7. prednáška

Reálne funkcie viac premenných

Číselné množiny

Bod v n-rozmernom priestore R^n je vyjadrený pomocou usporiadanej n-tice reálnych čísel

$$A \in R^n \quad \Rightarrow \quad A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$$

Vzdialenosť medzi dvoma bodmi $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ a $B = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ je určená vzťahom

$$d(A,B) = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + \ldots + (b_n - a_n)^2}$$

Vzdialenosť vo všeobecnosti musí vyhovovať týmto podmienkam

1. $d(A,B) \geq 0 \quad \left(d(A,B) = 0 \quad \text{len pre } A = B\right)$
2. $d(A,B) = d(B,A)$ (symetričnosť)
3. $d(A,C) \leq d(A,B) + d(B,C)$ (trojuholníková nerovnosť, rovnosť platí len, ak body A,B a C ležia na priamke)

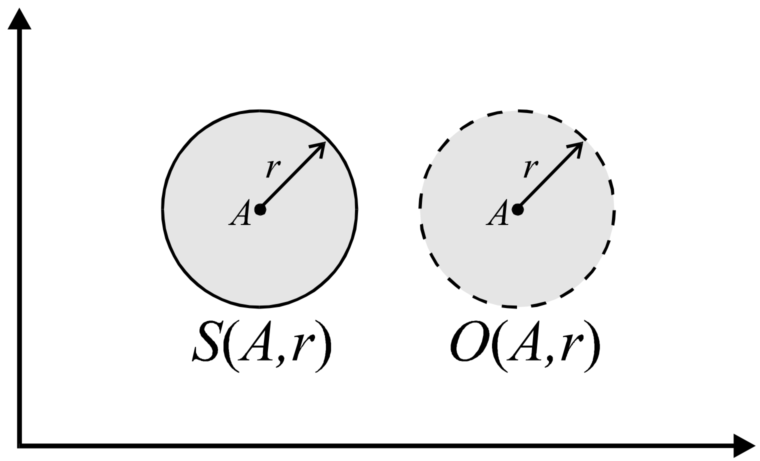
Okolie bodov

Guľa so stredom v bode *A* a polomerom *r* je množina

$$S(A,r) = \left\{ X \in R^n; \quad d(A,R) \leq r \right\}$$

Otvorená guľa so stredom v bode *A* a polomerom *r* je množina

$$O(A,r) = \left\{ X \in R^n; \quad d(A,R) < r \right\}$$



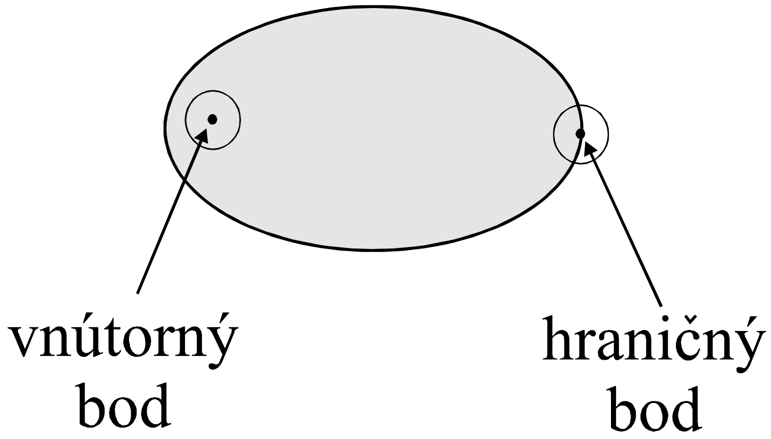
Body v číselnej množine *M* delíme na

1. **vnútorný bod,** je to taký bod *A*, pre ktorý existuje guľa *S*(*A*,*r*), ktorá celá leží v množine *M*

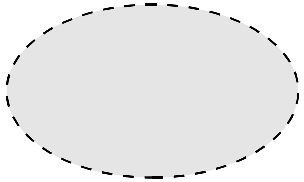
$$S(A,r) \subset M$$

2. **hraničný bod,** je to taký bod A, pre ktorý každá guľa *S*(*A*,*r*) obsahuje tak aspoň jeden bod z množiny M a aspoň jeden bod mimo nej

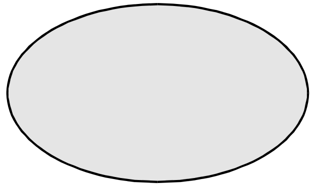
$$S(A,r) \cap M \neq \emptyset \quad \text{a} \quad S(A,r) - M \neq \emptyset$$



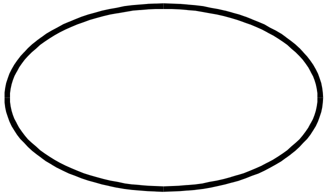
Množina sa nazýva **otvorenou množinou**, ak každý jej bod je vnútorný bod



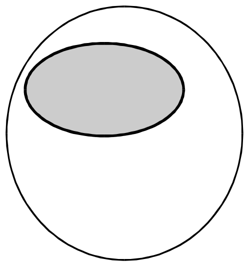
Množina sa nazýva **uzavretou množinou**, ak obsahuje všetky svoje hraničné body.



Hraničné body množiny tvoria jej **hranicu**.



Množina sa nazýva **ohraničenou**, ak je podmnožinou nejakej gule



Limita postupnosti

Definícia. Nech $\{X_m\}_{m=1}^{\infty}$ je postupnosť bodov v R^n. Hovoríme, že táto postupnosť konverguje k bodu A (alebo bod A je limitou postupnosti), ak číselná postupnosť $\{d(A,X_m)\}_{m=1}^{\infty}$ konverguje k nule

$$\lim_{n\to\infty} d(A,X_n)=0 \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} X_n = A$$

Príklad. Nájdite limitu postupnosti

$$\left\{X_n=\left(\frac{n}{n+1},\frac{2n}{3n+1}\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$$

Limitu tejto postupnosti, bod $A=(a_1,a_2)$, nájdeme jednoducho tak, že spočítame limity prvej a druhej komponenty postupnosti

$$a_1 = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$$

$$a_2 = \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{3n+1} = \frac{2}{3}$$

