľke 4.1. Nech aktivita logického neurónu je určená pomocou kvadratického potenciálu (čiže sa jedná o logický neurón druhého rádu)

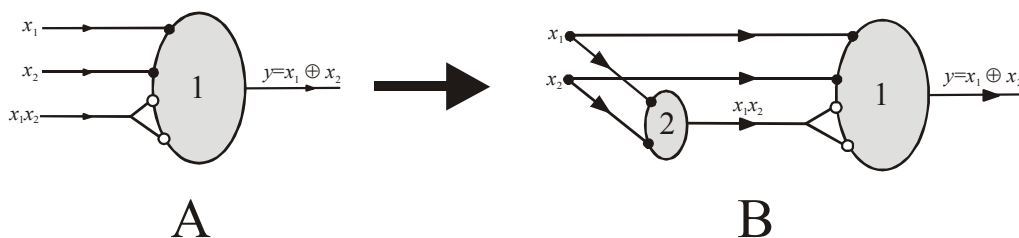
$$y = s \left(\underbrace{w_1 x_1 + w_2 x_2 + w_{12} x_1 x_2}_{\xi} - \vartheta \right) \quad (8.15)$$

Pre jednotlivé riadky tabuľky 2.3 funkcie XOR platí

$$\begin{aligned} -\vartheta &< 0 \\ w_2 &- \vartheta \geq 0 \\ w_1 &- \vartheta \geq 0 \\ w_1 + w_2 + w_{12} - \vartheta &< 0 \end{aligned} \quad (8.16)$$

Postupným riešením týchto nerovnic dostaneme, že váhové koeficienty a prah majú napr. takéto riešenie

$$\vartheta = 1, w_1 = w_2 = 1, w_{12} = -2 \quad (8.17)$$

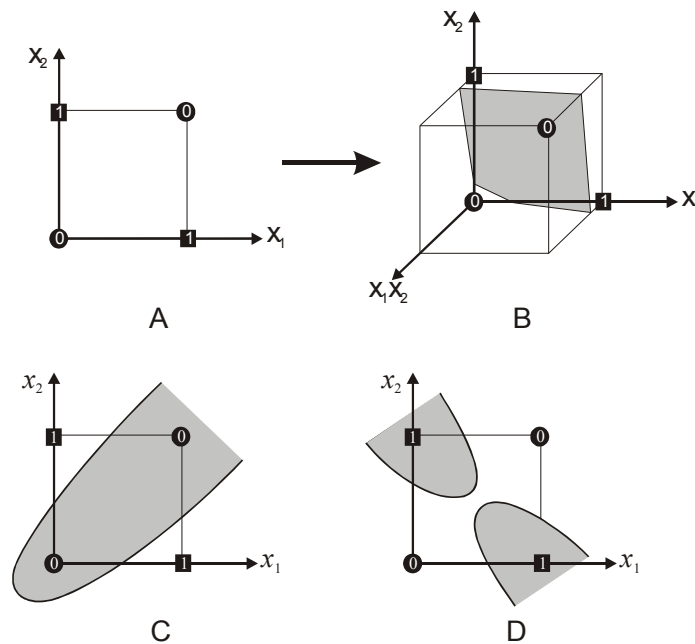


Obrázok 8.8. (A) Znáznorenie logického neurónu druhého rádu simulujúceho funkciu XOR , kde excitačné vstupné aktivity sú binárne premenné x_1 a x_2 , inhibičná aktivita je priradená premennej druhého rádu $x_1 x_2$. Výstupná aktivita z je určená pomocou krokovej funkcie, $z = s(x_1 + x_2 - 2x_1 x_2 - 1)$, priamou verifikáciou sa

presvedčíme, že simuluje funkciu XOR . Na záver poznamenajme, že "vidlička" inhibičného vstupu znamená, že vstupná aktivita je počítaná dvakrát. (C) Transformácia logického neurónu druhého rádu, ktorý implementuje spojku XOR (diagram A), na neurónovú sieť, ktorá obsahuje len logické neuróny prvého rádu (diagram B). Táto transformácia je založená na výpočte súčinu x_1x_2 pomocou logického neurónu pre spojku konjunkcie, výstup z tohto neurónu je potom dvojnásobný inhibičný vstup do pravého neurónu. Táto architektúra je asi najjednoduchšou neurónovou sieťou, ktorá implementuje spojku XOR pomocou logických neurónov prvého rádu (porovnaj s obr. 8.9).

