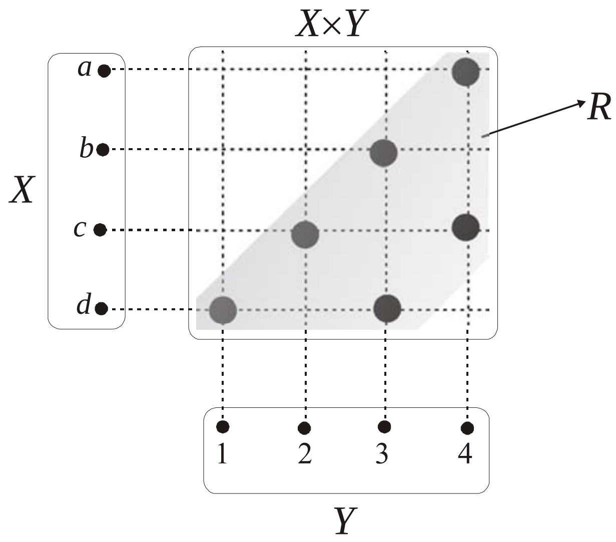
3. prednáška

Teória množín II

- relácie
  - operácie nad reláciami
  - rovnosť
  - usporiadanosť
- funkcie
  - zložená funkcia
  - inverzná funkcia.

Relácie

Definícia. Nech X a Y sú dve množiny, ***relácia*** R je definovaná podmnožina karteziánskeho súčinu týchto množín
$$R \subseteq X \times Y$$



Znázornenie relácie R ako podmnožiny karteziánskeho súčinu (vytieňovaná oblasť) dvoch množín X a Y, $R = \{(d,1),(c,2),(b,3),(d,3),(a,4),(c,4)\}$.

Relácia R môže byť alternatívne zadaná pomocou charakteristickej funkcie

$$R=\{(x,y);\,\mu_R(x,y)=1\}$$

$$\mu_R(x,y)=\begin{cases}1 & \left(ak\ (x,y)\in R\right)\\ 0 & \left(ak\ (x,y)\notin R\right)\end{cases}$$

Hovoríme o ***binárnej relácii***, každý element $(x,y)\in R$ je ohodnotený binárnym číslom $\mu_R(x,y)\in\{0,1\}$.

Definícia 3.2. ***Inverzná relácia*** R^{-1} (k relácii $R\subseteq X\times Y$) je určená pomocou usporiadaných dvojíc $(y,x)\in X\times Y$, ktorých inverzia patrí do relácie $(x,y)\in R$

$$R^{-1}=\{(y,x);(x,y)\in R\}$$

Nech $P,Q \subseteq X \times Y$, ktoré sú špecifikované pomocou charakteristických funkcií

$$P = \left\{ (x,y);\, \mu_P(x,y) = 1 \right\} \text{ a } Q = \left\{ (x,y);\, \mu_Q(x,y) = 1 \right\}$$

Definícia. Relácia $R = P \cup Q$ sa nazýva ***zjednotenie relácií*** P a Q vtedy a len vtedy, ak platí

$$P \cup Q = \left\{ (x,y);\, \mu_{P\cup Q}(x,y) = 1 \right\}$$

$$\mu_{P\cup Q}(x,y) = max\left\{ \mu_P(x,y), \mu_Q(x,y) \right\}$$

Relácia $R = P \cap Q$ sa nazýva ***prienik relácií*** P a Q vtedy a len vtedy, ak platí

$$P \cap Q = \left\{ (x,y);\, \mu_{P\cap Q}(x,y) = 1 \right\}$$

$$\mu_{P\cap Q}(x,y) = min\left\{ \mu_P(x,y), \mu_Q(x,y) \right\}$$

Relácia $R = \overline{P}$ sa nazýva ***doplnok relácie*** P vtedy a len vtedy, ak