Alebo

$$\lim_{n\to\infty} X_n = A = \left(1, \frac{2}{3}\right)$$

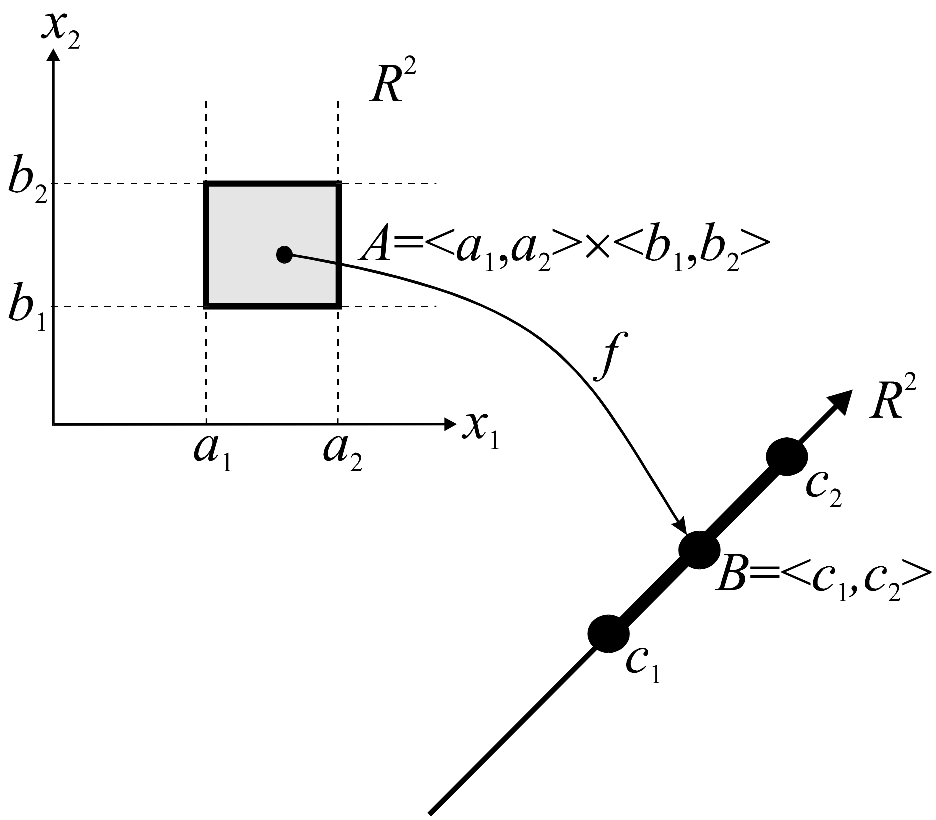
Reálna funkcia *n* premenných

Reálna funkcia *n* premenných je zobrazenia takto

$$f\ :\ A \subset R^n \to B \subset R$$

kde *A* je definičný obor funkcie a *B* je obor funkčných hodnôt. Funkciu zapisujeme

$$y = f\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)$$


x_2
R^2
b_2
b_1
$A=\langle a_1,a_2\rangle\times\langle b_1,b_2\rangle$
f
x_1
a_1
a_2
R^2
c_2
$B=\langle c_1,c_2\rangle$
c_1

Príklad. Nájdite definičný obor funkcie

$$f(x,y)=\sqrt{4-x^2-y^2}$$

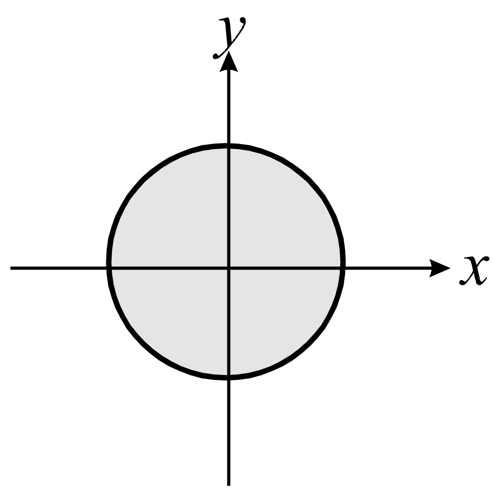
Výraz pod odmocninou musí byť nezáporný

$$4-x^2-y^2\geq 0$$

Riešením tejto nerovnice dostaneme, že obor definície funkcie f je číselná množina

$$A=\left\{X=(x,y)\,;\,x^2+y^2\leq 4\right\}$$

Táto množina je uzavretá a obsahuje všetky body ležiace v kruhu so stredom v bode (0,0) a s polomerom 2



Definícia. Grafom funkcie $f : A \subset R^n \to B \subset R$ nazývame množinu bodov

$$G_f = \left\{ X = \left(x_1, x_2, \ldots, x_n, y = f(X) \right) ;\ X \in A \right\}$$

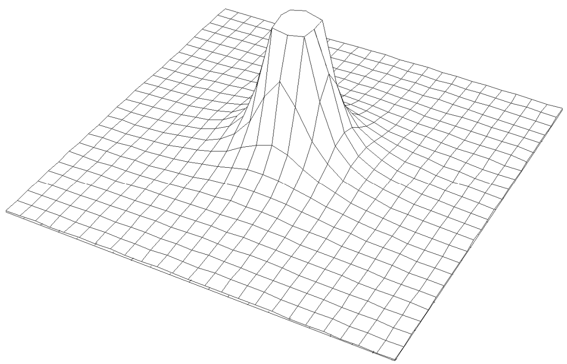
Príklad. Nakreslite graf funkcie

$$f(x,y) = \frac{1}{x^2 + y^2}$$

Obor definície tejto funkcie je celá "rovina" R^2 okrem počiatku (0,0), funkčné hodnoty sú nezáporné

$$A = R^2 - (0,0)$$

$$B = (0,\infty)$$



Limita funkcie

Definícia. Nech funkcia $z = f(X)$ je definovaná v nejakom okolí bodu A. Potom hovoríme, že funkcia $f(X)$ má v bode A limitu rovnú b,

$$\lim_{X \to A} f(X) = b,$$

ak pre každú postupnosť $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$, kde $X_n \in D_f$ a $X_n \neq A$, ktorá konverguje k bodu A, $\lim_{n\to\infty} X_n = A$, platí