V tomto ilustračnom príklade bolo ukázané, že lineárne neseparovateľná binárna spojka disjunkcie s vylúčením (XOR) je implementovateľná pomocou logického neurónu, ktorý má tri vstupy pre x_1 , x_2 a x_1x_2 . V tejto súvislosti sa vynára otázka výpočtu súčinu x_1x_2 , ktorý však môže byť jednoducho vykonaný pomocou spojky konjunkcie, $x_1x_2 = x_1 \wedge x_2$. Ak táto operácia bude uskutočnená pomocou logického neurónu pre konjunkciu (pozri obr. 8.7, diagram B), potom môžeme vytvoriť jednoduchú sieť obsahujúcu len dva neuróny, pričom na vstupe máme len vstupné aktivity x_1 a x_2 .

Výsledky tohto príkladu 8.2 ukávajú, že logický neurón druhého rádu je schopný korektne klasifikovať Boolovu funkcia XOR , ktorá je lineárne neseparovateľná v 2-rozmernom fázovom priestore x_1-x_2 , ale je už lineárne separovateľná v 3-rozmernom fázovom priestore $x_1-x_2-x_1x_2$, pozri obr. 8.8.



Obrázok 8.8. Diagramatická reprezentácia Boolovej funkcie XOR . (A) Ak je funkcia XOR reprezentovaná v 2-rozmernom stavovom priestore x_1-x_2 , objekty s jednotkovou klasifikáciou nie sú lineárne separovateľné od objektov s nulovou klasifikáciou. (B) Ak znázorníme XOR funkciu v 3-rozmernom fázovom priestore $x_1-x_2-x_1x_2$, potom existuje v tomto priestore nadrovina, ktorá navzájom separuje objekty s rôznou klasifikáciou. Priemet tejto nadroviny do roviny poskytuje kvadratickú čiaru, ktorá separuje objekty, pozri diagramy C a D.

Pojem lineárnej separovateľnosti Boolových funkcií je ľahko zovšeobecniteľný na kvadratickú (kubicú, ...) separovateľnosť pomocou kvadratickej (kubickej, ...) nadplochy.

Definícia 8.1. Boolova funkcia f sa nazýva *kvadraticky separovateľná*, ak existujú také váhové koeficienty w_i , w_{ij} a prahový faktor ϑ , že pre každú špecifikáciu premenných x_1, x_2, \dots, x_n platí

$$\begin{aligned}
y_{req}(x_1, x_2, \dots, x_n) = 1 &\Rightarrow \sum_{i=1}^n w_i x_i + \sum_{\substack{i,j=1 \\ (i < j)}}^n w_{ij} x_i x_j \geq \theta \\
y_{req}(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 &\Rightarrow \sum_{i=1}^n w_i x_i + \sum_{\substack{i,j=1 \\ (i < j)}}^n w_{ij} x_i x_j < \theta
\end{aligned}
\tag{8.18}$$

8.3 Konštrukcia binárnych obvodov

Logické neuróny môžu byť použité na konštrukciu jednoduchých binárnych obvodov [4,7], ich kombináciou môžeme zostrojiť už zložité zariadenia, akými sú napr. rôzne sčítačky, násobičky a podobne.

8.3.1 Časový posunovač

Časový posunovač je taký binárny obvod, ktorý posunie tok signálu o niekoľko vopred zvolených jednotiek. Študujme jednoduchý obvod znázornený na obr. 2.7, diagram A, ktorý realizuje posun o jednotku (jednotkový posunovač). Aktivitu neurónu v čase t môžeme vyjadriť takto

$$y^{(t)} = t(x^{(t-1)} - 1) \tag{8.19}$$

Vstupný signál v čase t sa transformuje na výstupný signál v čase $t+1$

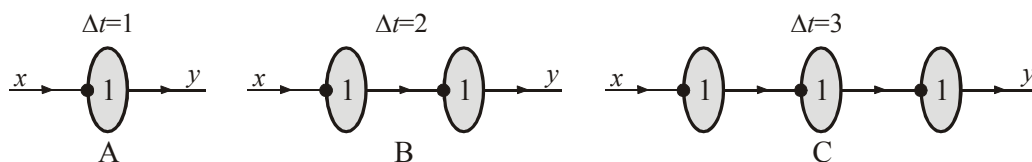
$$\begin{aligned}
x^{(t)} = 0 &\Rightarrow y^{(t+1)} = t(-1) = 0 \\
x^{(t)} = 1 &\Rightarrow y^{(t+1)} = t(0) = 1
\end{aligned}
\tag{8.20}$$

Nech sekvencie (dĺžky 10) vstupných signálov má tvar (00700071), potom výstupný symbol má tvar sekvencie (dĺžky 7) (#00700071), kde prvý znak # je prázdny znak, pretože v počiatočnom čase $t = 1$ nevieme špecifikovať výstupný signál, pozri Tab. 8.4

Tabuľka 8.4. Vstupná a výstupná sekvencia pre jednotkový časový posunovač

čas	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	7	7
vstup x	0	0	1	1	0	0	0	1	1	1
výstup y	#	0	0	1	1	0	0	0	1	1	1	..

