10. kapitola

Viachodnotové logiky– Zadehova fuzzy logika

10.1 Zadehova fuzzy logika

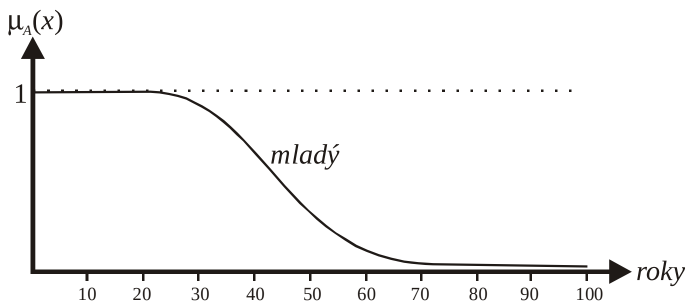
Náš svet je plný nejasne ohraničených pojmov, s ktorými však vieme pomerne dobre intuitívne narábať prostredníctvom nášho prirodzeného jazyka. Predstavme si situáciu, že niekto od nás požaduje, aby sme presne špecifikovali pojem „mladý“. Okamžite by sme zistili, že obsah tohto pojmu je silne závislý od subjektívnej interpretácie a len veľmi ťažko by sme našli úplnú zhodu v interpretácii tohto pojmu od dvoch rôznych ľudí. Práve takéto a podobné problémy sú študované pomocou fuzzy množín, ktorá ponúka teoretický aparát, ktorý umožňuje jednoduché modelovanie týchto problémov a ich implementáciu na počítačoch.
Termín „fuzzy logika“ vznikol ako vedľajší produkt rozvoja teórie fuzzy množín, ktoré boli zavedené americkým (narodeným v azerbajdžanskom Baku) kybernetikom a informatikom Lotfi A. Zadehom, keď v roku 1965 publikoval slávnu prácu *Fuzzy sets* v časopise *Information and Control*. Fuzzy množiny tvoria neobyčajne efektívny teoretický rámec pre modelovanie vágnosti pojmov, pomocou ktorého je možné špecifikovať nejasne ohraničené pojmy, akými sú napríklad výška, vek a podobne. Tak napríklad, ak nejakú osobu označíme za „mladú“, tak ako už bolo diskutované vyššie, toto adjektívum nemá ostro vymedzený význam, je poznačené silným subjektívnym vplyvom užívateľa. Zadehove idey sa rýchlo ujali a stali sa štandardnou súčasťou nielen informatiky ale aj kybernetiky (vedy o riadení a regulácii procesov) ako efektívny inžiniersky prostriedok pre formalizáciu, modelovanie a riadenie systémov, ktoré sú popísané pomocou vágnych pojmov.

Obrázok 10.1. Americký kybernetik a informatik Lotfi Zadeh (∗1921)

10.1.1 Fuzzy množiny

V prednáška "Algebra a diskrétna matematika" [xx], sme podrobne študovali dôležitú matematickú štruktúru nazývanú "teória množín". K jej formulácii sme použili klasický prístup, kde množina bola definovaná ako súbor elementov, ktoré sú dobre navzájom odlíšiteľné, pričom ich výskyt sa neopakuje. Ako alternatívnu definíciu množiny sme použili prístup založený na charakteristických funkciách, t. j. $A=\{x;\mu_A(x)=1\}$. Charakteristická funkcia $\mu_A(x)$ je definovaná nad univerzálnou množinou *U*, tak, že ak platí $\mu_A(x)=1$, potom element x patrí do množiny *A*, $x\in A$ (v opačnom prípade, ak $\mu_A(x)=0$, potom element *x* nepatrí do množiny *A*, $x\notin A$). Hlavnou výhodou tohto prístupu založenom na použití charakteristických funkcií je možnosť priamočiarej generalizácie tohto prístupu tak, že funkčné hodnoty charakteristickej funkcie už nie sú binárne, ale sú zovšeobecnené na interval $\langle 0,1\rangle$, $\mu_A:U\to\langle 0,1\rangle$. Týmto jednoduchým trikom bol Zadeh [xx] schopný definovať tzv. fuzzy množiny, v ktorých príslušnosť vybraného elementu *x* je špecifikovaná práve hodnotou charakteristickej funkcie $0\le\mu_A(x)\le 1$. Pomocou fuzzy množín už môžeme pomerne elegantne riešiť známe paradoxy klasickej teórie množín, akými sú napr. špecifikácie "hromady" alebo "plešatosti".

Študujme jednoduchý ilustratívny príklad situácie keď klasická teória množín je nepoužiteľná. Nech U je univerzum tvorené zo zrniek piesku, $U=\{z_1,z_2,...,z_n...\}$, kde z_i je i-te zrnko piesku. Rekurentne budeme vytvárať podmnožinu "kopu" $K=\{z_1,z_2,...,z_p\}$ tak, že k nej budeme pridávať jedno zrnko piesku, $K\leftarrow K\cup\{z_{p+1}\}$. Od určitého počtu zrniek piesku (kardinality), množinu *K* môžeme nazývať *kopa*. Problém je v tom, že množinu *K* vytvárame rekuretne, zväčšujeme ju po jednom zrnku piesku. Pridaním jedného zrnka piesku sa množina *K* nepremení na kopu piesku. Z týchto úvah vyplýva, že pojem kopa piesku nemôžeme dobre charakterizovať pomocou klasickej teórie množín, museli by sme zaviesť taxatívne kritérium, ak počet zrniek piesku je väčší ako nejaká prahová hodnota, potom množinu nazveme kopa. Avšak takto špecifikovaná kopa piesku je silne zaťažená subjektívnym pohľadom jej tvorcu na to čo, aké množstvo zrniek piesku sa považuje za kopu.



Obrázok 10.2. Priebeh charakteristickej funkcie $\mu_A(x)$ fuzzy množiny *A* „mladý“. Definičný obor tejto funkcie je univerzum *U* tvorené uzavretým intervalom $[0,100]$ a obor funkčných hodnôt je uzavretý interval $[0,1]$.

Ešte naliehavejšie vystupuje tento problém do popredia, ak by sme sa pokúsili taxatívne špecifikovať množinu mladých ľudí napr. tak, že by bola tvorená všetkými ľuďmi s vekom menším alebo rovným 25 rokov. Každý isto pozná nejaký príklad zo svojho okolia. keď osoba podstatne staršia ako 25 rokov sa cíti byť mladým (napr. nestarnúci päťdesiatnici alebo päťdesiatničky).

Koncepcia fuzzy množín nám poskytuje možnosť ako formalizovať „nejasný“ pojem mladosti. Nech U je univerzum tvorené prirodzenými číslami od 1 do 100, $U=\{1,2,...,100\}$. Fuzzy množina A vyjadrujúca adjektívum „mladý“ je špecifikovaná charakteristickou funkciou s oborom funkčných hodnôt z uzavretého intervalu $[0,1]$

$$\mu_A : U \rightarrow [0,1] \tag{10.8}$$

s kvalitatívnym priebehom znázorneným na obr. 10.2. Alternatívny názov charakteristickej funkcie $\mu_A(x)$ je stupeň príslušnosti prvku - argumentu *x* do fuzzy množiny „mladý“

Formálna definícia ***fuzzy množiny A definovanej nad univerzom U*** je uskutočnená pomocou terminológie klasickej teórie (crisp) množín prostredníctvom usporiadaných dvojíc $(x,\mu_A(x))$, ktoré obsahujú prvok univerza $x \in U$ a jeho stupeň príslušnosti $\mu_A(x)$.

