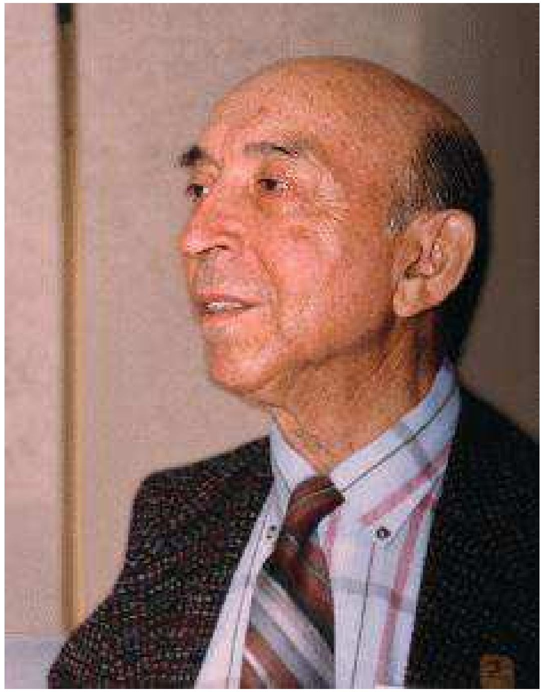
Fuzzy logika a fuzzy množiny



Lotfi A. Zadeh (∗1921), University of California Berkeley

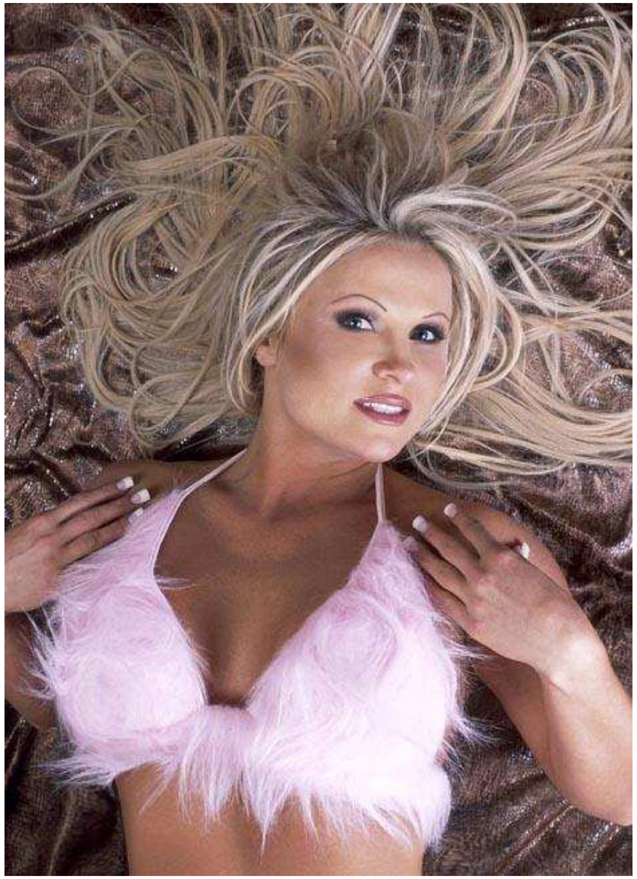
Úvodné poznámky

- Náš svet je plný ***nejasne ohraničených pojmov***, s ktorými však vieme pomerne dobre intuitívne narábať prostredníctvom nášho prirodzeného jazyka.
- Špecifikácia pojmu „mladý“. Okamžite zistíme, že obsah tohto pojmu je ***silne závislý od subjektívnej interpretácie*** a len veľmi ťažko by sme našli úplnú zhodu v interpretácií tohto pojmi od dvoch rôznych ľudí.
- Práve takéto a ***podobné problémy sú študované pomocou fuzzy množín***, ktorá ponúka teoretický aparát, ktorý umožňuje jednoduché modelovanie týchto problémov a ich implementáciu na počítačoch.

- Termín „***fuzzy logika***“ vznikol ako vedľajší produkt rozvoja teórie ***fuzzy množín***, ktoré boli zavedené americkým (narodeného v azarbejdžanskom Baku) kybernetikom Lotfi A. Zadeh, keď v roku 1965 publikoval prácu *Fuzzy sets* v časopise *Information and Control*.
- Fuzzy množiny tvoria ***neobyčajne efektívny teoretický r***ámec pre modelovanie vágnosti pojmov, pomocou ktorého je možné špecifikovať nejasne ohraničené pojmy.
- Zadehove idey sa rýchlo ujali a stali sa ***štandardnou súčasťou nielen informatiky ale aj kybernetiky*** (vedy o riadení a regulácii procesov) ako efektívny inžiniersky prostriedok pre formalizáciu, modelovanie a riadenie systémov, ktoré sú popísané pomocou vágnych pojmov.

fuzz·y (f¾z“¶) *adj*. **fuzz·i·er**, **fuzz·i·est**. **1.** Covered with fuzz. **2.** Of or resembling fuzz. **3.** Not clear; indistinct: *a fuzzy recollection of past events*. **4.** Not coherent; confused: *a fuzzy plan of action*. [Perhaps from Low German *fussig*, spongy. See **pü-** below.] **--fuzz“i·ly** *adv*. **--fuzz“i·ness** *n*.

Fuzzy girl



Fuzzy množiny

Ilustratívny príklad kopy piesku

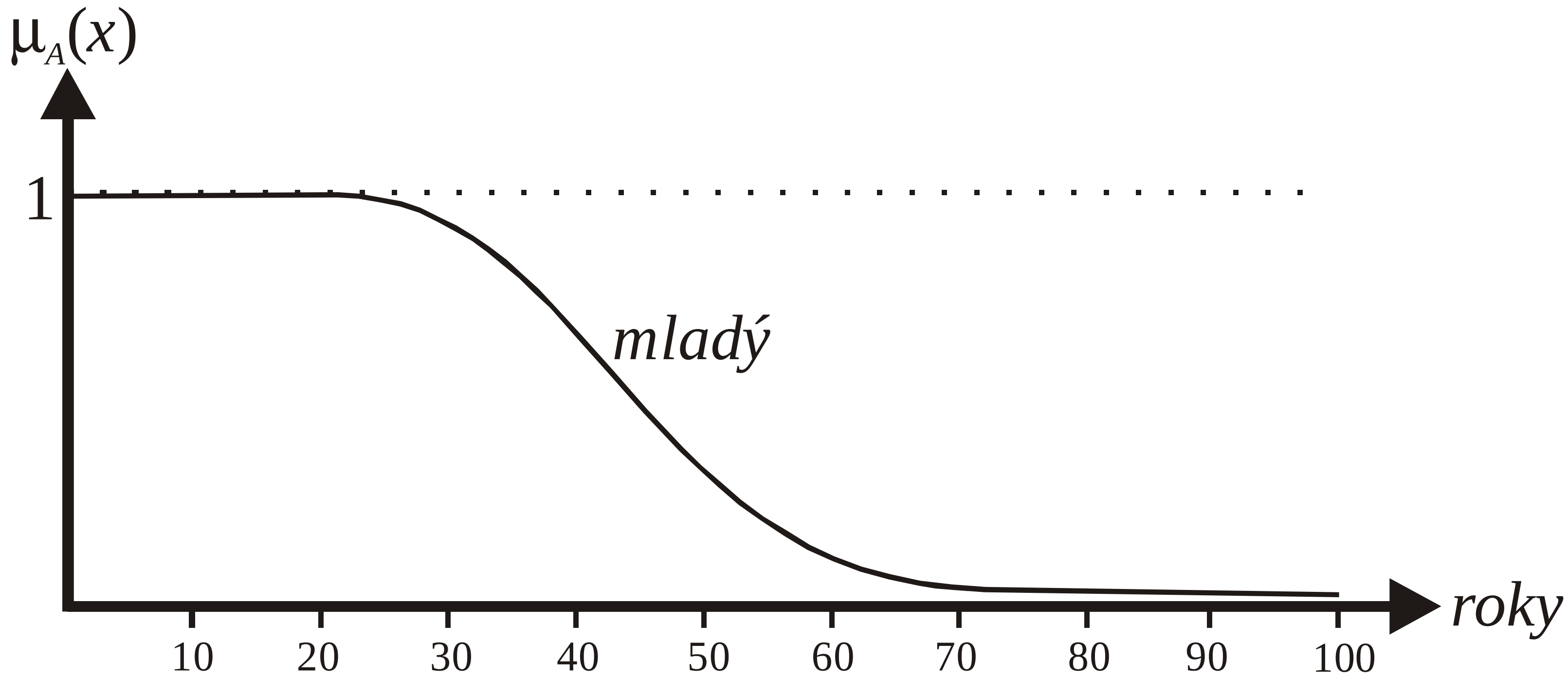
Nech U je univerzum tvorené zo zrniek piesku, $U = \{z_1, z_2, ..., z_n ...\}$, kde z_i je i-té zrnko piesku. Rekurentne budeme vytvárať podmnožinu $K = \{z_1, z_2, ..., z_p\}$ tak, že k nej budeme pridávať jedno zrnko piesku, $K \leftarrow K \cup \{z_{p+1}\}$. Od určitého počtu zrniek piesku (kardinality), množinu K môžeme nazývať *kopa*.