$$\overline{P} = \left\{ (x,y);\, \mu_{\overline{P}}(x,y) = 1 \right\}$$

$$\mu_{\overline{P}}(x,y) = 1 - \mu_P(x,y)$$

Príklad

Nech $X = \{1,2,3\}$ a $Y = \{p,q\}$, relácie P a Q majú tvar

$$P = \{(1,q),(2,p),(3,q)\} \text{ a } Q = \{(1,q),(2,p),(3,p)\}$$

Zjednotenie a prienik týchto relácií sú

$$P \cup Q = \{(1,q),(2,p),(3,p),(3,q)\} \text{ a } P \cap Q = \{(1,q),(2,p)\}$$

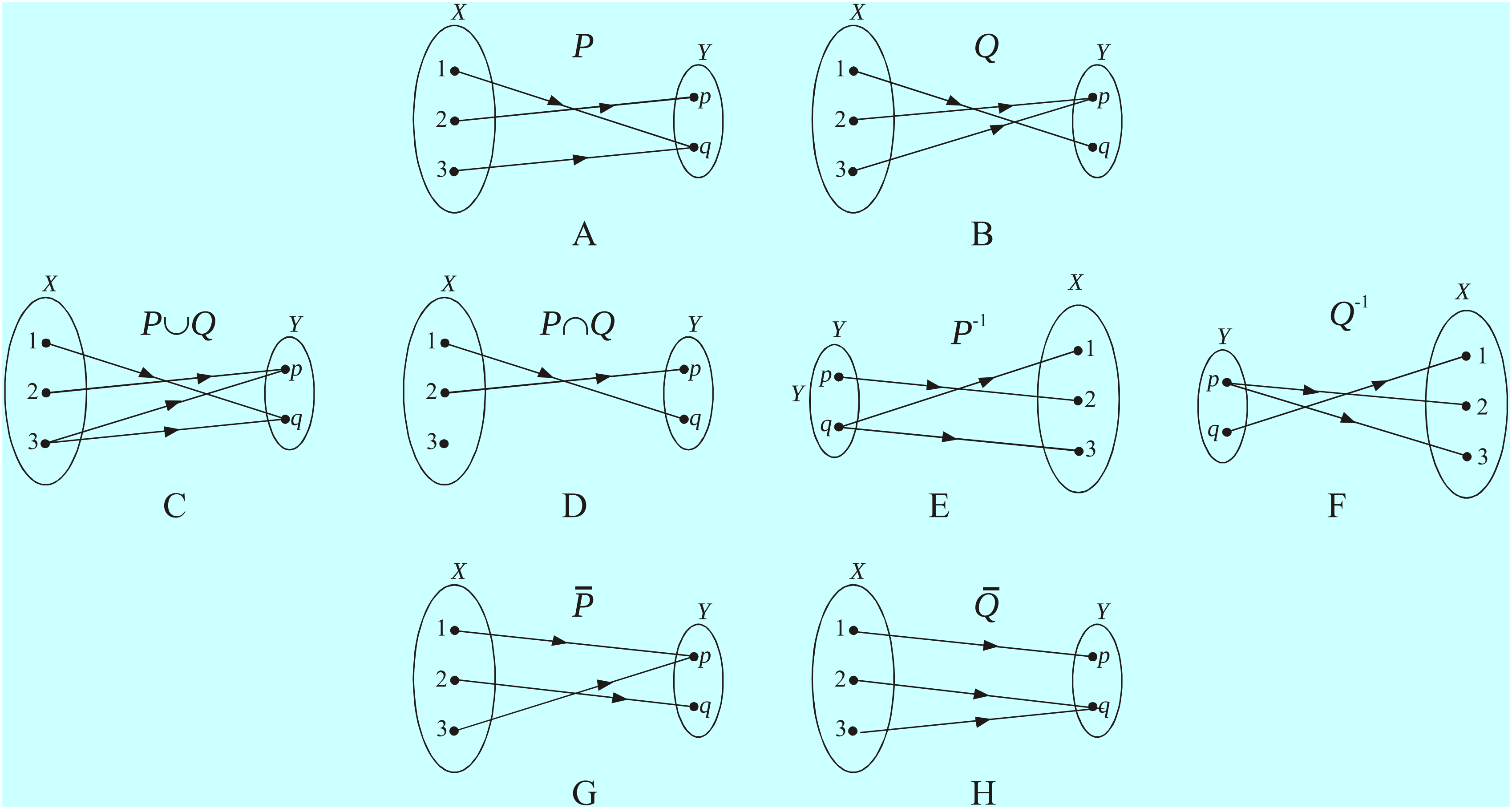
Inverzné relácie sú špecifikované

$$P^{-1} = \{(q,1),(p,2),(q,3)\} \text{ a } Q^{-1} = \{(q,1),(p,2),(p,3)\}$$

Doplnky k reláciám sú

$$\overline{P} = \{(1,p),(2,q),(3,p)\} \text{ a } \overline{Q} = \{(1,p),(2,q),(3,q)\}$$

Grafická repreztentácia relácií a operácií nad reláciami



Maticová reprezentácia relácie

Nech $X = \{x_1, x_2, ..., x_m\}$ a $Y = \{y_1, y_2, ..., y_n\}$ sú dve množiny s mohutnosťami $|X| = m$ resp. $|Y| = n$. Relácia R špecifikovaná nad týmito množinami má tvar

$$R = \{(x_i, y_j); \mu_R(x_i, y_j) = 1\}$$

Definícia. Matica $\boldsymbol{A}$ reprezentuje reláciu R má m riadkov a n stĺpcov, jej maticové elementy sú špecifikované formulou

$$A_{ij} = \mu_R(x_i, y_j) = \begin{cases} 1 & \left(pre\,(x_i, y_j) \in R\right) \\ 0 & \left(pre\,(x_i, y_j) \notin R\right) \end{cases}$$

Príklad

Maticová reprezentácia relácií P a Q z predchádzajúceho príkladu má tvar

$$P = \{(1,q),(2,p),(3,q)\} \subseteq X \times Y \quad \text{a} \quad Q = \{(1,q),(2,p),(3,p)\} \subseteq X \times Y$$

$$\boldsymbol{A}_P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Vlastnosti relácií

V tomto odseku budeme študovať ***diagonálne relácie*** $P \subseteq X \times X$, ktoré sú definované ako podmnožina karteziánskeho súčinu $X \times X$.

Definícia 3.6. Diagonálna relácia sa nazýva:

(1) ***reflexívna***, $\forall\left(x \in X\right)\left(\left(x,x\right) \in R\right)$,

(2) ***symetrická***, $\forall\left(x,y \in X\right)\left(\left(x,y\right) \in R \Rightarrow \left(y,x\right) \in R\right)$,

(3) ***antisymetrická***, $\forall\left(x,y \in X\right)\left(\left(x,y\right) \in R \wedge \left(y,x\right) \in R \Rightarrow x = y\right)$,

(4) ***tranzitívna***, $\forall\left(x,y,z \in X\right)\left(\left(x,y\right) \in R \wedge \left(y,z\right) \in R \Rightarrow \left(x,z\right) \in R\right)$.

Príklad

Nech $X = \mathbb{R}$ je množina reálnych čísel a diagonálna relácia $P \subseteq X \times X$ má interpretáciu

$$\left((x,y) \in P\right) \equiv (x \leq y)$$

Takto definovaná relácia P vyhovuje týmto podmienkam:

(a) relácia P je reflexívna, pre každé reálne číslo $x \in X$ platí $x \leq x$, t. j. $(x,x) \in P$,

(b) relácie P nie je symetrická, pretože pre $x \leq y$ neimplikuje $y \leq x$,

(c) relácia P je antisymetrická, z platnosti $x \leq y$ a $y \leq x$ plynie $x = y$, a naopak,

(d) relácia P je tranzitívna, z platnosti $x \leq y$ a $y \leq z$ plynie $x \leq z$.