Definícia 10.3. *Fuzzy množina A* je definovaná

$$A = \{(x,\mu_A(x))\,;\, x \in U\} \tag{10.9}$$

kde *U* je univerzum a $\mu_A(x)$ je charakteristická funkcia (stupeň príslušnosti *x* do A).

Poznámka. Pojem fuzzy množiny *A* splýva s pojmom jej charakteristickej funkcie $\mu_A(x)$, ktorá ju spolu s univerzom *U* jednoznačne určuje. Zápis $x \in A$ (čítame ako *x* je *A*) sa v teórii fuzzy množín interpretuje pomocou príslušnej charakteristickej funkcie $\mu_A(x)$ tak, že stupeň príslušnosti elementu *x* do fuzzy množiny *A* je učený hodnotou $\mu_A(x)$.

V tejto kapitole použijeme jednoduchý spôsob špecifikácie operácií nad fuzzy množinami, ktorý je bezprostredným zovšeobecnením ich definícií pomocou charakteristických funkcií pomocou vzťahov používaných v klasickej teórii množín. V klasickej teórii množín charakteristické funkcie sú dichotomné, ich funkčné hodnoty môžu nadobúdať len binárne hodnoty 0/1. V teórii fuzzy množín je táto podmienka nahradené novou podmienkou, podľa ktorej funkčné hodnoty charakteristických funkcií sú z uzavretého intervalu [0,1] (pozri obr. 10.8). Základné množinové operácie zjednotenia, prieniku a komplementu sú potom pre fuzzy množiny definované takto[1]

(1) *Zjednotenie* fuzzy množín $A = \{(x,\mu_A(x))\,;\, x \in U\}$ a $B = \{(x,\mu_B(x))\,;\, x \in U\}$

$$A \cup B = \{(x,\mu_{A\cup B}(x))\,;\, x \in U\} \tag{10.10a}$$

$$\mu_{A\cup B}(x) = max\{\mu_A(x),\mu_B(x)\} \tag{10.10b}$$

(2) *Prienik* fuzzy množín $A = \{(x,\mu_A(x))\,;\, x \in U\}$ a $B = \{(x,\mu_B(x))\,;\, x \in U\}$

$$A \cap B = \{(x,\mu_{A\cap B}(x))\,;\, x \in U\} \tag{10.10c}$$

$$\mu_{A\cap B}(x) = min\{\mu_A(x),\mu_B(x)\} \tag{10.10d}$$

(3) *Doplnok* fuzzy množiny $A = \{(x,\mu_A(x))\,;\, x \in U\}$

$$\overline{A} = \{(x,\mu_{\overline{A}}(x))\,;\, x \in U\} \tag{10.10e}$$

$$\mu_{\overline{A}}(x) = 1 - \mu_A(x) \tag{10.10f}$$

(4) *Podmnožina* fuzzy množín $A = \{(x,\mu_A(x))\,;\, x \in U\}$ a $B = \{(x,\mu_B(x))\,;\, x \in U\}$

[1] Použili sme pôvodný Zadehov postup [xx] pre zavedenie základných množinových operácií nad fuzzy množinami, ktorý je priamym a jednoduchým zovšeobecnením podobných operácií nad klasickými (crisp) množinami.

$$A \subseteq B =_{def} \forall(x \in U)(\mu_A(x) \le \mu_B(x)) \qquad (10.10g)$$

Môžeme si teraz položiť otázku, ktoré zo vzťahov platných pre klasické „crisp" množiny platia aj pre fuzzy množiny? Upozorňujeme, že zákon sporu a zákon vylúčenia tretieho pre fuzzy množiny neplatia. Charakteristické funkcie ľavej strany zákona vylúčenia tretieho $A \cup \bar{A} = U$ má tvar

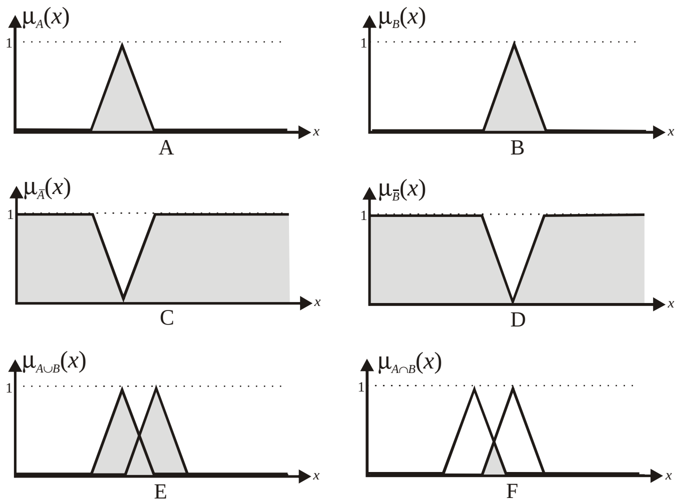
$$\mu_{A\cup\bar{A}}(x) = max\{\mu_A(x), \mu_{\bar{A}}(x)\} = max\{\mu_A(x), 1-\mu_A(x)\} = 1 \qquad (10.11a)$$

Táto podmienka evidentne nie je splnená pre fuzzy množiny, kde môže nastať prípad $0 < \mu_A(x) < 1$, potom napr. pre $\mu_A(x) = 0.9$ dostaneme $0.9 = 1$, čiže vzťah $A \cup \bar{A} = U$ neplatí pre fuzzy množiny .

Podobným spôsobom sa dá dokázať, že aj zákon sporu $A \cap \bar{A} = \emptyset$ je pre fuzzy množiny neplatný

$$\mu_{A\cap\bar{A}}(x) = min\{\mu_A(x), \mu_{\bar{A}}(x)\} = min\{\mu_A(x), 1-\mu_A(x)\} = 0 \qquad (10.11b)$$

Podobne ako v predchádzajúcom príklade tento vzťah neplatí pre fuzzy množiny, kde $0 < \mu_A(x) < 1$.



Obrázok 10.3. Diagramy A a B znázorňujú priebehy dvoch charakteristických funkcií $\mu_A(x)$ a $\mu_B(x)$, ktoré definujú fuzzy množiny *A* resp. *B*. Diagramy C a D znázorňujú priebehy charakteristických funkcií $\mu_{\bar{A}}(x)$ a $\mu_{\bar{B}}(x)$, ktoré špecifikujú komplementárne fuzzy množiny $\bar{A}$ resp. $\bar{B}$. Konečne, diagramy E a F znázorňujú priebehy charakteristických funkcií fuzzy množín $A \cup B$ resp. $A \cap B$.