(1) Taxatívne kritérium kopy

$$|K| \geq \vartheta \quad \Rightarrow \quad K \text{ je kopa}$$

(2) Taxatívne kritérium pre kopu piesku je silne zaťažené subjektívnym pohľadom jej tvorcu na to čo, aké množstvo zrniek piesku sa považuje za kopu.

Priebeh charakteristickej funkcie $\mu_A(x)$ fuzzy množiny *A* „mladý“.



Koncepcia fuzzy množín nám poskytuje možnosť ako formalizovať „fuzzy“ pojem mladosti. Nech U je univerzum tvorené prirodzenými číslami od 1 do 100, $U = \{1,2,...,100\}$. Fuzzy množina A vyjadrujúca adjektívum „mladý“ je špecifikovaná charakteristickou funkciou s oborom funkčných hodnôt z uzavretého intervalu $[0,1]$

$$\mu_A : U \to [0,1]$$

s kvalitatívnym priebehom znázorneným na obrázku Alternatívny názov charakteristickej funkcie $\mu_A(x)$ je stupeň príslušnosti prvku - argumentu x do fuzzy množiny „mladý“

Definícia
Fuzzy množina A je definovaná

$$A=\{(x,\mu_A(x));\, x\in U\}$$

kde U je univerzum a $\mu_A(x)$ je charakteristická funkcia (stupeň príslušnosti x do A).

Poznámka. Pojem fuzzy množiny A splýva s pojmom jej charakteristickej funkcie $\mu_A(x)$, ktorá ju spolu s univerzom U jednoznačne určuje. Zápis $x\in A$ (čítame ako x je A) sa v teórii fuzzy množín interpretuje pomocou príslušnej charakteristickej funkcie $\mu_A(x)$ tak, že stupeň príslušnosti elementu x do fuzzy množiny A je učený hodnotou $\mu_A(x)$.

Operácia na fuzzy množinamy

$$A=\left\{\left(x,\mu_A\left(x\right)\right);\ x\in U\right\} \text{ a } B=\left\{\left(x,\mu_B\left(x\right)\right);\ x\in U\right\}$$

(1) *Zjednotenie* fuzzy množín

$$A\cup B=\left\{\left(x,\mu_{A\cup B}\left(x\right)\right); x\in U\right\}$$

$$\mu_{A\cup B}\left(x\right)=max\left\{\mu_A\left(x\right),\mu_B\left(x\right)\right\}$$

(2) *Prienik* fuzzy množín

$$A\cap B=\left\{\left(x,\mu_{A\cap B}\left(x\right)\right); x\in U\right\}$$

$$\mu_{A\cap B}\left(x\right)=min\left\{\mu_A\left(x\right),\mu_B\left(x\right)\right\}$$

(3) *Doplnok* fuzzy množíny

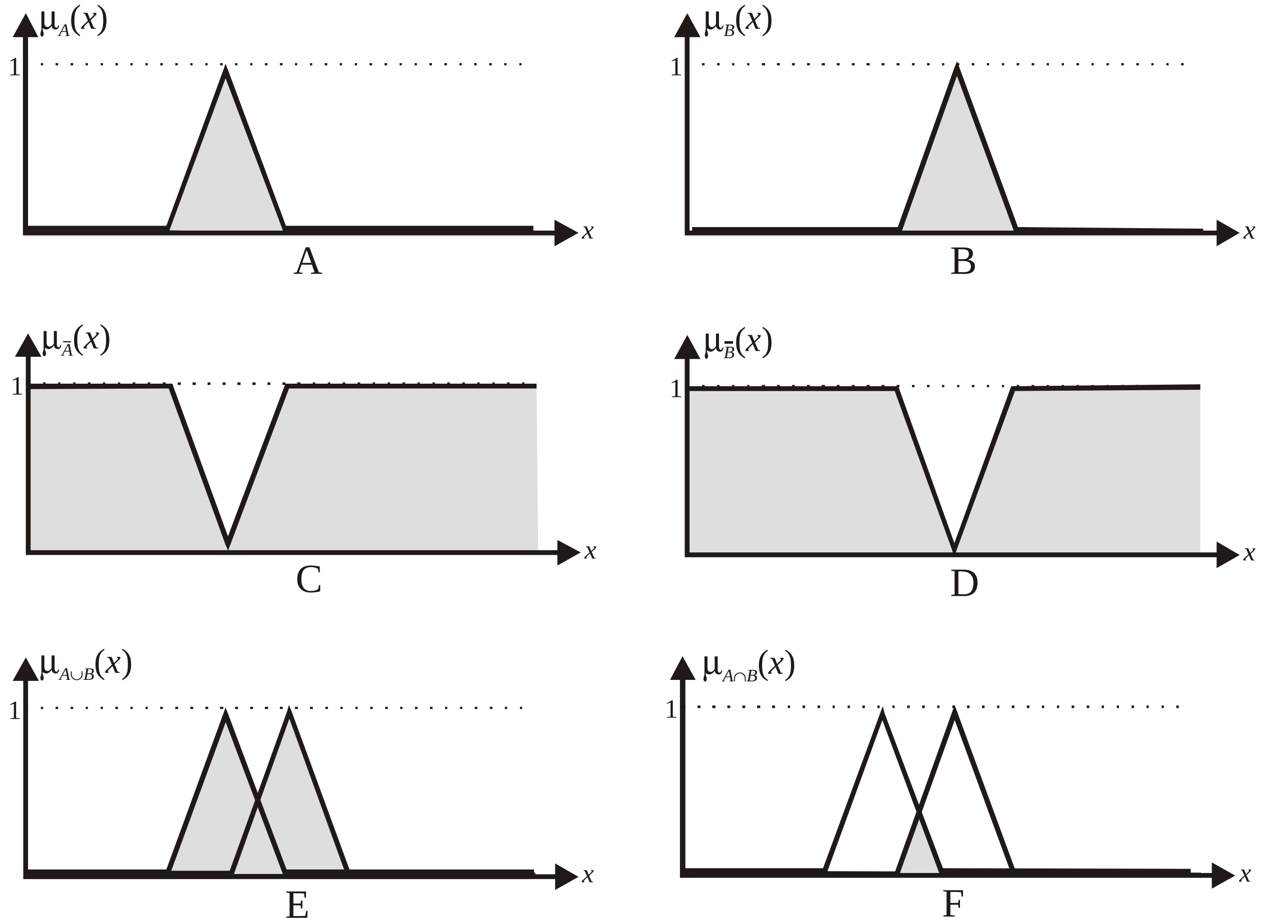
$$\bar{A} = \left\{ \left(x, \mu_{\bar{A}}(x) \right); x \in U \right\}$$

$$\mu_{\bar{A}}(x) = 1 - \mu_A(x)$$

(4) *Podmnožina* fuzzy množín

$$A \subseteq B =_{def} \forall (x \in U) \left(\mu_A(x) \le \mu_B(x) \right)$$

Priebehy charakteristických funkcií fuzzy množín A a B, ich komplementov , prieniku a zjednotenia.



Ktoré vzťahy platné pre klasické „crisp“ množiny platia aj pre fuzzy množiny?

(1) ***Zákon vylúčenia tretieho*** $A \cup \overline{A} = U$ pre fuzzy množiny je ***neplatný***.

$$\mu_{A \cup \overline{A}}(x) = max\{\mu_A(x), \mu_{\overline{A}}(x)\} = max\{\mu_A(x), 1 - \mu_A(x)\} = 1$$

Táto podmienka evidentne nie je splnená pre fuzzy množiny, kde môže nastať prípad $0 < \mu_A(x) < 1$, potom napr. pre $\mu_A(x) = 0.9$ dostaneme $0.9 = 1$, čo je spor.

