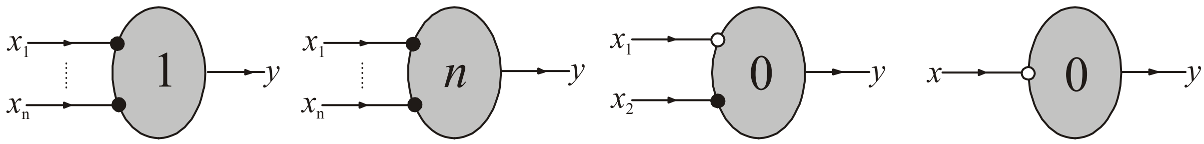
Cvičenia

Cvičenie 8.1. Dokážte, že logické neuróny znázornené na obr. 8.2 simulujú uvedené Boolove funkcie.

Obr. 8.2 obsahuje štyri rôzne typy logických neurónov, ktoré simulujú elementárne Boolove funkcie.



Boolova funkcia disjunkcie $y = x_1 \vee \ldots \vee x_n$ *Boolova funkcia konjunkcie* $y = x_1 \wedge \ldots \wedge x_n$ *Boolova funkcia implikácie* $y = x_1 \Rightarrow x_2$ *Boolova funkcia negácie* $y = \neg x$

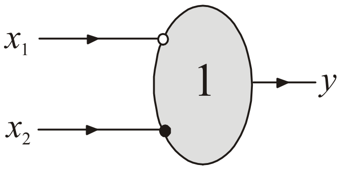
(a) $y = s\left(x_1 + x_2 + \ldots + x_n - 1\right) = \begin{cases} 1 & \left(x_1 = 1 \vee \ldots \vee x_n = 1\right) \\ 0 & \left(x_1 = 0 \wedge \ldots \wedge x_n = 0\right) \end{cases}$

(b) $y = s\left(x_1 + x_2 + \ldots + x_n - n\right) = \begin{cases} 1 & \left(x_1 = 1 \wedge \ldots \wedge x_n = 1\right) \\ 0 & \left(x_1 = 0 \vee \ldots \vee x_n = 0\right) \end{cases}$

(c) $y = s\left(-x_1 + x_2\right) = \begin{cases} 0 & \left(x_1 = 1 \wedge x_2 = 0\right) \\ 1 & \left(x_1 = 0 \vee x_2 = 1\right) \end{cases}$

(d) $y = s\left(-x\right) = \begin{cases} 0 & \left(x_1 = 1\right) \\ 0 & \left(x_1 = 1\right) \end{cases}$

Cvičenie 8.2. Zistite akú výrokovú spojku (Boolovu funkciu) reprezentuje logický neurón

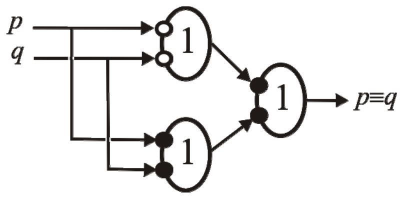


$$y = s\left(-x_1 + x_2 - 1\right) = \begin{cases} 1 & \left(-x + x_2 - 1 \geq 0\right) \\ 0 & \left(-x + x_2 - 1 < 0\right) \end{cases}$$

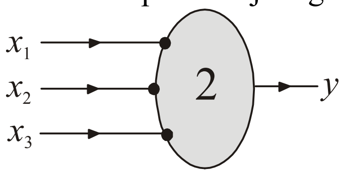
x_1	x_2	$\boldsymbol{y}$
0	**0**	**0**
0	**1**	**1**
1	**0**	**0**
1	**1**	**0**

$$y_{DNF} = \bar{x}_1 x_2 = \neg\left(\neg x_2 \vee x_1\right) = \neg\left(x_2 \Rightarrow x_1\right)$$

Cvičenie 8.3 Zostrojte neurónovú sieť ekvivalencie pomocou jej disjunktívnej normálnej formy, $\left(p \equiv q\right)_{NDF} = \left(\neg p \wedge \neg q\right) \vee \left(p \wedge q\right)$.