Sériovým zapojením jednotkových posunovačov dostaneme posunovače o dve, tri, .. časové jednotky, pozri diagramy B a C na obr. 8.8.

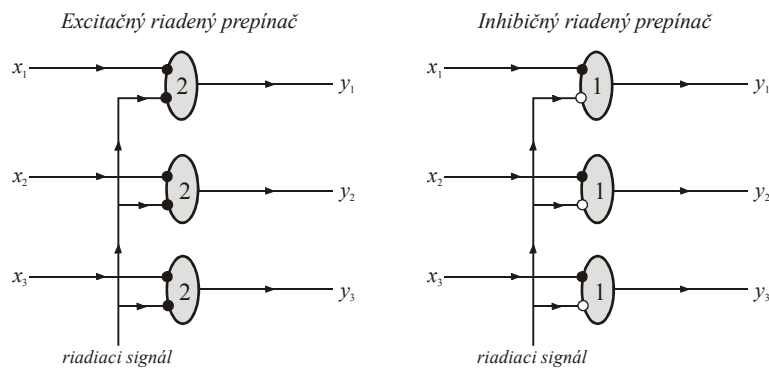


Obrázok 8.8. Neurónové siete realizujúce posun vstupného signálu o 1, 2 a 3 jednotky.

8.3.2 Riadený prepínač

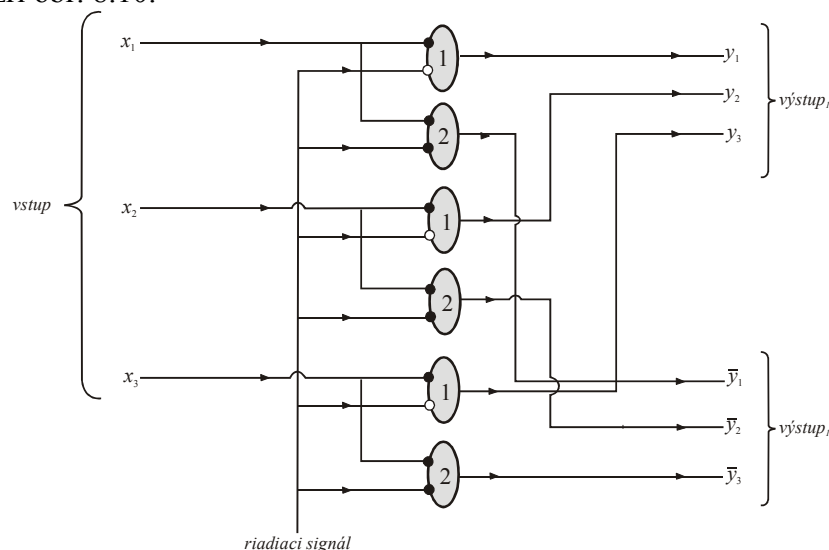
Riadený prepínač pomocou riadiaceho signálu zapína alebo vypína tok signálu. Tak ak v excitačnom riadenom prepínači je riadiaci signál jednotkový, potom prepínač prepúšťa

signál na výstup prepínača. V alternatívnom prípade, pre inhibične riadený prepínač, nulový riadiaci signál spôsobuje prenos signálu na výstup. Tieto dva prepínače sú znázornené na obr. 8.9.



Obrázok 8.9. Znázornenie neurónových sietí, ktoré sú excitačný resp. inhibičný riadiaci prepínač.

Kombináciou excitačného a inhibičného prepínača zostrojíme riadené rozdeľovacie zariadenie, pozri obr. 8.10.



Obrázok 8.10. Neurónová sieť riadeného rozdeľovacieho zariadenia. Ak riadiaci signál je jednotkový (nulový), potom vstup je riadený na 1. výstup (2.výstup). Obrázne môžeme povedať, že riadiaci signál pôsobí ako „prepínač“ do 1. alebo 2. polohy.