Príklad

Nech $X=\{a,b,c,d\}$, diagonálne relácia $P \subseteq X \times X$ je špecifikovaná množinou

$$P=\{(a,a),(a,b),(a,c),(b,a),(b,c),(b,d),(d,d)\}$$

Táto relácia nespĺňa žiadnu vlastnosť z definície 3.6:

(a) relácia P nie je reflexívna, $(b,b) \notin P$,

(b) relácia P nie je symetrická, implikácia $(a,c) \in P \Rightarrow (c,a) \in P$ nie je pravdivá,

(c) relácia P nie je antisymetrická, implikácia $(a,b),(b,a) \in P \Rightarrow (a,a) \in P$ nie je pravdivá,

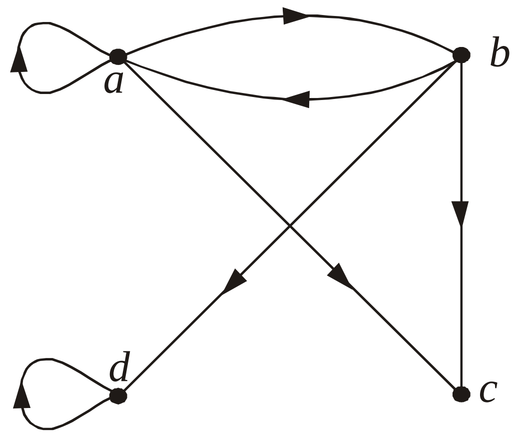
(d) relácia P nie je tranzitívna, implikácia $(a,b),(b,d) \in P \Rightarrow (a,d) \in P$ nie je pravdivá.

Interpretácia diagonálnej relácie pomocou orientovaného grafu

Relácia $P \subseteq X \times X$ má diagramatickú interpretáciu pomocou orientovaného grafu, V tomto prípade elementy množiny X sú vrcholy a usporiadané dvojice $(x,y) \in P$ sú orientované hrany, ktoré začínajú v x a končia v y. Vlastnosti diagonálnych relácií majú potom jednoduchú interpretáciu.

Nech $X = \{a,b,c,d\}$, diagonálne relácia $P \subseteq X \times X$ je špecifikovaná množinou

$$P = \{(a,a),(a,b),(a,c),(b,a),(b,c),(b,d),(d,d)\}$$



(a) Relácia P je ***reflexívna***, potom každý vrchol $x \in X$ má slučku – orientovanú hranu, ktorá začína a končí v tom istom vrchole.

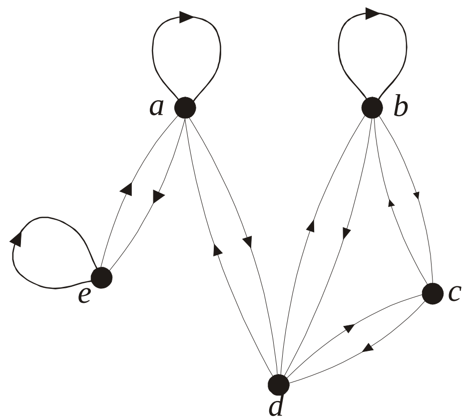
(b) Relácia P je ***symetrická***, ak vrcholy $x, y \in X$ sú spojené hranou $(x, y) \in P$, potom existuje aj opačná hrana $(y, x) \in P$. V tomto prípade symetrickej relácie, jej grafická interpretácia obsahuje hrany medzi vrcholmi x a y vždy po dvojiciach, t. j. existencia hrany (x,y) implikuje existenciu hrany (y,x), a naopak.

(c) Relácia P je ***antisymetrická***, medzi dvoma rôznymi vrcholmi $x \neq y$ nemôže existovať dvojica hrán (x,y) a (y,x). V prípade, že by existovala, potom z podmienky antisymtričnosti vyplýva, že $x = y$, čo je v spore s pôvodným predpokladom.

(d) Relácia P je ***tranzitívna***, z existencie hrán (x, y) a (y, z), ktoré majú spoločný vrchol y a $x \neq z$, vyplýva existencia hrany (x, z)

Príklad

Nech $X = \{a, b, c, d, e\}$, diagonálna relácia definovaná nad touto množinou je určená grafom



(1) relácia nie je reflexívna, potrebné slučky neexistujú na vrcholoch c a d,

(2) relácia je symetrická, ak medzi vrcholmi x a y existuje hrana (x,y), potom existuje aj opačná hrana (y,x),

(3) relácia nie je antisymetrická, z existencie dvojíc opačne orientovaných hrán na rôznych vrcholoch, nevyplýva rovnosť týchto dvoch vrcholov.

(4) relácia nie je tranzitívna, pretože existencia hrán (e,a) a (a,d) neimplikuje existenciu hrany (e,d).

Relácia ekvivalentnosti

Definícia. Diagonálna relácia $P \subseteq X \times X$ sa nazýva ***relácia ekvivalentnosti*** vtedy a len vtedy, ak je reflexívna, symetrická a tranzitívna.

Reláciu ekvivalentnosti *P* budeme označovať symbolom ´~´, t. j.

$$\forall \left(x,y \in X \right)\left(\left(\left(x,y \right) \in P \right) \equiv \left(x \sim y \right) \right)$$

Pomocou relácie ekvivalentnosti môžeme množinu *X* rozdeliť na dve disjunktívne podmnožiny $X_1, X_2 \subset X$, kde $X = X_1 \cup X_2$ a $X_1 \cap X_2 = \emptyset$

$$x,y \in X_1 \Rightarrow x \sim y$$
$$x,y \in X_2 \Rightarrow x \sim y$$
$$\left(x \in X_1 \right) \wedge \left(y \in X_2 \right) \Rightarrow \left(x \nsim y \right)$$

Príklad

Nech $X = \mathbb{R}$ je množina reálnych čísel, diagonálne relácia $P \subseteq X \times X$ je definovaná takto:

$$\big((x,y) \in P\big) \equiv \left(x^2 = y^2\right)$$

(1) Relácia P je reflexívna, pretože $x^2 = x^2$, pre každé $x \in \mathbb{R}$,
(2) relácia P symetrická, pretože $x^2 = y^2$ implikuje $y^2 = x^2$,
(3) relácia P je tranzitívna, pretože $x^2 = y^2$ a $y^2 = z^2$ implikuje $x^2 = z^2$.

Z tohto vyplýva, že P je relácia ekvivalentnosti.

Relácia čiastočného usporiadania

Pre mnohé množiny je možné definovať reláciu usporiadania jej elementov. Tak napríklad, množina reálnych čísel $\mathbb{R}$ má prirodzené usporiadanie svojich elementov pomocou relácie ´$\leq$´. Táto relácia je reflexívna, antisymetrická a tranzitívna.

Definícia. Relácia $P \subseteq X \times X$ sa nazýva ***čiastočné usporiadanie*** vtedy a len vtedy, ak je reflexívna, antisymetrická a tranzitívna. Množina X spolu s touto reláciou sa nazýva ***čiastočne usporiadaná množina*** (***poset***).

