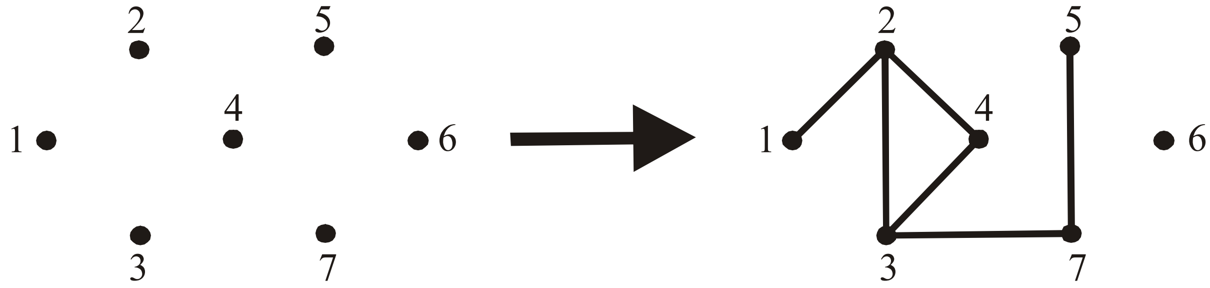
Teória grafov a grafové algoritmy

- definícia grafu
- základné pojmy a vlastnosti
- maticová reprezentácia grafu
- jednoduché grafové algoritmy

Definícia grafu

- Graf je obrázok, ktorý vznikne ak pospájame vrcholy (reprezentované bodmi) spojitými čiarami.



- V grafe rozlišujeme dva typy objektov:
    - vrcholy
    - hrany (čiary)

- pre graf je nepodstatné, akým spôsobom je hrana spájajúca dva vrcholy realizovaná, podstatné je, že dva vrcholy sú spojené hranou (hovoríme, že vrcholy sú susedné)

Graf je definovaný ako usporiadaná dvojica dvoch množín

$$G = (V, E)$$

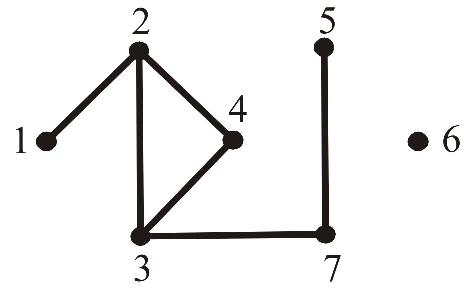
kde

$V = \{v_1, v_2, ..., v_p\}$ je neprázdna množina vrcholov a

$E = \{e_1, e_2, ..., e_q\}$ je množina hrán.

Každá hrana $e \in E$ je interpretovaná ako neusporiadaná dvojica vrcholov z *V*, $e = \{v, v'\}$, kde $v, v' \in V$ sú dva vrcholy z množiny *V*.

Príklad



Množiny V a E majú tvar

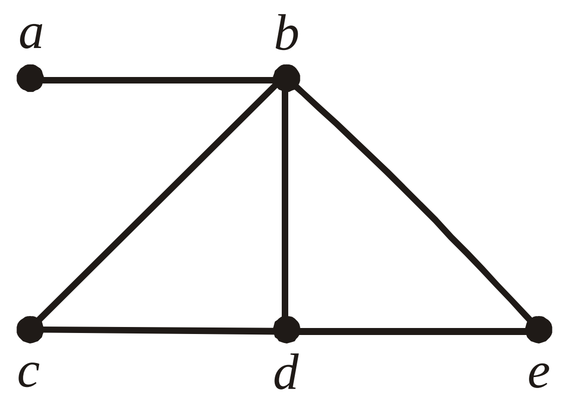
$$V = \{1,2,....,7\}$$

$$E\left\{\{1,2\},\{2,4\},\{2,3\},\{3,4\},\{3,7\},\{5.7\}\right\}$$

Niektoré základné definície

Dva vrcholy u a v v grafe G sa volajú ***susedné*** (adjacent, neighbours) v G, keď $\{u,v\}$ je hrana grafu G. Keď $e=\{u,v\}$, o hrane e sa hovorí, že je ***incidentná*** (incident) s vrcholmi u a v alebo *spája* vrcholy u a v.

Stupeň vrcholu v neorientovanom grafe je rovný počtu hrán s ním incidentných, s výnimkou faktu, že slučka na vrchole prispieva dvakrát k stupňu vrcholu. Stupeň vrcholu v sa označuje $deg(v)$.



Stupne vrcholov grafu na tomto obrázku sú nasledujúce: $deg(a)=1$, $deg(b)=4$, $deg(c)=2$, $deg(d)=3$, $deg(e)=2$

Vrchol stupňa 0 sa volá ***izolovaný***, taký nie je spojený zo žiadnym iným vrcholom.

Keď sčítame stupne všetkých vrcholov grafu, každá hrana grafu prispieva k súčtu dvojkou. Súčet stupňov vrcholov je teda dvojnásobkom počtu hrán

$$2\left|E\right| = \sum_{v\in V} deg\left(v\right)$$

Veta. Graf má párny počet vrcholov nepárneho stupňa.

Dôkaz: Nech V_1 a V_2 sú množiny vrcholov párneho, resp. nepárneho stupňa neorientovaného grafu $G=(V,E)$. Potom

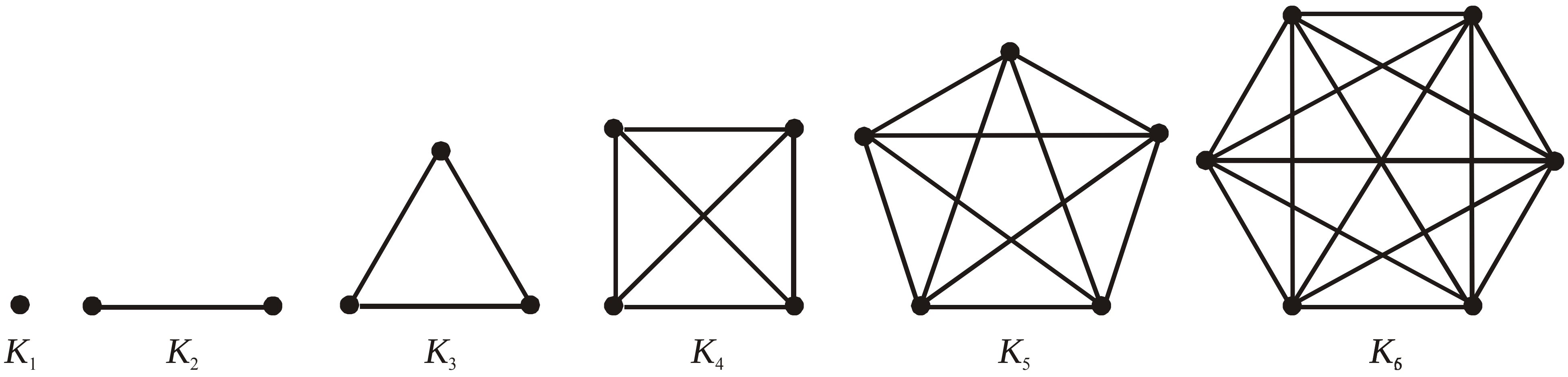
$$2\left|E\right| = \sum_{v\in V} deg\left(v\right) = \sum_{v\in V_1} deg\left(v\right) + \sum_{v\in V_2} deg\left(v\right)$$

Pretože $deg(v)$ je párne pre $v\in V_1$, prvý člen na pravej strane je párny. Suma na pravej strane musí byť tiež párna, pretože ľavá strana je párna. Preto aj druhý člen na pravej strane musí byť párny. Pretože všetky sčítance tejto sumy sú nepárne, aby vytvorili párne číslo, musí ich byť párny počet. ■

Niektoré špeciálne typy grafov

Úplný graf o n vrcholoch, označovaný ako K_n, je taký graf, ktorý obsahuje práve jednu hranu medzi každou dvojicou rôznych vrcholov.