8.3.3 Sumátor dvoch binárnych čísel

Sumátor binárnych čísel rieši úlohu sčítania dvoch binárnych čísel – reťazcov rovnakej dĺžky

$$\begin{array}{r} 110011 \\ 101010 \\ \hline 1011101 \end{array}$$

Realizácia tohto problému sa môže uskutočniť úplne analogický procesu sčítania dvoch dekadických čísel, t. j. musíme používať techniku prenosu „zostatku“ (angl. *carry*) do nasledujúcej polohy. Tento princíp si vysvetlíme na všeobecnom príklade

$$\begin{array}{r} \alpha_n \dots \alpha_2 \alpha_1 \\ \beta_n \dots \beta_2 \beta_1 \\ \hline \gamma_{n+1} \gamma_n \dots \gamma_2 \gamma_1 \end{array} \quad (8.21)$$

sčítania dvoch binárnych čísel $\alpha_n \dots \alpha_2 \alpha_1$ a $\beta_n \dots \beta_2 \beta_1$ dĺžky n . Zostatok δ_i je rekurentne definovaný takto:

$$\delta_1 = 0 \quad (8.22a)$$

$$\delta_2 = \begin{cases} 1 & (\text{ak } \alpha_1 + \beta_1 = 2) \\ 0 & (\text{ináč}) \end{cases} \quad (8.22b)$$

$$\delta_{i+1} = \begin{cases} 1 & (\text{ak } \alpha_i + \beta_i + \delta_i \geq 2) \\ 0 & (\text{ak } \alpha_i + \beta_i + \delta_i \leq 1) \end{cases} \quad (i = 2, 3, \dots, n) \quad (8.22c)$$

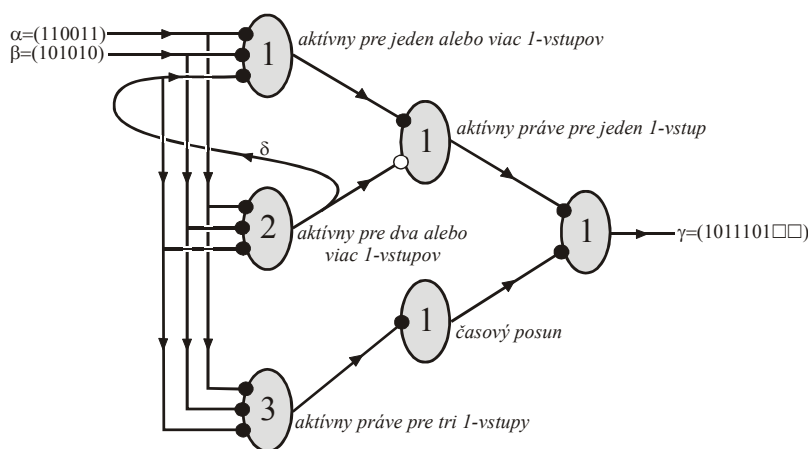
kde (8.22a-b) je inicializácia postupného výpočtu zostatkov. Pre ilustračný príklad zo začiatku tejto podkapitoly zostatky sú špecifikované binárnym reťazcom dĺžky 7 tvaru $\delta = 1000100$. Schému (8.21) prepíšeme do nového tvaru

$$\begin{array}{r} \alpha_n \dots \alpha_2 \alpha_1 \\ \beta_n \dots \beta_2 \beta_1 \\ \hline \delta_{n+1} \delta_n \dots \delta_2 \delta_1 \\ \hline \gamma_{n+1} \gamma_n \dots \gamma_2 \gamma_1 \end{array} \quad (8.23)$$

Potom výsledok $\gamma = \gamma_{n+1} \dots \gamma_2 \gamma_1$ je určený vzťahmi

$$\gamma_i = \begin{cases} 1 & (\text{ak } \alpha_i + \beta_i + \delta_i = 1 \vee 3) \\ 0 & (\text{ak } \alpha_i + \beta_i + \delta_i = 0 \vee 2) \end{cases} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (8.24a)$$

$$\gamma_{n+1} = \delta_{n+1} \quad (8.24b)$$



Obrázok 8.11. Neurónová sieť sumátora dvoch binárnych čísel, ktorá obsahuje šesť prahových neurónov.