(2) ***Zákon sporu*** $A \cap \overline{A} = \emptyset$ je pre fuzzy množiny ***neplatný***

$$\mu_{A \cap \overline{A}}(x) = min\{\mu_A(x), \mu_{\overline{A}}(x)\} = min\{\mu_A(x), 1 - \mu_A(x)\} = 0$$

Podobne ako v predchádzajúcom príklade tento vzťah neplatí pre fuzzy množiny, kde $0 < \mu_A(x) < 1$.

(3) Distributívny zákon $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ je ***platný*** pre fuzzy množiny.

$$\mu_{A \cup (B \cap C)}(x) = max\{\mu_A(x), \mu_{B \cap C}(x)\} = max\{\mu_A(x), min\{\mu_B(x), \mu_C(x)\}\}$$

$$= min\{max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}, max\{\mu_A(x), \mu_C(x)\}\}$$

$$= min\{\mu_{A \cup B}(x), \mu_{A \cup C}(x)\}$$

$$= \mu_{(A \cup B) \cap (A \cup C)}(x)$$

Fuzzy relácie

Binárna ***relácia*** v klasickej (crisp) teórie množín je definovaná ako ľubovolná podmnožina karteziánskeho súčinu dvoch množín

$$\boxed{R = \{(x,z);\, x \in A \wedge y \in B\} \subseteq A \times B}$$

„Crisp" relácia R je definovaná pomocou ***charakteristickej funkcie*** takto

$$\boxed{R = \{(x,y);\, x \in A \wedge y \in B \wedge \mu_R(x,y) = 1\}}$$

Príklad

$$\underbrace{\{1,2,3\}}_{A} \times \underbrace{\{p,q\}}_{B} = \{(1,p),(2,p),(3,p),(1,q),(2,q),(3,q)\}$$

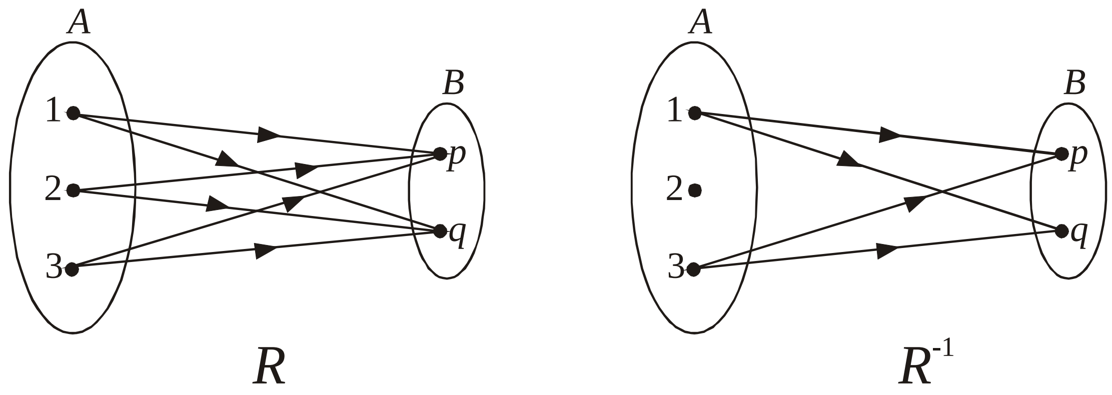
Relácia R je ľubovolná podmnožina tejto množiny , napr.

$$R = \{(1,p),(3,p),(1,q),(3,q)\} \subseteq A \times B$$

Inverzná relácia R^{-1} (k relácii R) je definovaná pomocou usporiadaných dvojíc $(y,x)\in R^{-1}$, ktorých inverzia patrí do relácie $(x,y)\in R$

$$\boxed{R^{-1}=\{(y,x);(x,y)\in R\}\subseteq B\times A}$$

Diagramatická reprezentácia inverznej relácie sa zostrojí jednoduchým spôsobom z diagramatickej reprezentácie pôvodnej R tak, že jednotlivé hrany (zobrazenia) zmenia svoju orientáciu.

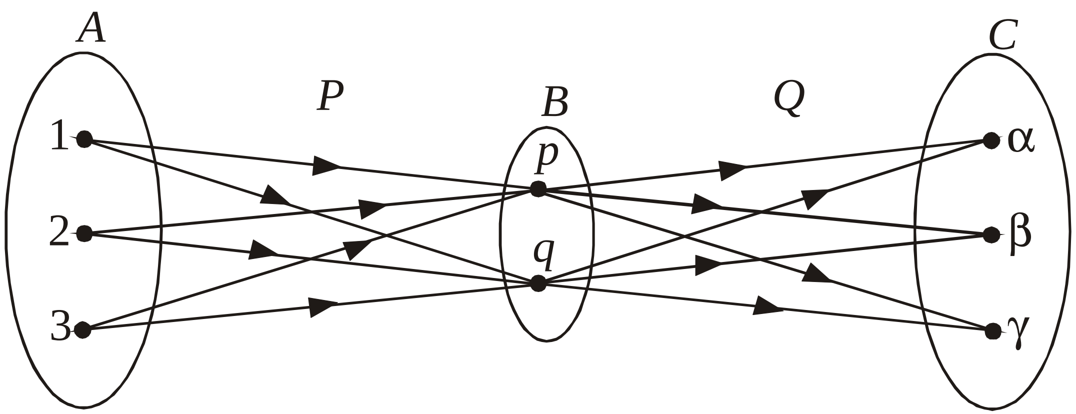


Zložená relácia

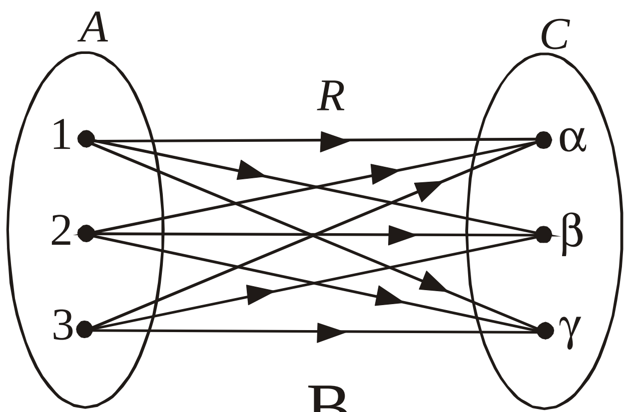
Majme tri množiny A, B a C, pre tieto množiny nech sú definované dve relácie $P \subseteq A \times B$ a $Q \subseteq B \times C$,

Zložená relácia (***kompozícia***) $R = P \circ Q$ je definovaná ako nový relácia $R \subseteq A \times C$ takto

$$\boxed{R = P \circ Q = \left\{ (x,z);\, x \in A \wedge z \in C \wedge \exists y \in B : (x,y) \in P \wedge (y,z) \in Q \right\}}$$



A

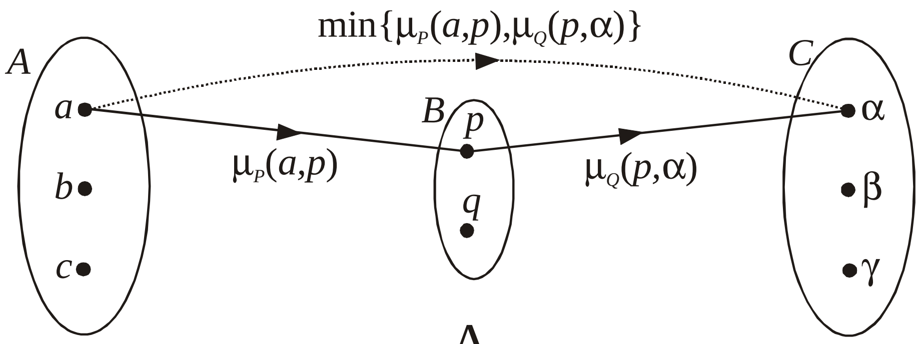


B

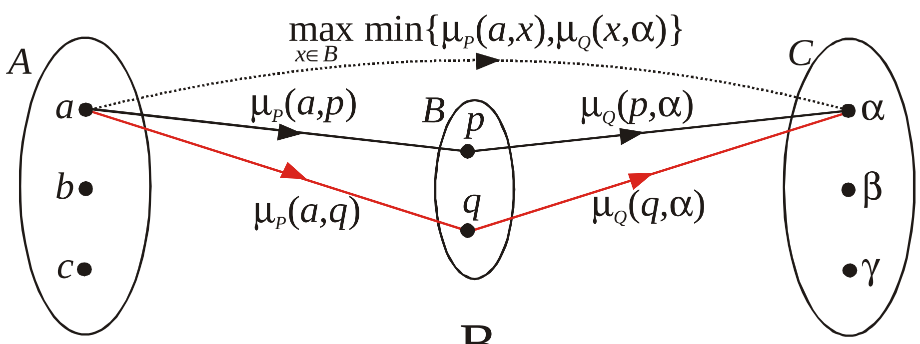
Charakteristická funkcia kompozície $R = P \circ Q$ je určená vzťahom

$$\boxed{\mu_{P\circ Q}(x,z) = \max_{y\in B} \min\{\mu_P(x,y), \mu_Q(y,z)\}}$$

Význam tohto vzťahu priamo vyplýva z definície kompozície dvoch relácií *P* a *Q*.