Príklad

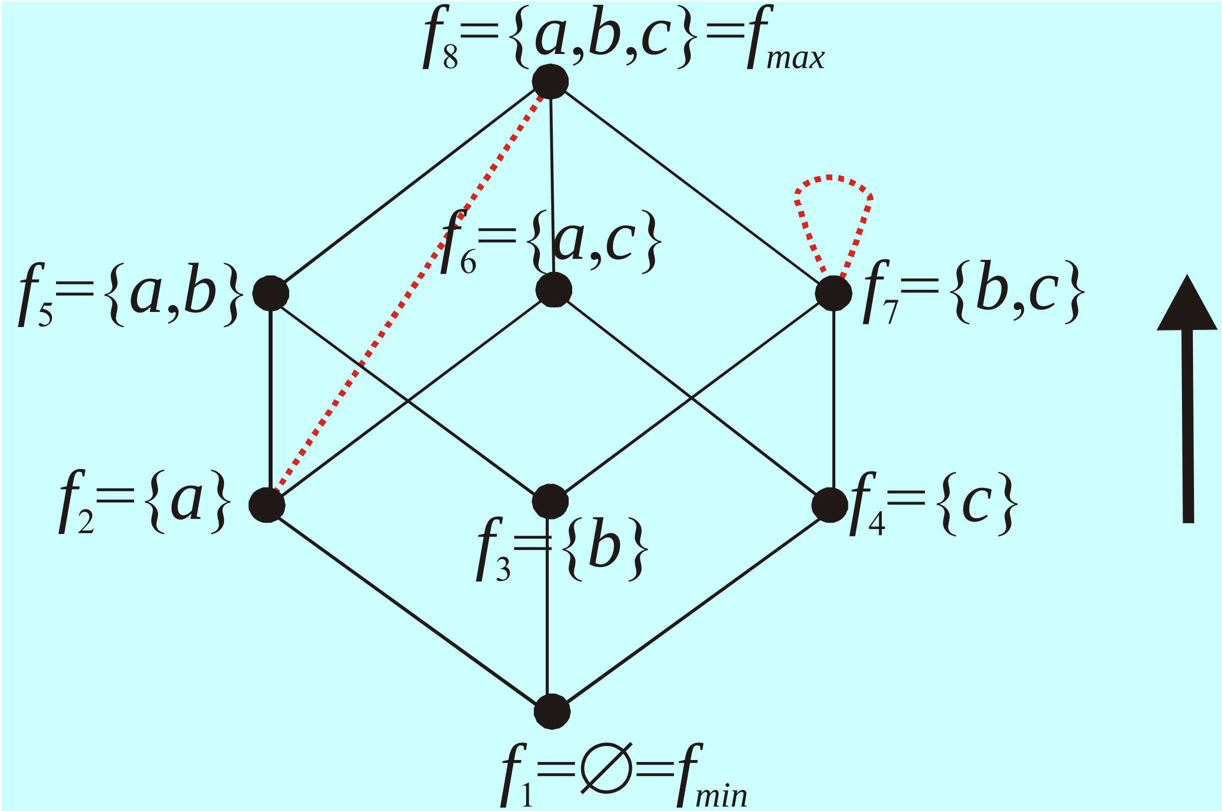
Nech F je rodina podmnožín univerza U, $F = \left\{ X\, ;\, X \in \mathcal{P}(U) \right\}$. Pomocou množinovej relácie $'\subseteq'$ môžeme nad touto rodinou F definovať reláciu P tak, že $\left((X,Y) \in P \right) \equiv \left(X \subseteq Y \right)$. Ľahko sa presvedčíme, že táto relácia je čiastočne usporiadanie, je reflexívna, antisymetrická a tranzitívna.

$$X = \{a,b,c,\} \quad |X| = 3$$

$$F = \left\{ \underbrace{\emptyset}_{f_1}, \underbrace{\{a\}}_{f_2}, \underbrace{\{b\}}_{f_3}, \underbrace{\{c\}}_{f_4}, \underbrace{\{a,b\}}_{f_5}, \underbrace{\{a,c\}}_{f_6}, \underbrace{\{b,c\}}_{f_7}, \underbrace{\{a,b,c\}}_{f_8} \right\} \quad |F| = 2^{|X|} = 2^3 = 8$$

$$P = \left\{ \begin{array}{l} (f_1,f_2),(f_1,f_3),(f_1,f_4),(f_1,f_5),(f_1,f_6),(f_1,f_7),(f_1,f_8), \\ (f_2,f_5),(f_2,f_6),(f_2,f_8),(f_3,f_5),(f_3,f_7),(f_3,f_8),(f_4,f_6), \\ (f_4,f_7),(f_4,f_8),(f_5,f_8),(f_6,f_8),(f_7,f_2) \end{array} \right\}$$

Hasseho diagram



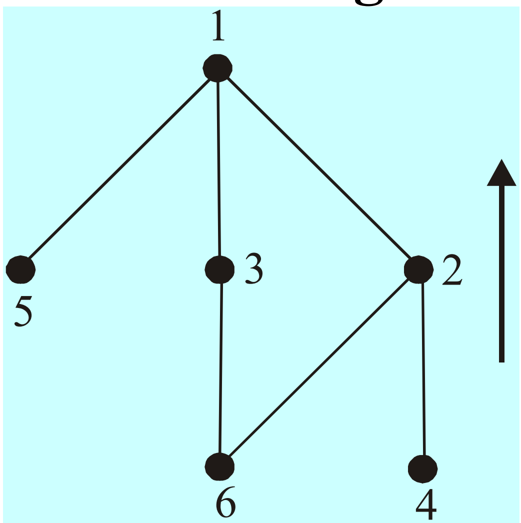
Pre prehľadnosť grafu, vynechané sú hrany reprezentujúce tranzitívnosť a reflexívnosť relácie

Príklad

Nech pre $X=\{1,2,3,4,5,6\}$ relácia P „deliteľnosti“ obsahuje dvojice $\left((m,n)\in P\right)\equiv\left(m \text{ je deliteľné } n\right)$. Táto relácia je čiastočné usporiadanie, pretože je reflexívna, antisymetrická a tranzitívna. Maximálny prvok je 1 a minimálne prvky sú 4, 5 a 6.