Príklad zo začiatku tejto podkapitoly môže byť prepísaný do tvaru

$$\begin{array}{r} 110011 \\ 101010 \\ 1000100 \\ \hline 1011101 \end{array}$$

kde výsledný reťazec bol určený formulami (2.32). Jednotlivé kroky z tohto príkladu sú rozpísané takto:

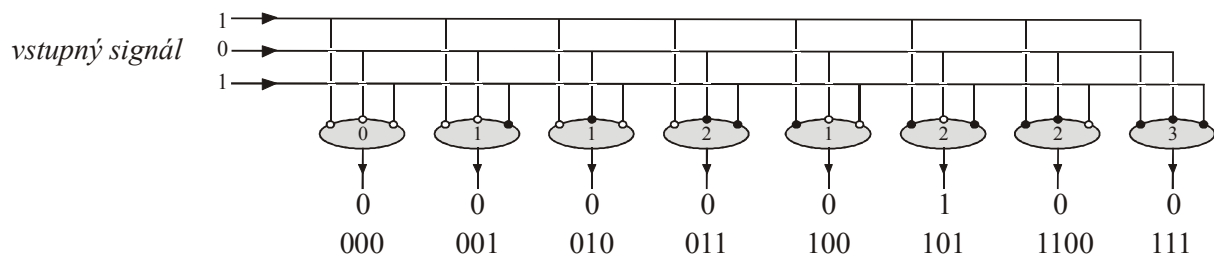
$$0. \text{ krok.} \quad \delta_1 = 0$$

1. krok. $\alpha_1 = 1, \beta_1 = 0, \delta_2 = 0, \boxed{\gamma_1 = 1}$
2. krok. $\alpha_2 = 1, \beta_2 = 0, \delta_3 = 1, \boxed{\gamma_2 = 0}$
3. krok. $\alpha_3 = 0, \beta_3 = 0, \delta_4 = 0, \boxed{\gamma_3 = 1}$
4. krok. $\alpha_4 = 0, \beta_4 = 1, \delta_5 = 0, \boxed{\gamma_4 = 1}$
5. krok. $\alpha_5 = 1, \beta_5 = 0, \delta_6 = 0, \boxed{\gamma_5 = 1}$
6. krok. $\alpha_6 = 1, \beta_6 = 1, \delta_7 = 1, \boxed{\gamma_6 = 0}$
7. krok. $\alpha_7 = 0, \beta_7 = 0, \boxed{\gamma_7 = 1}$

Implementácia sumátora je znázornená na obr. 8.11.

8.3.4 Binárny paralelný dekodér

Budeme študovať paralelný dekodér pre tri binárne číslíce. Predpokladáme, že informácia do dekodéra prichádza prostredníctvom impulzov cez tri paralelne vlákna, pozri obr. 8.12. Dekodér obsahuje osem nezávislých elementov – neurónov, z ktorých každý dekóduje jednu možnú binárnu kombináciu prichádzajúcich signálov.



Obrázok 8.12. Binárny paralelný dekodér, ktorý obsahuje osem prahových neurónov, ktoré dekódujú separátne vstupný signál od kombinácie 000 až po kombináciu 111.

8.4 Záver

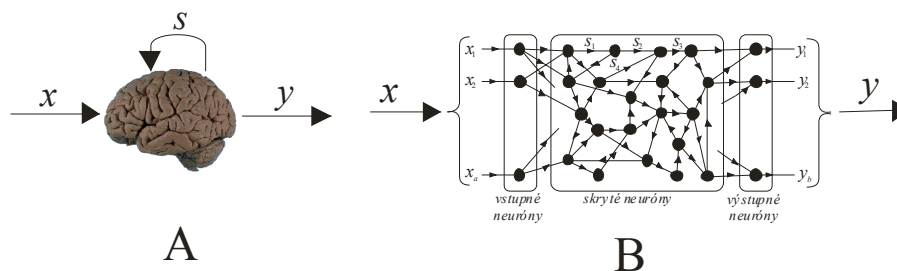
Neurónové siete zložené z logických neurónov sú univerzálnym aproximátorom Boolových funkcií (t. j. každá Boolova funkcia môže byť ňou reprezentovaná). Podstatným ohraničením logických neurónov je, že klasifikujú len Boolove funkcie, ktoré sú lineárne separovateľné. Bolo ukázané prave McCullochom a Pittsom, že toto ohraničenie logického neurónu je prekonané neurónovými sieťami. Druhá alternatívna možnosť, ako prekonať toto ohraničenie lineárnej separovateľnosti, sú logické neuróny vyššieho rádu, ktoré navrhli Minski a Pappert [6]. Tieto vlastnosti logického neurónu môžeme sumarizovať tak, že tieto sú univerzálnym výpočtovým zariadením v doméne Boolových funkcií,

Ďalší, nemenej zaujímavý aspekt neurónových sietí obsahujúcich logické neuróny je skutočnosť, že poskytujú informatický a výpočtový pohľad na vzťah medzi myslou a mozgom (známy filozofický problém „mysel – telo“ alebo „duša –telo“ problém, ktorý vo filozofii patrí medzi centrálné problémy). Práve, moderná neuroveda, prostredníctvom neurónových sietí (v najjednoduchšom priblížení vyjadrených pomocou logických neurónov) ponúka vedecké riešenie tohto problému:

Neurovedný pohľad umelej inteligencie a kognitívnej vedy na komplex mozog–mysleť je založený na predpoklade, že mozog je mohutný paralelný počítač, ktorý transformuje vstupné údaje x (produkované zrakom, sluchom, čuchom a pod.) na motorické impulzy y

(pričom táto transformácia je závislá od vnútorného stavu s (pozri obr. 8.8, diagram A). Táto neurovedná interpretácia mozgu na mikroskopickej (neurálnej) úrovni neumožňuje priame štúdium vyšších kognitívnych aktivít (riešenie problémov, porozumenie ľudskej reči, a pod.). Nechcem týmto povedať, že je to principiálne nemožné, je to možné, ale je to veľmi ťažkopádne a komplikované. Je to podobné tomu, ako keby sme chceli študovať makroskopickú vlastnosť vody "povrchové napätie" metódami kvantovej mechaniky. Samozrejme, že túto veličinu môžeme študovať aj takto na "mikroskopickej" úrovni, ale je to tak numericky ako aj teoreticky veľmi náročné. Podstatne jednoduchší je fenomenologický prístup založený na makroskopickej termodynamike, kde dostaneme pre túto veličinu pomerne jednoduchú formulu obsahujúcu jednoduché experimentálne verifikovateľné údaje. Podobná situácia existuje aj v teórii mozgu-mysle. Neurálny prístup je vhodný na štúdium elementárnych kognitívnych aktivít (napr. prvotné spracovanie vizuálnej informácie zo sietnice oka). Vyššie kognitívne aktivity mozgu sú študované na symbolickej úrovni, založeného na predstave, že *ľudský mozog je počítač*, ktorý pracuje podľa týchto princípov (ktoré tvoria základ tzv. *symbolickej paradigmy*), ktorý

- (1) transformuje symboly pomocou syntaktických pravidiel na iné symboly, pričom
- (2) myšlienky sú symbolické reprezentácie implementované pomocou jazyka myslenia, a
- (3) mentálne procesy sú kauzálne sekvencie symbolov generované syntaktickými pravidlami.



Obrázok 8.8. (A) Kybernetická interpretácia mozgu ako „zariadenia“, ktoré transformuje vstup x na výstup y , pričom táto transformácia je ovplyvnená vnútorným stavom s . Touto špecifikáciou mozgu môžeme dostať dve rôzne odozvy y_1 a y_2 na rovnaký vstup x . (B) Konekcionistický (neurálny) model mozgu pomocou neurónovej siete, ktorá obsahuje (1) vstupné neuróny (napr. perцепčné neuróny retiny oka), (2) skryté neuróny, na ktorých prebieha transformácia vstupu na výstup a (3) výstupné neuróny (napr. neuróny riadiace motorické aktivity). Aktivity skrytých neurónov tvoria vnútorný stav neurónovej siete, rôzne počiatkové nastavenie týchto aktivít zapríčiňujú rôznu odozvu na rovnaké vstupné aktivity x .

Použitie termínu „počítač“ obvykle evokuje predstavu sekvenčného počítača von neumannovskej architektúry (napr. personálne počítače majú túto architektúru), kde je možné striktné oddeliť hardware od software; kde na tom istom počítači – hardware môže byť vykonávaných nepreberné množstvo rozdielnych programov – softwarov. Pre tieto von neumannovské počítače existuje striktná dichotómia medzi počítačom a programom – t. j. medzi hardwarem a softwarom. Žiaľ, paradigma mysle ako počítača implikuje u mnohých ľudí predstavu, že je možné oddeliť mozog od mysle, ako dva „nezávislé“ fenomény, kde mozog hrá úlohu hardware, zatiaľ čo myseľ je software (vykonávaný na hardware – mozgu).

Obráťme našu pozornosť na moderný neurovedný prístup k chápaniu vzťahu medzi mozgom a myšliou [12], ktorý je založený na neurovednom chápaní mozgu ako mohutnej neurónovej siete, ktorá obsahuje približne 1 miliardu neurónov, pričom tieto neuróny sú masívne pospájané s inými neurónmi (približne jeden neurón ma 1000 jednosmerných synaptických spojov - konexií s inými neurónmi), Mozog môže byť teda chápaný ako mohutný paralelný počítač, ktorého výpočtové jednotky sú neurónmi s extrémne jednoduchou výpočtovou prahovou aktivitou (verbálne vyjadrenou vetou - víťaz berie všetko). Možno

konštatovať, že schopnosť mozgu vykonávať nielen kognitívne aktivity, ale byť aj pamäťou, je plne zakódovaná do jeho architektúry.