$$\lim_{n\to\infty} f(X_n) = b.$$

Poznámky

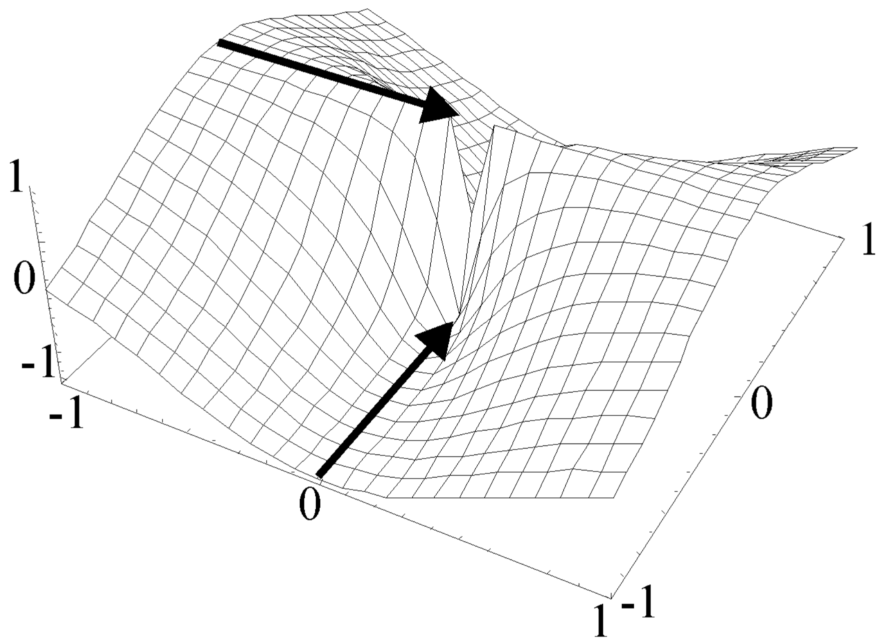
1. V definícii je použitý pojem *okolie* bodu A, pod týmto pojmom rozumieme tvorenú guľu so stredom v bode A a s nejakým polomerom r.

2. V prípade, že existujú také dve postupnosti, že funkcia má pre ne rôzne limity, potom hovoríme, že funkcia nemá limitu v bode A.

Príklad. Zistite, či funkcia

$$f(x,y)=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$$

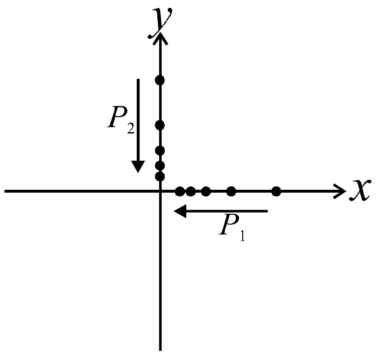
má v bode A=(0,0) limitu.



Definujme si nasledujúce dve postupnosti

$$P_1 = \left\{\left(\frac{1}{n},0\right)\right\}_{n=1}^{\infty} \quad \text{a} \quad P_2 = \left\{\left(0,\frac{1}{n}\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$$

ktoré majú rovnakú limitu A=(0,0), líšia sa len spôsobom približovania k tomuto bodu



$$P_1 \quad : \quad \lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n},0\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{(1/n)^2}{(1/n)^2+0} = \lim_{n\to\infty} 1 = 1$$

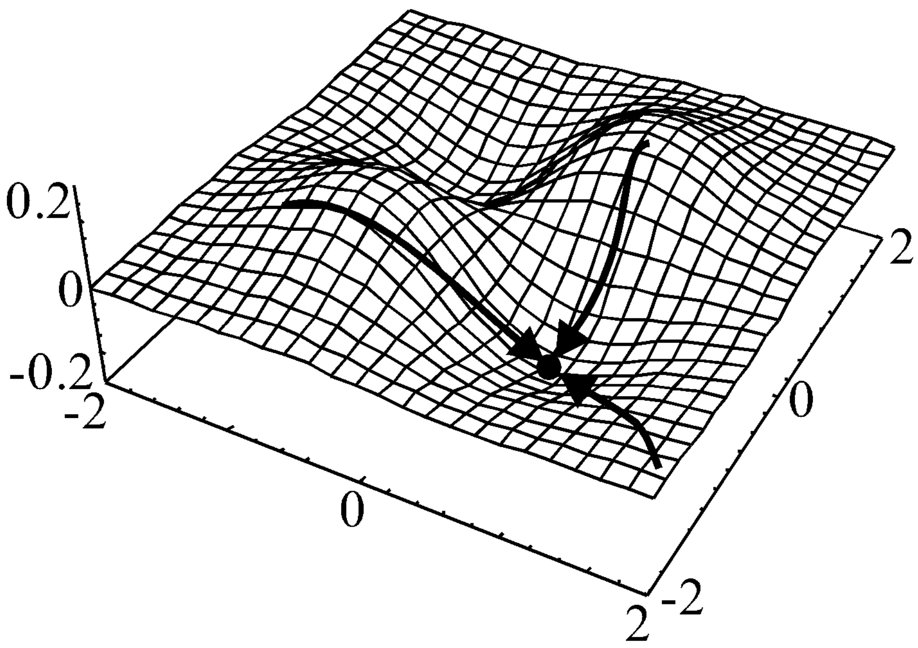
$$P_2 \quad : \quad \lim_{n\to\infty} f\left(0,\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{-(1/n)^2}{0+(1/n)^2} = \lim_{n\to\infty} (-1) = -1$$

To znamená, že funkcia nemá v bode A=(0,0) limitu.

Spojitá funkcie

Definícia. Funkcia $z = f(X)$ je *spojitá* v bode A, ak je v tomto bode definovaná a platí

$$\lim_{X \to A} f(X) = f(A)$$



Poznámka. Pre funkciu $z = f(X)$ spojitú v bode A, jej limita v bode A nezávisí od spôsobu blíženia sa k tomuto bodu a jej hodnota sa rovná funkčnej hodnote v tomto bode.

Parciálne derivácie

Majme funkciu dvoch premenných $z = f(x,y)$, predpokla-dajme, že druhá premenná je zafixovaná, $y = y_0$, potom dostaneme funkciu jednej premennej

$$z = g(x) = f(x, y_0)$$

Ak táto funkcia má deriváciu $g'(x_0)$, potom hovoríme, že funkcia $z = f(x,y)$ má deriváciu v bode $A = (x_0, y_0)$.

Definícia. Nech funkcia $z = f(x,y)$ je definovaná v nejakom okolí bodu $A = (x_0, y_0)$. Ak existuje limita

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

nazývame ju *parciálnou deriváciou* podľa x v bode $A = (x_0, y_0)$ a zapisujeme

$$f'_x(A) \text{ alebo } f'_x(x_0, y_0) \text{ alebo } \frac{\partial f(A)}{\partial x} \text{ alebo } \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}$$

Analogickým spôsobom sa definuje parciálna derivácia funkcie $z = f(x, y)$ podľa y v bode $A = (x_0, y_0)$

$$f'_y(x_0, y_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}$$

Poznámky

1. Z definície parciálnych derivácií vyplýva, že ich výpočet sa realizuje podobne ako výpočet obyčajných derivácií tak, že sa predpokladá konštantnosť druhej premennej.