$P=\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6),(2,1),(3,1),(4,1),(4,2),(5,1),(6,1),(6,2),(6,3)\}$

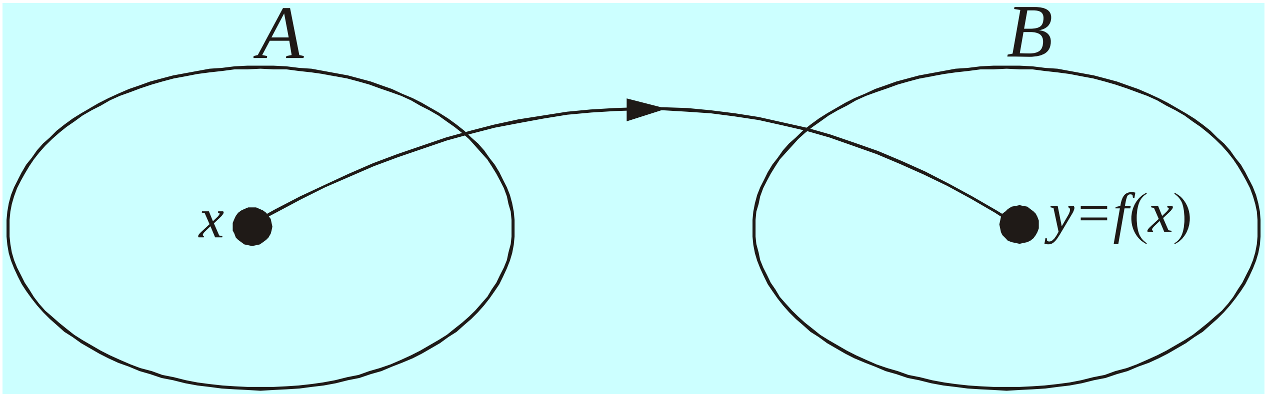
Hasseho diagram



Funkcie

Pojem funkcie (alebo zobrazenia) patrí medzi základné pojmy matematiky. V matematike pod funkciou f rozumieme jednoznačný predpis pomocou ktorého každému argumentu x z množiny A priradíme práve jednu funkčnú hodnotu označenú $f(x)$ z množiny B

$$f : A \to B$$



$$f = \{(x, f(x)); x \in A\}$$

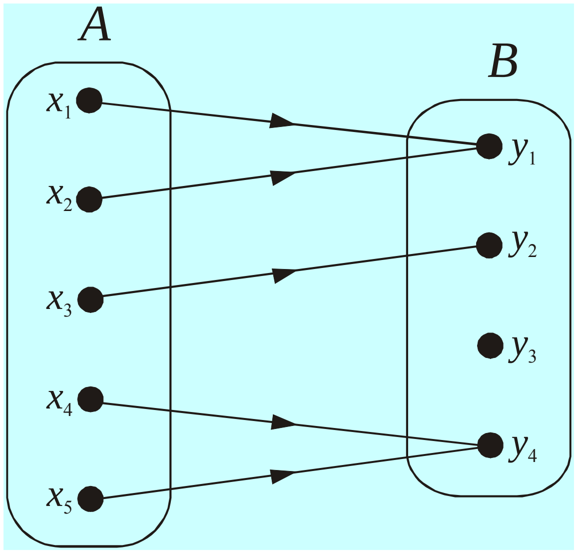
Definícia. Relácia $f \subset A \times B$ sa nazýva ***funkcia*** vtedy a len vtedy, ak pre každé $x \in A$ existuje práve jedno $y \in B$ také, že $(x, y) \in f$

$$\forall x \, \exists! y \, (x, y) \in f$$

Množina *A* sa nazýva ***obor definície*** funkcie *f*, D_f, a množina B sa nazýva ***obor funkčných hodnôt*** funkcie *f*, H_f. Ak $(x, y) \in F$, potom *x* sa nazýva ***argument*** a *y* sa nazýva ***funkčná hodnota*** (***obraz***). Funkcia sa taktiež nazýva ***zobrazenie*** alebo ***transformácia***.

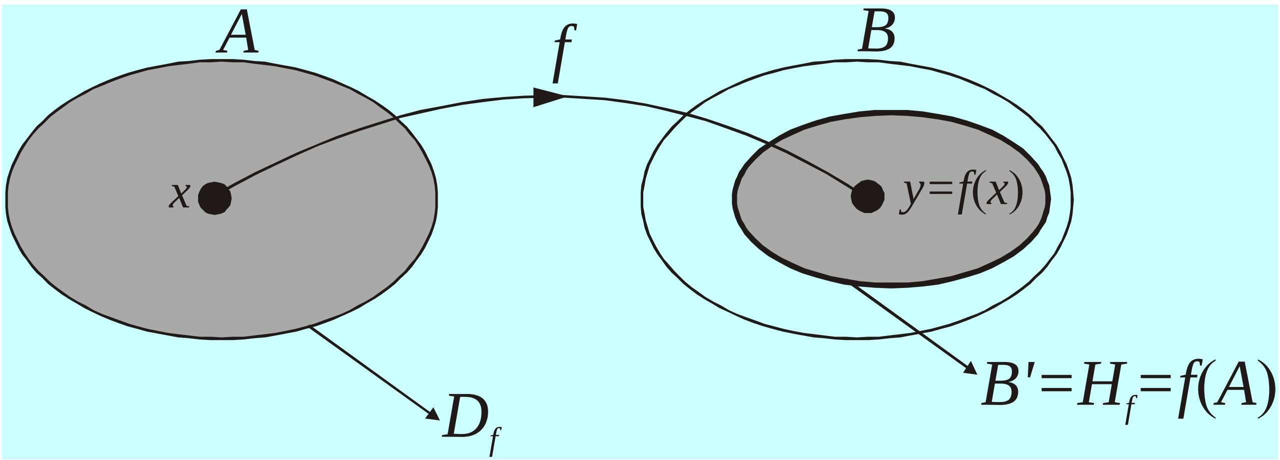
Znázornenie funkcie $f \subset A \times B$, pre každé $x \in A$ existuje práve jedno $y \in B$ také,

že $(x, y) \in f$, $f = \{(x_1, y_1), (x_2, y_1), (x_3, y_2), (x_4, y_4), (x_5, y_4)\}$



Definícia funkcie nezabezpečuje, aby množina funkčných hodnôt $H_f = f(A) = \{ f(x); x \in A \}$ bola totožná s množinou B, vo všeobecnosti platí len

$$B' = H_f = f(A) = \{ f(x); x \in A \} \subseteq B$$



Definícia. Hovoríme, že dve funkcie $f : A \to B$ a $g : A' \to B'$ sa ***rovnajú*** vtedy a len vtedy, ak súčasne platí

(1) $A = A'$ a $B = B'$,

(2) $\forall \left(x \in A \right) \left(f \left(x \right) = g \left(x \right) \right)$.

