Rozvoj funkcie do mocninového radu (Taylorov rozvoj)

Príklad. Suma geometrického radu

$$1+x+x^2+\ldots+x^n+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\underbrace{\frac{1}{1-x}}_{f(x)}\qquad \left(\forall x\in(-1,1)\right)$$

Zovšeobecnenie: Pre danú funkciu $f(x)$ hľadáme taký mocninový rad, aby jeho suma bola rovná danej funkcii

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots.=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\qquad (\forall x\in M)$$

Taylorov polynóm funkcie $f(x)$

Majme funkciu $f(x)$, ktorá je v bode $a \in D_f$ ľubovolný počet-krát diferencovateľná.

Budeme hľadať taký poloynóm n-tého rádu $T_n(x)$, aby jeho derivácie v bode a boli totožné s deriváciami funkcie $f(x)$

$$T_n(x) = A_0 + A_1(x-a) + A_2(x-a)^2 + \dots + A_n(x-a)^n$$

$$T_n^{(i)}(a) = f^{(i)}(a) \qquad (i = 0,1,\dots,n)$$

$$A_i = ? \qquad (i = 0,1,\dots,n)$$

Riešením týchto podmienok dostaneme

$$A_i = \frac{f^{(i)}(a)}{i!} \qquad (i = 0,1,\dots,n)$$

Taylorov polynóm má tento tvar

$$T_n(x)=\sum_{i=0}^{n}\frac{f^{(i)}(a)}{i!}(x-a)^i$$

Príklad. Zostrojte Taylorove polynómy $T_1(x)$, $T_2(x)$, $T_3(x)$, $T_4(x)$ a $T_5(x)$ pre funkciu $f(x)=\sin x$, pre a=0.

$$f^{(0)}(x)=\sin x \Rightarrow f^{(0)}(0)=0 \Rightarrow A_0=0$$

$$f^{(1)}(x)=\cos x \Rightarrow f^{(1)}(0)=1 \Rightarrow A_1=1$$

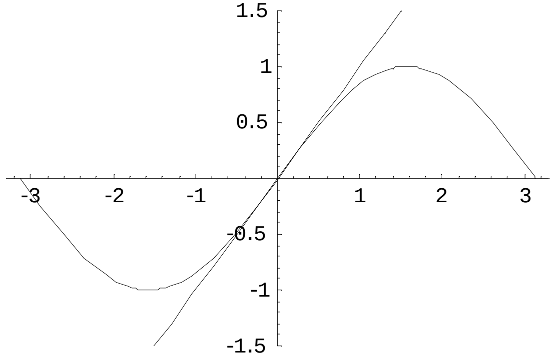
$$f^{(2)}(x)=-\sin x \Rightarrow f^{(2)}(0)=0 \Rightarrow A_2=0$$

$$f^{(3)}(x)=-\cos x \Rightarrow f^{(3)}(0)=-1 \Rightarrow A_3=-1/3!=-1/6$$

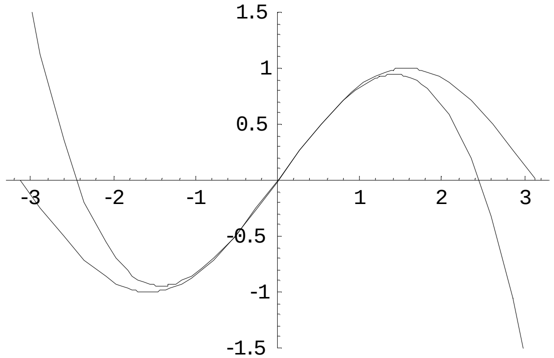
$$f^{(4)}(x)=\sin x \Rightarrow f^{(4)}(0)=0 \Rightarrow A_4=0$$

$$f^{(5)}(x)=\cos x \Rightarrow f^{(5)}(0)=1 \Rightarrow A_5=1/5!=1/120$$

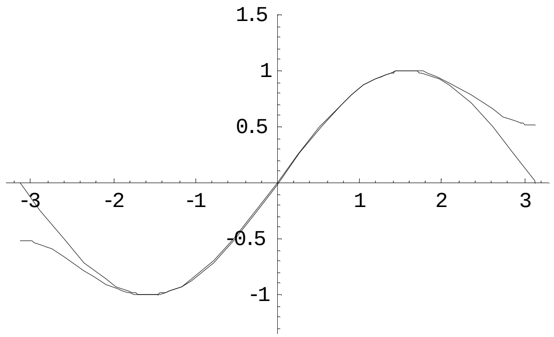
$$T_1(x) = T_2(x) = x$$



$$T_3(x) = T_4(x) = x - \frac{1}{6}x^3$$



$$T_5(x) = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5$$



Zvyšok Taylorovho polynómu

$$Z_n(x) = f(x) - T_n(x)$$

Taylorova veta. Nech funkcia $f(x)$ má v nejakom okolí bodu a derivície až do rádu $n+1$ a nech x patrí do tohto okolia. Potom existuje také číslo $c \in (a,x)$ alebo $c \in (x,a)$, že

$$Z_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

Taylorov rad

Nech funkcia $f(x)$ je definovaná v nejakom okolí bodu a a nech má každú deriváciu v tomto bode. Potom mocninový rad

$$f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\ldots=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

sa nazýva ***Taylorov rad funkcie*** f v bode a. Špeciálny prípad Taylorovho radu je a=0, ktorý sa nazýva ***MacLaurinovým radom*** funkcie f.