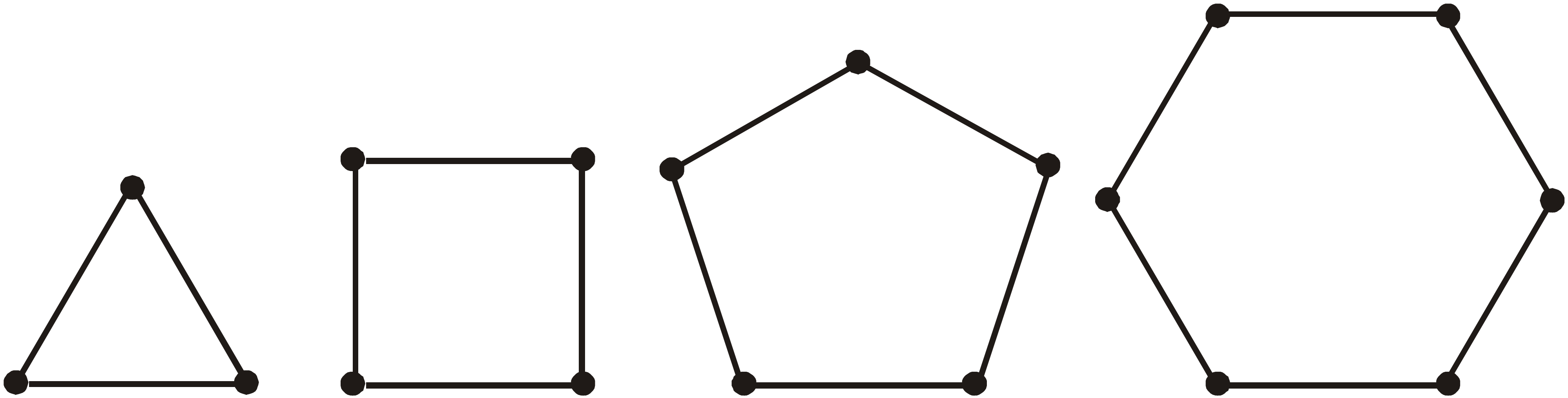
Grafy K_n pre n=1,2,3,4,5,6



Cyklus

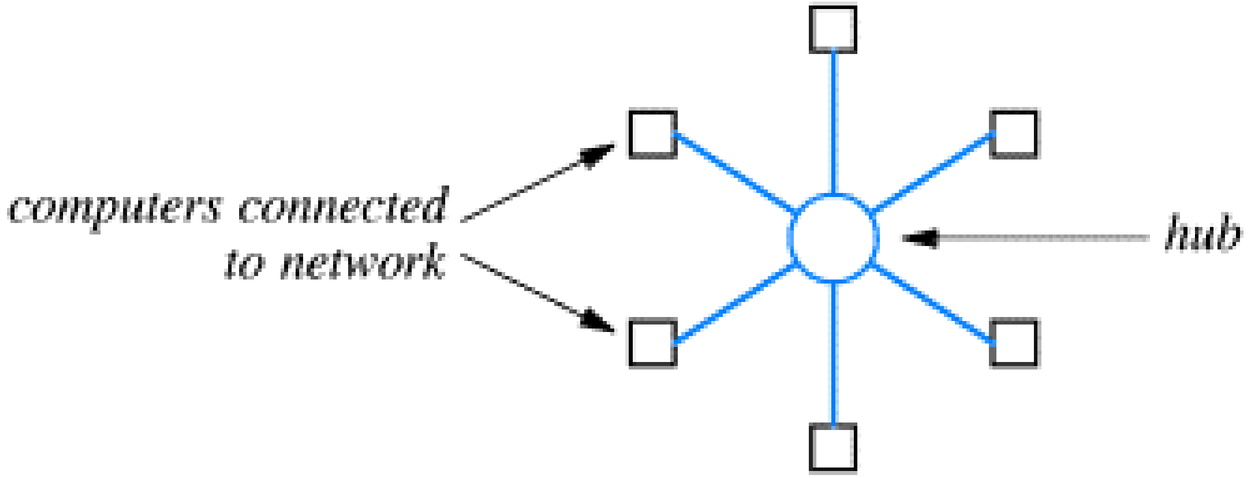
C_n, $n \geq 3$, pozostáva z vrcholov $v_1, v_2, \ldots, v_n$ a hrán $\{v_1, v_2\}$, $\{v_2, v_3\}, \ldots,$ $\{v_{n-1}, v_n\}$, a $\{v_n, v_1\}$.

Cykly C_3, C_4, C_5 a C_6

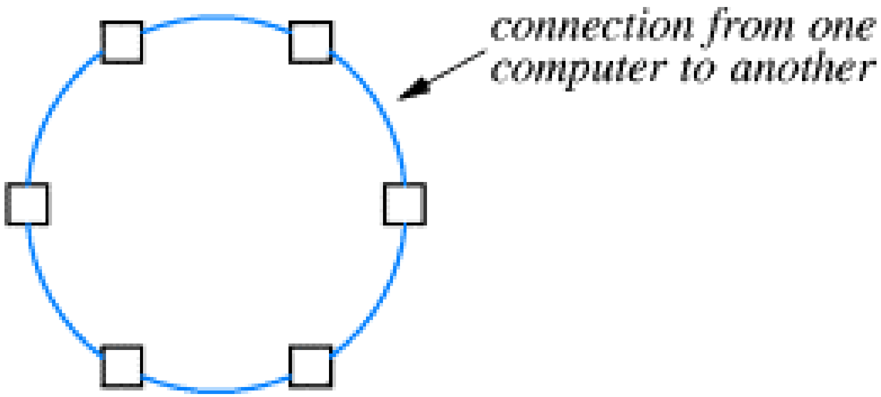


C_3 C_4 C_5 C_6

Hviezdica



Kruhová topológia



Bipartitný graf

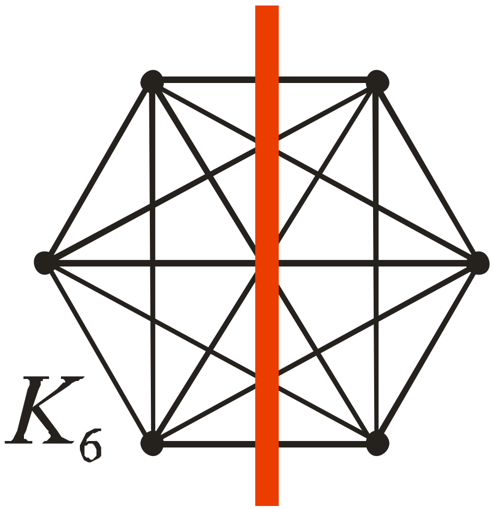
Vrcholová množina môže byť rozdelená na dve disjunktné podmnožiny V_1 a V_2 tak, že každá hrana spája vrchol z jednej z týchto podmnožín s vrcholom z druhej z týchto podmnožín,