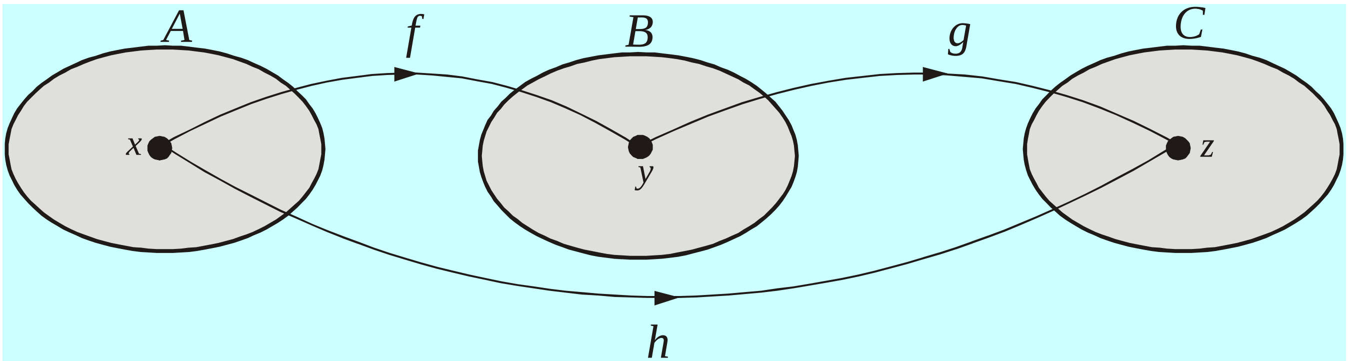
Definícia. Hovoríme, že funkcia $i_A : A \to A$ je ***jednotková*** vtedy a len vtedy, ak

$$\forall \left(x \in A \right) \left(i_A \left(x \right) = x \right)$$

Doména a kodoména sú si rovné, $dom\left(i_A \right) = codom\left(i_A \right) = A$

Zložená funkcia

Majme dve funkcie $f : A \Rightarrow B$ a $g : B \Rightarrow C$, kompozíciou týchto dvoch funkcií vytvoríme novú funkciu $h = f \circ g : A \Rightarrow C$, ktorá sa nazýva zložená funkcia.



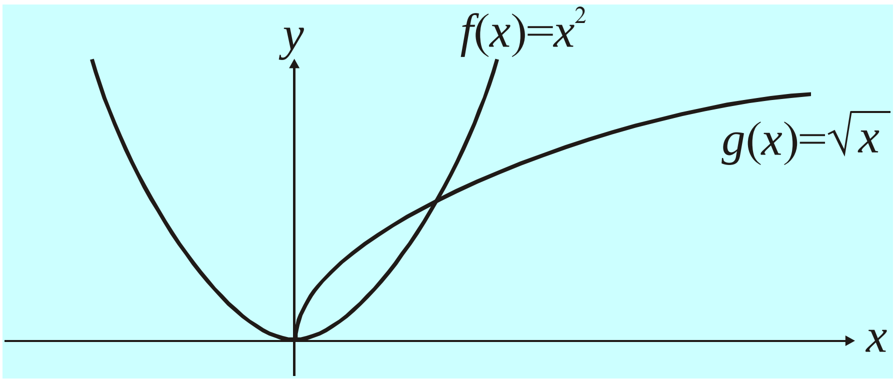
Zložená funkcia existuje len vtedy, keď prienik oboru funkčných hodnôt funkcie f a oboru definície funkcie g je neprázdny, $H_f \cap D_g \neq \emptyset$.

Príklad

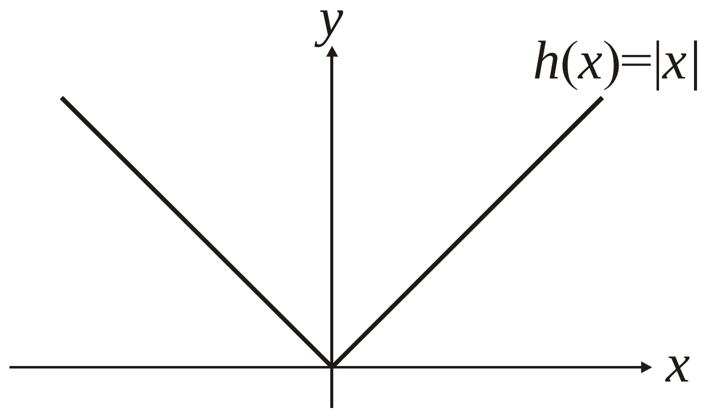
Študujme dve funkcie

(1) $f:\mathbb{R}\to\left(\mathbb{R}_+\cup\{0\}\right)$, ktorej analytický tvar je $f(x)=x^2$, obor definície je $D_f=\mathbb{R}$ množina reálnych čísel a obor funkčných hodnôt je $H_f=\mathbb{R}_+\cup\{0\}$ množina nezáporných reálnych čísel.

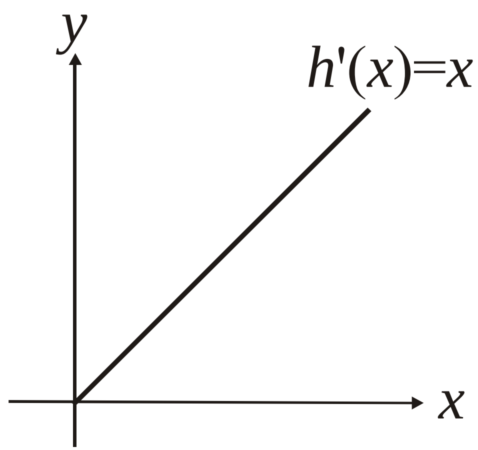
(2) $g:\left(\mathbb{R}_+\cup\{0\}\right)\to\left(\mathbb{R}_+\cup\{0\}\right)$, ktorej analytický tvar je $g(x)=\sqrt{x}$, táto funkcia má rovnaký obor definície a obor funkčných hodnôt, $D_f=H_f=\mathbb{R}_+\cup\{0\}$, množinu nezáporných reálnych čísel.



