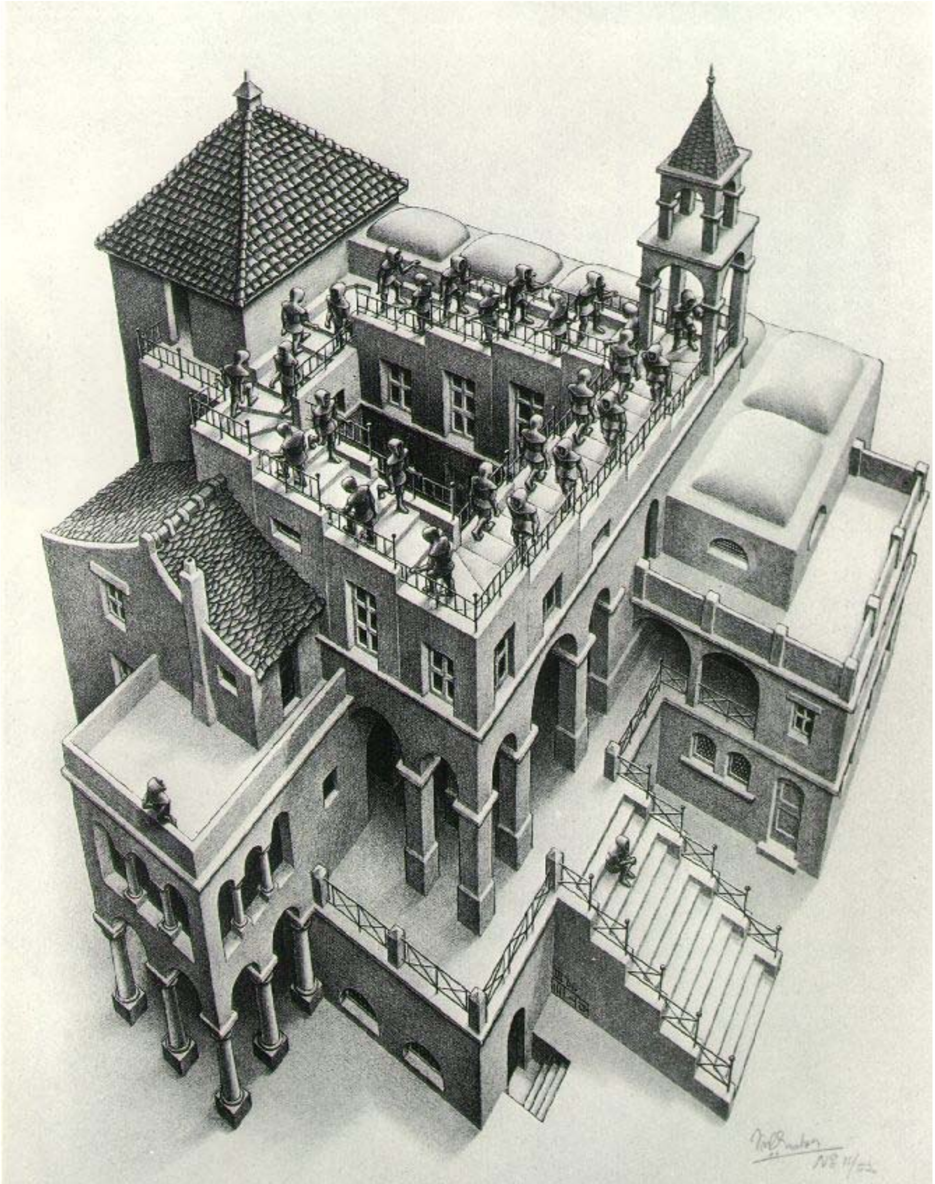
Maticové algoritmy I

- **maticová algebra**
- **operácie nad maticami**
- **súčin matíc**



Maurits Cornelis **Escher** (1898-1972)
Ascending and Descending, 1960, Lithograph

Matice

V mnohých prípadoch dáta majú štruktúru dvojrozmernej tabuľky, ktorá má *m* riadkov a *n* stĺpcov.

		predmet		
		Matematika	Logika	Programovanie
študent	A	88	98	67
	B	75	91	73
	C	92	81	75
	D	98	100	98
	E	55	61	82

Riadky tejto tabuľky sú priradené jednotlivým študentom, zatiaľ čo stĺpce sú priradené predmetom. Na priesečníku daného riadku (študent – predmet) je uvedený počet bodov, ktoré získal daný študent pre daný predmet.

Ak z tejto tabuľky odstránime redundantný popis riadkov a stĺpcov dostávame matematickú štruktúru, ktorá sa nazýva ***matica***

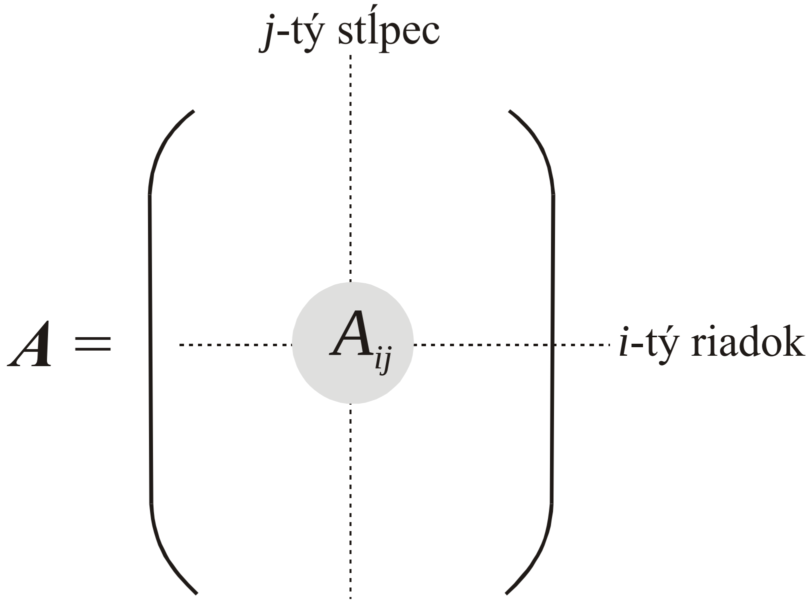
Definícia 8.1. Nech $I=\{1,2,...,m\}$ je množina riadkových indexov a $J=\{1,2,...,n\}$ je množina stĺpcových indexov, pričom m a n sú kladné celé čísla, $m,n\geq 1$. ***Maticou*** nazývame množinu obsahujúcu $m\cdot n$ čísel (celočíselných, racionálnych alebo reálnych), ktoré sú špecifikované riadkovým (i) a stĺpcovým (j) indexom