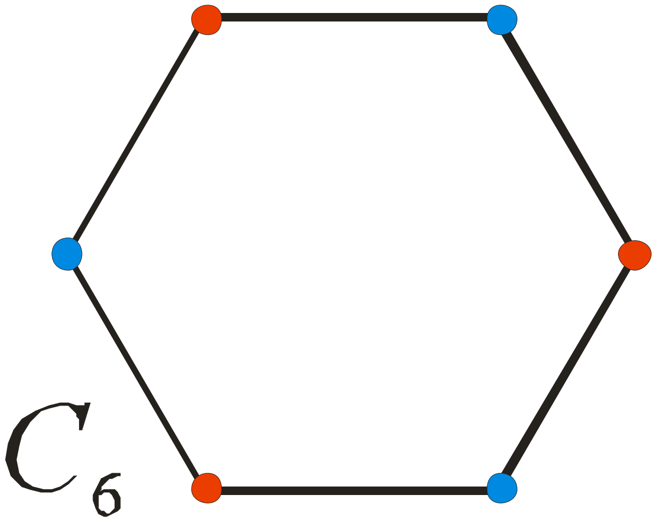
Príklad môžeme uviesť graf existujúcich a minulých manželstiev na dedine, kde hrana spája vždy manžela s manželkou. Taký graf sa dá rozdeliť na množinu manželov na jednej strane a množinu manželiek na strane druhej. Niektorí z páru môžu byť spojení s viacerými vrcholmi druhej podmnožiny, keď boli viackrát ženatí/vydaté za rozdielnych partnerov, ale aspoň na Slovensku sa zatiaľ nenájde pár zosobášených mužov či žien.

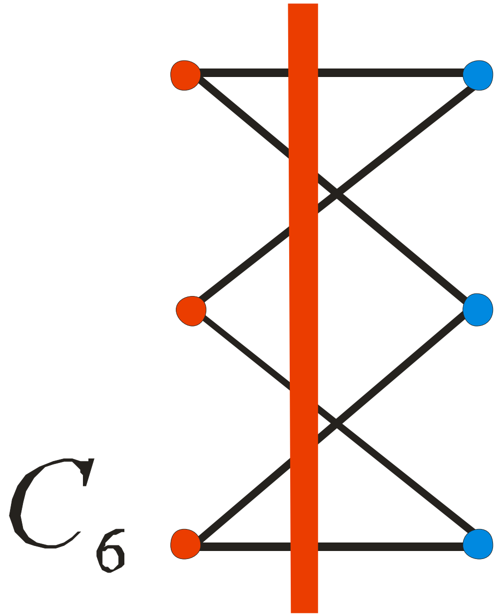
Príklad: *Sú grafy C_6 alebo K_6 bipartitné?*

Graf C_6 je bipartitný, $V_1=\{v_1,v_3,v_5\}$, $V_2=\{v_2,v_4,v_6\}$.

Graf K_6 nie je bipartitný, pri každom možnom rozložení na dve vrcholové podmnožiny jedna z podmnožín musí obsahovať aspoň 2 vrcholy, ktoré podľa definície kompletného grafu musia byť spojené hranou. V skutočností, žiadny kompletný graf o viac ako dvoch vrcholoch nie je bipartitný.

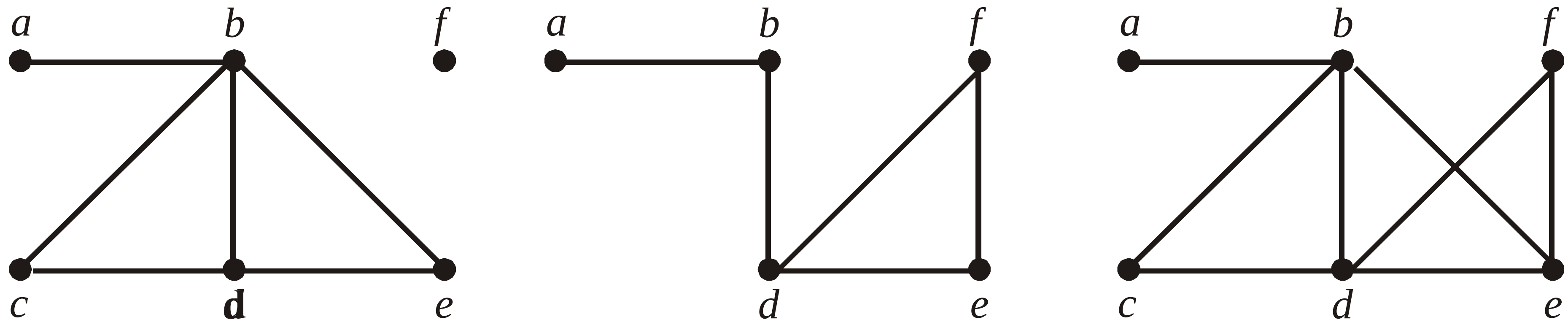






Podgraf a zjednotenie

Podgraf grafu $G=(V,E)$ je graf $H=(W,F)$, kde $W \subseteq V$ a $F \subseteq E$.
Zjednotenie dvoch grafov $G_1=(V_1,E_1)$ a $G_2=(V_2,E_2)$ je graf s vrcholovou množinou $V_1 \cup V_2$ a hranovou množinou $E_1 \cup E_2$. Zjednotenie týchto grafov sa značí $G_1 \cup G_2$.