Prvá zložená funkcia má tvar $h(x) = g\left(f(x)\right) = \sqrt{x^2} = |x|$, jej obor definície je $D_h = \mathbb{R}$ a obor funkčných hodnôt je $H_h = \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$, t. j. zobrazuje množinu reálnych čísel $\mathbb{R}$ na množinu nazáporných reálnych čísel $\mathbb{R}_+ \cup \{0\}$. Priebeh funkcie $h(x) = |x|$ je znázornený na obrázku



Druhá zložená funkcia má tvar $h'(x) = f\left(g(x)\right) = \left(\sqrt{x}\right)^2 = x$, táto funkcia má rovnaký obor definície a obor funkčných hodnôt, $D_{h'} = H_{h'} = \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$, t. j. zobrazuje „lineárne“ množinu nezáporných reálnych čísel na tú istú podmnožinu. Priebeh funkcie $f'(x) = x$ je znázornený na obrázku



Zložené funkcie $h(x)$ a $h'(x)$ sa nerovnajú, $D_h \neq D_{h'}$.

Inverzná funkcia

Definícia. Funkcia $f : A \to B$ sa nazýva jedno-jednoznačná vtedy a len vtedy, ak vyhovuje podmienke

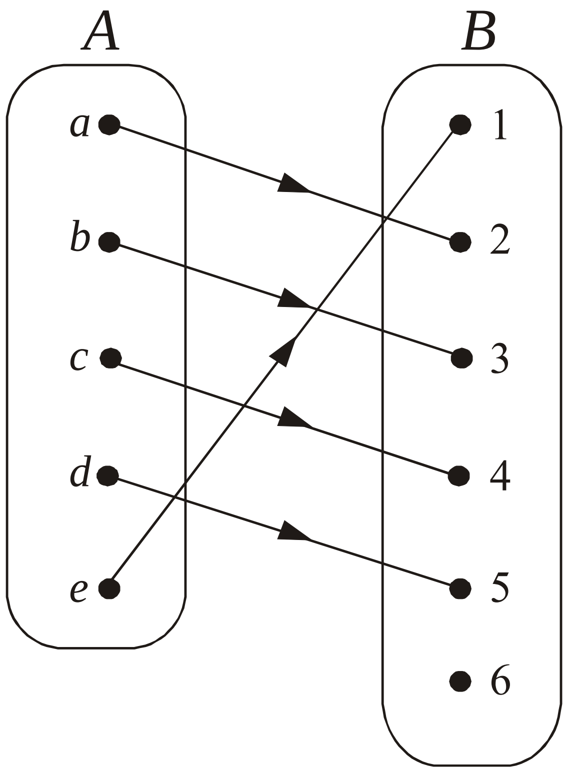
$$\forall \left(x, x' \in A \right) \left(x \neq x' \Rightarrow f\left(x \right) \neq f\left(x' \right) \right)$$

Spojením tejto podmienky s podmienkou jednoznačnosti dostaneme

$$\forall \left(x, x' \in A \right) \left(\left(x \neq x' \right) \equiv \left(f\left(x \right) \neq f\left(x' \right) \right) \right)$$

To znamená, že podmienka rôznosti argumentov je ekvivalentná podmienke rôznosti ich funkčných hodnôt.

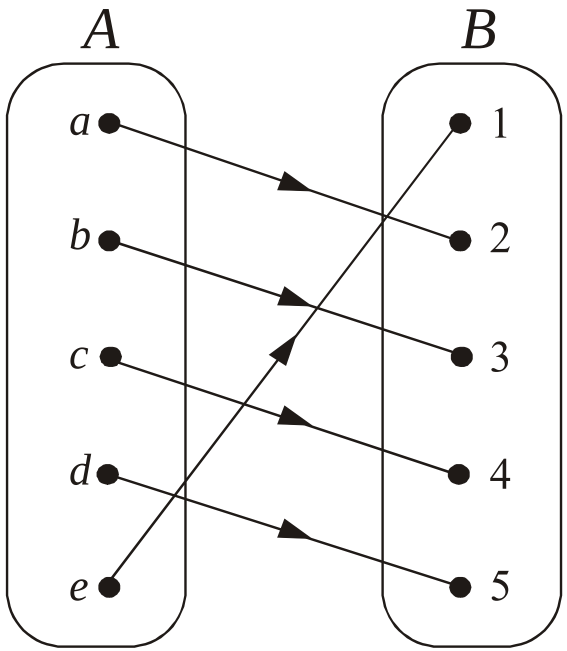
Schématické znázornenie jedno-jednoznačnej funkcie $f : A \to B$



Bijektívne zobrazenie

Bijektívne zobrazenie je špeciálny typ jedno-jednoznačného zobrazenie, pre ktoré platí, že pre každé $y \in B$ existuje práve jedno $x \in A$ také, že $y = f(x)$

$$\forall (y \in B) \exists! (x \in A) : y = f(x)$$



Ku každému argumentu je priradená práve jedna funkčná hodnota, a taktiež aj naopak, ku každej funkčnej hodnote existuje práve jeden argument.

Definícia. Hovoríme, že k funkcii $f: A \to B$ existuje inverzná funkcia $f^{-1}: B \to A$ vtedy a len vtedy, ak je funkcia f bijektívna.

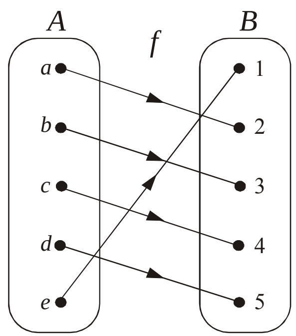
Na základe tejto definície máme „definotoricky“ zabezpečenú existenciu inverznej funkcie.