$$\boldsymbol{A}=\left\{A_{ij}\ ;i\in I,j\in J\right\}$$

Typ matice je usporiadaná dvojica kladných prirodzených čísel, ktoré sú rovné mohutnostiam množín indexov I a J

$$t\left(\boldsymbol{A}\right)=\left(m,n\right)$$

Množinová štruktúra matice $\boldsymbol{A}$ môže byť jednoducho znázornená pomocou tabuľky, ktorá obsahuje m riadkov a n stĺpcov, pričom na priesečníku i-tého riadku a j-tého stĺpca je umiestnený element A_{ij},



Používa aj „skratkové“ označenie pre maticu $\boldsymbol{A}=\left(A_{ij}\right)$, pričom sa implicitne predpokladá počet riadkov a stĺpcov tejto matice. Skutočnosť, že matica $\boldsymbol{A}$ má typ $t\left(\boldsymbol{A}\right)=\left(m,n\right)$

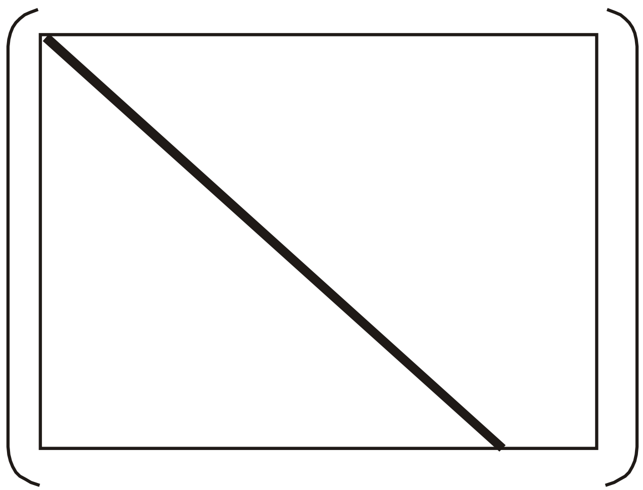
Príklad

$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & 4\\ -1 & 0\end{pmatrix},\ t(\boldsymbol{A})=(2,2)$	$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1 & 0 & -3 & 2\end{pmatrix},\ t(\boldsymbol{B})=(1,4)$
$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & 4 & 1\\ -1 & 0 & 2\end{pmatrix},\ t(\boldsymbol{A})=(2,3)$	$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ -3\end{pmatrix},\ t(\boldsymbol{X})=(3,1)$

Základná terminológia

(1) Ak $m=n$, matica sa nazýva ***štvorcová***, v opačnom prípade matica sa nazýva ***obdĺžniková***.

(2) Prvky matice A_{ii} sa nazývajú ***diagonálne***, všetky diagonálne prvky tvoria ***diagonálu*** matice

$\boldsymbol{A}=$ 

(3) Ak všetky prvky matice sú nuly, potom matica sa nazýva ***nulová matica***.

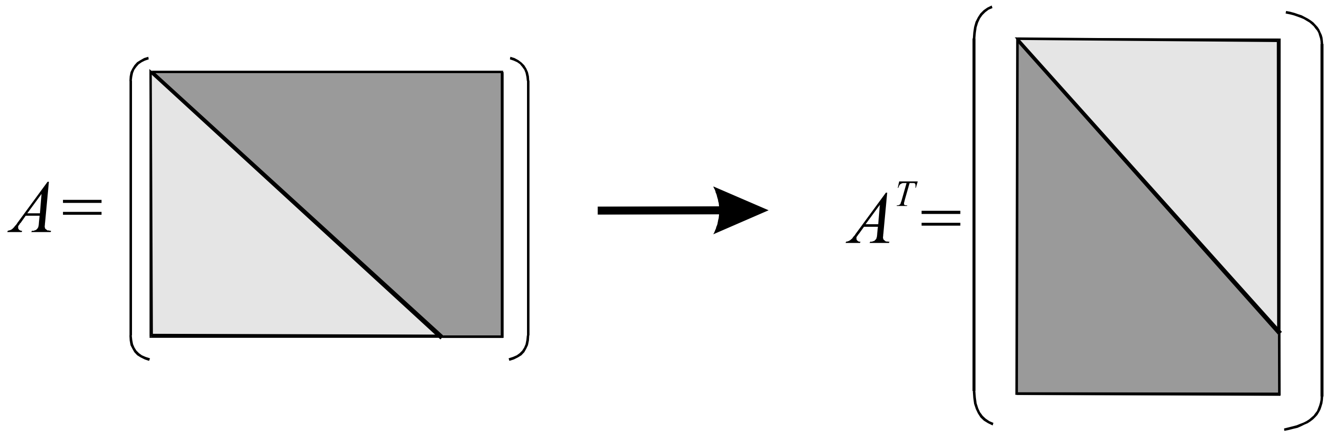
(4) Štvorcová matica, ktorá mimo diagonály má nulové prvky a na diagonále má aspoň jeden nenulový prvok sa nazýva ***diagonálna matica***.