2. Zovšeobecnenie parciálnych derivácií pre viac ako dve premenné je priamočiare. Tak napríklad, parciálna derivácia funkcie $u = f(x, y, z)$ v bode $A = (x_0, y_0, z_0)$ podľa premennej x je definovaná takto

$$f'_x(x_0, y_0, z_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0, z_0) - f(x_0, y_0, z_0)}{\Delta x}$$

3. Vo všeobecnosti možno povedať, že parciálna derivácia funkcie n-premenných $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ v bode $A = \left(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0\right)$ podľa premennej x_{i} sa počíta tak, že ostatné premenné $x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots x_n$ sa zafixujú v bodoch $x_1 = x_1^0, \ldots, x_i = x_i^0$, $x_{i+1} = x_{i+1}^0, \ldots, x_n = x_n^0$ a daná parciálna derivácia sa počíta ako obyčajná parciálna derivácia podľa premennej x_{i}.

Príklad. Vypočítajte parciálne derivácie funkcie

$$f(x,y) = xy - x^2 + y^3$$

v bode $A = (x_0, y_0)$.

$$f'_x(x_0, y_0) = y_0 - 2x_0, \quad f'_y(x_0, y_0) = x_0 - 3y_0^2$$

Vyššie parciálne derivácie

Parciálne derivácie funkcie $f(x,y)$ môžeme formálne chápať, ako nové funkcie

$$F(x,y) = f'_x(x,y)$$

$$G(x,y) = f'_y(x,y)$$

Parciálne derivácie týchto dvoch funkcií sa interpretujú ako druhé parciálne derivácie funkcie $f(x,y)$

$$f''_{xx}(x,y)=\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$$

$$f''_{xy}(x,y)=\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

$$f''_{yx}(x,y)=\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$$

$$f''_{yy}(x,y)=\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

Veta. Ak funkcia $f(x,y)$ má v bode $A=(x_0,y_0)$ zmiešané druhé parciálne derivácie $f''_{xy}(x_0,y_0)$ a $f''_{yx}(x_0,y_0)$, pričom sú v bode $A=(x_0,y_0)$ spojité, potom tieto zmiešané parciálne derivácie sú si rovné

$$\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial y\partial x}$$

Príklad. Vypočítajte prvé a druhé parciálne derivácie funkcie

$$f(x,y) = sin(x-2y) + x^2y^3$$

Prvé parciálne derivácie majú tvar

$$\frac{\partial f}{\partial x} = cos(x-2y) + 2xy^3$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = -2\,cos(x-2y) + 3x^2y^2$$

Druhé parciálne derivácie spočítame tak, že budeme parciálne derivovať 1. parciálne derivácie

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(cos(x-2y)+2xy^3\right) = -sin(x-2y)+2y^3$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(cos(x-2y)+2xy^3\right) = 2\,sin(x-2y)+6xy^2$$

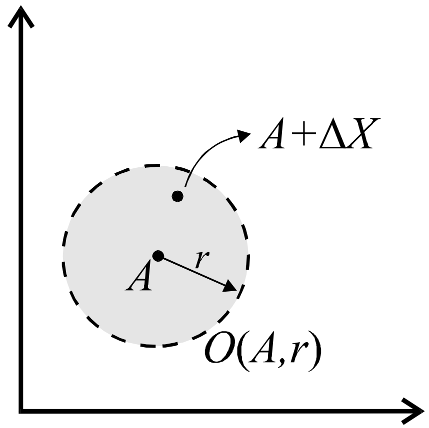
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-2\,cos(x-2y)+3x^2y^2\right) = 2\,sin(x-2y)+6xy^2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(-2\,cos(x-2y)+3x^2y^2\right) = 4\,sin(x-2y)+6x^2y$$

Zmiešané druhé parciálne derivácie sú si rovné, čo potvrdzuje predchádzajúcu vetu.

Totálny diferenciál

Nech funkcia $y = f(X) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ je definovaná v nejakom okolí bodu $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$.
Predpokladajme, že bod $A + \Delta X = A + (\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n)$ leží v tomto okolí.



Rozdiel

$$\Delta f(A) = f(A + \Delta X) - f(A)$$

nazývame *diferenciou* funkcie *f* v bode *A* pre prírastok ΔX.

Definícia. Funkciu $f(X)$ definovanú v okolí bodu A nazývame *diferencovateľnou* v bode A ak diferenciu $\Delta f(A)$ môžeme vyjadriť v tvare

$$\Delta f(A) = \underbrace{d_1\Delta x_1 + d_2\Delta x_2 + \ldots + d_n\Delta x_n}_{df(A)} + \omega(\Delta X)\cdot|\Delta X|$$

kde $\omega(\Delta X)$ je spojitá funkcia vyhovujúca podmienke

$$\lim_{|\Delta X|\to 0} \omega(\Delta X) = 0$$

pre $|\Delta X| = \sqrt{(\Delta x_1)^2 + (\Delta x_2)^2 + \ldots + (\Delta x_n)^2}$. Výraz $df(A)$ sa nazýva *totálny diferenciál* funkcie f v bode A pre prírastok ΔX.

Dotyková rovina ku grafu funkcie

Pre funkciu dvoch premenných $z = f(x,y)$ predpoklad diferencovateľnosti v bode $A = (x_0, y_0)$ znamená, že v tomto bode existuje dotyková rovina σ ku grafu funkcie

$$\sigma \quad : \quad z = f(x_0, y_0) + d_1\underbrace{(x - x_0)}_{\Delta x} + d_2\underbrace{(y - y_0)}_{\Delta y}$$

ktorá po jednoduchých úpravách má tvar

$$\sigma \quad : \quad d_1 x + d_2 y + (-1)z + \left(-d_1 x_0 - d_2 y_0 + f(x_0, y_0)\right) = 0$$

Veta. Ak je funkcia $z = f(x,y)$ diferencovateľná v bode $A = (x_0, y_0)$, potom v tomto bode má dotykovú rovinu σ ku grafu funkcie.

Veta. Ak je funkcia $y = f(X)$ diferencovateľná v bode *A*, potom je v tomto bode spojitá.

Z predpokladu diferencovateľnosti funkcie $y = f(X)$ v bode *A* vyplýva

$$f(A+\Delta X) - f(A) = d_1 \Delta x_1 + d_2 \Delta x_2 + \ldots + d_n \Delta x_n + \omega(\Delta X) \cdot |\Delta X|$$

Potom na základe vlastnosti funkcie $\omega(\Delta x)$

$$\lim_{|\Delta X| \to 0} \omega(\Delta X) = 0$$

ľahko dokážeme, že

$$\lim_{|\Delta X| \to 0} f(A+\Delta X) = f(A)$$

t.j. funkcia $y = f(X)$ je spojitá v bode *A*.