Veta. Nech funkcia $f: A \to B$ je bijektívna, potom inverzná funkcia $f^{-1}: B \to A$ vyhovuje týmto podmienkam

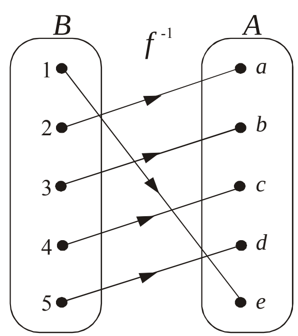
$$f\left(f^{-1}(x)\right) = i_B(x)$$
$$f^{-1}\left(f(x)\right) = i_A(x)$$

kde i_X je jednotková funkcia nad doménou X.

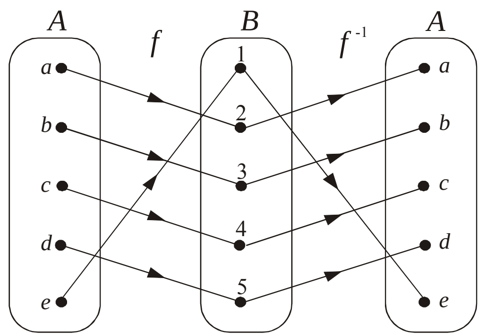
Diagramy A a B znázorňujú zobrazenia f a f^{-1} prevzaté z obr. 3.16. Diagram C znázorňuje zloženú funkciu $h = f^{-1} \circ f = i_A : A \to A$, diagram D znázorňuje zloženú funkciu $h' = f \circ f^{-1} = i_B : B \to B$.



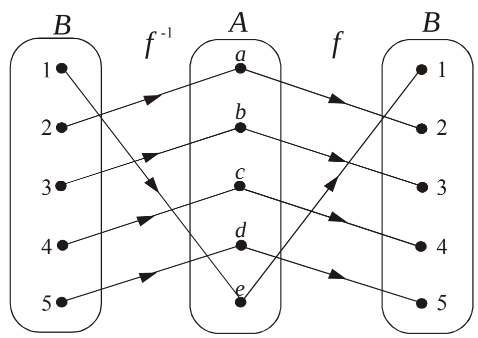
A



B



C



D

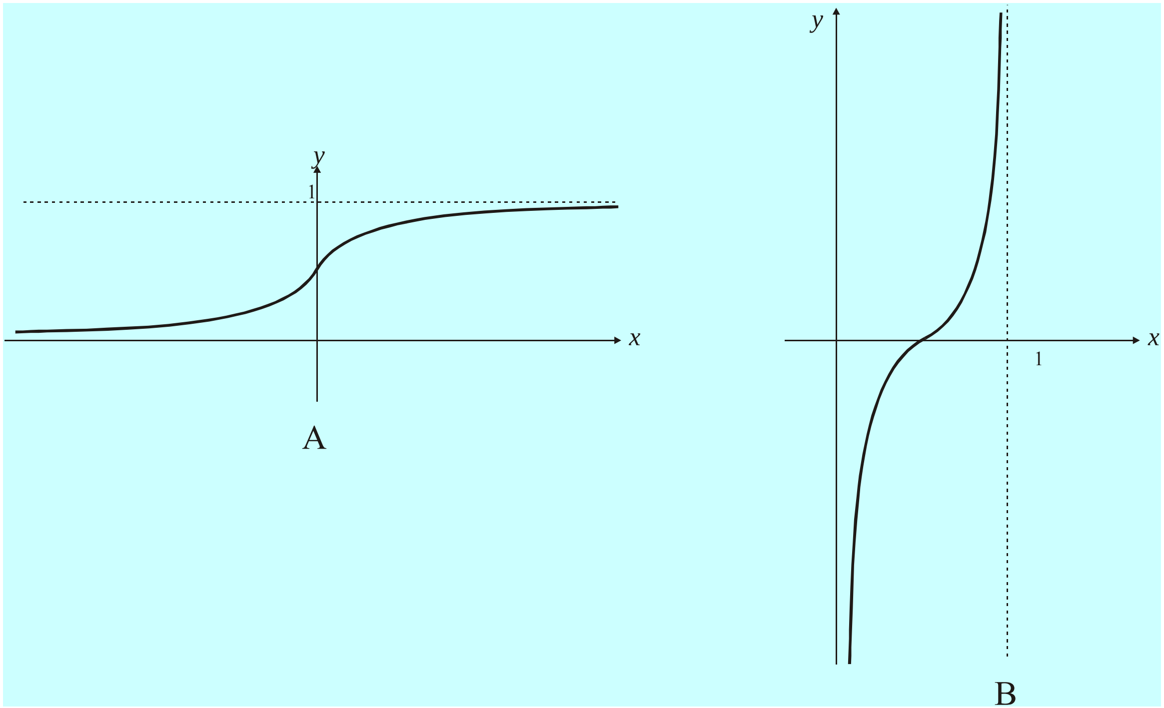
Príklad

Zostrojte inverznú funkciu k funkcii $f(x)=\dfrac{1}{1+e^{-x}}$

Táto funkcia zobrazuje obor definície $D_f=\mathbb{R}$ na obor funkčných hodnôt kodoménu $H_f=(0,1)$. Funkcia je monotónne rastúca a vyhovuje asymptotickým podmienkam $f(\infty)=1$ a $f(-\infty)=0$. Z monotónnosti vyplýva, že funkcia je bijektívna, čiže k nej existuje inverzná funkcia,

$$f^{-1}(x)=ln\frac{x}{1-x}$$

Priebehy funkcií (A) $f\left(x\right)=1\Big/\left(1+e^{-x}\right)$ a (B) $f^{-1}\left(x\right)=ln\,x\Big/\left(1-x\right)$



Na záver budeme počítať zložené funkcie

$$f\left(f^{-1}(x)\right)=\frac{1}{1+exp\left(-f^{-1}(x)\right)}=\frac{1}{1+exp\left(-ln\,x/(1-x)\right)}=\frac{1}{1+\dfrac{1-x}{x}}=x$$

$$f^{-1}\left(f(x)\right)=ln\frac{f(x)}{1-f(x)}=ln\frac{\dfrac{1}{1+e^{-x}}}{1-\dfrac{1}{1+e^{-x}}}=ln\frac{\dfrac{1}{1+e^{-x}}}{\dfrac{e^{-x}}{1+e^{-x}}}=ln\,e^{x}=x$$