(5) Špeciálny prípad diagonálnej matice je ***jednotková matica*** (budeme ju značiť ***E***) všetky diagonálne elementy sú jednotky

$$A_{ij} = \begin{cases} 1 & (\text{pre } i = j) \\ 0 & (\text{pre } i \neq j) \end{cases}$$

(6) Nech $\boldsymbol{A}$ je matica typu $t(\boldsymbol{A}) = (m,n)$, potom matica ***transponovaná*** k tejto matici, označená $\boldsymbol{A}^T$, sa vytvorí z matice $\boldsymbol{A}$ tak, že vzájomne zameníme stĺpce za riadky a naopak, potom $t(\boldsymbol{A}^T) = (m,n)$ (pozri obr. 8.3). Názorne hovoríme, že matica $\boldsymbol{A}^T$ vznikla z matice $\boldsymbol{A}$ jej preklopením okolo diagonály. Transponovaná matica je ilustrovaná príkladom

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$



(7) Štvorcová matica sa nazýva ***symetrická*** matica, ak platí $\boldsymbol{A}^T=\boldsymbol{A}$. Jednoduchý príklad symetrickej matice je

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

(8) Matica $\boldsymbol{A}$ typu (m,n) sa nazýva ***trojuholníková matica,*** ak pod diagonálou má nulové prvky a na diagonálne má nenulové prvky

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(9) Ak ***A*** matica typu t(***A***) = (m,n) má počet riadkov (m) alebo počet stĺpcov (n) rovný 1, potom takáto špeciálna matica sa nazýva ***riadkový vektor*** (m = 1) resp. ***stĺpcový vektor*** (n = 1). Príklady riadkovej a stĺpcovej matice sú

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0 & -1 & 2\end{pmatrix}$$

Aplikáciou operácia transpozície, stĺpcový vektor sa mení na riadkový vektor a naopak, pre predchádzajúce dve matice dostaneme

$$\boldsymbol{A}^T=\begin{pmatrix}0 & 1 & -1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}^T=\begin{pmatrix}0\\-1\\2\end{pmatrix}$$

Príklad

Pomocou riadkových alebo stĺpcových vektorov môžeme vyjadriť každú maticu ako „kompozíciu“ týchto elementárnych matíc

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 88 & 98 & 67 \\ 75 & 91 & 73 \\ 92 & 81 & 75 \\ 98 & 100 & 98 \\ 55 & 61 & 82 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{r}_1 = \begin{pmatrix} 88 & 98 & 67 \end{pmatrix}$$
$$\boldsymbol{r}_2 = \begin{pmatrix} 75 & 91 & 73 \end{pmatrix}$$
$$\boldsymbol{r}_3 = \begin{pmatrix} 92 & 81 & 75 \end{pmatrix}$$
$$\boldsymbol{r}_4 = \begin{pmatrix} 98 & 100 & 98 \end{pmatrix}$$
$$\boldsymbol{r}_5 = \begin{pmatrix} 55 & 61 & 82 \end{pmatrix}$$

$$\text{t } \boldsymbol{s}_1 = \begin{pmatrix} 88 \\ 75 \\ 92 \\ 98 \\ 55 \end{pmatrix}, \boldsymbol{s}_2 = \begin{pmatrix} 98 \\ 91 \\ 81 \\ 100 \\ 61 \end{pmatrix}, \boldsymbol{s}_3 = \begin{pmatrix} 67 \\ 73 \\ 75 \\ 98 \\ 82 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{r}_1 \\ \boldsymbol{r}_2 \\ \boldsymbol{r}_3 \\ \boldsymbol{r}_4 \\ \boldsymbol{r}_5 \end{pmatrix} \quad \text{alebo} \quad \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{s}_1 & \boldsymbol{s}_2 & \boldsymbol{s}_3 \end{pmatrix}.$$

Operácie nad maticami

(1) Nech matice $\boldsymbol{A} = (A_{ij})$ a $\boldsymbol{B} = (B_{ij})$ sú rovnakého typu, $t(\boldsymbol{A}) = t(\boldsymbol{B}) = (m,n)$. Hovoríme, že tieto matice sa ***rovnajú***, $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$, vtedy a len vtedy, ak

$$\forall\left(i \in I\right)\forall\left(j \in J\right)\left(A_{ij} = B_{ij}\right)$$

(2) Nech matice $\boldsymbol{A} = (A_{ij})$ a $\boldsymbol{B} = (B_{ij})$ sú rovnakého typu, $t(\boldsymbol{A}) = t(\boldsymbol{B}) = (m,n)$. Hovoríme, že matica $\boldsymbol{B}$ je ***α-násobkom*** matice **A**, $\boldsymbol{B} = \alpha\boldsymbol{A}$, vtedy a len vtedy, ak

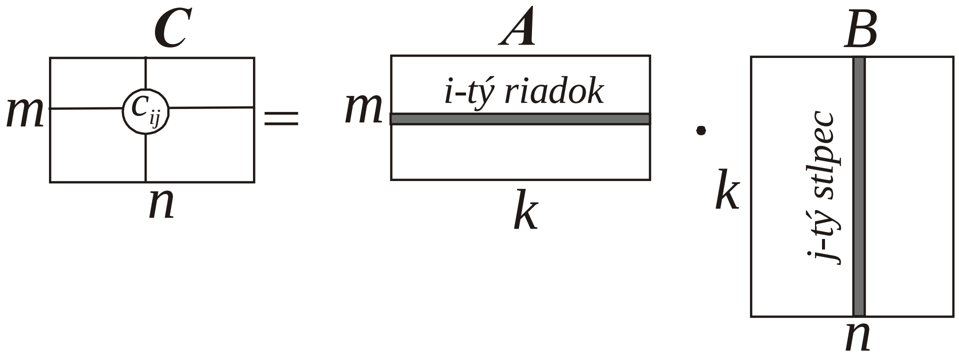
$$\forall\left(i \in I\right)\forall\left(j \in J\right)\left(B_{ij} = \alpha\, A_{ij}\right)$$