Veta. Ak je funkcia $y = f(X)$ diferencovateľná v bode A, potom má v tomto bode všetky prvé parciálne derivácie a totálny diferenciál je určený vzťahom

$$df(A) = \frac{\partial f(A)}{\partial x_1}\Delta x_1 + \frac{\partial f(A)}{\partial x_2}\Delta x_2 + \ldots + \frac{\partial f(A)}{\partial x_n}\Delta x_n$$

Z predpokladu diferencovateľnosti funkcie $y = f(X)$ v bode A vyplýva, že prírastok funkcie je určený vzťahom

$$f(A + \Delta X) - f(A) = d_1\Delta x_1 + d_2\Delta x_2 + \ldots + d_n\Delta x_n + \omega(\Delta X)|\Delta X|$$

Položme v tejto rovnici $\Delta x_2 = \Delta x_3 = \ldots = \Delta x_n = 0$, potom predchádzajúci vzťah sa podstatne zjednoduší a môže byť prepísaný do tvaru

$$\frac{f(a_1 + \Delta x_1, a_2, \ldots, a_n) - f(a_1, a_2, \ldots, a_n)}{\Delta x_1} = d_1 + \omega(\Delta X)\frac{|\Delta x_1|}{\Delta x_1}$$

Ak vykonáme limitu $\Delta x_1 \to 0$, potom

$$d_1 = \frac{\partial f(A)}{\partial x_1}$$

Podobný vzťah by sme dostali aj pre ostatné koeficienty d_i.

Diferenciál druhého rádu

Zovšeobecnenie totálne diferenciálu je diferenciál druhého rádu definovaný takto

$$d^2 f(A) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f(A)}{\partial x_i \partial x_j} \Delta x_i \Delta x_j$$

Pre funkciu dvoch premenných $z = f(x,y)$ diferencál druhého rádu v bode $A = (x_0, y_0)$ má tento tvar

$$d^2 f(A) = \frac{\partial^2 f(A)}{\partial x^2} (\Delta x)^2 + 2 \frac{\partial^2 f(A)}{\partial x \partial y} \Delta x \Delta y + \frac{\partial^2 f(A)}{\partial y^2} (\Delta y)^2$$

Definícia. Funkciu *f*(*X*) definovanú v okolí bodu *A* nazývame *dvakrát diferencovateľnou* v bode *A* ak diferenciu $\Delta f(A)$ môžeme vyjadriť v tvare

$$\Delta f(A) = df(A) + \frac{1}{2} d^2 f(A) + \sum_{k,l=1}^{n} \omega_{kl}(\Delta X)|\Delta x_k||\Delta x_l|$$

kde $\omega_{kl}(\Delta X)$ sú spojité funkcie vyhovujúce podmienke

$$\lim_{|\Delta X| \to 0} \omega_{kl}(\Delta X) = 0$$

Približný výpočet funkčných hodnôt pomocou totálneho diferenciálu

Príklad. Pomocou totálneho diferenciálu spočítajte približne výraz $\sqrt{(3.02)^2 + (3.98)^2}$.

Výraz prepíšeme do tvaru

$$\sqrt{(3+0.02)^2 + (4-0.02)^2}$$

Jeho približný výpočet uskutočníme pomocou totálneho diferenciálu funkcie

$$f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

v bode $A = (x_0, y_0) = (3,4)$ a pre diferencie $\Delta x_1 = 0.02$ a $\Delta x_2 = -0.02$. Pre parciálne derivácie funkcie f v bode A platí

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f(A)}{\partial x} = \frac{3}{5}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f(A)}{\partial y} = \frac{4}{5}$$

Použijeme všeobecnú formulu, ktorá aproximuje prírastok funkcie pomocou totálneho diferenciálu

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \approx f(x_0, y_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}\Delta y$$

Pre študovaný konkrétny prípad platí

$$\sqrt{(3+0.02)^2 + (4-0.02)^2} \approx \sqrt{(3)^2 + (4)^2} + \frac{3}{5}0.02 + \frac{4}{5}(-0.02)$$

$$= 5 + \frac{0.06 - 0.08}{5} = 5 - \frac{0.02}{5} =$$

$$= 5 - 0.004 = 4.996$$

Príklad. Pomocou totálneho diferenciálu zostrojte formulu pre odhad chyby pri výpočte nejakej veličiny, ktorá je funkciou dvoch nezávislých merateľných veličín určených s určitou chybou.

Nech počítaná veličina je určená funkciou $z = f(x,y)$. Budeme počítať veličinu z pre

$$x = x_0 \pm \Delta x, \quad y = y_0 + \Delta y$$

kde Δx a Δy sú chyby pri určení (meraní) nezávislých veličín x a y. Použijeme všeobecnú formulu pre približné vyjadrenie prírastku funkcie pomocou totálneho diferenciálu

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \approx f(x_0, y_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}\Delta y$$

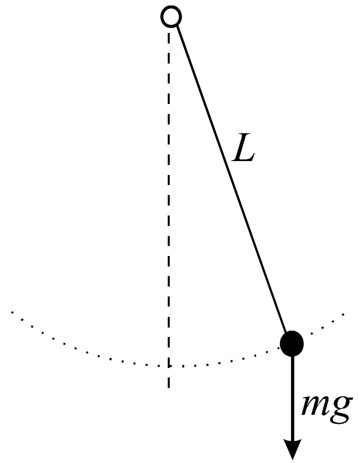
Použijeme všeobecnú formulu, ktorá aproximuje prírastok funkcie pomocou totálneho diferenciálu

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \approx f(x_0, y_0) \pm \Delta f$$

kde Δf je tzv. maximálna chyba výpočtu veličiny z, ktorá je spôsobená chybami pri určení nezávislých veličín x a y

$$\Delta f = \left|\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}\Delta x\right| + \left|\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}\Delta y\right|$$

Príklad. Matematické kyvadlo je hmotný bod o hmotnosti m , ktorý je zavesený na tuhom vlákne dĺžky L, pričom jeho hmotnosť je zanedbateľná.



Perióda matematického kyvadla je určená vzťahom

$$T = 2\pi\left(\frac{L}{g}\right)^{1/2}$$

kde g je gravitačné zrýchlenie. Riešením tohto vzťahu vzhľadom ku gravitačnému zrýchleniu g dostaneme

$$g = g(L,T) = L\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2$$

Predpokladajme, že chceme gravitačné zrýchlenie chceme určiť experimentálne pomocou matematického kyvadla, ktorého parametre sú $L = 4m \pm 1cm$ a $T = 4.01sec \pm 0.01sec$. S akou presnosťou sme schopní určiť gravitačné zrýchlenie?

$$\frac{\partial g}{\partial L} = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{\partial g}{\partial L}\right)_{\substack{T=1\\ L=4}} = \left(\frac{6.28}{4}\right)^2 = 2.46$$

$$\frac{\partial g}{\partial T} = -\frac{8\pi^2 L}{T^3} \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{\partial g}{\partial T}\right)_{\substack{T=1\\ L=4}} = \frac{8 \cdot (3.14)^2 \cdot 4}{(4)^3} = 4.93$$

Chyby merania nezávislých veličín sú

$$\Delta L = 0.01\, m \quad \text{a} \quad \Delta T = 0.01\, sec$$

Potom maximálna chyba gravitačného zrýchlenia má hodnotu

$$\Delta g = |2.46 \cdot 0.01| + |4.93 \cdot 0.01| = 0.07$$

Experimentálne gravitačné zrýchlenie určíme pomocou vzťahu

$$g = L\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad g = 4\left(\frac{6.28}{4.01}\right)^2 = 9.81$$

To znamená, že gravitačné zrýchlenie je experimentálne určené s chybou $g = 9.81 \pm 0.07\ m/sec^2$.