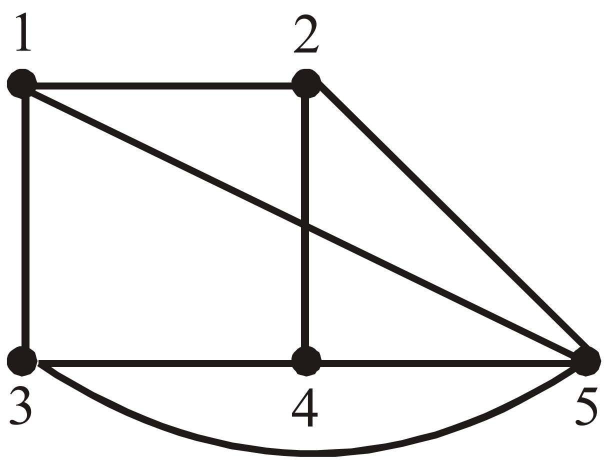
G_1 G_2 $G_1 \cup G_2$

Príklad zjednotenia dvoch grafov. Grafy G_1 a G_2 sú súčasne podgrafmi zjednoteného grafu $G_1 \cup G_2$

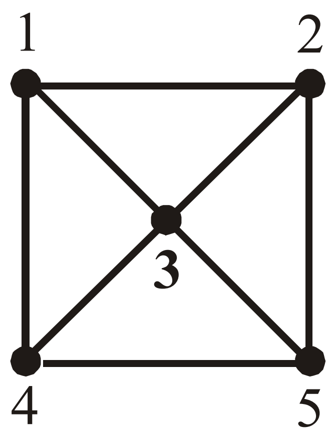
Izomorfné grafy

Keď vhodne posunieme vrcholy jedného grafu nad druhý tak aby sa prekrývali, aj všetky hrany sa budú prekrývať (medzi grafmi existuje mapovanie 1-1 vrcholov, ktoré zachováva hrany)

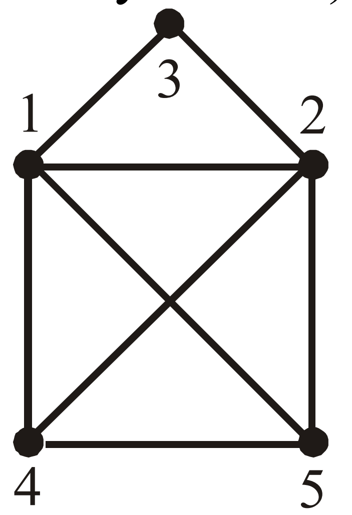
Príklad: Ktoré dvojice grafov sú navzájom izomorfné?
(Pozor, keď sa hrany krížia, neznamená to, že je tam automaticky vrchol!)



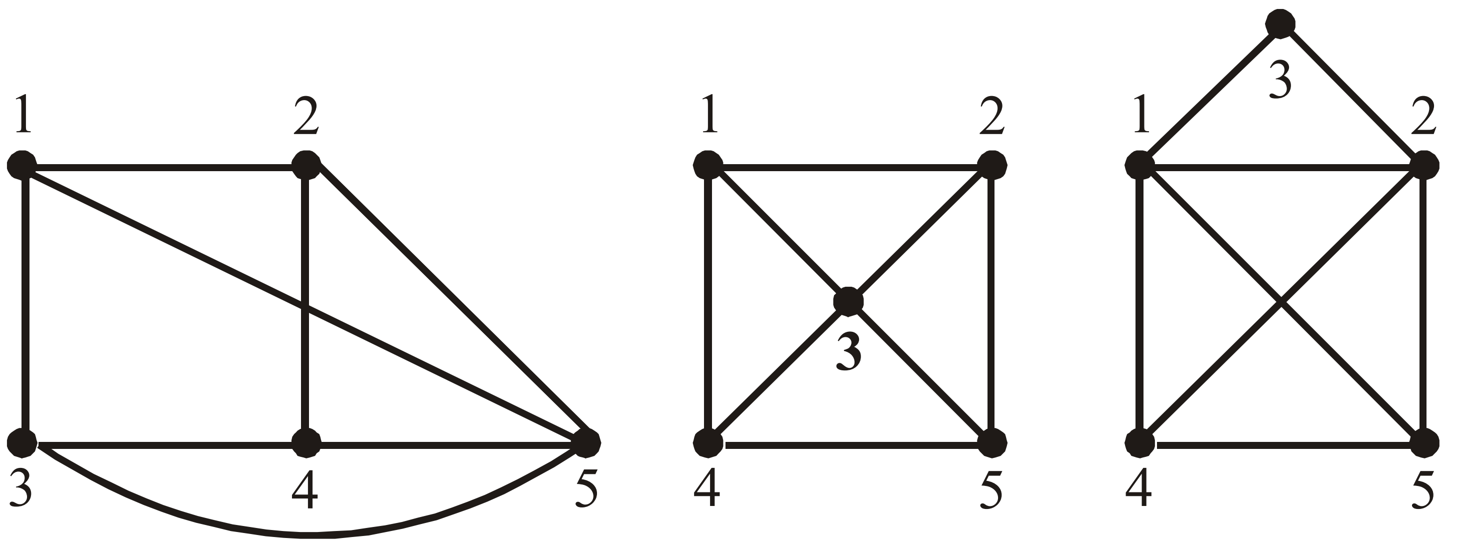
G_1



G_2



G_3



G_1 G_2 G_3

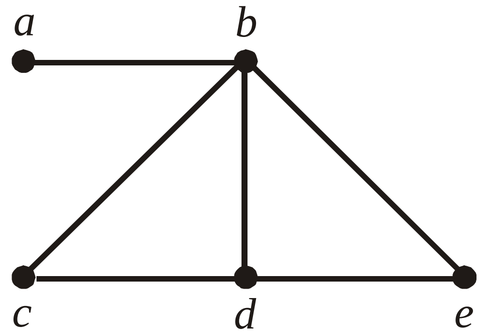
Keď označíme vrcholy grafu G_1 ako v_i a vrcholy grafu G_2 ako w_i ,
funkcia f mapujúca vrcholy grafu G_1 na vrcholy grafu G_2, $f(v_1)=w_1$, $f(v_2)=w_2$, $f(v_3)=w_4$, $f(v_4)=w_5$, $f(v_5)=w_3$ zachováva hrany

Graf G_3 nie je izomorfný s grafmi G_1 a G_2, pretože mu odpovedajúce vrcholy majú stupne 2,3,3,4,4, zatiaľ čo stupne vrcholov grafov G_1 a G_2 sú 3,3,3,3,4.

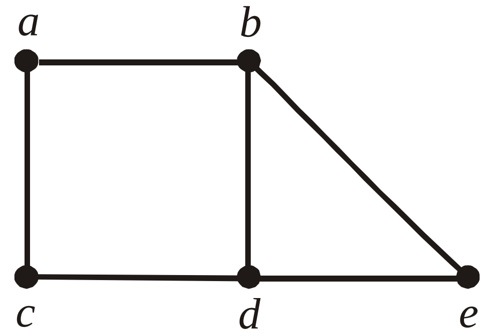
Zistenie izomorfizmu dvoch grafov (keď majú rovnaké *invarianty*) má v najhoršom prípade stále exponenciálnu zložitosť (ale NAUTY 100 vrcholov 1s)

Reprezentácia grafov (aby sa dali zadať do počítača)

Zoznam spojenia (adjacency list)