(3) Nech matice $\boldsymbol{A} = (A_{ij})$, $\boldsymbol{B} = (B_{ij})$ a $\boldsymbol{C} = (C_{ij})$ sú rovnakého typu, $t(\boldsymbol{A}) = t(\boldsymbol{B}) = t(\boldsymbol{C}) = (m,n)$. Hovoríme, že matica $\boldsymbol{C}$ je ***súčtom*** matíc $\boldsymbol{A}$ a $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}$, vtedy a len vtedy, ak

$$\forall (i \in I) \forall (j \in J) \left(C_{ij} = A_{ij} + B_{ij} \right)$$

(4) Matica $\boldsymbol{A} = (A_{ij})$ je typu $t(\boldsymbol{A}) = (m,k)$, matica $\boldsymbol{B} = (B_{ij})$ je typu $t(\boldsymbol{B}) = (k,n)$ a matica $\boldsymbol{C} = (C_{ij})$ je typu $t(\boldsymbol{C}) = (m,n)$. Hovoríme, že matica $\boldsymbol{C}$ je **súčinom** matíc $\boldsymbol{A}$ a $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{AB}$, vtedy a len vtedy, ak

$$\forall (i \in I) \forall (j \in J) \left(c_{ij} = \sum_{p=1}^{k} a_{ip} b_{pj} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \ldots + a_{ik} b_{kj} \right)$$



Súčin dvoch matíc ***A*** a ***B*** môže byť podstatne zjednodušená použitím riadkových vektorov matice ***A*** a stĺpcových vektorov matice ***B***. Nech $\boldsymbol{r}_i$ je $\boldsymbol{i}$-tý riadkový vektor matice ***A*** a $\boldsymbol{s}_j$ je j-tý stĺpcový vektor matice ***B***, potom element C_{ij} je zadaný takto

$$C_{ij} = \boldsymbol{r}_i \cdot \boldsymbol{s}_j = \begin{pmatrix} A_{i1} & A_{i2} & \dots & A_{ik} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{1j} \\ B_{2j} \\ \dots. \\ B_{kj} \end{pmatrix} = \sum_{l=1}^{k} A_{il} B_{lj}$$

Príklad

Násobenie matíc

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},$$

Definujem riadkové vektory matice $\boldsymbol{A}$ a stĺpcové vektory matice $\boldsymbol{B}$

$$\boldsymbol{r}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{r}_1 = \begin{pmatrix} -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{s}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, s_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Potom elementy matice $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{AB}$ sú určené takto

$$C_{11} = r_1 \cdot s_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = (1)(-1) + (2)(1) = 1$$

$$C_{12} = r_1 \cdot s_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = (1)(0) + (2)(2) = 4$$

$$C_{21} = r_2 \cdot s_1 = \begin{pmatrix} -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = (-1)(-1) + (3)(1) = 4$$

$$C_{22} = r_2 \cdot s_2 = \begin{pmatrix} -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = (-1)(0) + (3)(2) = 6$$

Potom súčin $\boldsymbol{AB}$ je určený

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & 8 \end{pmatrix}$$

(0) Súčin matíc nie je komutatívna operácia

$$AB \neq BA$$

(1) Súčin je asociatívny

$$A(BC)=(AB)C$$

(2) Súčin je distributívny vzhľadom k súčtu matíc

$$(A+B)C=AC+BC$$
$$A(B+C)=AB+AC$$

(3) Asociatívnosť operácia násobenia vektora číslom vzhľadom k operácii súčin matíc

$$A(\alpha B)=\alpha(AB)$$

Algoritmus pre násobenie matíc

```
procedure matrix_multiplication;
for i:=1 to m do
for j:=1 to n do
begin sum:=0;
      for l:=1 to k do sum:=sum+A[i,l]*B[l,j];
      C[i,j]:=sum;
end;
```

Môžeme teda konštatovať, že zložitosť algoritmu rastie úmerne n^3, pričom sa predpokladá, že dimenzie matíc sú si rovné, $k = m = n$. Je prekvapujúce, že už tak jednoduchý algoritmus akým je tento, môže byť podstatne akcelerovaný, bol navrhnutý algoritmus, ktoré ho zložitosť rastie $n^{\sqrt{7}}$, pretože $\sqrt{7} < 3$, tento nový algoritmus je o trochu efektívnejší ako náš algoritmus.

Problém násobenia reťazca matíc

Nech pre n matíc $\boldsymbol{A}_1$, $\boldsymbol{A}_2$, …, $\boldsymbol{A}_n$, ktoré sú typu $t(\boldsymbol{A}_i) = (p_i,q_i)$, platí podmienka, že pre susedné matice $\boldsymbol{A}_i$ a $\boldsymbol{A}_{i+1}$ existuje ich súčin

$$q_i = p_{i+1}$$

pričom typ súčinu týchto matíc je

$$t(\boldsymbol{A}_i\,\boldsymbol{A}_{i+1}) = (p_i,q_{i+1})$$

Pre výpočet maticového súčinu $\boldsymbol{A}_i\,\boldsymbol{A}_{i+1}$ je potrebných

$$m\left(\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{A}_{i+1}\right) = p_i \times q_i \times q_{i+1}$$

elementárnych súčinov.