A

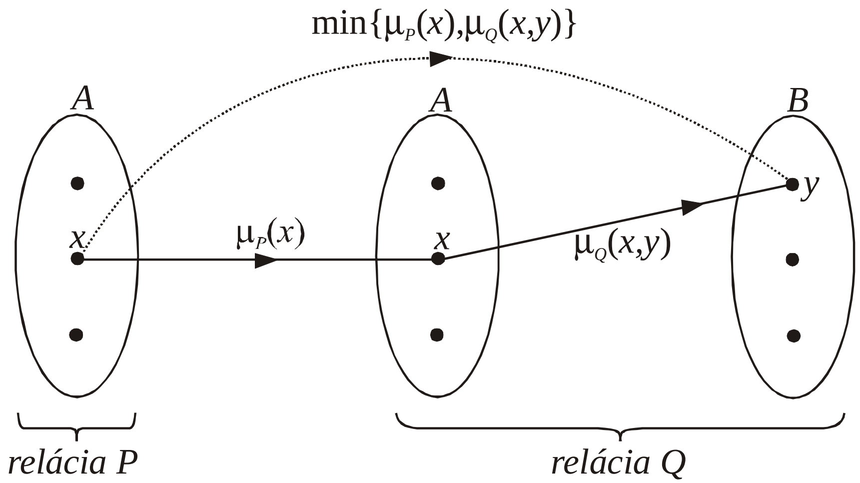


B

Diagonálna relácia

Nech $P \subseteq A \times A$ je ***diagonálna relácia***, ktorej charakteristická funkcia pre nediagonálne elementy je nulová, $\mu_P(x,y)=0$, pre $x \neq y$. Tento typ relácie je formálne určený vzťahom $P=\{(x,x);\, x\in A \wedge \mu_P(x,x)=\mu_P(x)=1\}$. Potom kompozícia diagonálnej relácie $P \subseteq A\times A$ s reláciou Q $\subseteq A\times B$ je určená takto

$$\boxed{\mu_{P\circ Q}(y)=\max_{x\in A} \min\{\mu_P(x),\mu_Q(x,y)\}}$$



Definícia

Fuzzy relácia *R* je definovaná

$$\boxed{R = \left\{ \left((x,y), \mu_R(x,y) \right); (x,y) \in A \times B \right\}}$$

kde A, B sú dané množiny a $\mu_R(x,y)$je charakteristická funkcia (stupeň príslušnosti dvojice (x,y) do relácie R).

Kompozícia dvoch fuzzy relácií $P \subseteq A \times B$ a $Q \subseteq B \times C$ je určená analogickými vzťahmi, ktoré boli pôvodne definované pre „crisp“ relácie

$$\mu_{P \circ Q}(x,z) = \max_{y \in B} \min \left\{ \mu_P(x,y), \mu_Q(y,z) \right\}$$

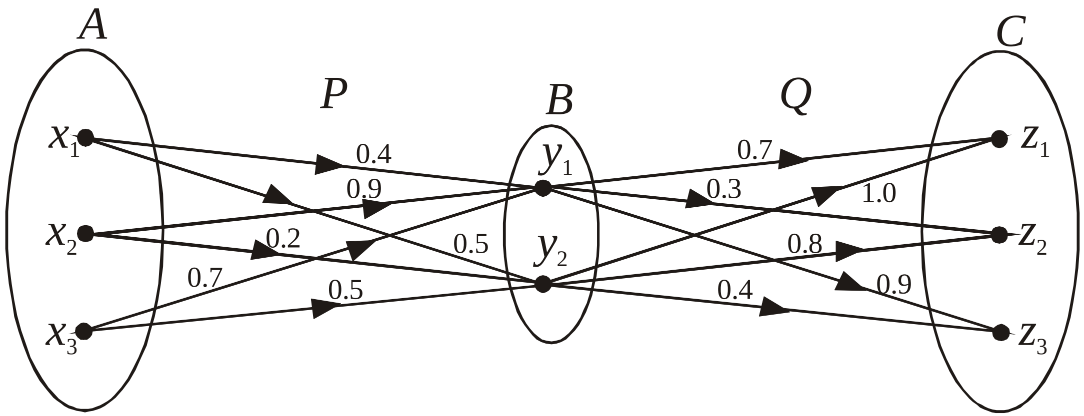
Príklad

Nech fuzzy relácie *P* a *Q* sú definované nad dvojicami množín *A*,*B* resp. *B*,*C*, pričom tieto množiny majú tvar $A=\{x_1,x_2,x_3\}$, $B=\{y_1,y_2\}$, $C=\{z_1,z_2,z_3\}$ a príslušné charakteristické funkcie sú určené tab. 10.2 (pozri taktiež obr. 10.8)

Špecifikácia charakteristických funkcií relácií P a Q

$\mu_P(x,y)$	y_1	y_2
x_1	0.4	0.5
x_2	0.9	0.2
x_3	0.7	0.5

$\mu_Q(x,y)$	z_1	z_2	z_3
y_1	0.7	0.3	0.9
y_2	1.0	0.8	0.4



$$\mu_{P\circ Q}(x_1,z_1) = max\left\{min\{\mu_P(x_1,y_1),\mu_Q(y_1,z_1)\},min\{\mu_P(x_1,y_2),\mu_Q(y_2,z_1)\}\right\}$$

$$= max\left\{min\{0.4,0.7\},min\{0.5,1.0\}\right\} = max\{0.4,0.5\} = 0.5$$

Výsledná charakteristická funkcia relácie $R = P \circ Q$

$\mu_R(x,y)$	z_1	z_2	z_3
x_1	0.5	0.5	0.4
x_2	0.7	0.3	0.9
x_3	0.7	0.5	0.7

Pretože fuzzy relácia bola definovaná ako fuzzy množina, môžeme nad množinou fuzzy relácií, ktoré sú špecifikované nad rovnakou dvojicou množín A a B definovať operácie zjednotenia a prieniku fuzzy relácií. Nech $P,Q \subseteq A \times B$ sú dve fuzzy relácie s charakteristickými funkciami $\mu_P(x,y)$ resp. a $\mu_Q(x,y)$, potom ich prienik a zjednotenie sú definované v súhlase s definíciami týchto operácii pre fuzzy množiny

$$\boxed{\begin{gathered}\mu_{P\cap Q}(x,y) = min\{\mu_P(x,y),\mu_Q(x,y)\}\\ \mu_{P\cup Q}(x,y) = max\{\mu_P(x,y),\mu_Q(x,y)\}\end{gathered}}$$

pre každé $(x,y) \in A \times B$.