10.3.2 Fuzzy relácie

Binárna relácia v klasickej (crisp) teórie množín je definovaná ako ľubovolná podmnožina karteziánskeho súčinu dvoch množín. Uvažujme dve základné množiny *A* a *B*, relácia *R* definovaná vzhľadom k týmto množinám je $R \subseteq A \times B$

$$R = \{(x, y);\, x \in A \wedge y \in B\} \qquad (10.12)$$

Príklad 10.5. Nech $A = \{1,2,3\}$ a $B = \{p,q\}$, potom karteziánsky súčin

$$A \times B = \{(1,p),(2,p),(3,p),(1,q),(2,q),(3,q)\}$$

Relácia *R* je ľubovolná podmnožina tejto množiny (pozri obr. 3.4), napr.

$$R = \{(1,p),(3,p),(1,q),(3,q)\}$$

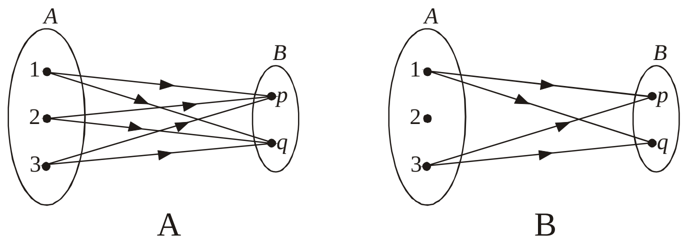
„Crisp“ relácia R je definovaná pomocou charakteristickej funkcie takto

$$R=\{(x,y);x\in A\wedge y\in B\wedge \mu_R(x,y)=1\} \tag{10.13}$$

Inverzná relácia R^{-1} (k relácii R) je definovaná pomocou usporiadaných dvojíc $(y,x)\in R^{-1}$, ktorých inverzia patrí do relácie $(x,y)\in R$

$$R^{-1}=\{(y,x);(x,y)\in R\} \tag{10.14}$$

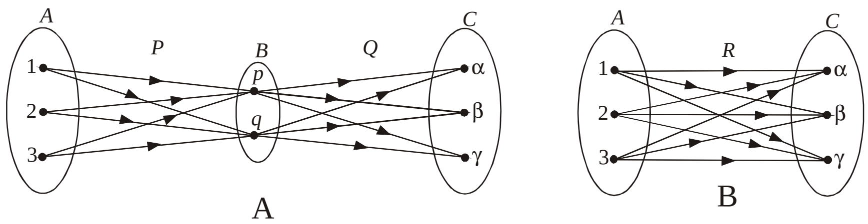
Diagramatická reprezentácia (diagram A na obr. 10.9) inverznej relácie sa zostrojí jednoduchým spôsobom z diagramatickej reprezentácie pôvodnej R tak, že jednotlivé hrany (zobrazenia) zmenia svoju orientáciu.



Obrázok 10.4. Diagram A znázorňuje karteziánsky súčin medzi dvoma množinami A a B, Jednotlivé usporiadané dvojice $A\times B$ sú znázornené pomocou orientovaných čiar. Diagram B reprezentuje reláciu R definovanú ako podmnožinu súčinu $A\times B$ z diagramu B.

Majme tri množiny A, B a C, pre tieto množiny nech sú definované dve relácie $P\subseteq A\times B$ a $Q\subseteq B\times C$, potom *zložená relácia* (*kompozícia*) $R=P\circ Q$ je definovaná ako nový relácia $R\subseteq A\times C$ takto (pozri obr. 10.10)

$$R=P\circ Q=\{(x,z);x\in A\wedge z\in C\wedge \exists y\in B:(x,y)\in P\wedge (y,z)\in Q\} \tag{10.15}$$

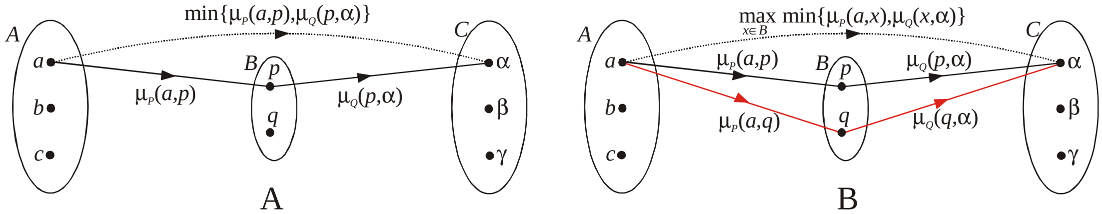


Obrázok 10.5. Znázornenie kompozície dvoch relácií P a Q (diagram A) do novej relácie Q (diagram B).

Charakteristická funkcia kompozície $R=P\circ Q$ je určená vzťahom

$$\mu_{P\circ Q}(x,z)=\max_{y\in B} min\{\mu_P(x,y),\mu_Q(y,z)\} \tag{10.16}$$

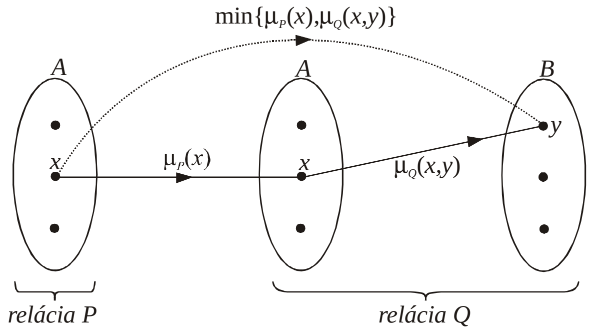
Význam tohto vzťahu priamo vyplýva z definície kompozície dvoch relácií P a Q, pozri obr. 10.10.



Obrázok 10.7. Znázornenie konštrukcie charakteristickej funkcie kompozície relácií P a Q. V prvom kroku (diagram A) pre daný element p zostrojíme ohodnotenia priamej hrany z a do α ako minimálnu hodnotu ohodnotenia medzihrán (a,p) a (p,α). V druhom kroku (diagram B), výsledné ohodnotenie priamej hrany z a do α je vybrané ako maximum možných priamych hrán zostrojených v predchádajúcom medzikroku. .

Nech $P \subseteq A \times A$ je *diagonálna relácia*, ktorej charakteristická funkcia pre nediagonálne elementy je nulová, $\mu_P(x,y) = 0$, pre $x \neq y$. Tento typ relácie je formálne určený vzťahom $P = \{(x,x); x \in A \wedge \mu_P(x,x) = \mu_P(x) = 1\}$. Potom kompozícia diagonálnej relácie $P \subseteq A \times A$ s reláciou $Q \subseteq A \times B$ je určená takto (porovnaj s obr. 10.12)

$$\mu_{P \circ Q}(y) = \max_{x \in A} \min\{\mu_P(x), \mu_Q(x,y)\} \tag{10.17}$$

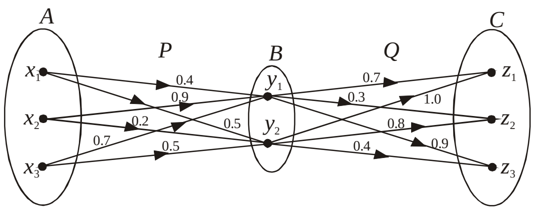


Obrázok 10.8. Znázornenie konštrukcie charakteristickej funkcie kompozície diagonálnej relácie *P* a relácie *Q*. V prvom kroku pre daný element *x* zostrojíme ohodnotenia priamej hrany z *x* do *y* ako minimálnu hodnotu ohodnotenia medzihrán (*x*,*x*) a (*x*,*y*). V druhom kroku (ktorý na obrázku nie je znázornený, je podobný diagramu B na obr. 10.11), výsledné ohodnotenie priamej hrany (*y*,*y*) je vybrané ako maximum možných priamych hrán zostrojených v predchádajúcom medzikroku. .