Problém: Koľko elementárnych súčinov potrebujeme pre výpočet súčinu n matíc

$$\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2\ldots\boldsymbol{A}_n$$

K tomu, aby sme vypočítal počet elementárnych súčinov potrebných pre výpočet súčinu matíc $\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2\ldots\boldsymbol{A}_n$ musíme určiť jeho „zátvorkovanie“ , napr.

$$\left(\left(\left(\left(\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2\right)\boldsymbol{A}_3\right)\boldsymbol{A}_4\right)\ldots\boldsymbol{A}_n\right)$$

Úloha: Koľko rôznych zátvorkovaní existuje pre súčin *n* matíc $A_1 A_2 \ldots A_n$

***Riešenie*:**
Označme počet alternatív zátvorkovania reťazca *n* matíc symbolom $P(n)$.

Generovanie zátvorkovania môžeme uskutočniť rekuretným spôsobom:
Nech U_k je množina, ktorá obsahuje reťazce *k* matíc pre rôzne zátvorkovanie, kde $k = 1, 2, \ldots, n - 1$. Potom množinu U_n vytvoríme tak, že pre všetky možné dvojice podmnožín U_{n-k} a U_k vytvoríme možné zátvorkovanie

$$U_n = U_1 U_{n-1} \cup U_2 U_{n-2} \cup \ldots \cup U_{n-2} U_2 \cup U_{n-1} U_1$$

Potom počet rôznych zátvorkovaní reťazca *n* matíc je

$$P(n)=\begin{cases}1 & (pre\; n=1)\\ \sum_{i=1}^{n-1} P(k)P(n-k) & (pre\; n\geq 1)\end{cases}$$

V literatúre sa dokazuje, že počet zátvorkovaní je určené pomocou binomiálneho koeficienta

$$P(n)=\frac{1}{n}\binom{2(n-1)}{n-1}=\frac{(2n-2)!}{(n)!(n-1)!}$$

Prvé hodnoty $P(n)$ sú

$$P(1)=1, P(2)=1, P(3)=2, P(4)=5, P(5)=14, \ldots$$

Z tejto formuly môžeme odvodiť aj rekurentný vzťah

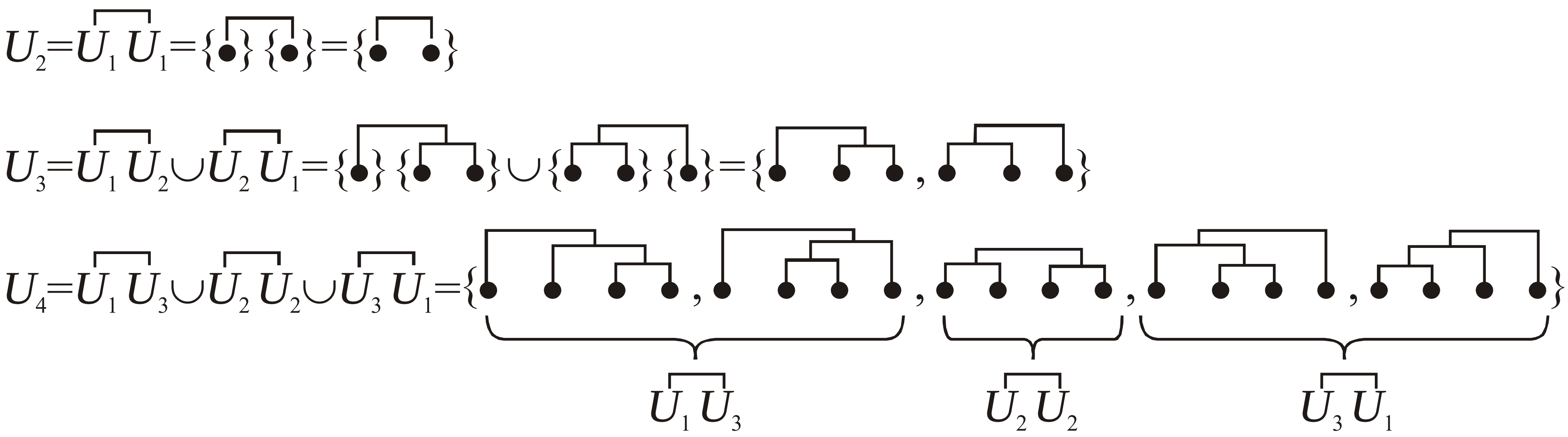
$$P(n+1)=\frac{2(2n-1)}{n+1}P(n)$$

z ktorého môžeme odvodiť asymptotický vzťah

$$\lim_{n\to\infty} P(n) \sim \frac{4^n}{\sqrt{\pi} n^{3/2}}$$

Ilustračný príklad

$U_1 = \{\bullet\}$



Problém: Navrhnúť také zatvorkovanie súčinu n matíc $A_1 A_2 \ldots A_n$, ktoré obsahuje ***minimálny počet*** elementárnych súčinov

Časová zložitosť tejto úlohy rastie exponenciálne s počtom matíc v súčine

$$t_{CPU} \approx 4^n$$

Riešenie problému patrí teda medzi "časovo" veľmi zložité úlohy.