G_1

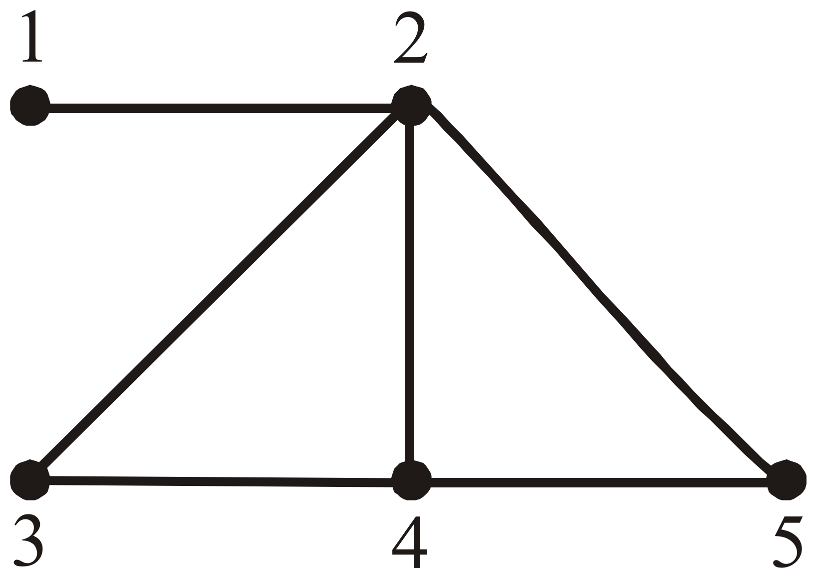


G_2

Vrchol grafu G_1 x	Susedné vrcholy $\Gamma(x)$	Vrchol grafu G_2 x	Susedné vrcholy $\Gamma(x)$
a	b	a	b, c
b	a, c, d, e	b	a, d, e
c	b, d	c	a, d
d	b, c, e	d	b, c, e
e	d, e	e	b, d

Matica susednosti (adjacency matrix) $A = (a_{ij})$

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{pre } \{v_i, v_j\} \in E \text{ grafu } G \\ 0 & \text{ináč} \end{cases}$$

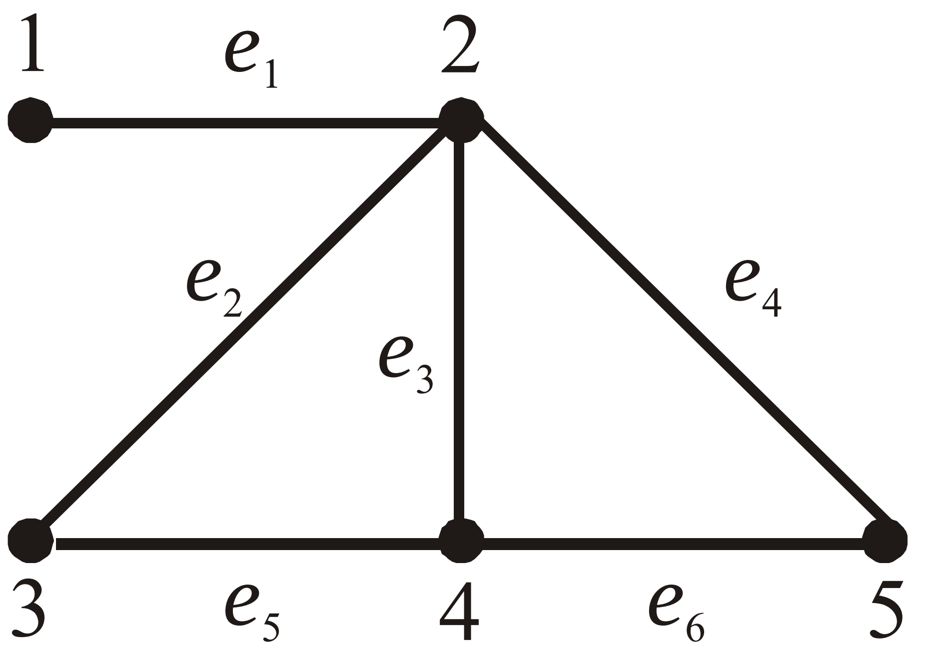


$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Incidenčná matica

Pre neorientovaný graf G=(V,E) s n vrcholmi a m hranami **je to** $n\times m$ matica

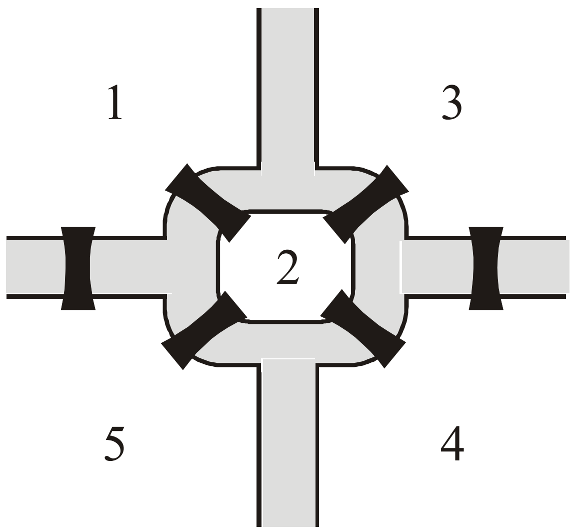
$$\boldsymbol{M} = (m_{ij}),\text{ kde } m_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{keď } e_j \text{ je incidentná s } v_i \\ 0 & \text{ináč} \end{cases}$$



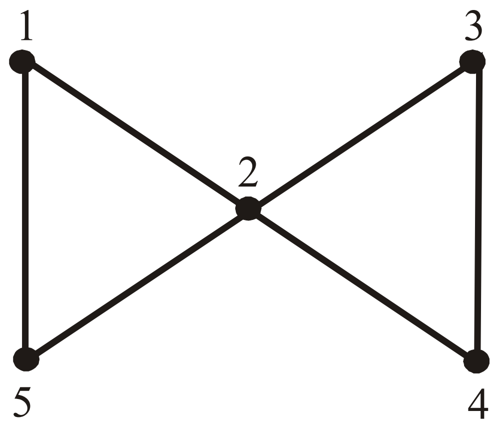
$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \end{array} \\ \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Euelrov problém z r. 1736

Ako prejsť po všetkých mostoch Královca práve raz a vrátiť sa domov? (Königsberg v Prusku, teraz Kaliningrad v Rusku)



A



B

Dve Eulerove vety

Eulerova veta 1. Súvislý graf má uzavretý eulerovský ťah práve vtedy, keď má všetky vrcholy párneho stupňa.