Cvičenie 8.4. Zistite akú Boolovu funkciu reprezentuje logický neurón

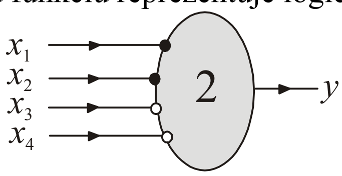


$$y = s\left(x_1 + x_2 + x_3 - 2\right) = \begin{cases} 1 & \left(x_1 + x_2 + x_3 - 2 \geq 0\right) \\ 0 & \left(x_1 + x_2 + x_3 - 2 < 0\right) \end{cases}$$

#	x_1	x_2	x_3	y
1	0	0	0	0
2	0	0	1	0
3	0	1	0	0
4	0	1	1	1
5	1	0	0	0
6	1	0	1	1
7	1	1	0	1
8	1	1	1	1

$$y_{DNF} = \overline{x}_1 x_2 x_3 + x_1 \overline{x}_2 x_3 + x_1 x_2 \overline{x}_3 + x_1 x_2 x_3 = x_2 x_3 + x_1 x_3 + x_1 x_2$$

Cvičenie 8.5. Zistite akú Boolovu funkciu reprezentuje logický neurón



$$y = s\left(x_1 + x_2 - x_3 - x_4 - 2\right) = \begin{cases} 1 & \left(x_1 + x_2 - x_3 - x_4 - 2 \geq 0\right) \\ 0 & \left(x_1 + x_2 - x_3 - x_4 - 2 < 0\right) \end{cases}$$

#	x_1	x_2	x_3	x_4	y
1	0	0	0	0	0
2	0	0	0	1	0
3	0	0	1	0	0
4	0	0	1	1	0
5	0	1	0	0	0
6	0	1	0	1	0
7	0	1	1	0	0
8	0	1	1	1	0
9	1	0	0	0	0
10	1	0	0	1	0
11	1	0	1	0	0
12	1	0	1	1	0

13	1	1	0	0	1
14	1	1	0	1	0
15	1	1	1	0	0
16	1	1	1	1	0

$$y_{DNF} = x_1 x_2 \overline{x}_3 \overline{x}_4$$

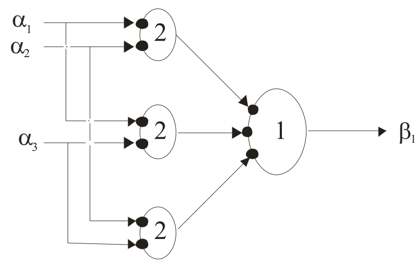
Cvičenie 8.6. Zostrojte neurónovú sieť, ktorá simuluje Boolovu funkciu. $(\beta_1, \beta_2) = f(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ definovanú pomocou súčtu troch binárnych číslic

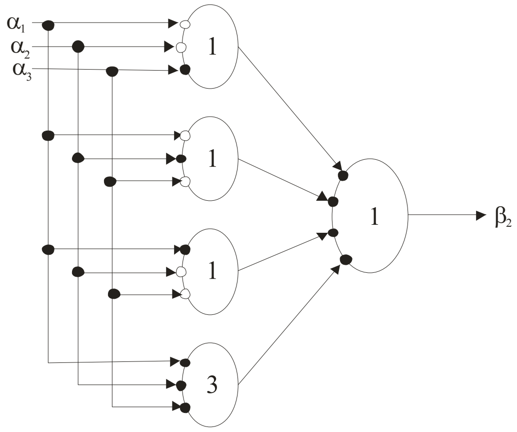
$$\begin{array}{r} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \hline \beta_1\,\beta_2 \end{array}$$

#	α_1	α_2	α_3	β_1	β_2
1	0	0	0	0	0
2	0	0	1	0	1
3	0	1	0	0	1
4	0	1	1	1	0
5	1	0	0	0	1
6	1	0	1	1	0
7	1	1	0	1	0
8	1	1	1	1	1

$$\beta_1 = \overline{\alpha}_1\alpha_2\alpha_3 + \alpha_1\overline{\alpha}_2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_2\overline{\alpha}_3 + \alpha_1\alpha_2\alpha_3 = \alpha_2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_1\alpha_2$$

$$\beta_2 = \overline{\alpha}_1\overline{\alpha}_2\alpha_3 + \overline{\alpha}_1\alpha_2\overline{\alpha}_3 + \alpha_1\overline{\alpha}_2\overline{\alpha}_3 + \alpha_1\alpha_2\alpha_3$$





Cvičenie 8.7. Zostrojte 3-vrstvovú doprednú neurónovú sieť, ktorá simuluje Boolovu funkciu $\varphi(p,q,r)=(p\equiv q)\Rightarrow(p\wedge q\wedge r)$