Veta.
Nech P, Q a R sú fuzzy relácie definované nad takými množinami, aby nasledujúce operácie boli prípustné, potom platí

$$
\boxed{
\begin{gathered}
(P \circ Q)^{-1} = P^{-1} \circ Q^{-1} \\
(P \circ Q) \circ R = P \circ (Q \circ R) \\
P \circ (Q \cup R) = (P \circ Q) \cup (P \circ R) \\
(Q \cup R) \circ P = (Q \circ P) \cup (R \circ P) \\
P \circ (Q \cap R) = (P \circ Q) \cap (P \circ R) \\
(Q \cap R) \circ P = (Q \circ P) \cap (R \circ P)
\end{gathered}
}
$$

Logické spojky

Vzťah medzi klasickou dvojhodnotovou logikou a teóriou (crisp) množín je veľmi blízky, jednotlivé množinové operácie môžu byť vyjadrené pomocou logických spojok:

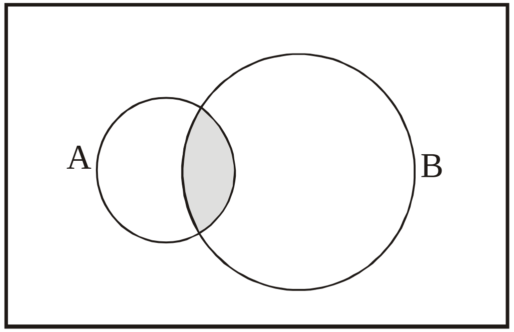
(1) konjunkcia - $A \cap B =_{def} \{x;(x \in A) \wedge (x \in B)\}$

(2) disjunkcia - $A \cup B =_{def} \{x;(x \in A) \vee (x \in B)\}$

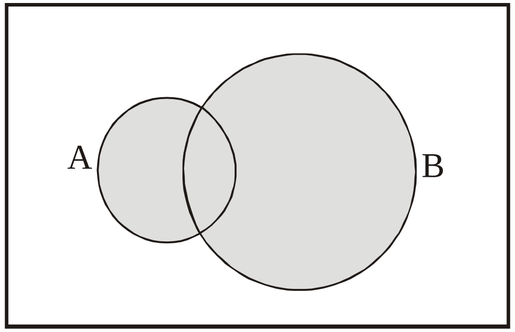
(3) negácia - $\overline{A} =_{def} \{x;\neg(x \in A)\}$

(4) implikácia - $A \supset B =_{def} \{x; x \in A \Rightarrow x \in B\}$

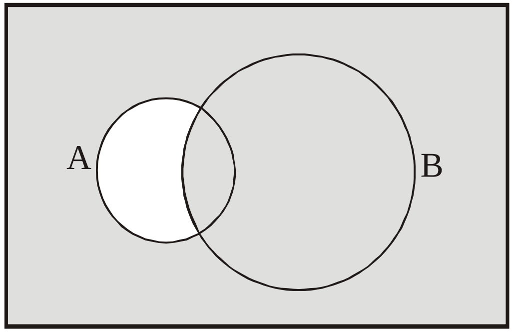
Priradenie medzi množinovými operáciami a výrokovými spojkami konjunkcie, disjunkcie, implikácie a negácie.



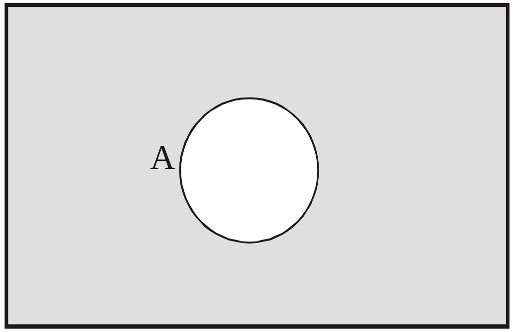
$(A\wedge B)=_{def}(A\cap B)$



$(A\vee B)=_{def}(A\cup B)$



$(A\Rightarrow B)=_{def}(A\supset B)=_{def}(\bar{A}\cup B)$



$\bar{A}=_{def}(\neg A)$

Predpoklad fuzzy logiky

Fuzzy logika je založená na predpoklade, že každému výroku p je priradená pravdivostná hodnta $val(p) \in [0,1]$ z uzavretého intervalu [0,1].

Fuzzy negácia.

Fuzzy negácia je unárna operácia $\neg : [0,1] \to [0,1]$, ktorá vyhovuje týmto podmienkam

$$\neg\neg p \equiv p$$

$$val(p) \le val(q) \Rightarrow val(\neg p) \ge val(\neg q)$$

$$\boxed{val(\neg p) = 1 - val(p)}$$

Fuzzy konjunkcia

Fuzzy konjunkcia je binárna operácia $\wedge:[0,1]^2 \rightarrow [0,1]$, ktorá vyhovuje týmto podmienkam

(1) komutatívnosť $p \wedge q \equiv q \wedge p$

(2) asociatívnosť $p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r$

(3) okrajová podmienka - identita $p \wedge 1 \equiv p$

(4) $val(q) \leq val(r) \Rightarrow val(p \wedge q) \leq val(p \wedge r)$

$$\boxed{val(p \wedge q) = min\{val(p), val(q)\}}$$

Fuzzy disjunkcia

Fuzzy disjunkcia je binárna operácia $\wedge:[0,1]^2 \to [0,1]$, ktorá vyhovuje týmto podmienkam

(1) komutatívnosť $p \vee q \equiv q \vee p$

(2) asociatívnosť $p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$

(3) okrajová podmienka - identita $p \vee 0 \equiv p$

(4) $val(q) \leq val(r) \Rightarrow val(p \vee q) \leq val(p \vee r)$

$$\boxed{val(p \vee q) = max\{val(p), val(q)\}}$$

Operácie konjunkcie a disjunkcie sú duálne vzhľadom k operácii štandardnej negácie (De Morganove vzťahy).

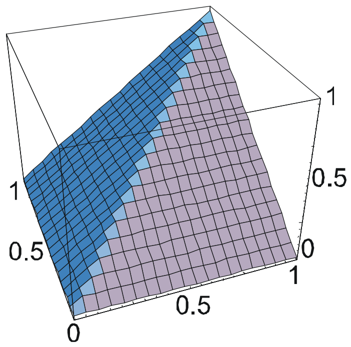
Fuzzy implikácia

Fuzzy implikácia je binárna operácia $\Rightarrow:[0,1]^2 \rightarrow [0,1]$, ktorá vyhovuje týmto okrajovým podmienkam

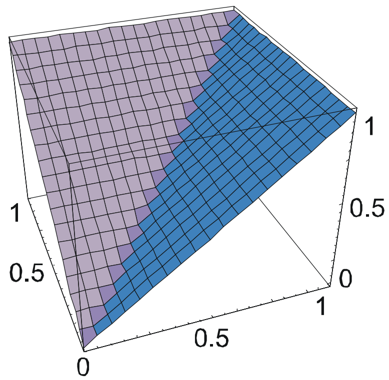
$$val\left(p \Rightarrow q\right) = \begin{cases} 1 & \left(\text{pre}\left(val\left(p\right) = 0\right)\text{alebo}\left(val\left(q\right) = 1\right)\right) \\ 0 & \left(\text{pre } val\left(p\right) = 1 \text{ a } val\left(q\right) = 0\right) \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{aligned} val\left(p \Rightarrow q\right) &= min\left\{1, 1 - val\left(p\right) + val\left(q\right)\right\} \\ &= \begin{cases} 1 & \left(val\left(p\right) \leq val\left(q\right)\right) \\ 1 - val\left(p\right) + val\left(q\right) & \left(\text{ináč}\right) \end{cases} \end{aligned}}$$

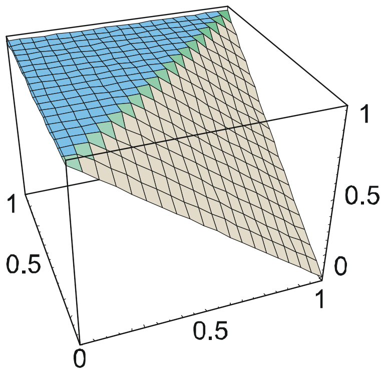
3D grafy logických spojok vo fuzzy logike