Uzavretý eulerovský ťah môže začínať v ľubovoľnom vrchole

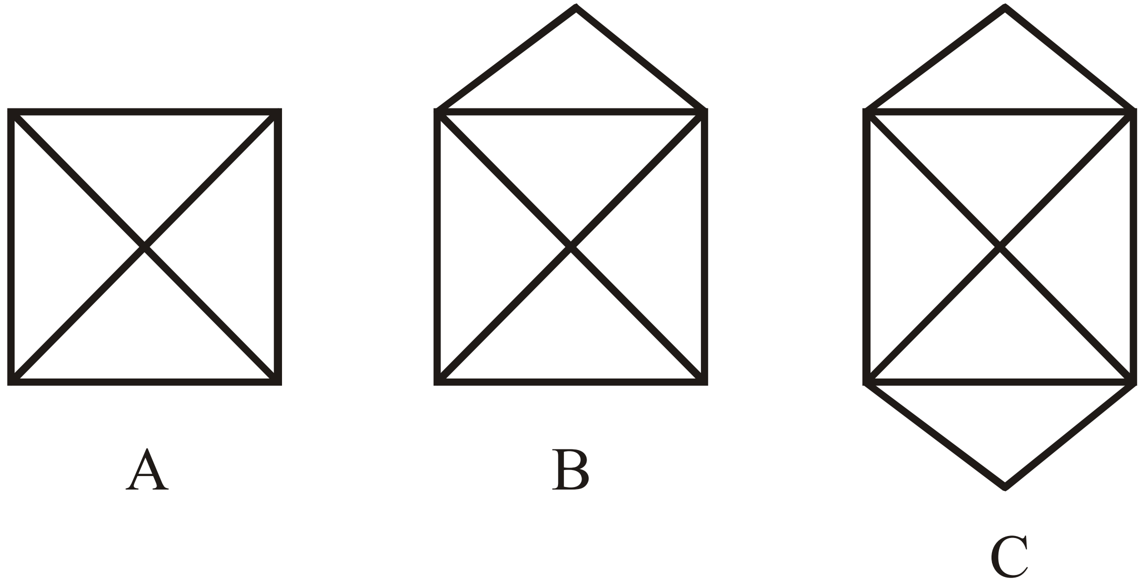
Eulerova veta 2. Súvislý graf má otvorený eulerovský ťah práve vtedy, keď má práve dva vrcholy nepárneho stupňa

Otvorený eulerovský ťah začína v prvom vrchole nepárneho stupňa a končí v druhom vrchole nepárneho stupňa.

Záver. Eulerovský ťah existuje vtedy, keď graf buď nemá vrcholy neprárneho stupňna alebo ich má dva.