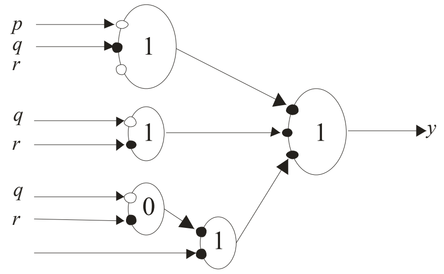
#	p	q	r	$p\equiv q$	$p\wedge q\wedge r$	y
1	0	0	0	1	0	0
2	0	0	1	1	0	0
3	0	1	0	0	0	1
4	0	1	1	0	0	1
5	1	0	0	0	0	1
6	1	0	1	0	0	1
7	1	1	0	1	0	0
8	1	1	1	1	1	1

$$\varphi_{DNF}=\overline{p}q\overline{r}+\overline{p}\overline{q}r+p\overline{q}\,\overline{r}+p\overline{q}r+pqr$$

$\overline{p}q\overline{r}$ $\overline{p}\overline{q}r$ $p\overline{q}\overline{r}$ $p\overline{q}r$ pqr

$\overline{q}r$ $p\overline{q}$ pr

$$\varphi_{DNF}=\overline{p}q\overline{r}+\overline{q}r+p\overline{q}+pr=\overline{p}q\overline{r}+\overline{q}r+p\left(\overline{q}+r\right)=\overline{p}q\overline{r}+\overline{q}r+p\left(q\Rightarrow r\right)$$



Cvičenie 8.8. Zostrojte 3-vrstvovú doprednú neurónovú sieť, ktorá simuluje Boolovu funkciu špecifikovanú tabuľkou

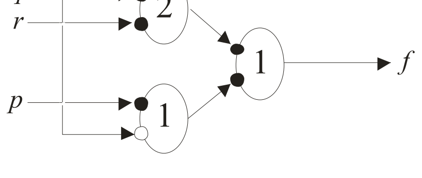
#	p	q	r	f
1	0	0	0	0
2	0	0	1	0
3	0	1	0	0
4	0	1	1	1
5	1	0	0	1
6	1	0	1	1
7	1	1	0	0
8	1	1	1	1

$$f=\overline{p}qr+p\overline{q}\,\overline{r}+p\overline{q}r+pqr$$

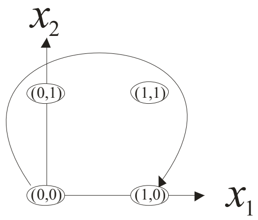
$\overline{p}qr$ $p\overline{q}\overline{r}$ $p\overline{q}r$ pqr

qr $p\overline{q}$

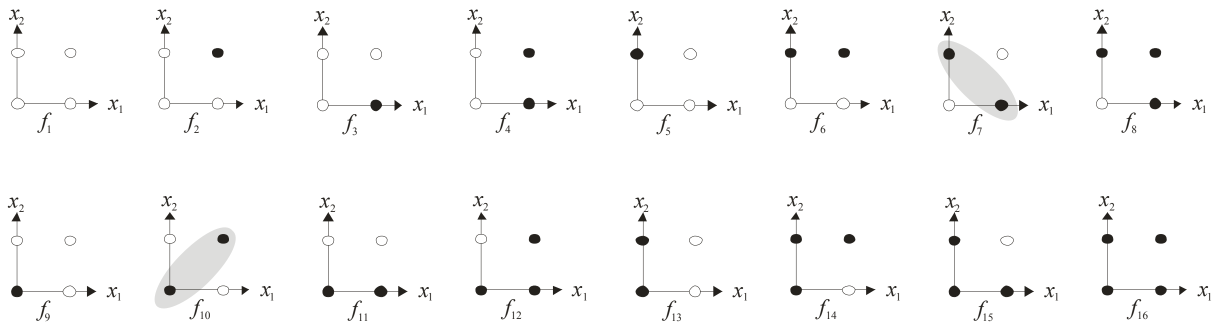
$$f=qr+p\overline{q}$$



Cvičenie 8.9. Zostrojte tabuľku všetkých možných binárnych Boolovych funkcií tvaru $y = f\left(x_1, x_2\right)$ a zistite ktoré z nich sú lineárne separovateľné a ktoré nie sú lineárne separovateľné.



#	x_1	x_2	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}	f_{16}
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
2	0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
3	1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
4	1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1



Funkcie f_7 a f_9 nie sú lineárne separovateľné.