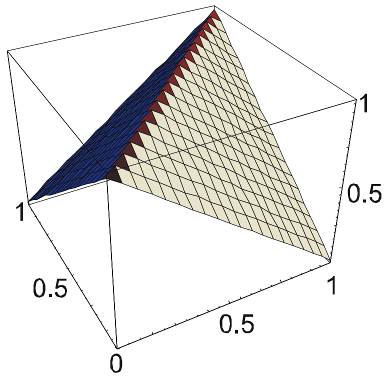
konjunkcia



disjunkcia



implikácia

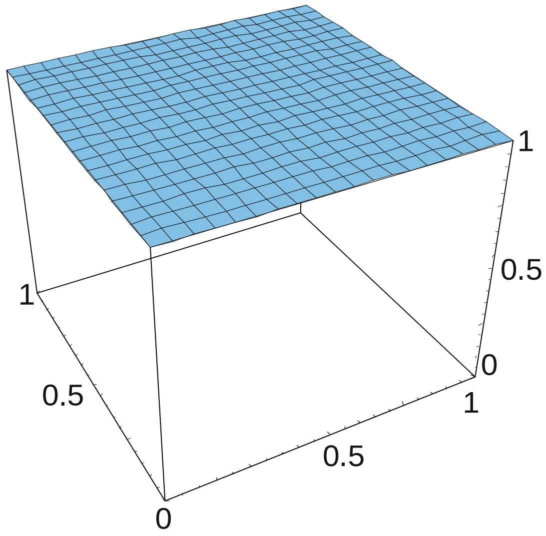


ekvivalencia

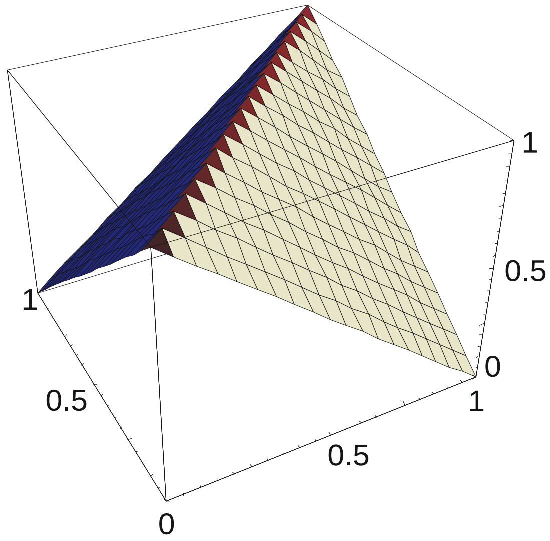
- Implikácia bola pôvodne Zadehom špecifikovaná pomocou negácie a disjunkcie, $\left(p \Rightarrow q\right) =_{def} \left(\neg p \vee q\right)$. Tento jednoduchý prístup je skoro nepoužiteľný, pretože produkuje ***fuzzy logiku veľmi chudobnú***, kde skoro neexistujú tautológie. Tento nedostatok je odstránený tým, že používane implikáciu zavedenú do logiky Łukasiewiczom v jeho 3-hodnotovej logike.

- Závažný problém fuzzy logiky je **systematické a úplné určenie pravdivostných hodnôt formúl** pre dve alebo viac výrokových premenných. Formula fuzzy logiky s n premmenými $p_1, p_2, ..., p_n$ sa môže chápať ako funkcia n premenných definovaná na hyperkocke $[0,1]^n$.

- Funkcia – formula sa nazýva **tautológia,** ak sa rovná 1 pre ľubovolnú hodnotu argumentov, $F\left(p_1, p_2, ..., p_n\right) = 1, \text{pre } \forall\left(p_1, p_2, ..., p_n\right) \in [0,1]^n$.



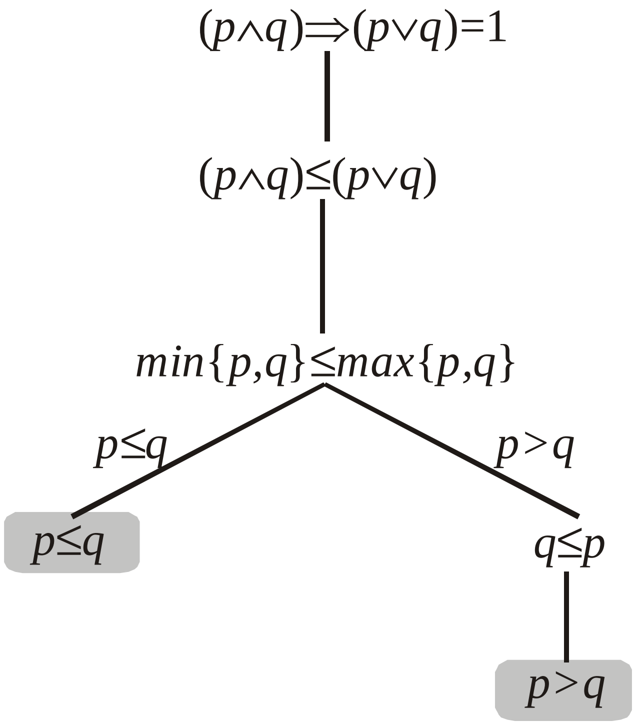
$F(p,q)=((p\wedge q)\Rightarrow(p\vee q))$



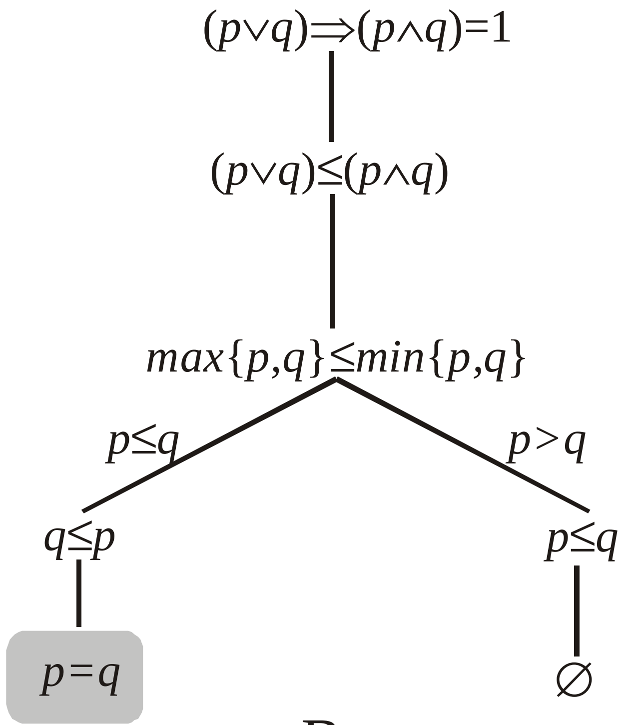
$G(p,q)=((p\vee q)\Rightarrow(p\wedge q))$

Povrchy výrokových funkcií $F(p,q)$ a $G(p,q)$ pre spojité argumenty $p,q\in[0,1]$. Z priebehov týchto funkcií vyplýva, že funkcia $F(p,q)$ je tautológia, zatiaľ čo, funkcia $G(p,q)$ nie je tautológia.

Sémantické tablá pre formuly fuzzy logiky



A



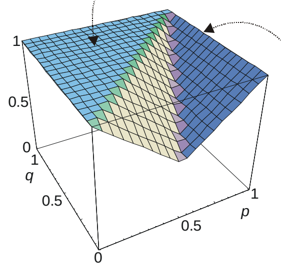
B

$$F(p,q) = (p \wedge q) \Rightarrow (p \vee q)$$
$$F(p,q) = 1 \; \forall p,q \in [0,1]$$

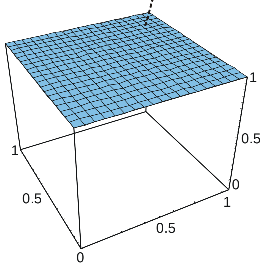
$$G(p,q) = (p \vee q) \Rightarrow (p \wedge q)$$
$$G(p,q) = 1 \; (\mathit{len\ pre}\ p = q)$$

Príklad

- $(p\wedge(p\Rightarrow q)\Rightarrow q)=1$
  - $p\wedge(p\Rightarrow q)\le q$
    - $min\{p,p\Rightarrow q\}\le q$
      - $p\le q$: $min\{p,1\}\le q$
        - $\boxed{p\le q}$
      - $p>q$: $min\{p,1-p+q\}\le q$
        - $1-p+q\le q$
          - $1\le p$
            - $\boxed{p=1}$
        - $p\le q$
          - $\emptyset$



- $(p\Rightarrow(p\Rightarrow q)\Rightarrow q))=1$
  - $p\le(p\Rightarrow q)\Rightarrow q$
    - $(p\Rightarrow q)\le q$: $\boxed{p\le 1}$
    - $(p\Rightarrow q)>q$: $p\le 1-(p\Rightarrow q)+q$
      - $p\le q$: $p+q\le 0$
        - $p=0$, $q=0$
      - $p>q$: $q=0$



Usudzovanie vo fuzzy logike

V klasickej logike je jedným zo základných modov usudzovania pravidlo *modus ponens*

$$\frac{\begin{array}{l} p \\ p \Rightarrow q \end{array}}{q}$$

Táto schéma môže byť verbálne formulovaná takto

$$\frac{\begin{array}{l} \text{ak } p \text{ je pravdivý výrok a} \\ \text{ak } p \Rightarrow q \text{ je pravdivá implikácia,} \end{array}}{\text{potom } q \text{ je pravdivý výrok}}$$

Modus ponens môže byť alternatívne vyjadrený pomocou výrokovej formuly - tautológie

$$p \wedge \left(\left(p \Rightarrow q \right) \Rightarrow q \right)$$

Pri fuzzy odvodzovaní dôležitým pojmom je *jazyková premenná*, ktorý bol zavedený Zadehom. Jazyková premenná je taký typ premennej, ktorej hodnoty sú slová z prirodzeného jazyka. Ako ilustračný príklad jazykovej premennej uvedieme *vek*, ktorej hodnoty sú špecifikované slovnými hodnotami *mladý*, *stredný* a *starý*.