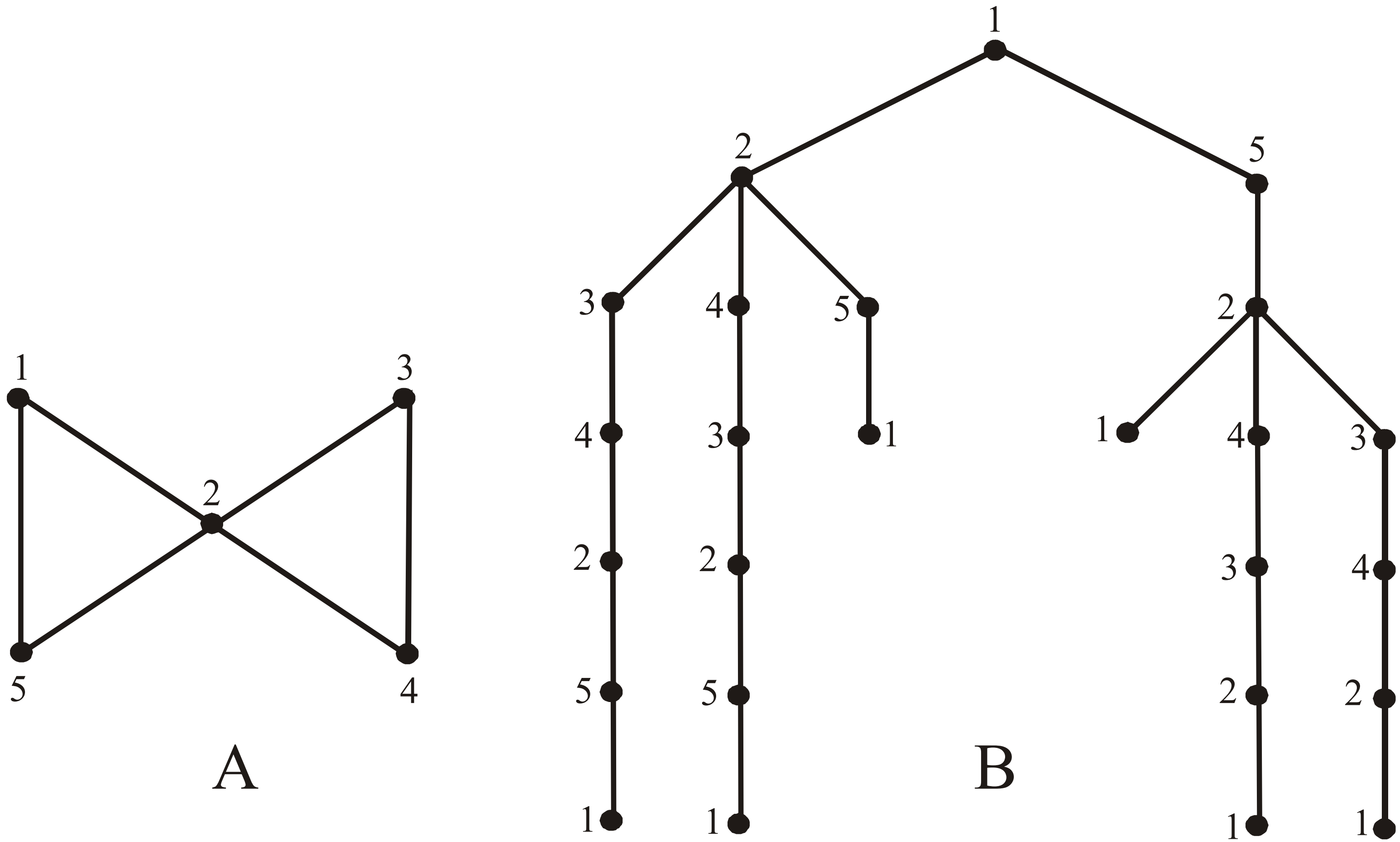
Detská úloha

Nakresliť jedným ťahom obrázok

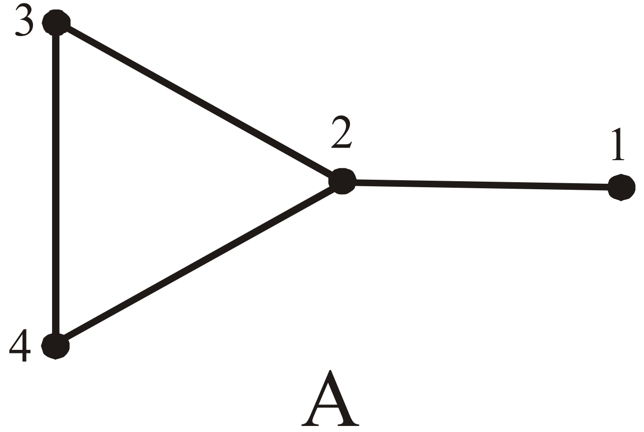


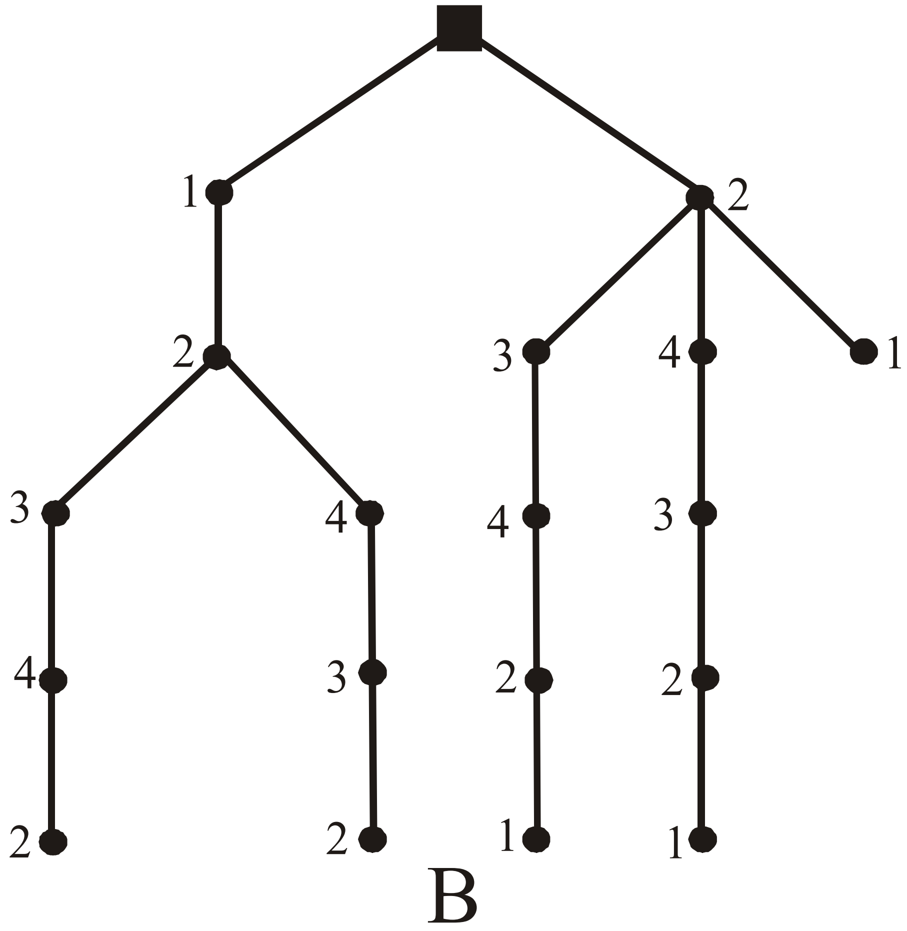
Obrázok A - nie je možné nakresliť ťahom
Obrázok B - je možné nakresliť otvoreným ťahom
Obrázok C - je možné nakresliť uzavretým ťahom

Strom riešení (diagram B) pre uzavretú eulerovskú cestu zostrojený algoritmom spätného prehľadávania pre obyčajný graf



Strom riešení (diagram B) pre otvorenú eulerovskú cestu zostrojený algoritmom spätného prehľadávania pre obyčajný graf (diagram A).

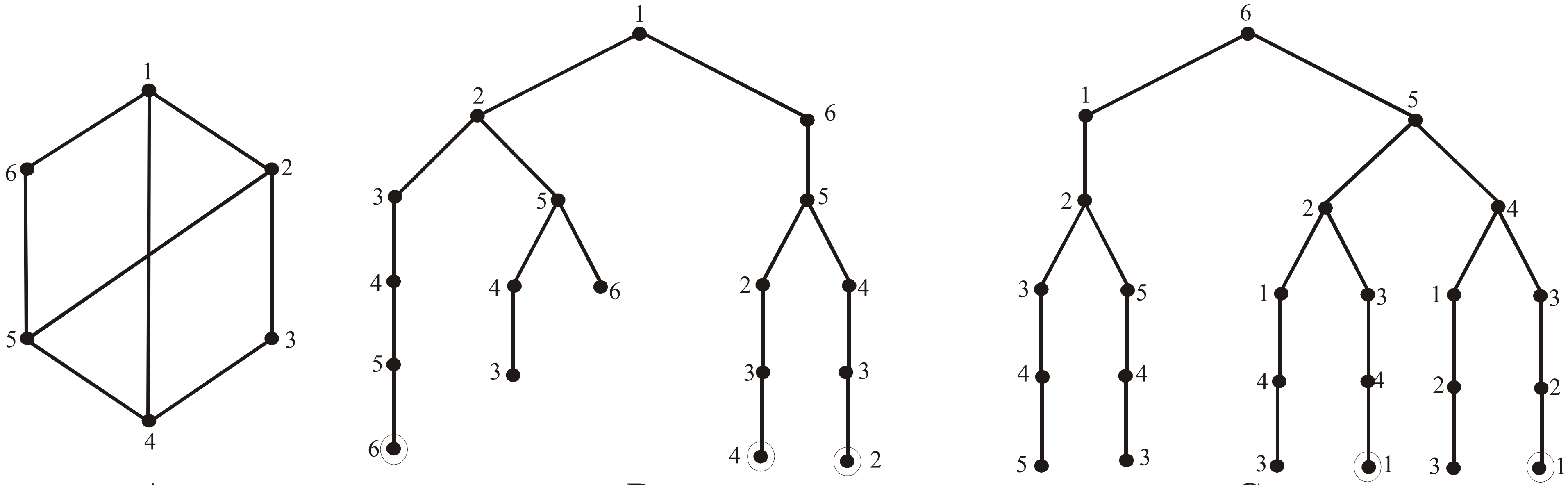




Hamiltonova kružnica

Hamiltonov cesta navštívi každý vrchol grafu práve raz. Uzavretá Hamitonova cesta (Hamiltonova kružnica) je taká cesta, ktorá sa vracia do prvého vrcholu cesty.