Cvičenie 8.10. Nech Boolova funkcia je špecifikovaná tabuľkou

#	p	q	r	f
1	0	0	0	0
2	0	0	1	0
3	0	1	0	0
4	0	1	1	1
5	1	0	0	0
6	1	0	1	1
7	1	1	0	0
8	1	1	1	0

Zostrojte neurón tretieho rádu, ktorý simuluje túto Boolovu funkciu.

$$y = s\left(w_1 p + w_2 q + w_3 r + w_{12} pq + w_{13} pr + w_{23} qr + w_{123} pqr - \vartheta\right)$$

Váhové koeficienty určíme tak, aby platili výstupné hodnoty y pre rôzna vstupné hodnoty

(1) (000,0) $y = s\left(-\vartheta\right) = 0 \Rightarrow \vartheta = 2$

(2) (001,0) $y = s\left(w_3 - \vartheta\right) = 0 \Rightarrow w_3 - 2 < 0 \Rightarrow w_3 = 1$

(3) (010,0) $y = s\left(w_2 - \vartheta\right) = 0 \Rightarrow w_2 - 2 < 0 \Rightarrow w_2 = 1$

(4) (011,1) $y = s\left(w_2 + w_3 + w_{23} - \vartheta\right) = 1 \Rightarrow \underbrace{w_2 + w_3}_{2} + w_{23} - 2 \ge 0 \Rightarrow w_{23} = 1$

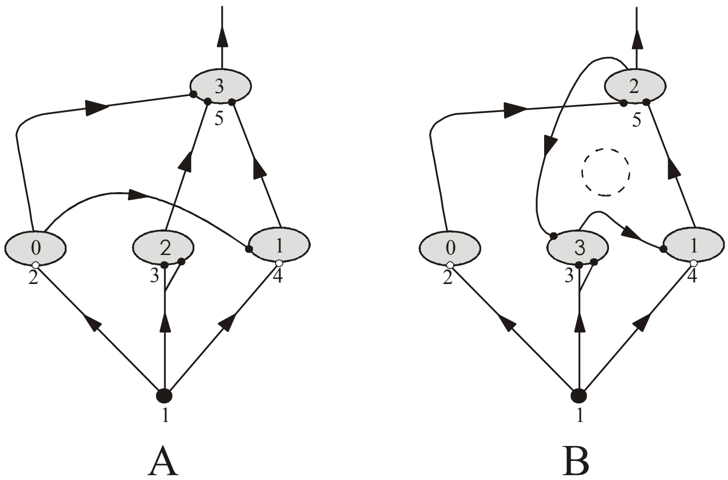
(5) (100,0) $y = s\left(w_1 - \vartheta\right) = 0 \Rightarrow w_1 - 2 < 0 \Rightarrow w_1 = 1$

(6) (101,1) $y = s\left(w_1 + w_3 + w_{13} - \vartheta\right) = 1 \Rightarrow \underbrace{w_1 + w_3}_{2} + w_{23} - 2 \geq 0 \Rightarrow w_{13} = 1$

(7) (110,0) $y = s\left(w_1 + w_2 + w_{12} - \vartheta\right) = 0 \Rightarrow \underbrace{w_1 + w_2}_{2} + w_{23} - 2 < 0 \Rightarrow w_{12} = -1$

(8) (111,0)
$$y = s\left(w_1 + w_2 + w_3 + w_{12} + w_{13} + w_{23} + w_{123} - \vartheta\right) = 0 \Rightarrow$$
$$\underbrace{w_1 + w_2 + w_3}_{3} + \underbrace{w_{12} + w_{13} + w_{23}}_{1} + w_{123} - 2 < 0 \Rightarrow w_{123} = -1$$

Cvičenie 8.11. Pre časové elementy $1 \leq t \leq 10$ zostrojte tabuľku aktivít jednotlivých neurónov znázornených na obrázku, pričom v čase $t = 1$ aktivity sú zadané takto: $x^{(1)} = (1,0,0,1)$.



V prvom kroku učíme aktivity jednotlivých neurónov z neurónových sietí A a B.

Diagram A (dopredná neurónová sieť)

$$x_1^{(t)} = vstupné\ aktivity\ pre\ t = 0,1,2,....$$
$$x_2^{(t)} = s\left(x_1^{(t-1)} - 0\right) \Rightarrow x_2^{(t)} = \neg x_1^{(t-1)}$$
$$x_3^{(t)} = s\left(2x_1^{(t-1)} - 2\right) \Rightarrow x_3^{(t)} = x_1^{(t-1)} \wedge x_1^{(t-1)} = x_1^{(t-1)}$$
$$x_4^{(t)} = s\left(-x_1^{(t-1)} + x_2^{(t-1)} - 1\right) \Rightarrow x_2^{(t)} = \neg x_1^{(t-1)} \wedge x_2^{(t-1)}$$
$$x_5^{(t)} = s\left(x_2^{(t-1)} + x_3^{(t-1)} + x_4^{(t-1)} - 3\right) \Rightarrow x_5^{(t)} = x_2^{(t-1)} \wedge x_3^{(t-1)} \wedge x_4^{(t-1)}$$