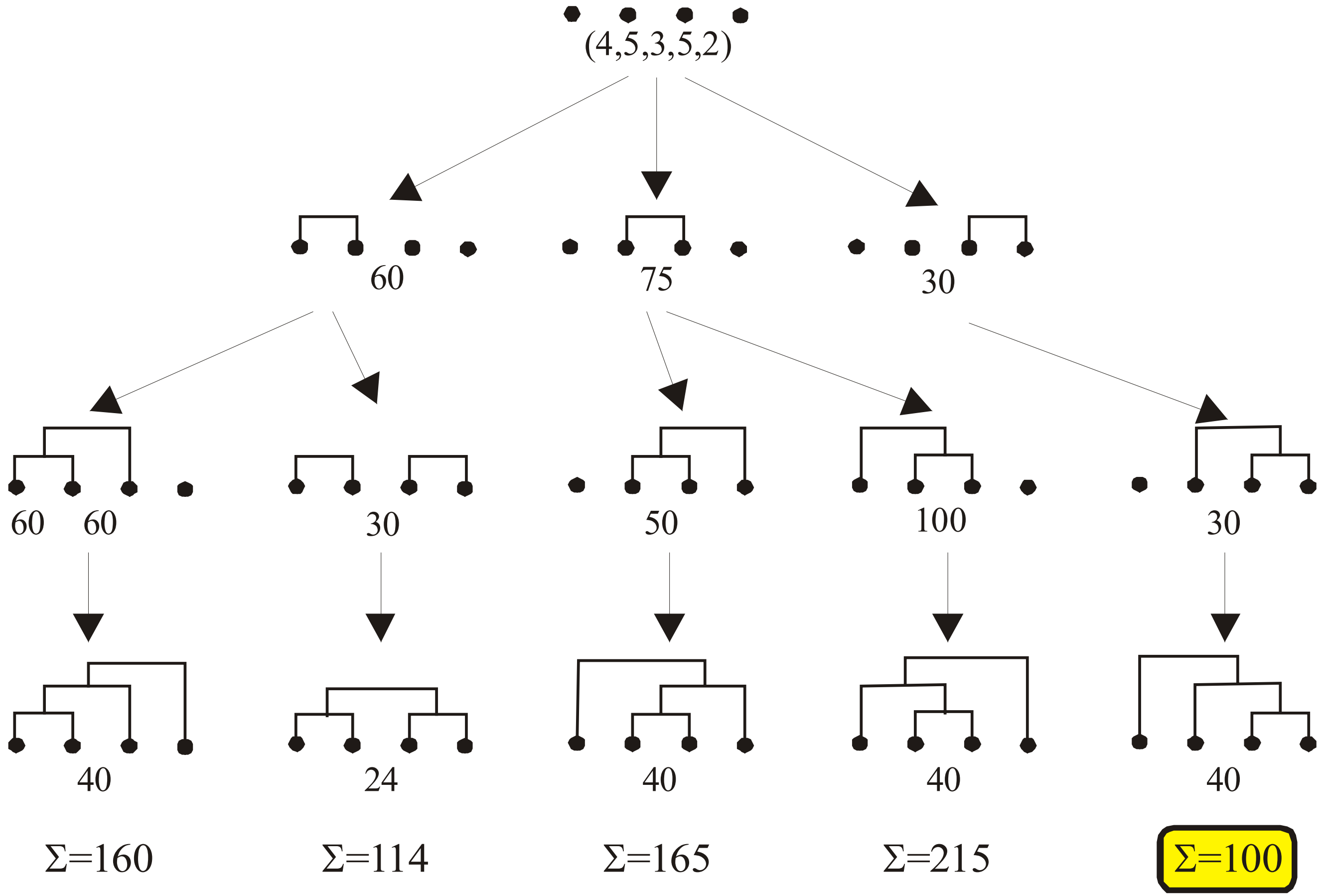
Ilustračný príklad

Budeme študovať súčin štyroch matíc $\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{A}_3\boldsymbol{A}_4$, tieto matice majú typy

$$t(\boldsymbol{A}_1)=(4,5),t(\boldsymbol{A}_2)=(5,3),t(\boldsymbol{A}_3)=(3,5),t(\boldsymbol{A}_4)=(5,2)$$

Pre tieto matice vytvoríme postupnosť dimenzií matíc (predpokladáme, že podmienky $q_i = p_{i+1}$ pre existenciu súčinu matíc $\boldsymbol{A}_i\,\boldsymbol{A}_{i+1}$ sú splnené)

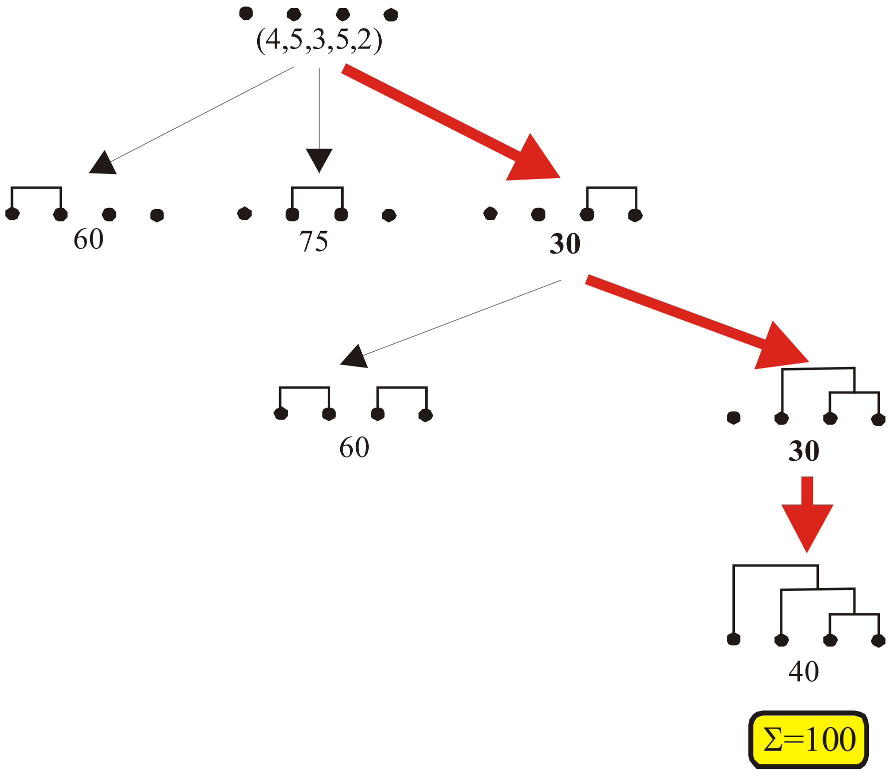
$$(4,5,3,5,2)$$



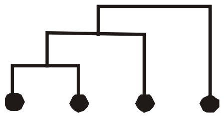
Optimálne zátvorkovanie má tvar $\left(A_1\left(A_2\left(A_3A_4\right)\right)\right)$, ktoré potrebuje 84 elementárnych súčinov.