Lokálne extrémy funkcií dvoch premenných

Definícia. Funkcia $f(X)$ má v bode A *lokálne minimum* (*maximum*), ak existuje také okolie bodu A, že pre každý bod X z tohto okolia platí

$$f(X) \geq f(A) \qquad \left(f(X) \leq f(A)\right)$$

Ak rovnosť platí len pre $X=A$, potom hovoríme o *ostrom lokálnom minime* (*maxime*)

Lokálne extrémy (maximá a minimá) funkcií, ktoré majú prvé a druhé derivácie, môžeme nájsť pomocou nasledujúcich dvoch viet.

Veta 1 (nutná podmienka). Ak funkcia $z = f(x,y)$ má v bode $A=(x_0,y_0)$ lokálny extrém a má v tomto bode prvé parciálne derivácie, potom

$$\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x} = 0 \quad a \quad \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y} = 0$$

$A=(x_0,y_0)$ v ktorom má funkcia $z = f(x,y)$ nulové parciálne derivácie

$$\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x} = \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y} = 0$$

sa nazýva *stacionárny bod*.

Hessián funkcie $z = f(x,y)$ bode $A = (x_0, y_0)$ je matica obsahujúca druhé parciálne derivácie

$$H(A) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f(A)}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f(A)}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial^2 f(A)}{\partial y \partial x} & \dfrac{\partial^2 f(A)}{\partial y^2} \end{pmatrix}$$

Definícia. Symetrickú maticu

$$M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}$$

nazývame *pozitívne definitnú* (*negatívne definitnú*) ak pre ľubovolné čísla ξ_1 a ξ_2 platí

$$\sum_{i,j=1}^{2} m_{ij}\xi_i\xi_j \geq 0 \qquad \left(\sum_{i,j=1}^{2} m_{ij}\xi_i\xi_j \leq 0 \right)$$

pričom rovnosť platí len pre nulové čísla $\xi_1 = 0$ a $\xi_2 = 0$.

Príklad. Dokážte, že matica

$$M = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

je pozitívne definitná.

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^{2} m_{ij}\xi_i\xi_j &= m_{11}\xi_1^2 + 2m_{12}\xi_1\xi_2 + m_{22}\xi_2^2 \\ &= 4\xi_1^2 + 2\xi_1\xi_2 + 3\xi_2^2 \\ &= \xi_1^2 + 2\xi_1\xi_2 + \xi_2^2 + 3\xi_1^2 + 2\xi_2^2 \\ &= (\xi_1 + \xi_2)^2 + 3\xi_1^2 + 2\xi_2^2 \geq 0 \end{aligned}$$

Lemma (Sylvestrova). Symetrická matica

$$M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}$$

je pozitívne definitná (negatívne definitná) vtedy a len vtedy, ak

$$m_{11} > 0, \quad (m_{11} < 0), \quad \begin{vmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{12} & m_{22} \end{vmatrix} = m_{11}m_{22} - m_{12}^2 > 0$$

Výraz z definície pozítvnej definitnosti môžeme písať v tvare (ze predpokladu, že $m_{11} \neq 0$)

$$\sum_{i,j=1}^{2} m_{ij}\xi_i\xi_j = m_{11}\xi_1^2 + 2m_{12}\xi_1\xi_2 + m_{22}\xi_2^2$$

$$= \frac{m_{11}^2\xi_1^2 + 2m_{11}m_{12}\xi_1\xi_2 + m_{11}m_{22}\xi_2^2}{m_{11}}$$

$$= \frac{m_{11}^2\xi_1^2 + 2m_{11}m_{12}\xi_1\xi_2 + m_{12}^2\xi_2^2 + m_{11}m_{22}\xi_2^2 - m_{12}^2\xi_2^2}{m_{11}}$$

$$= \frac{(m_{11}\xi_1 + m_{12}\xi_2)^2 + \left(m_{11}m_{22} - m_{12}^2\right)\xi_2^2}{m_{11}}$$

Pravá strane je kladná (záporná) pre $m_{11} > 0$ ($m_{11} < 0$) a $m_{11}m_{22} - (m_{12})^2 > 0$

Veta 2 (postačujúca podmienka). Ak funkcia $z = f(x,y)$ má v bode $A = (x_0, y_0)$ prvé a druhé parciálne derivácie, pričom tento bod je stacionárny a Hessián $H(A)$ je pozitívne (negatívne) definitný, potom funkcia má v bode A minimum (maximum).

Podrobný rozpis Vety 2

A. Funkcia $z = f(x,y)$ má v bode $A = (x_0, y_0)$ **minimum**, ak platí

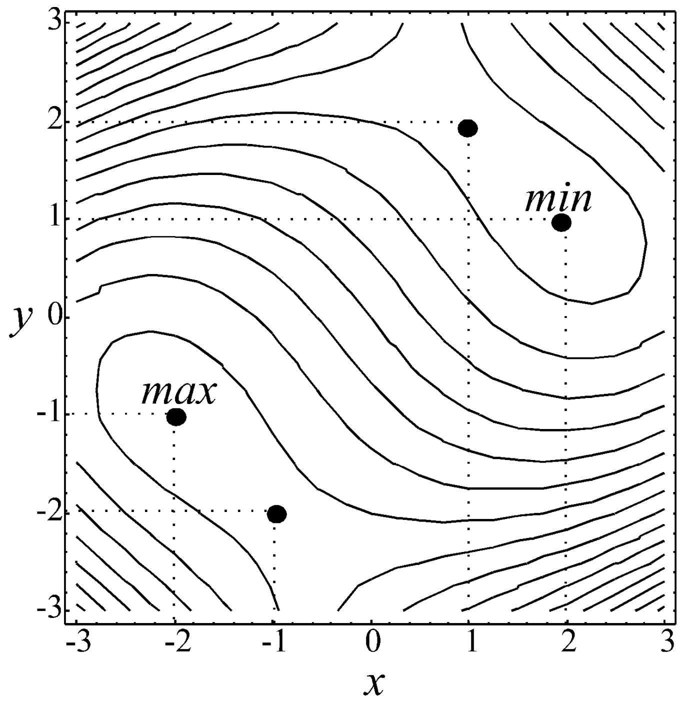
1. $\dfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x} = 0, \quad \dfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y} = 0$
2. $\boxed{\dfrac{\partial^2 f(A)}{\partial x^2} > 0,} \quad \dfrac{\partial^2 f(A)}{\partial x^2}\dfrac{\partial^2 f(A)}{\partial y^2} - \left(\dfrac{\partial^2 f(A)}{\partial x \partial y}\right)^2 > 0$