Definícia 10.4. *Fuzzy relácia R* je definovaná

$$R = \{((x,y), \mu_R(x,y)); (x,y) \in A \times B\} \tag{10.18}$$

kde *A*, *B* sú dané množiny a $\mu_R(x,y)$ je charakteristická funkcia (stupeň príslušnosti dvojice (*x*,*y*) do relácie *R*).



Obrázok 10.9. Znázornenie relácií *P* a *Q* a ich charakteristických funkcií.

Príklad 10.6. Nech fuzzy relácie *P* a *Q* sú definované nad dvojicami množín *A*,*B* resp. *B*,*C*, pričom tieto množiny majú tvar $A = \{x_1, x_2, x_3\}$, $B = \{y_1, y_2\}$, $C = \{z_1, z_2, z_3\}$ a príslušné charakteristické funkcie sú určené tab. 10.6

Tabuľka 10.6. Špecifikácia charakteristických funkcií relácií P a Q

$\mu_P(x,y)$	y_1	y_2
x_1	0.4	0.5
x_2	0.9	0.2
x_3	0.7	0.5

$\mu_Q(x,y)$	z_1	z_2	z_3
y_1	0.7	0.3	0.9
y_2	1.0	0.8	0.4

Pomocou formuly (10.17) zostrojíme element charakteristickej funkcie

$$\mu_{P\circ Q}(x_1,z_1) = max\{min\{\mu_P(x_1,y_1),\mu_Q(y_1,z_1)\},min\{\mu_P(x_1,y_2),\mu_Q(y_2,z_1)\}\}$$
$$= max\{min\{0.4,0.7\},min\{0.5,1.0\}\} = max\{0.4,0.5\} = 0.5$$

Podobným postupom zostrojíme aj ostatné elementy charakteristickej funkcie $\mu_{P\circ Q}(x,z)$, všetky elementy tejto charakteristickej sú uvedené v tab. 10.3. Konštrukcia tabuľky môže byť podstatne zjednodušená pomocou diagramu na obr. 10.13. Pre každú dvojicu x a z určíme všetky možné orientované cesty (určené pre

Tabuľka 10.7. Výsledná charakteristická funkcia relácie $R = P\circ Q$

$\mu_R(x,y)$	z_1	z_2	z_3
x_1	0.5	0.5	0.4
x_2	0.7	0.3	0.9
x_3	0.7	0.5	0.7

Pretože fuzzy relácia (10.17) bola definovaná ako fuzzy množina, môžeme nad množinou fuzzy relácií, ktoré sú špecifikované nad rovnakou dvojicou množín A a B definovať operácie zjednotenia a prieniku fuzzy relácií. Nech $P,Q \subseteq A\times B$ sú dve fuzzy relácie s charakteristickými funkciami $\mu_P(x,y)$ resp. a $\mu_Q(x,y)$, potom ich prienik a zjednotenie sú definované v súhlase s definíciami týchto operácii pre fuzzy množiny

$$\mu_{P\cap Q}(x,y) = min\{\mu_P(x,y),\mu_Q(x,y)\} \tag{10.19a}$$

$$\mu_{P\cup Q}(x,y) = max\{\mu_P(x,y),\mu_Q(x,y)\} \tag{10.19b}$$

pre každé $(x,y)\in A\times B$.

Veta 10.2. Nech P, Q a R sú fuzzy relácie definované nad takými množinami, aby nasledujúce operácie boli prípustné, potom platí

$$(P\circ Q)^{-1} = Q^{-1}\circ P^{-1} \tag{10.20a}$$

$$(P\circ Q)\circ R = P\circ(Q\circ R) \tag{10.20b}$$

$$P\circ(Q\cup R) = (P\circ Q)\cup(P\circ R) \tag{10.20c}$$

$$(Q\cup R)\circ P = (Q\circ P)\cup(R\circ P) \tag{10.20d}$$

$$P\circ(Q\cap R) = (P\circ Q)\cap(P\circ R) \tag{10.20e}$$

$$(Q\cap R)\circ P = (Q\circ P)\cap(R\circ P) \tag{10.20f}$$

Dôkaz prvej vlastnosti (10.20a) priamo vyplýva z definícií kompozície a inverznej relácie. Nech $P\subseteq A\times B$ a $Q\subseteq B\times C$, potom $(P\circ Q)^{-1}\subseteq C\times A$ a pre každá $(z,x)\in C\times A$ platí

$$\mu_{(P\circ Q)^{-1}}(z,x) = \mu_{P\circ Q}(x,z) = \max_{y\in B} min\{\mu_P(x,y),\mu_Q(y,z)\}$$
$$= \max_{y\in B} min\{\mu_{P^{-1}}(y,x),\mu_{Q^{-1}}(z,y)\} = \mu_{Q^{-1}\circ P^{-1}}(z,x)$$

Dôkaz asociatívnosti (10.20b) vyplýva priamo z asociatívnosti operácie *max min*. Vzťah distributívnosti (10.20c) dokážeme takto

$$\begin{aligned}
\mu_{P\circ(Q\cup R)}(x,z) &= \max_{y\in B} \min\left\{\mu_P(x,y),\mu_{Q\cup R}(y,z)\right\} \\
&= \max_{y\in B} \min\left\{\mu_P(x,y),\max\left\{\mu_Q(y,z),\mu_R(y,z)\right\}\right\} \\
&= \max_{y\in B} \min\left\{\max\left\{\mu_P(x,y),\mu_Q(y,z)\right\},\max\left\{\mu_P(x,y),\mu_R(y,z)\right\}\right\} \\
&= \min\left\{\underbrace{\max_{y\in B} \max\left\{\mu_P(x,y),\mu_Q(y,z)\right\}}_{\mu_{P\circ Q}(x,z)},\underbrace{\max_{y\in B} \max\left\{\mu_P(x,y),\mu_R(y,z)\right\}}_{\mu_{P\circ R}(x,z)}\right\} \\
&= \min\left\{\mu_{P\circ Q}(x,z),\mu_{P\circ R}(x,z)\right\} = \mu_{P\circ Q\cup P\circ R}(x,z)
\end{aligned}$$