Na základe týchto neurovedných poznatkov bazálneho charakteru môžeme konštatovať, že počítačové paradigma ľudského mozgu sa musí formulovať tak, že mozog je paralelne distribuovaný počítač (obsahujúci obrovské množstvo neurónov, elementárnych procesorov, ktoré sú medzi sebou poprepájané do zložitej neurónovej siete). Program v tomto paralelnom počítači je priamo zabudovaný do architektúry neurónovej siete, t. j. *ľudský mozog je jednúčelový paralelný počítač reprezentovaný neurónovou sieťou*, ktorý nie je možné preprogramovať bez zmeny jeho architektúry. Z týchto všeobecných úvah vyplýva, že myseľ s mozgom tvoria jeden integrálny celok; myseľ v tomto prístupe sa chápe ako program vykonávaný mozgom, avšak tento program je špecifikovaný architektúrou distribuovanej neurónovej siete reprezentujúcej mozog. Mozog a myseľ tvoria dva rôzne pohľady na ten istý objekt:

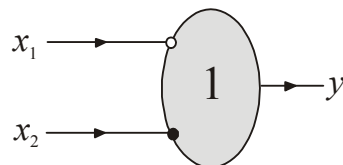
- (1) Keď hovoríme o mozgu, myslíme tým „hardwarovú“ štruktúru, biologicky realizovanú neurónmi a ich synaptickými spojkami (formálne reprezentovanú neurónovou sieťou), v opačnom prípade,
- (2) keď hovoríme o mysli, myslíme tým kognitívne a iné aktivity mozgu, realizované výpočtami neurónovej siete reprezentujúcej mozog.

Na záver tejto kapitoly poznamenajme, že logické neuróny McCullocha a Pittsa majú v informatike, umelej inteligencii a kognitívnej vede mimoriadne postavenie, sú nielen univerzálnym aproximátorom v doméne Boolovych funkcií (umožňujú realizovať jednoduchú syntézu elektronických zariadení pre realizáciu štandardných binárnych operácií, ktoré sa opakované mnohokrát vyskytujú pri návrhu počítačov, čoho si prvý všimol von Neumann [10,11]), ale majú význam až "filozofický", tvoria prirodzenú teóriu pre interpretáciu mozgu ako paralelného výpočtového zariadenia a riešenia problému vzťahu medzi myseľou a mozgom.

Cvičenia

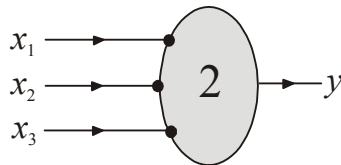
Cvičenie 8.1. Dokážte, že logické neuróny znázornené na obr. 8.2 simulujú uvedené Boolove funkcie.

Cvičenie 8.2. Zistite akú výrokovú spojku (Boolovu funkciu) reprezentuje logický neurón

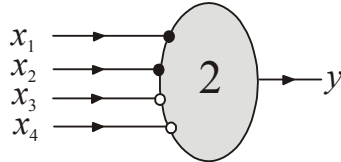


Cvičenie 8.3 Zostrojte neurónovú sieť ekvivalencie pomocou jej disjunktívnej normálnej formy, $(p \equiv q)_{NDF} = (\neg p \wedge \neg q) \vee (p \wedge q)$.

Cvičenie 8.4. Zistite akú Boolovu funkciu reprezentuje logický neurón



Cvičenie 8.5. Zistite akú Boolovu funkciu reprezentuje logický neurón



Cvičenie 8.6. Zostrojte neurónovú sieť, ktorá simuluje Boolovu funkciu. $(\beta_1, \beta_2) = f(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ definovanú pomocou súčtu troch binárnych čísiel

$$\begin{array}{r} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \hline \beta_1 \beta_2 \end{array}$$

Cvičenie 8.7. Zostrojte 3-vrstvovú doprednú neurónovú sieť, ktorá simuluje Boolovu funkciu $\varphi(p, q, r) = (p \equiv q) \Rightarrow (p \wedge q \wedge r)$

Cvičenie 8.8. Zostrojte 3-vrstvovú doprednú neurónovú sieť, ktorá simuluje Boolovu funkciu špecifikovanú tabuľkou