B. Funkcia $z = f(x,y)$ má v bode $A = (x_0, y_0)$ **maximum**, ak platí

1. $\dfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x} = 0, \quad \dfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y} = 0$
2. $\boxed{\dfrac{\partial^2 f(A)}{\partial x^2} < 0,} \quad \dfrac{\partial^2 f(A)}{\partial x^2}\dfrac{\partial^2 f(A)}{\partial y^2} - \left(\dfrac{\partial^2 f(A)}{\partial x \partial y}\right)^2 > 0$

Príklad. Nájdite lokálne extrémy funkcie

$$z = f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y + 1$$

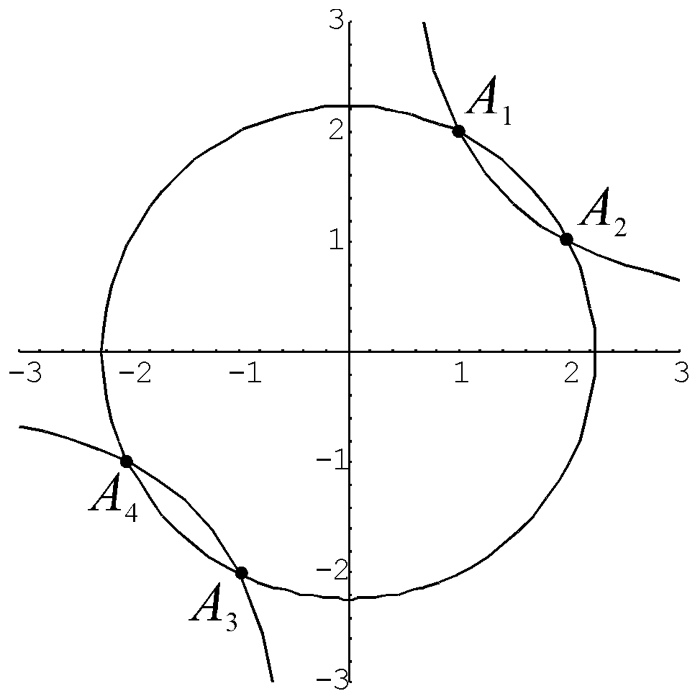


1. krok - stacionárne body

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + 3y^2 - 15 = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 6xy - 12 = 0$$

Tieto rovnice prepíšeme do tvaru

$$x^2 + y^2 = 5, \quad y = \frac{2}{x}$$



$$x^2 + \frac{4}{x^2} - 5 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^4 - 5x^2 + 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad z^2 - 5z + 4 = 0$$

$$z_{1,2} = \begin{cases} 1 \\ 4 \end{cases}$$

Funkcia má štyri stacionárne body

$$A_1 = (1,2), \quad A_2 = (2,1), \quad A_3 = (-1,-2), \quad A_4 = (-2,-1)$$

2. krok - špecifikácia stacionárnych bodov

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & 6y \\ 6y & 6x \end{pmatrix}$$

$$H(A_1) = H(1,2) = \begin{pmatrix} 6 & 12 \\ 12 & 6 \end{pmatrix}, \qquad H(A_2) = H(2,1) = \begin{pmatrix} 12 & 6 \\ 6 & 12 \end{pmatrix}$$

$$H(A_3) = H(-1,-2) = \begin{pmatrix} -6 & -12 \\ -12 & -6 \end{pmatrix}, \quad H(A_4) = H(-2,-1) = \begin{pmatrix} -12 & -6 \\ -6 & -12 \end{pmatrix}$$

Hessián $H(A_2)$ je pozitívne definitný a $H(A_4)$ je negatívne definitný. Potom dva stacionárne body sú klasifikované podľa Vety 2 takto: A_2 je minimum a A_4 je maximum, zostávajúce body A_1 a A_3 nie sú podľa vety 2 klasifikované.

Gradient funkcie

Študujme funkciu

$$f : R^n \to R$$

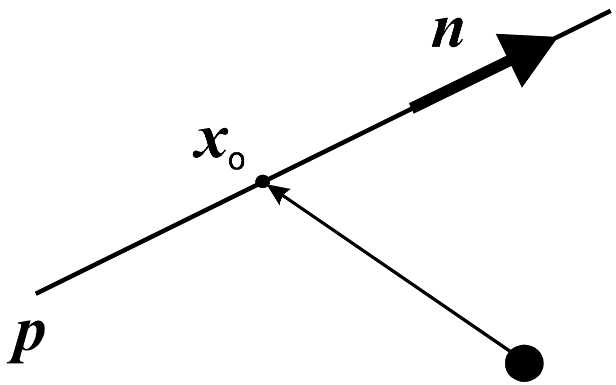
kde

$$y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(\boldsymbol{x})$$

Definujme si funkciu 1-premennej

$$F(\lambda) = f(\boldsymbol{x}_o + \lambda \boldsymbol{n})$$

kde $\boldsymbol{x}_{\mathrm{o}}=\left(x_1^o, x_2^o, \ldots, x_n^o\right) \in R^n$ je daný bod (vektor) a $\boldsymbol{n}=\left(n_1, n_2, \ldots, n_n\right) \in R^n$ je normalizovaný smerový vektor ($|\boldsymbol{n}|=1$), premenná λ je reálny parameter. Funkcia $F(\lambda)$ popisuje "zúženie" funkcie $f(\boldsymbol{x})$ na priamku p definovanú bodom $\boldsymbol{x}_{\mathrm{o}}$ a smerom $\boldsymbol{n}$.