Zostrojenie Hamiltonovej kružnice metódou spätného prehľadávania

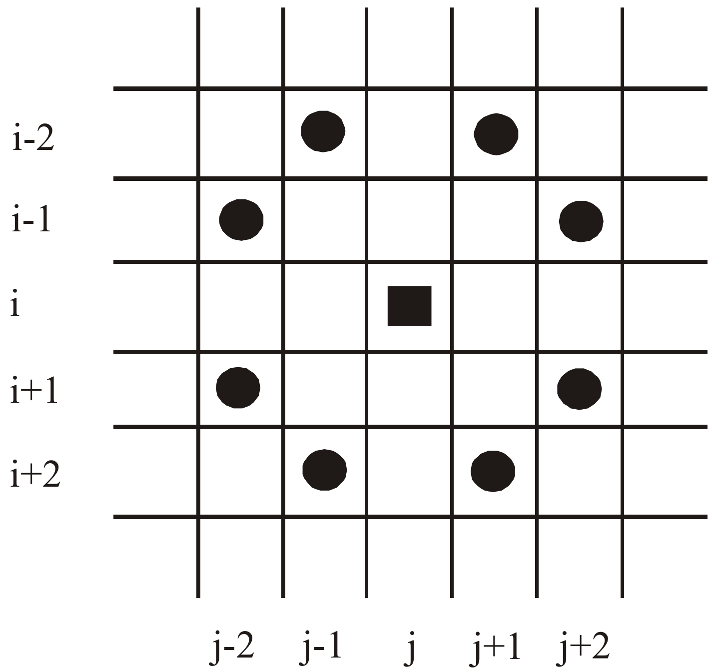


A B C

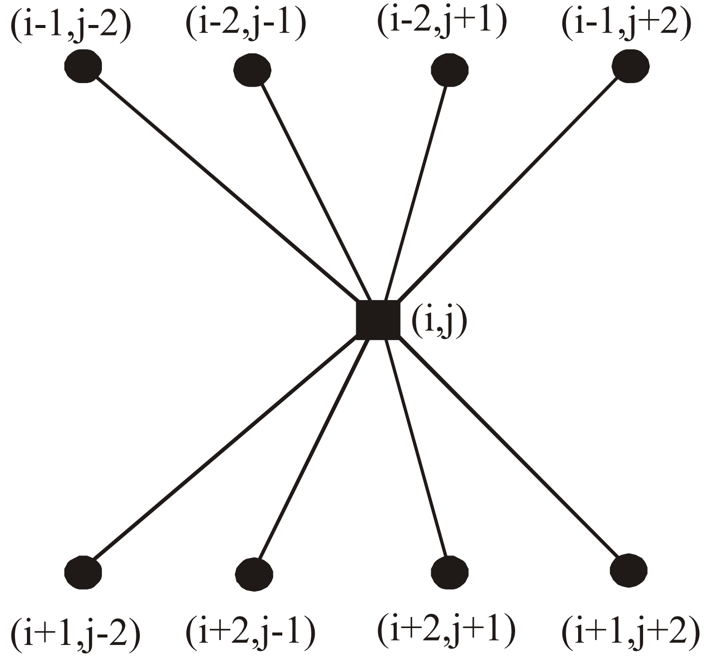
Cesty, ktoré končia vrcholom v krúžku sú uzavreté (hamiltonovská kružnica).

Príklad

Nakreslite graf, ktorý reprezentuje hamiltonovskú cestu koňom na šachovnici 3×4.

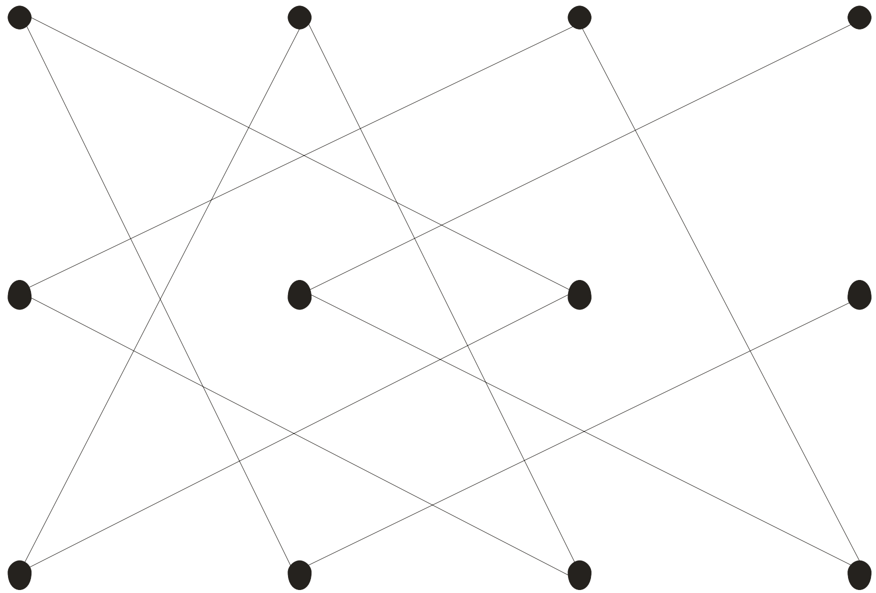


A



B

(A) Prípustné ťahy koňom na šachovnici
(B) Odpovedajúci graf (východzí vrchol je označený štvorcom)

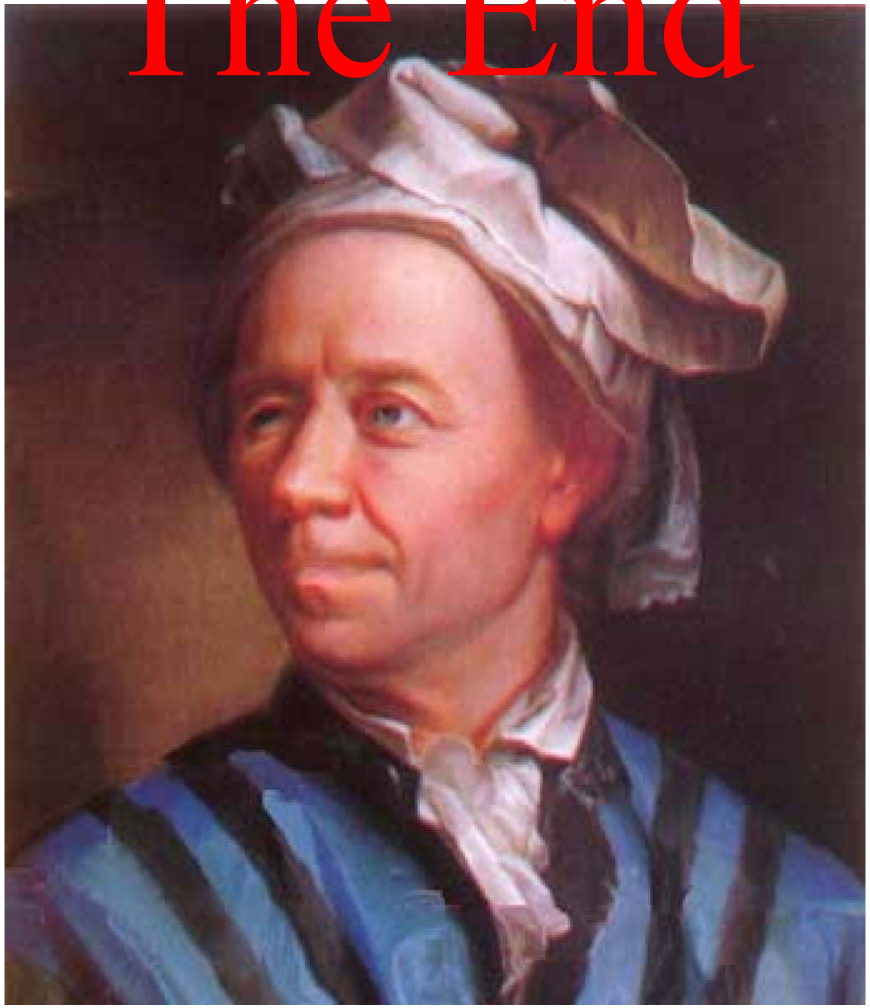


Ťah koňom na šachovnici 3×4

3	6	9	12
8	11	4	1
5	2	7	10

tabuľka postupnosti ťahov

The End



Leonhard Euler (1707-1783)