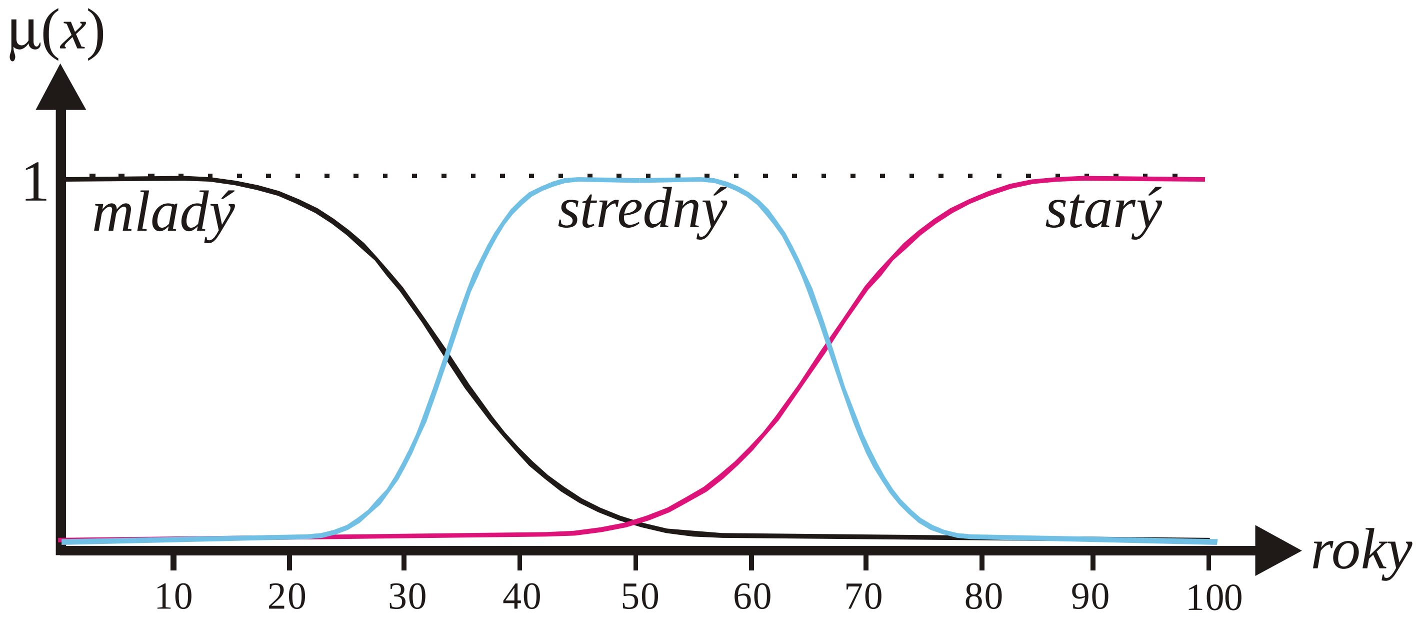
Definícia.
Jazyková (*lingvistická*) *premenná* je určená usporiadanou štvoricou

$$\left(X, T\left(X\right), U, M\right)$$

kde X je meno jazykovej premennej, $T\left(X\right)=\left\{A, B, \ldots\right\}$ je množina slovných hodnôt jazykovej premennej, U je univerzum jazykovej premennej, pričom každá slovná premenná $A \in T\left(X\right)$ je špecifikovaná fuzzy množinou $A=\left\{\left(x, \mu_A\left(x\right)\right); x \in U\right\}$, súbor týchto fuzzy množín tvorí množinu M.

Príklad

Študujme jazykovú premennú *X*=*vek*, definovanú nad univerzom rokov reprezentovaným množinou – uzavretým intervalom U =[0,100]. Množina slovných hodnôt obsahuje tri slovné hodnoty, $T\left(vek\right)=\left\{mlad\acute{y}, stredn\acute{y}, star\acute{y}\right\}$. Každá slovná hodnota je špecifikovaná fuzzy množinou s charakteristickou funkciou



Znázornenie ***zovšeobecneného modus ponens***, ktorý na základe analógie s reláciou $x \in A \rightsquigarrow x \in B\overline{Y}$ vytvára zo vstupnej slovnej premennej *A´* výstupnú slovnú premennú *B´*, pričom sa predpokladá, že slovné premenné *A* a *A´* sú si podobné.

- Uvažujme dve slovné premenné $A \in T(X)$ a $B \in T(Y)$ reprezentované príslušnými fuzzy množinami $A = \left\{ \left(x, \mu_A(x) \right); x \in X \right\}$ a $B = \left\{ \left(y, \mu_B(Y) \right); x \in Y \right\}$.

- Stupeň pravdivosti fuzzy výroku „*x je A*“, formálne vyjadrený vzťahom „$x \in A$“, je popísaný charakteristickou funkciou $\mu_A(x)$; podobne stupeň pravdivosti výroku „$y \in B$“ („*y je B*“) je charakterizovaný charakteristickou funkciou $\mu_B(x)$.

- Tieto dva fuzzy výroky „$x \in A$“ a „$y \in B$“ sú vo vzájomnej (môžeme povedať príčinnej alebo asociačnej) relácii $x \in A \rightsquigarrow x \in B$, podľa ktorej vlastnosť „$x \in A$“ je doprevádzaná výskytom vlastnosti „$y \in B$“ .

Zovšeobecnený modus ponens v relačnom tvare je

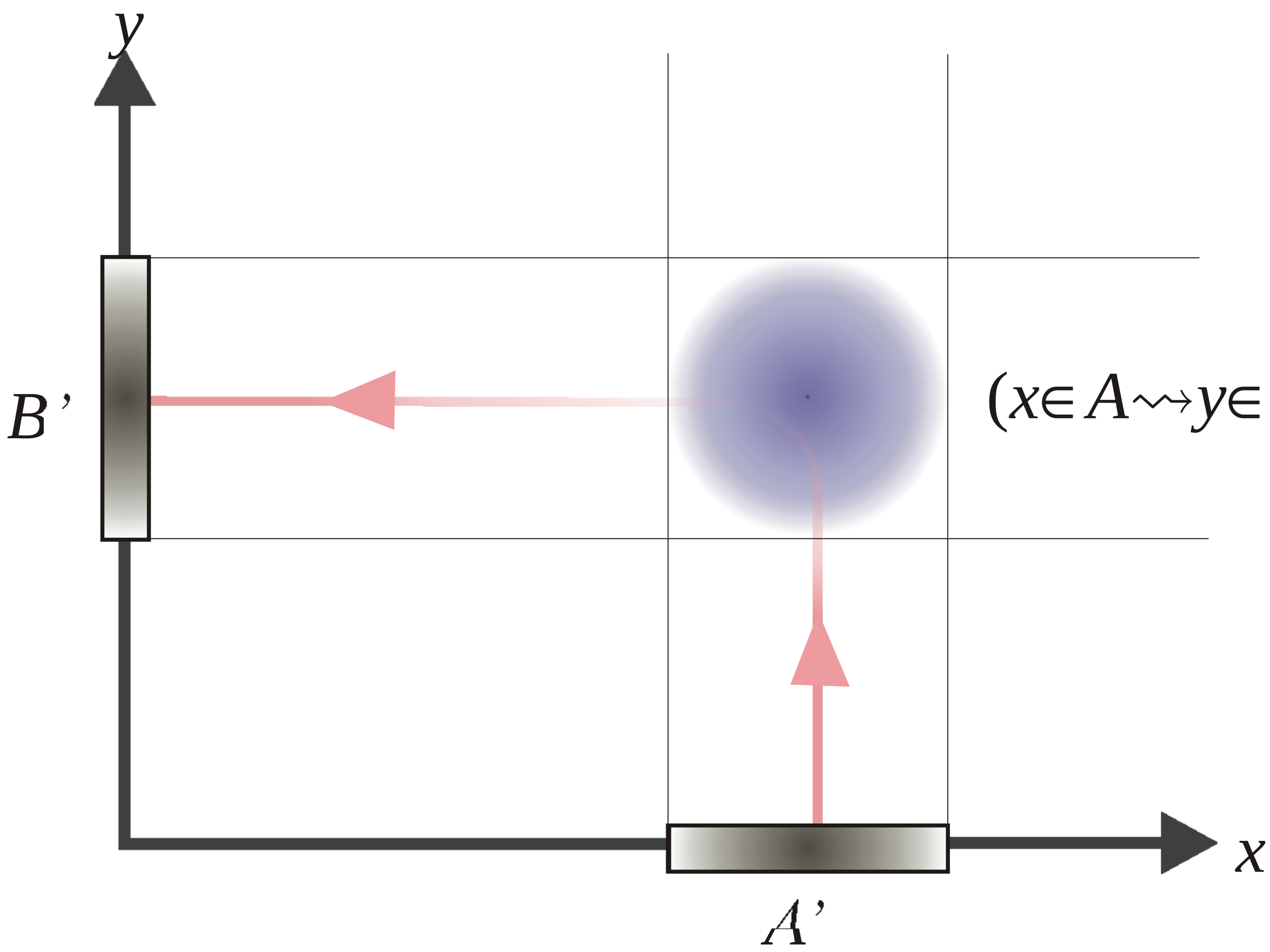
$$\frac{\begin{array}{l} x \in A' \\ x \in A \rightsquigarrow x \in B \end{array}}{x \in B'}$$