"Greedy" približný algoritmus

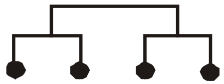
Na každej úrovni akceptujeme také zátvorkovanie, ktoré vyžaduje minimálny počet elementárnych súčin.



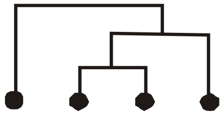
$P = (4,5,3,5,2)$



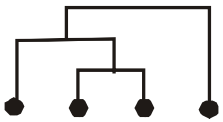
$\Sigma = 4\times5\times3+4\times3\times5+4\times5\times2=160$



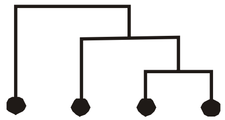
$\Sigma = 4\times5\times3+3\times5\times2+4\times3\times2=114$



$\Sigma = 5\times3\times5+5\times5\times2+4\times5\times2=165$



$\Sigma = 5\times3\times5+4\times5\times5+4\times5\times2=215$



$\Sigma = 3\times5\times2+5\times3\times2+4\times5\times2=\boxed{100}$

Binárne matice

Matica $\boldsymbol{A} \subseteq \{0,1\}^m \times \{0,1\}^n$, ktorá obsahuje len binárne elementy 0-1 sa nazýva binárna matica. Algebraické operácie nad takýmito maticami sú založené na logických spojkách konjunkcie a disjunkcie

$$a \wedge b = \begin{cases} 1 & (\text{ak } a = b = 1) \\ 0 & (\text{ináč}) \end{cases}$$

$$a \vee b = \begin{cases} 0 & (\text{ak } a = b = 0) \\ 1 & (\text{ináč}) \end{cases}$$

Nad binárnými maticami definujeme tri binárne operácie:

(1) Nech $\boldsymbol{A} = (A_{ij})$ a $\boldsymbol{B} = (B_{ij})$ sú binárne matice rovnakého typu $t(\boldsymbol{A}) = t(\boldsymbol{B}) = (m,n)$, potom matica $\boldsymbol{C} = (C_{ij})$ sa nazýva ***konjunkcia matíc A** a **B***, $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} \wedge \boldsymbol{B}$, jej maticové elementy sú

$$\forall\left(i \in I\right)\forall\left(j \in J\right)\left(C_{ij} = A_{ij} \wedge B_{ij}\right)$$

(2) Nech $\boldsymbol{A} = (A_{ij})$ a $\boldsymbol{B} = (B_{ij})$ sú binárne matice rovnakého typu $t(\boldsymbol{A}) = t(\boldsymbol{B}) = (m,n)$, potom matica $\boldsymbol{C} = (C_{ij})$ sa nazýva ***disjunkcia matíc A** a **B***, $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} \vee \boldsymbol{B}$, jej maticové elementy sú

$$\forall\left(i \in I\right)\forall\left(j \in J\right)\left(C_{ij} = A_{ij} \vee B_{ij}\right)$$

(3) Nech binárna matica $\boldsymbol{A} = (A_{ij})$ je typu $t(\boldsymbol{A}) = (m,k)$, binárna matica $\boldsymbol{B} = (B_{ij})$ je typu $t(\boldsymbol{B}) = (k,n)$ a binárna matica $\boldsymbol{C} = (C_{ij})$ je typu $t(\boldsymbol{C}) = (m,n)$. Hovoríme, že matica $\boldsymbol{C}$ je ***súčinom*** matíc $\boldsymbol{A}$ a $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{B}$, jej maticové elementy sú

$$\forall(i \in I)\forall(j \in J)\Big(C_{ij} = \left(A_{i1} \wedge B_{1j}\right) \vee \left(A_{i2} \wedge B_{2j}\right) \vee \ldots \vee \left(A_{ik} \wedge B_{2k}\right)\Big)$$

Pretože súčin binárnych matíc je asociatívna operácia, môžeme definovať r-tú mocninu štvorcovej binárnej matici $\boldsymbol{A} = (A_{ij})$, kde r je kladné celé číslo $r > 1$

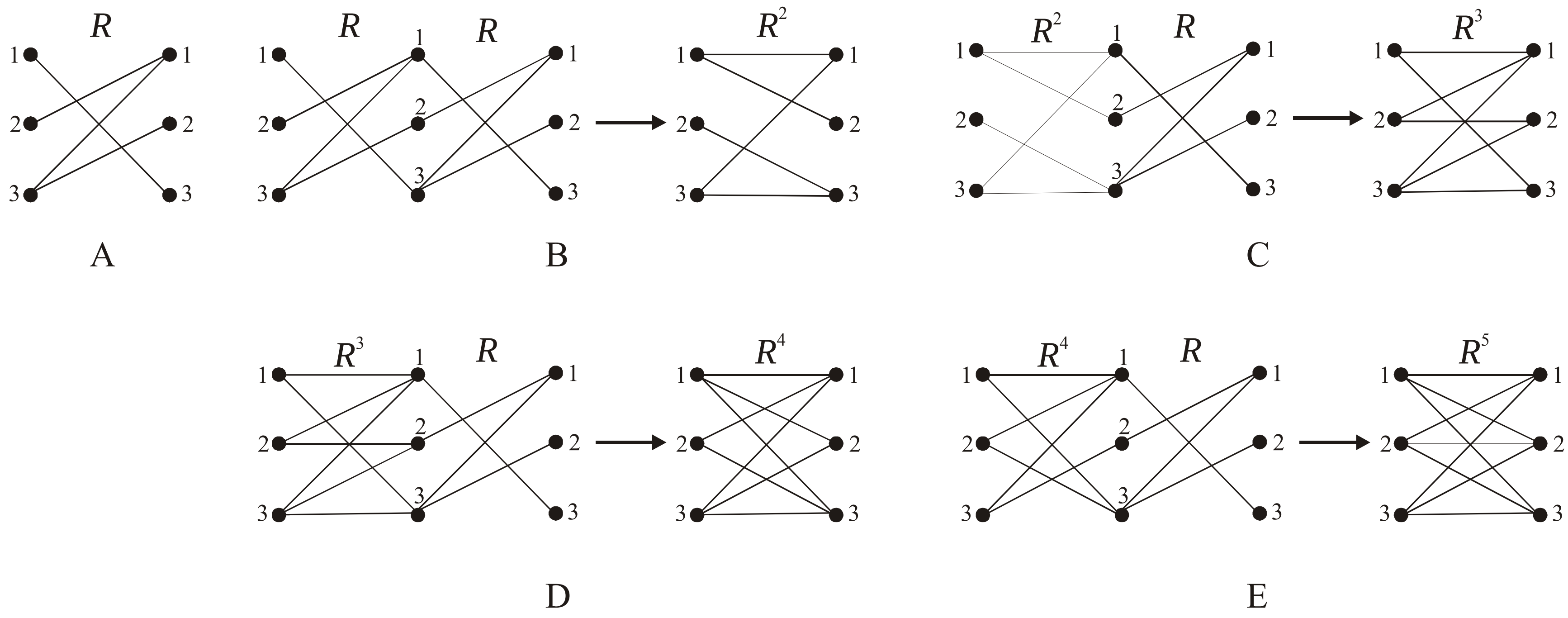
$$\boldsymbol{A}^r = \underbrace{\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{A} \otimes \ldots \otimes \boldsymbol{A}}_{r-krát}$$