10.3.4 Fuzzy spojky

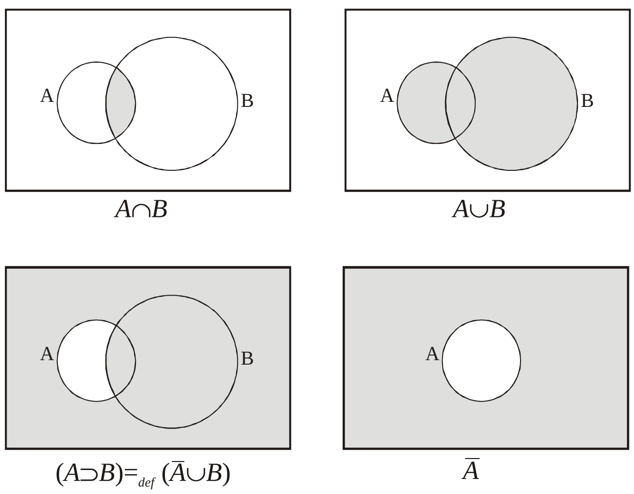
Vzťah medzi klasickou dvojhodnotovou logikou a klasickou teóriou (crisp) množín je veľmi blízky, jednotlivé množinové operácie môžu byť vyjadrené pomocou fuzzy spojok (pozri obr. 10.14):

(1) konjunkcia - $A\cap B =_{def} \left\{x;(x\in A)\wedge(x\in B)\right\}$ (10.21a)

(2) disjunkcia - $A\cup B =_{def} \left\{x;(x\in A)\vee(x\in B)\right\}$ (10.21b)

(3) negácia - $\overline{A} =_{def} \left\{x;\neg(x\in A)\right\}$ (10.21c)

(4) implikácia - $A\supset B =_{def} \left\{x;(x\in A)\Rightarrow(x\in B)\right\}$ (10.21d)



Obrázok 10.10. Priradenie medzi množinovými operáciami a výrokovými spojkami konjunkcie, disjunkcie, impolikácie a negácie. Pre interpretáciu implikácie sme zaviedli množinovú operáciu „implikácie“ $A\supset B =_{def} \overline{A}\cup B$, ktorá je definovaná ako prienik medzi komplementom $\overline{A}$ a B.

Tieto tesné väzby medzi klasickými spojkami konjunkcie a disjunkcie a medzi (*crisp*-) množinovými operáciami prieniku a zjednotenia sú manifestované existenciou 1-1 vzťahu medzi množinovými operáciami a logickými formulami obsahujúcimi konjunkciu, disjunkciu a negáciu.

Fuzzy logika je založená na predpoklade, že každému výroku p je priradená pravdivostná hodnta $val(p) \in [0,1]$ z uzavretého intervalu [0,1]. Postupne budeme študovať pre takto definované „fuzzy“ výroky základné logické spojky.

Fuzzy negácia.

Definícia 10.5. Fuzzy negácia je unárna operácia $\neg : [0,1] \to [0,1]$, ktorá vyhovuje týmto podmienkam

$$\neg\neg p \equiv p \tag{10.22a}$$

$$val(p) \le val(q) \Rightarrow val(\neg p) \ge val(\neg q) \tag{10.22b}$$

Pre takto definovanú fuzzy negáciu (ktorá je nerastúca funkcia) dá sa jednoducho dokázať, že vyhovuje okrajovým podmienkam $\neg 1 = 0$ a $\neg 0 = 1$. Pre každé p existuje také q, že $p = \neg q$, k dôkazu tejto vlastnosti stačí vziať $q = \neg p$ a použiť involutívnosť (10.2b).

Definícia 10.6. Štandardná fuzzy negácia je definovaná vzťahom

$$val(\neg p) = 1 - val(p) \tag{10.22c}$$

V ďalšom texte budeme používať len túto štandardnú negáciu.

Fuzzy konjunkcia

Definícia 10.7. *Fuzzy konjunkcia* je binárna operácia $\wedge : [0,1]^2 \to [0,1]$, ktorá vyhovuje týmto podmienkam

(1) komutatívnosť $p \wedge q \equiv q \wedge p$ (10.23a)

(2) asociatívnosť $p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r$ (10.23b)

(3) okrajová podmienka - identita $p \wedge 1 \equiv p$ (10.23c)

(4) $val(q) \le val(r) \Rightarrow val(p \wedge q) \le val(p \wedge r)$ (10.23d)

Definícia 10.8. Štandardná fuzzy konjunkcia je definovaná vzťahom (pozri obr. 10.2)

$$val(p \wedge q) = min\{val(p), val(q)\} \tag{10.23e}$$

V ďalšom texte budeme používať štandardnú fuzzy konjunkciu, ktorá je jednoduchým zovšeobecnením klasickej výrokovej spojky konjunkcie a taktiež je tesnej v súvislosti so zavedením operácie prieniku pre fuzzy množiny (pozri (10.8c-d) a (10.1)).

Alternatívne určenie konjunkcie, ktoré vyhovuje podmienkam (26a-d) je tzv. súčinová konjunkcia $val(p \wedge q) = val(p) \cdot val(q)$.

Fuzzy disjunkcia

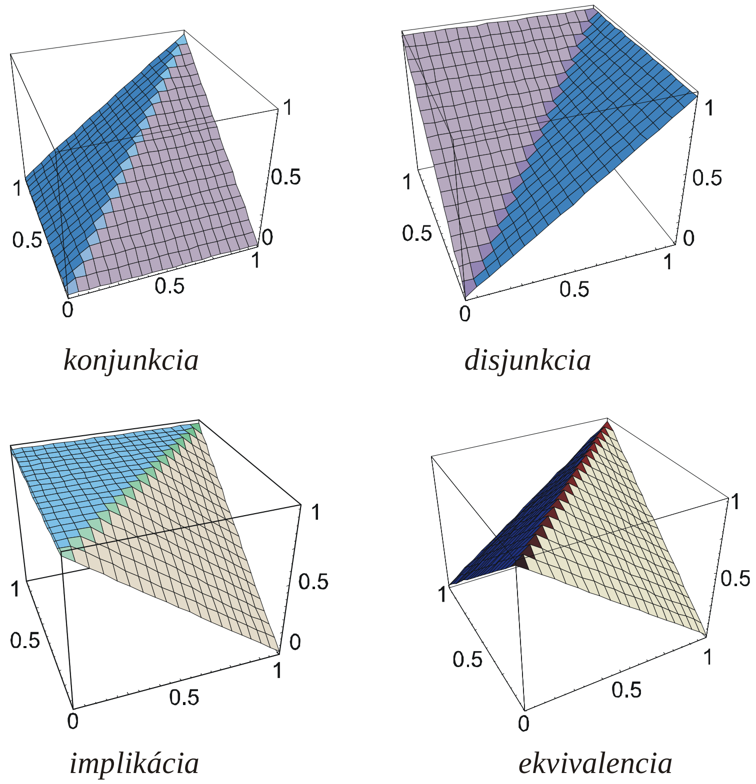
Definícia 10.10. *Fuzzy disjunkcia* je binárna operácia $\vee : [0,1]^2 \to [0,1]$, ktorá vyhovuje týmto podmienkam

(1) komutatívnosť $p \vee q \equiv q \vee p$ (10.24a)

(2) asociatívnosť $p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$ (10.24b)

(3) okrajová podmienka - identita $p \vee 0 \equiv p$ (10.24c)

$$(4)\ val(q) \le val(r) \Rightarrow val(p \vee q) \le val(p \vee r) \qquad (10.24d)$$



Obrázok 10.10. Znázornenie priebehov pravdivostných hodnôt štandardných fuzzy spojok konjunkcie, disjunkcie, implikácie a ekvivalencie.