Pre úplnosť budeme predpokladať, že aktivity neurónov 2-5 pre t=1 sú nulové. Nech vstupné aktivity sú špecifikované binárnym reťazcom dĺžky t_{max}=10, $\boldsymbol{x}_1$=(1101101010), aktivity ostatných neurónov v doprednej neurónovej sieti z obr. 12.13, diagram A sú uvedené v nasledujúcej tabuľke pre časy $1 \leq t \leq 10$.

t	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
1	1	0	0	0	0
2	1	0	1	0	0
3	0	0	1	0	0
4	1	1	0	0	0
5	1	0	1	0	0
6	0	0	0	0	0

7	1	1	0	0	0
8	0	0	1	0	0
9	1	1	0	0	0
10	0	0	1	0	0

Diagram B:

$$x_1^{(t)} = vstupné\ aktivity\ pre\ t = 0,1,2,....$$

$$x_2^{(t)} = s\left(x_1^{(t-1)} - 0\right) \Rightarrow x_2^{(t)} = \neg x_1^{(t-1)}$$

$$x_3^{(t)} = s\left(2x_1^{(t-1)} + x_5^{(t-1)} - 3\right) \Rightarrow x_3^{(t)} = x_1^{(t-1)} \wedge x_5^{(t-1)}$$

$$x_4^{(t)} = s\left(-x_1^{(t-1)} + x_3^{(t-1)} - 2\right) \Rightarrow x_2^{(t)} = \neg x_1^{(t-1)} \wedge x_3^{(t-1)}$$

$$x_5^{(t)} = s\left(x_2^{(t-1)} + x_4^{(t-1)} - 2\right) \Rightarrow x_5^{(t)} = x_2^{(t-1)} \wedge x_4^{(t-1)}$$

Pre podobnú sekvenciu vstupných aktivít, aká bola použitá v predchádzajúcom príklade, $\boldsymbol{x}_1$=(1101101010) a pre podobné počiatočné aktivity ostatných neurónov pre t=1 (aktivity neurónov 2-5 pre t=1 sú nulové)., dostaneme použitím vyššie uvedených vzťahov aktivity neurónov siete, ktoré sú uvedené v tabuľke

t	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
1	1	0	0	0	0
2	1	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0
4	1	1	0	0	0
5	1	0	1	0	1
6	0	0	1	0	0
7	1	1	0	1	0
8	0	0	1	0	1
9	1	1	0	1	0
10	0	0	1	0	1

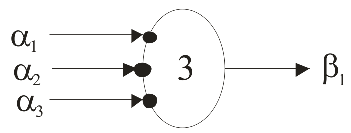
Cvičenie 8.12. Zostrojte neurónovú sieť, ktorá simuluje Boolovu funkciu. $\left(\beta_1,\beta_2\right) = f\left(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\right)$ definovanú pomocou súčtu a súčinu troch binárnych číslic

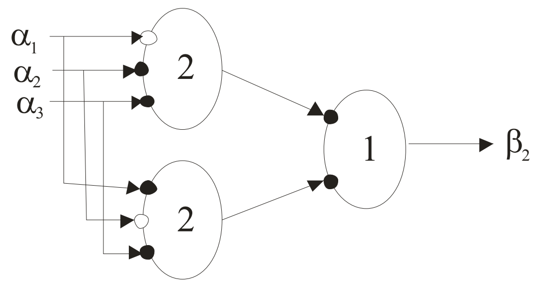
$$\left(\alpha_1 + \alpha_2\right) \times \alpha_3 = \beta_1\beta_2$$

#	α_1	α_2	α_3	β_1	β_2
1	0	0	0	0	0
2	0	0	1	0	0
3	0	1	0	0	0
4	0	1	1	0	1
5	1	0	0	0	0
6	1	0	1	0	1
7	1	1	0	0	0
8	1	1	1	1	0

$$\beta_1 = \alpha_1\alpha_2\alpha_3$$

$$\beta_2 = \overline{\alpha}_1\alpha_2\alpha_3 + \alpha_1\overline{\alpha}_2\alpha_3$$


α1
α2
α3
3
β1


α1
α2
α3
2
2
1
β2