kde $A' \in T(X)$ a $B' \in T(Y)$ sú nové slovné premenné, Budeme predpokladať, že nová slovná premenná *A´* (fuzzy množina) je podobná pôvodnej slovnej premennej *A*, čo môžeme vyjadriť pomocou charakteristických funkcií napr. takto $\max_x \left| \mu_A(x) - \mu_{A'}(x) \right| < \delta$, kde δ je dané malé kladné číslo.

Tento predpoklad je veľmi dôležitý k odôvodneniu používania zovšeobecneného modus ponens ako nástroja pre odvodenie výstupnej novej slovnej premennej *B´* zo vstupnej slovnej premennej *A´* pomocou relácii $x \in A \rightsquigarrow x \in B$ (analógie).

Okrajová podmienka: $A = A' \Rightarrow B = B'$

Znázornenie zobrazenia fuzzy slovnej premennej *A′* na slovnú premennú *B′* pomocou fuzzy relácie *R*(*x*,*y*).



$$(x \in A \rightsquigarrow y \in B) =_{def} R \subseteq X \times Y$$

Rezultujúca charakteristická funkcia $\mu_{B'}(y)$ je určená ako kompozícia charakteristickej funkcie $\mu_{A'}(x)$ a charakteristickej funkcie $\mu_R(x,y)$ fuzzy relácie *R*, ktorá reprezentuje vzťah $x \in A \rightsquigarrow x \in B$ (kde symbol $\rightsquigarrow$ znázorňuje fuzzy reláciu *R*)

$$\mu_{B'}(y) = \max_{x \in A} \min\{\mu_{A'}(x), \mu_R(x,y)\}$$

alebo v zjednodušenom tvare $B' = A' \circ R$. Požadujeme, aby kompozícia (11.9a) vyhovovala „*okrajovej podmienke*“, ktorá požaduje, že ak *A´=A* , potom *B´=B*, *t.j.*

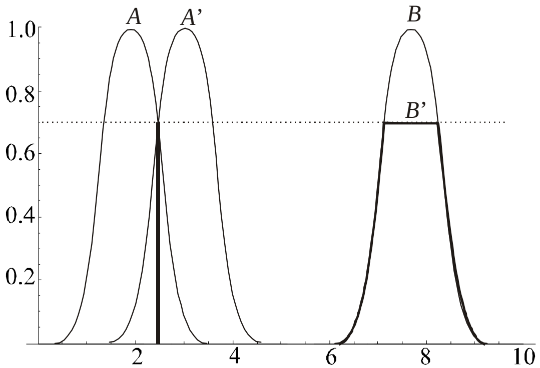
$$\mu_B(y) = \max_{x \in A} \min\{\mu_A(x), \mu_R(x,y)\}$$

Ebrahim Mamdani, University of London

Realizácia relácie *R*

Kompozície $B' = A' \circ R$ pre Mamdaniho špecifikáciu relácie *R*

$$R = \mu_A(x) \wedge \mu_B(y) = min\{\mu_A(x), \mu_B(y)\}$$



Dokážeme, že pre tento typ relácie je okrajová podmienka kompozície splnená.

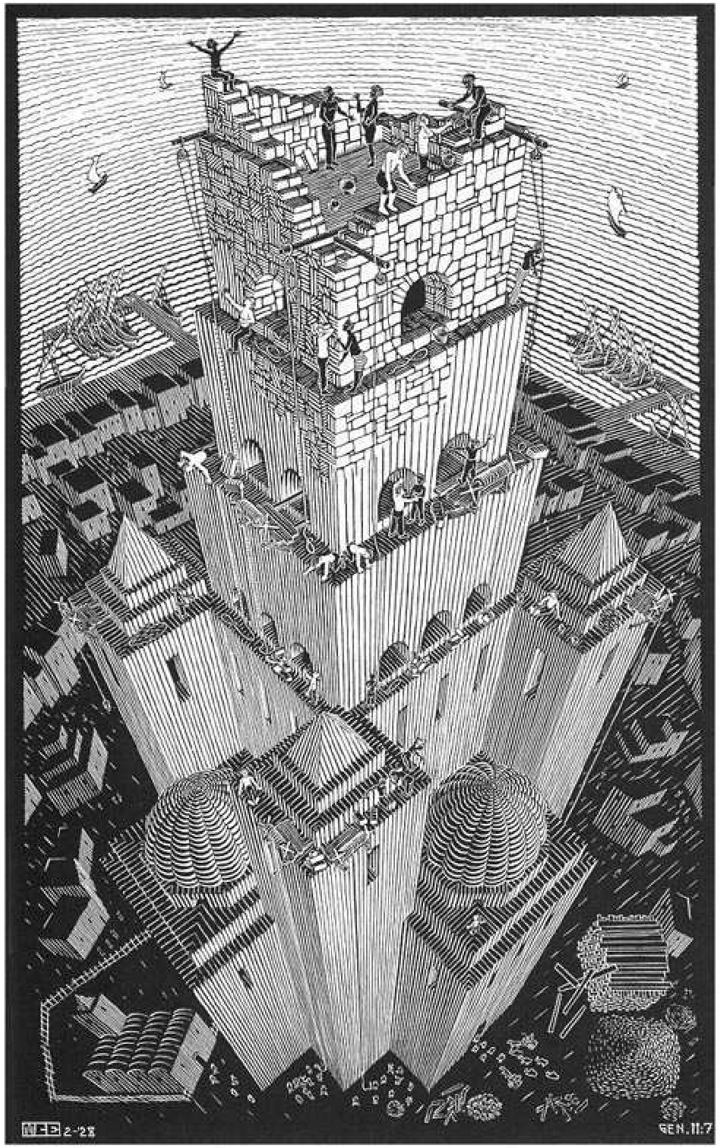
$$\mu_{B'}(y) = \max_{x \in X} \min\left\{\mu_{A'}(x), \min\left\{\mu_A(x), \mu_B(y)\right\}\right\}$$

Táto formula môže byť jednoducho upravená použitím asociatívnosti operácie *min*

$$\mu_{B'}(y) = \min\left\{\underbrace{\max_{x \in X} \min\left\{\mu_{A'}(x), \mu_A(x)\right\}}_{w}, \mu_B(y)\right\}$$

$$= \min\left\{w, \mu_B(y)\right\}$$

kde w sa nazýva *váha pravidla* alebo *stupeň zapálenia pravidla*. Potom rezultujúca charakteristická funkcia $\mu_{B'}(y)$ vyhovuje podmienke $\mu_{B'}(y) \leq \mu_B(y)$, pre A=A' dokonca platí $\mu_{B'}(y) = \mu_B(y)$.



The End