#	p	q	r	f
1	0	0	0	0
2	0	0	1	0
3	0	1	0	0
4	0	1	1	1
5	1	0	0	1
6	1	0	1	1
7	1	1	0	0
8	1	1	1	1

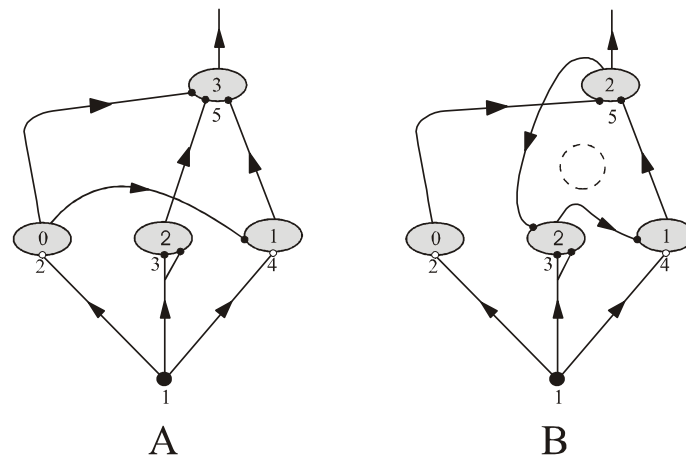
Cvičenie 8.9. Zostrojte tabuľku všetkých možných binaárnych Boolovych funkcií tvaru $y = f(x_1, x_2)$ a zistite ktoré z nich sú lineárne separovateľné a ktoré nie sú lineárne separovateľné.

Cvičenie 8.10. Nech Boolova funkcia je špecifikovaná tabuľkou

#	p	q	r	f
1	0	0	0	0
2	0	0	1	0
3	0	1	0	0
4	0	1	1	1
5	1	0	0	0
6	1	0	1	1
7	1	1	0	0
8	1	1	1	0

Zostrojte neurón tretieho rádu, ktorý simuluje túto Boolovu funkciu.

Cvičenie 8.11. Pre časové elementy $1 \leq t \leq 10$ zostrojte tabuľku aktivít jednotlivých neurónov znázornených na obrázku, pričom v čase $t = 1$ aktivity sú zadané takto: $x^{(1)} = (1, 0, 0, 1)$.



Cvičenie 8.12. Zostrojte neurónovú sieť, ktorá simuluje Boolovu funkciu. $(\beta_1, \beta_2) = f(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ definovanú pomocou súčtu a súčinu troch binárnych čísiel

$$(\alpha_1 + \alpha_2) \times \alpha_3 = \beta_1 \beta_2$$

Literatúra

- [1] Kleene, S. C.: Representation of events in nerve nets and finite automata. In Shannon, C. E., McCarthy, J. (eds.): *Automata Studies. Annals of Mathematics Studies*, Vol 34. Princeton University Press, Princeton, 1956, pp. 3-41.
- [2] Kvasnička, V., Beňušková, E., Pospíchal, J., Farkaš, I., Tiňo, P., Král, A.: *Úvod do teórie neurónových sietí*. IRIS, Bratislava, 1997).
- [3] Kvasnička, V., Pospíchal, J.: Konekcionizmus a modelovanie kognitívnych procesov. In Rybár, J., Beňušková, E., Kvasnička, V.: *Kognitívne vedy*. Kalligram, Bratislava, 2002
- [4] Kvasnička, V., Pospíchal, J.: *Matematická logika*. Vydavateľstvo STU, Bratislava, 2006.
- [5] McCulloch, W. S., Pitts, W. H.: A Logical Calculus of the Ideas Immanent in nervous Activity. *Bulletin of Mathematical Biophysics* **5**(1943), 115 – 133.
- [6] Minsky, M. and Papert, S.: *Perceptrons. An Introduction to Computational Geometry*. MIT Press, Cambridge, MA, 1969.
- [7] Minsky, M. L.: *Computation. Finite and Infinite Machines*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1968.
- [8] Rojas, R.: *Neural Networks. A Systematic Introduction*. Springer, Berlin, 1996.
- [9] Šíma, J., Neruda, R.: *Teoretické otázky neurónových sítí*. Matfyzpress, Praha, 1999.
- [10] von Neumann, J.: *The Computer and the Brain*. Yale University Press, New Haven, CO, 1958.
- [11] von Neumann, John: First Draft of a Report on the EDVAC, 1945. Retrieved October 1, 2012 from <http://qss.stanford.edu/~godfrey/vonNeumann/vnedvac.pdf>,

- [12] Thagard, P.: *Úvod do kognitivní vědy. Mysl a myšlení*. Nakladatelství Portál, Praha, 2001
(anglický originál *Mind. Introduction to Cognitive Science*, MIT Press, Cambridge,
MA, 1998)