Definícia 10.10. Štandardná fuzzy disjunkcia je definovaná vzťahom (pozri obr. 10.15)

$$val(p \vee q) = max\{val(p), val(q)\} \qquad (10.24e)$$

Alternatívne určenie disjunkcie, ktoré vyhovuje podmienkam (10.4a-d) je tzv. súčinová disjunkcia $val(p \vee q) = val(p) + val(q) - val(p) \cdot val(q)$. Štandardné operácie konjunkcie a disjunkcie sú duálne vzhľadom k operácii štandardnej negácie (10.2c) (pozri tab. 10.1, De Morganove vzťahy).

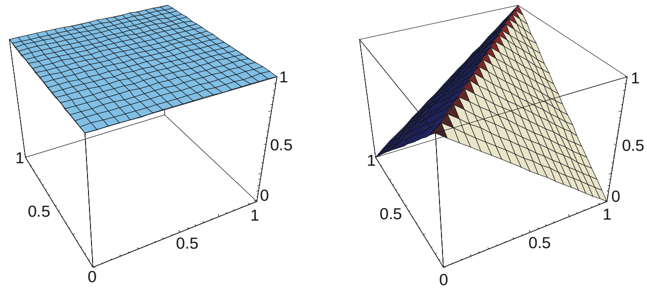
Fuzzy implikácia

Definícia 10.10. *Fuzzy implikácia* je binárna operácia $\Rightarrow : [0,1]^2 \rightarrow [0,1]$, ktorá vyhovuje týmto okrajovým podmienkam

$$val(p \Rightarrow q) = \begin{cases} 1 & (\text{pre } (val(p) = 0) \text{ alebo } (val(q) = 1)) \\ 0 & (\text{pre } val(p) = 1 \text{ a } val(q) = 0) \end{cases} \sim \qquad (10.25a)$$

Definícia 10.12. Štandardná fuzzy implikácia je definovaná podľa Łukasiewicza pomocou vzťahu známeho z 3-hodnotovej logiky (pozri obr. 10.2)

$$val(p \Rightarrow q) = min\{1, 1 - val(p) + val(q)\}$$
$$= \begin{cases} 1 & (val(p) \le val(q)) \\ 1 - val(p) + val(q) & (\text{ináč}) \end{cases} \tag{10.25b}$$



$F(p,q)=((p \wedge q) \Rightarrow (p \vee q))$ $G(p,q)=((p \vee q) \Rightarrow (p \wedge q))$

Obrázok 10.12. Povrchy výrokových funkcií $F(p,q)$ a $G(p,q)$ pre spojité argumenty $p,q \in [0,1]$. Z priebehov týchto funkcií vyplýva, že funkcia $F(p,q)$ je tautológia, zatiaľ čo, funkcia $G(p,q)$ nie je tautológia.

Poznamenajme, že implikácia bola pôvodne Zadehom [xx] špecifikovaná pomocou negácie a disjunkcie, $(p \Rightarrow q) =_{def} (\neg p \vee q)$. Žiaľ tento jednoduchý prístup je skoro nepoužiteľný, pretože produkuje fuzzy logiku veľmi chudobnú, kde skoro neexistujú tautológie. Tento nedostatok je odstránený tým, že používane implikáciu zavedenú do logiky Łukasiewiczom v jeho 3-hodnotovej logike (pozri tab. 10.1).

Ďalší závažný problém pred ktorým stojí fuzzy logika je systematické a úplné určenie pravdivostných hodnôt formúl pre dve alebo viac výrokových premenných. Nech formula fuzzy logiky obsahuje n premmených (atomárnych formúl), $p_1, p_2, ..., p_n$, potom táto formula sa môže chápať ako funkcia n premenných definovaná na hyperkocke $[0,1]^n$. Funkcia – formula sa nazýva *tautológia*, ak sa rovná 1 pre ľubovolnú hodnotu argumentov, $F(p_1, p_2, ..., p_n) = 1$, pre $\forall (p_1, p_2, ..., p_n) \in [0,1]^n$. Pripomeňme si, že tvar výrokovej formuly je ohraničený tým, že musí byť reprezentovaná syntaktickým stromom, ktorého vrcholy sú interpretované ako logické spojky (pozri obr.1.1). Nasledujúce dva príklady ilustrujú použitie metódy sémantických tabiel k výpočtu výrokovej formuly vo fuzzy logike a jej verifikácie, či je tautológiou.

Príklad 10.7. Pre ktoré hodnoty výrokových premenných p a q funkcie sú pravdivé

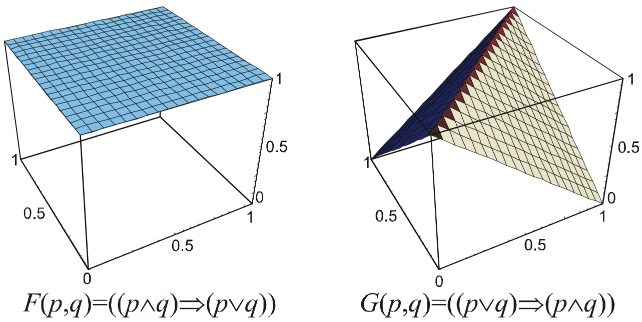
$$F(p,q) = (p \wedge q) \Rightarrow (p \vee q)$$
$$G(p,q) = (p \vee q) \Rightarrow (p \wedge q)$$

Priebehy týchto funkcií sú znázornené na obr. 10.3. Z tohto obrázku priamo plynie, že funkcia $F(p,q) = (p \wedge q) \Rightarrow (p \vee q)$ je tautológia, t.j. $F(p,q) = 1$ pre každé $(p,q) \in [0,1]^2$. Druhá výroková funkcia $G(p,q) = (p \vee q) \Rightarrow (p \wedge q)$ má jednotkové hodnoty len na úsečke s koncovými bodmi (0,0) a (1,1). Táto úsečka je analyticky určená vzťahom $p=q$.

Príklad 10.8. Zistite, či formuly známe v klasickej logike ako modus ponens

$$F(p,q) = (p \wedge (p \Rightarrow q)) \Rightarrow q$$
$$G(p,q) = (p \Rightarrow ((p \Rightarrow q) \Rightarrow q))$$
sú vo fuzzy logike tautológiami. Pripomeňme si, že v klasickej výrokovej logike sú tieto formuly tautológie.

Sémantické tablo formúl sú znázornené na obr. 10.17, kde je taktiež znázornený aj graf funkčných hodnôt . Prvá formula $(p \wedge (p \Rightarrow q)) \Rightarrow q$ je pravdivá len na trojuholníkovej oblasti $0 \le p \le q \le 1$ a na úsečke *p*=1. Táto „netautologičnosť“ tejto formuly nie je na závada jej použitia ako pravidla modus ponens, pretože pri jeho použití sa vždy predpokladá, že predpoklad *p* je pravdivý. Druhá formula $p \Rightarrow ((p \Rightarrow q) \Rightarrow q)$ je pravdivá na celej oblasti $[0,1]^2$.



Obrázok 10.13. Povrchy výrokových funkcií $F(p,q)$ a $G(p,q)$ pre spojité argumenty $p,q \in [0,1]$. Z priebehov týchto funkcií vyplýva, že funkcia $F(p,q)$ je tautológia, zatiaľ čo funkcia $G(p,q)$ nie je tautológia.