Veta. Nech $0 < d < r$, kde r je polomer konvergencie Taylorovho radu funkcie *f* v bode *a*. Nech existuje také *k*>0, že pre každé *n* platí

$$\left| f^{(n)}(a) \right| < k$$

Potom pre $\forall x \in (a-d, a+d)$ platí

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \ldots$$

Poznámka. Ak Taylorov rad funkcie *f* má súčet práve túto funkciu, potom hovoríme, že tento rad je ***Taylorovým rozvojom funkcie*** *f*.

Taylorov (MacLaurinov) rozvoj funkcie *f*(*x*)=e^x v bode *a*=0

Pre *n*-tú deriváciu funkcie $f(x)=e^x$ platí

$$f^{(n)}(x)=e^x \Rightarrow f^{(n)}(0)=1$$

$$\frac{f^{(n)}(0)}{n!}=\frac{1}{n!}$$

$$\boxed{e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots \qquad (\forall x\in R)}$$

Príklad. Vypočítajte *e*.

Pomocou Taylorovho rozvoja funkcie e^x pre x=1 dostaneme tento rozvoj pre číslo *e*

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \ldots$$

n	*n-tý člen*
0	1.000000
1	1.000000
2	0.500000
3	0.166667
4	0.041667
5	0.008333
6	0.001389
7	0.000198
8	0.000025
9	0.000003
Σ	2.718282

e=2.7182818284590452355

Taylorov (MacLaurinov) rozvoj funkcie $f(x)=\sin x$ v bode $a=0$

Pre *n*-tú deriváciu funkcie $f(x)=\sin x$ platí

$$f^{(2n)}(x) = (-1)^n \sin x \Rightarrow f^{(2n)}(0) = 0$$

$$f^{(2n+1)}(x) = (-1)^n \cos x \Rightarrow f^{(2n+1)}(0) = (-1)^n$$

$$\frac{f^{(2n)}(0)}{(2n)!} = 0 \quad \text{a} \quad \frac{f^{(2n+1)}(0)}{(2n+1)!} = \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}$$

$$\boxed{\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots \qquad (\forall x \in R)}$$

Príklad. Vypočítajte *sin* 1.

Pomocou Taylorovho rozvoja funkcie *sin x* pre *x*=1 dostaneme tento rozvoj pre $sin 1$

$$sin 1 = \frac{1}{1!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} - \frac{1}{7!} + \frac{1}{9!} ... + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} + ...$$

n	*n-tý člen*
1	1.000000
3	-0.166667
5	0.008333
7	-0.000198
9	0.000003
Σ	0.841471

sin 1=0.84147098480789650665

Taylorov (MacLaurinov) rozvoj funkcie *f*(*x*)=*cos x* v bode *a*=0

Pre *n*-tú deriváciu funkcie $f(x) = \cos x$ platí

$$f^{(2n)}(x) = (-1)^n \cos x \Rightarrow f^{(2n)}(0) = (-1)^n$$

$$f^{(2n+1)}(x) = (-1)^n \sin x \Rightarrow f^{(2n+1)}(0) = 0$$

$$\frac{f^{(2n)}(0)}{(2n)!} = (-1)^n \quad \text{a} \quad \frac{f^{(2n+1)}(0)}{(2n+1)!} = 0$$

$$\boxed{\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots \qquad (\forall x \in R)}$$

Príklad. Vypočítajte *cos* 1.

Pomocou Taylorovho rozvoja funkcie *cos x* pre *x*=1 dostaneme tento rozvoj pre $sin 1$

$$cos 1 = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{6!} + \frac{1}{8!} \ldots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} + \ldots$$

n	*n-tý člen*
0	1.000000
2	-0.500000
4	0.041667
6	-0.001389
8	0.000025
10	-0.000000
Σ	0.540303

cos 1=0.5403023058681397174

Taylorov (MacLaurinov) rozvoj funkcií $f(x)=ln(1+x)$ a $f(x)=ln(1-x)$ v bode $a=0$

Pre n-tú deriváciu funkcie $f(x)=ln(1+x)$ platí

$$f^{(0)}(x)=ln(1+x)\Rightarrow f^{(0)}(0)=0$$

$$f^{(n)}(x)=\frac{(-1)^{n+1}}{(1+x)^n}\Rightarrow f^{(n)}(0)=(-1)^n \qquad (n=1,2,\ldots)$$

$$ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{5}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}+\ldots \qquad (\forall x\in(-1,1))$$

$$\boxed{ln\frac{1+x}{1-x}=2\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\ldots+\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\ldots\right) \qquad (\forall x\in(-1,1))}$$

Príklad. Vypočítajte *ln* 2.

$$\frac{1+x}{1-x}=2 \Rightarrow x=\frac{1}{3}$$

Pomocou Taylorovho rozvoja funkcie $ln\frac{1+x}{1-x}$ pre $x=\frac{1}{3}$ dostaneme rozvoj pre *ln* 2

$$ln\,2=2\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{3}+\frac{1}{5}\left(\frac{1}{3}\right)^{5}+\ldots+\frac{1}{2n+1}\left(\frac{1}{3}\right)^{2n+1}+\ldots\right)$$

n	*n-tý člen*
1	0.333333
3	0.012346
5	0.000823
7	0.000065
9	0.000006
11	0.000000
Σ	0.346573
2Σ	0.693146

ln 2 =0.6931471805599453094