Derivácie tejto funkcie podľa premennej λ je určená pomocou formule pre výpočet derivácie zloženej funkcie

$$F'(\lambda) = \frac{\partial f(\boldsymbol{x}_0 + \lambda \boldsymbol{n})}{\partial x_1} n_1 + \frac{\partial f(\boldsymbol{x}_0 + \lambda \boldsymbol{n})}{\partial x_2} n_2 + \ldots + \frac{\partial f(\boldsymbol{x}_0 + \lambda \boldsymbol{n})}{\partial x_n} n_n$$

Zavedieme symbol – gradient funcie $f(x_0)$ v bode x_0

$$\text{grad } f(\boldsymbol{x}_0) = \left(\frac{\partial f(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_1}, \frac{\partial f(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_n} \right)$$

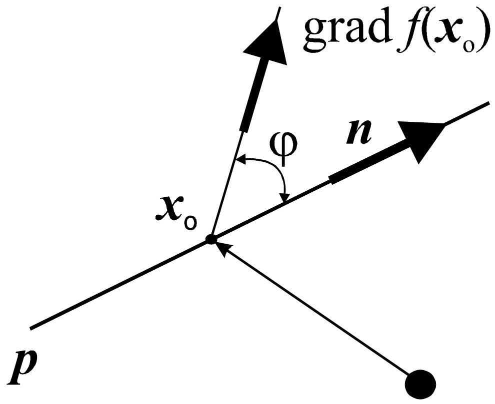
Ak v tomto výraze položíme $\lambda=0$, potom dostaneme tzv. deriváciu funkcie f v bode $\boldsymbol{x}_0$ a v smere $\boldsymbol{n}$

$$F'(0) = \operatorname{grad} f(\boldsymbol{x}_0) \cdot \boldsymbol{n}$$

ktorý budeme nazývať gradient funkcie f v bode $\boldsymbol{x}_0$, ktorého komponenty sú 1. parciálne derivácie vzhľadom k premenným $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Deriváciu v smere prepíšeme pomocou skalárneho súčinu takto

$$F'(0) = \operatorname{grad} f(\boldsymbol{x}_o) \cdot \boldsymbol{n} = \left|\operatorname{grad} f(\boldsymbol{x}_o)\right| cos(\varphi)$$

kde φ je uhol, ktorý medzi smerom $\boldsymbol{n}$ a grad $f(\boldsymbol{x}_o)$



Geometrická interpretácia gradientu

Budeme študovať nasledujúce dva limitné prípady pre deriváciu v smere, a to (1) smer je paralelný s gradientom (φ=0) a (2) smer je antiparalelný s gradientom (φ=π)

$$F(0)\big|_{\varphi=0} = +\left|\text{grad } f(\boldsymbol{x}_o)\right| > 0$$

$$F(0)\big|_{\varphi=\pi} = -\left|\text{grad } f(\boldsymbol{x}_o)\right| < 0$$

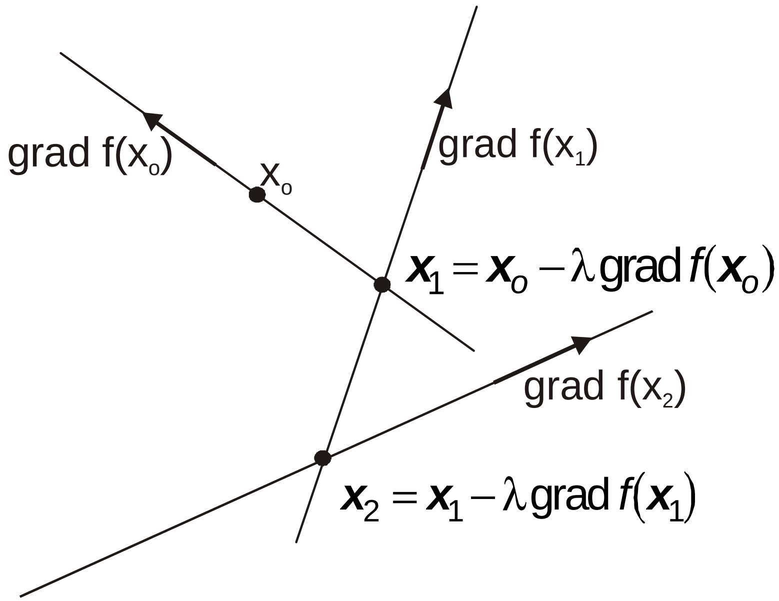
V smere gradientu grad $f(\boldsymbol{x}_\mathrm{o})$ funkcia $f(\boldsymbol{x})$ **najrýchlejšie rastie**, podobne, v opačnom smere -grad $f(\boldsymbol{x}_\mathrm{o})$ funkcia $f(\boldsymbol{x})$ **najrýchlejšie klesá**.

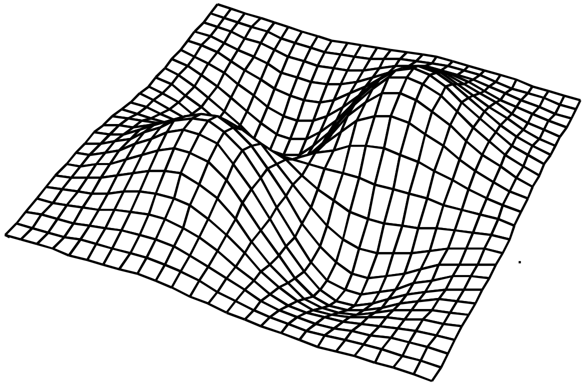
Optimalizačná metóda najprudšieho spádu

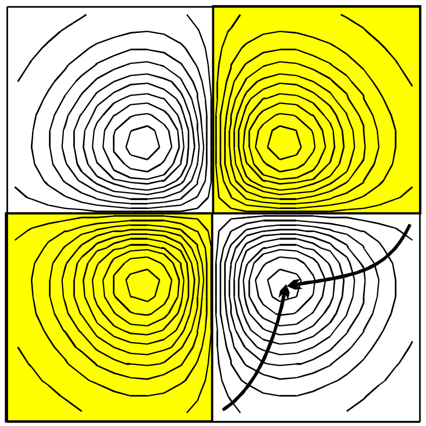
Táto metóda je založená na geometrickej interpretácii gradientu, ako smeru v ktorom funkcia najrýchlejšie rastie. Budeme hľadať minimum funkcie $f(\boldsymbol{x})$, metóda najprudšieho spádu je založená na nasledujúcej rekurentnej formule

$$\boldsymbol{x}_{k+1} = \boldsymbol{x}_k - \lambda \operatorname{grad} f(\boldsymbol{x}_k)$$

kde kladný parameter $\lambda>0$ je určený tak, aby platilo $f(\boldsymbol{x}_{k+1})<f(\boldsymbol{x}_k)$. To znamená, že tento parameter je určený dvoma protichodnými podmienkami, a to dostatočne malý, aby platila predchádzajúca nerovnosť a súčasne dostatočne veľký, aby bola zabezpečená dostatočná rýchlosť konvergencie metódy.







$$f\left(x,y\right) = xye^{-\left(x^2+y^2\right)}$$