10.3.5 Fuzzy usudzovanie

V klasickej logike je jedným zo základných modov usudzovania pravidlo *modus ponens* (pozri (2.1))

$$\frac{\begin{array}{l} p \\ p \Rightarrow q \end{array}}{q} \qquad (10.26a)$$

Táto schéma môže byť verbálne formulovaná takto

ak *p* je pravdivý výrok a
ak $p \Rightarrow q$ je pravdivá implikácia, (10.26b)
potom *q* je pravdivý výrok

Modus ponens môže byť alternatívne vyjadrený pomocou výrokovej formuly - tautológie

$$p \Rightarrow ((p \Rightarrow q) \Rightarrow q) \qquad (10.26c)$$

o ktorej bolo dokázané v cvičení 10.3, že je tautológiou.

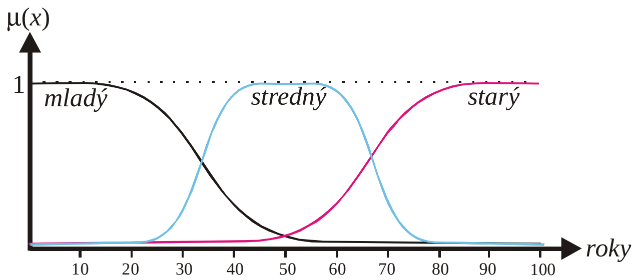
Pri fuzzy odvodzovaní dôležitým pojmom je *jazyková premenná,* ktorý bol zavedený Zadehom [xx]. Jazyková premenná je taký typ premennej, ktorej hodnoty sú slová z prirodzeného jazyka. Ako ilustračný príklad jazykovej premennej uvedieme *vek*, ktorej hodnoty sú špecifikované slovnými hodnotami *mladý*, *stredný* a *starý*.

Definícia 10.10. *Jazyková* (*lingvistická*) *premenná* je určená usporiadanou štvoricou

$$(X, T(X), U, M) \qquad (10.27)$$

kde X je meno jazykovej premennej, $T(X)=\{A,B,...\}$ je množina slovných hodnôt jazykovej premennej, U je univerzum jazykovej premennej, pričom každá slovná premenná $A\in T(X)$ je špecifikovaná fuzzy množinou $A=\{(x,\mu_A(x));x\in U\}$, súbor týchto fuzzy množín tvorí množinu *M*.

Príklad 10.10. Študujme jazykovú premennú *X*=*vek*, definovanú nad univerzom rokov reprezentovaným množinou – uzavretým intervalom *U* =[0,100]. Množina slovných hodnôt obsahuje tri slovné hodnoty, $T(vek)=\{mladý,stredný,starý\}$. Každá slovná hodnota je špecifikovaná fuzzy množinou s charakteristickou funkciou s priebehom znázorneným na obr.10.18.



Obrázok 10.14. Priebeh troch charakteristických funkcií slovných hodnôt jazykovej premennej „*vek*“.

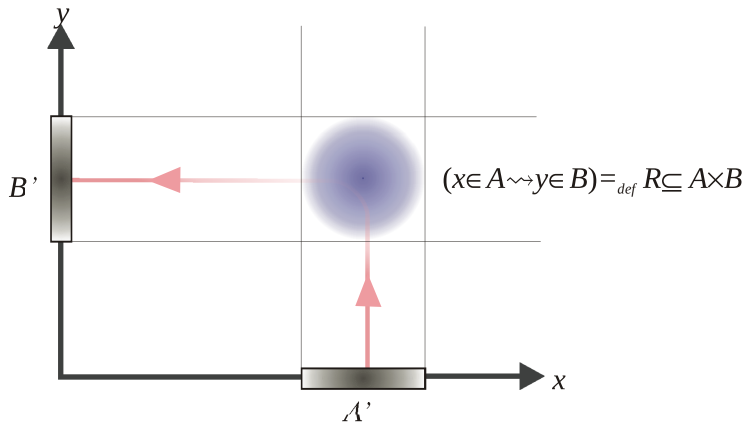
Môžeme teda konštatovať, že jazyková premenná *X* je reprezentovaná množinou *M*, ktorá obsahuje fuzzy množiny nad rovnakým univerzom *U*, pričom tieto sú priradené jednotlivým slovným hodnotám jazykovej premennej z *T*(*X*).

Obrázok 10.15. Znázornenie zovšeobecneného modus ponens, ktorý na základe analógie s reláciou $x\in A \rightsquigarrow x\in B$ vytvára zo vstupnej slovnej premennej *A*´ výstupnú slovnú premennú *B*´, pričom sa predpokladá, že slovné premenné *A* a *A*´ resp. *B* a *B*´sú si podobné.

Fuzzy formulácia pravidla modus ponens pochádza od Zadeha, ktorý ju nazval *zovšeobecnený modus ponens*. Budeme prezentovať teoretický prístup k zovšeobecnenému modus ponens pomocou fuzzy relácií, ktorých teória bola podrobne popísaná v kapitole 10.4. Uvažujme dve slovné premenné $A\in T(X)$ a $B\in T(Y)$ reprezentované príslušnými fuzzy množinami $A=\{(x,\mu_A(x));x\in X\}$ a $B=\{(y,\mu_B(Y));x\in Y\}$. Stupeň pravdivosti fuzzy výroku „*x je A*“, formálne vyjadrený vzťahom „$x\in A$“, je popísaný charakteristickou funkciou $\mu_A(x)$; podobne stupeň pravdivosti výroku „$y\in B$“ („*y je B*“) je charakterizovaný charakteristickou funkciou $\mu_B(x)$. Tieto dva fuzzy výroky „$x\in A$“ a „$y\in B$“ sú vo vzájomnej (môžeme povedať príčinnej alebo asociačnej) relácii $x\in A \rightsquigarrow x\in B$, podľa ktorej vlastnosť „$x\in A$“ je doprevádzaná výskytom vlastnosti „$y\in B$“ . Zovšeobecnený modus ponens v relačnom tvare je (pozri obr. 10.19)

$$\frac{\begin{array}{l} x\in A' \\ x\in A \rightsquigarrow x\in B \end{array}}{x\in B'} \tag{10.28}$$

kde $A' \in T(X)$ a $B' \in T(Y)$ sú nové slovné premenné, Budeme predpokladať, že nová slovná premenná $A´$ (fuzzy množina) je podobná pôvodnej slovnej premennej A, čo môžeme vyjadriť pomocou charakteristických funkcií napr. takto $\max\limits_{x}\left|\mu_A(x)-\mu_{A'}(x)\right|<\delta$, kde δ je dané malé kladné číslo. Tento predpoklad je veľmi dôležitý k odôvodneniu používania zovšeobecneného modus ponens ako nástroja pre odvodenie výstupnej novej slovnej premennej $B´$ zo vstupnej slovnej premennej $A´$ pomocou relácii $x \in A \rightsquigarrow x \in B$ (analógie), pozri obr. 10.7.



Obrázok 10.16. Znázornenie zobrazenia fuzzy slovnej premennej A' na slovnú premennú B' pomocou fuzzy relácie $R(x,y)$.

Zovšeobecnený modus ponens (10.28) reprezentovaný fuzzy reláciou R (pozri obr. 10.20), ktorá transformuje charakteristickú funkcia $\mu_{B'}(y)$ pomocou kompozície (10.5) charakteristickej funkcie $\mu_{A'}(x)$ a charakteristickej funkcie $\mu_R(x,y)$ fuzzy relácie R (priradená vzťahu $x \in A \rightsquigarrow x \in B$):

$$\mu_{B'}(y) = \max_{x\in A} \min\{\mu_{A'}(x), \mu_R(x,y)\} \tag{10.29a}$$

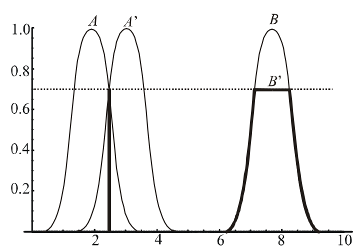
alebo v zjednodušenom tvare: $B' = A' \circ R$. Požadujeme, aby kompozícia (10.9a) vyhovovala „*okrajovej podmienke*“, ktorá požaduje, že ak $A´=A$, potom $B´=B$, *t.j.*

$$\mu_B(y) = \max_{x\in A} \min\{\mu_A(x), \mu_R(x,y)\} \tag{10.29b}$$

Konštrukcia charakteristickej funkcie relácie R patrí medzi základné teoretické problémy približného usudzovania vo fuzzy logike. V literatúre existuje množstvo týchto konštrukcií relácie R, vyberieme z nich iba špecifikáciu podľa Mamdaniho:

$$R = \mu_A(x) \wedge \mu_B(y) = \min\{\mu_A(x), \mu_B(y)\} \tag{10.30}$$

Diagramatická interpretácia použitia tejto Mamdaniho špecifikácie je znázornená na obr. 10.21.



Obrázok 10.17. Schematické znázornenie kompozície $B' = A' \circ R$ pre Mamdaniho špecifikáciu relácie R pomocou štandardnej konjunkcie. Pre túto špecifikáciu je splnená okrajová podmienka kompozície, t. j. $B = B´$ pre $A = A´$.

Pre Mamdaniho špecifikáciu relácie R pomocou štandardnej konjunkcie je možné dokázať jednoduchými úvahami, že okrajová podmienka kompozície (10.9) je splnená. Tak napr. pre Mamdaniho kompozíciu dostaneme

$$\mu_{B'}(y) = \max_{x\in X} \min\left\{\mu_{A'}(x), \min\left\{\mu_A(x), \mu_B(y)\right\}\right\} \tag{10.31}$$

Táto formula môže byť jednoducho upravená použitím asociatívnosti operácie *min*

$$\begin{aligned}\mu_{B'}(y) &= \min\left\{\underbrace{\max_{x\in X} \min\left\{\mu_{A'}(x), \mu_A(x)\right\}}_{w}, \mu_B(y)\right\} \\ &= \min\left\{w, \mu_B(y)\right\}\end{aligned} \tag{10.32}$$

kde w sa nazýva *váha pravidla* alebo *stupeň zapálenia pravidla*. Takto získaná charakteristická funkcia $\mu_{B'}(y)$ vyhovuje podmienke $\mu_{B'}(y) \le \mu_B(y)$, pre A=A' dokonca platí $\mu_{B'}(y) = \mu_B(y)$, pozri obr. 110.21. Implicitne sa ale predpokladá, že $\mu_A(x)$ pre nejaké $x \in A$ nadobúda hodnotu 1.

Dôkaz prvej vlastnosti (9.20a) priamo vyplýva z definícií kompozície a inverznej relácie. Nech $P \subseteq A\times B$ a $Q \subseteq B\times C$, potom $(P\circ Q)^{-1} \subseteq C\times A$ a pre každá $(z,x)\in C\times A$ platí

$$\begin{aligned}\mu_{(P\circ Q)^{-1}}(z,x) &= \mu_{P\circ Q}(x,z) = \max_{y\in B} \min\left\{\mu_P(x,y), \mu_Q(y,z)\right\} \\ &= \max_{y\in B} \min\left\{\mu_{P^{-1}}(y,x), \mu_{Q^{-1}}(z,y)\right\} = \mu_{Q^{-1}\circ P^{-1}}(z,x)\end{aligned}$$

Dôkaz asociatívnosti (9.20b) vyplýva priamo z asociatívnosti operácie *max min*. Vzťah distributívnosti (9.20c) dokážeme takto

$$\begin{aligned}\mu_{P\circ(Q\cup R)}(x,z) &= \max_{y\in B} \min\left\{\mu_P(x,y), \mu_{Q\cup R}(y,z)\right\} \\ &= \max_{y\in B} \min\left\{\mu_P(x,y), \max\left\{\mu_Q(y,z), \mu_R(y,z)\right\}\right\} \\ &= \max_{y\in B} \min\left\{\max\left\{\mu_P(x,y), \mu_Q(y,z)\right\}, \max\left\{\mu_P(x,y), \mu_R(y,z)\right\}\right\} \\ &= \min\left\{\underbrace{\max_{y\in B} \max\left\{\mu_P(x,y), \mu_Q(y,z)\right\}}_{\mu_{P\circ Q}(x,z)}, \underbrace{\max_{y\in B} \max\left\{\mu_P(x,y), \mu_R(y,z)\right\}}_{\mu_{P\circ R}(x,z)}\right\} \\ &= \min\left\{\mu_{P\circ Q}(x,z), \mu_{P\circ R}(x,z)\right\} = \mu_{P\circ Q\cup P\circ R}(x,z)\end{aligned}$$

Literatúra

Cvičenia

Cvičenie 9.1. Pomocou tabuľkovej metódy preverte, či formule sú tautológie 3-hodnotovej Łukasiewiczovej logiky:

(a) $\varphi \Rightarrow \neg\neg\varphi$

(b) $\neg\neg\varphi \Rightarrow \varphi$,

(c) $\varphi \vee \neg\varphi$,

(d) $\varphi \Rightarrow \left(\left(\varphi \Rightarrow \psi\right) \Rightarrow \psi\right)$,

(e) $\varphi \Rightarrow \left(\psi \Rightarrow \varphi\right)$.

Cvičenie 9.2. Pomocou sémantických tabiel preverte, či formule sú tautológie 3-hodnotovej Lukasieviczovej logiky:

(a) $\neg\varphi \Rightarrow \left(\varphi \Rightarrow \psi\right)$

(b) $\left(\varphi \Rightarrow \psi\right) \Rightarrow \left(\neg\psi \Rightarrow \neg\varphi\right)$

(c) $\left(\neg\psi \Rightarrow \neg\varphi\right) \Rightarrow \left(\varphi \Rightarrow \psi\right)$,

(d) $\left(\varphi \wedge \neg\varphi\right) \Rightarrow \psi$.

Cvičenie 9.3. Pomocou sémantických tabiel preverte, či vybrané zákony (1-10) uvedené na str. 4, sú tautológie 3-hodnotovej Łukasiewiczovej logiky.