Interpretácia súčinu binárnych matíc

Binárna matica môže byť chápaná ako maticová reprezentácia binárnej relácie $R \subseteq X \times X$, kde $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$. Element $A_{ij} \neq 0$ implikuje, že usporiadaná dvojica $(x_i, x_j) \in R$. Jednoduchými úvahami je možné dokázať, že matica $\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{A}$ je reprezentáciou kompozície $R^2 = R \circ R$.

Pomocou grafovej interpretácie relácie R a jej mocnín, môžeme potom alternatívne interpretovať *n*-té mocniny matice $\boldsymbol{A}$ tak, že ak má jednotkový element v pozícii (*i*,*j*), potom existuje postupnosť *n* hrán z *i*-tého vrcholu grafu do *j*-tého vrcholu grafu.

Diagramatická interpretácia mocnín binárnej matice



Príklad

Nech $\boldsymbol{A}$ a $\boldsymbol{B}$ sú binárne matice

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix},\ \ B=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

Zostrojte súčin $\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B}$.

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}(1\wedge 1)\vee(0\wedge 0) & (1\wedge 1)\vee(0\wedge 1) & (1\wedge 0)\vee(0\wedge 1)\\ (0\wedge 1)\vee(1\wedge 0) & (0\wedge 1)\vee(1\wedge 1) & (0\wedge 0)\vee(1\wedge 1)\\ (1\wedge 1)\vee(0\wedge 0) & (1\wedge 1)\vee(0\wedge 1) & (1\wedge 0)\vee(0\wedge 1)\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1\vee 0 & 1\vee 0 & 0\vee 0\\ 0\vee 0 & 0\vee 1 & 0\vee 1\\ 1\vee 0 & 1\vee 0 & 0\vee 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

Príklad

Zostrojte všetky mocniny matice

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

V prvom kroku spočítame $\boldsymbol{A}^2$

$$\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

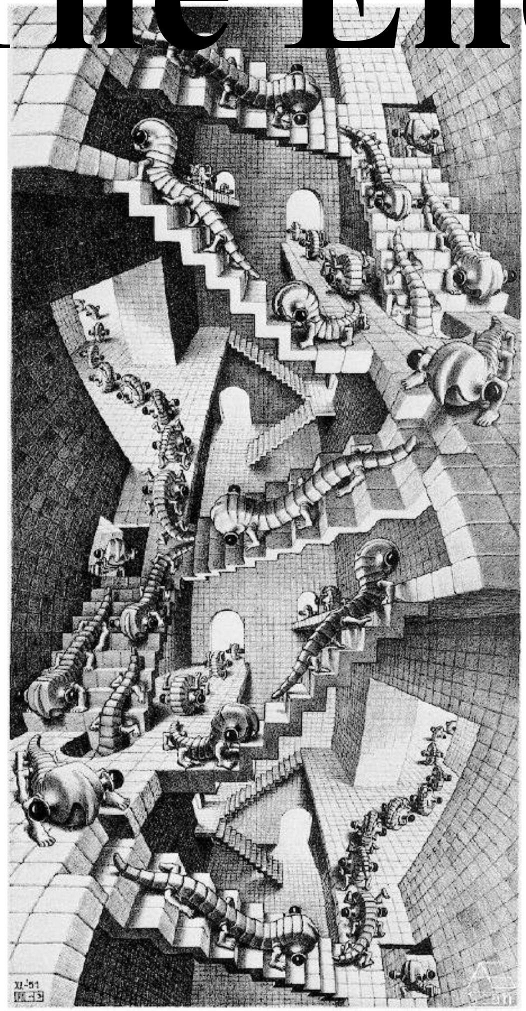
Postupne v ďalších krokoch spočítame vyššie mocniny matice

$$\boldsymbol{A}^3=\boldsymbol{A}^2\otimes\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\1&1&1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{A}^4=\boldsymbol{A}^3\otimes\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&0&1\\1&1&1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{A}^5=\boldsymbol{A}^4\otimes\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$$

Poznamenajme, že tieto mocniny matice $\boldsymbol{A}$ môžeme jednoducho určiť pomocou grafovej interpretácie relácie R, pozri obr. 8.6. Potom vyššie mocniny matice $\boldsymbol{A}$ sú určené

$$\forall(n\geq 5)\left(\boldsymbol{A}^n=\boldsymbol{A}^5=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}\right)$$

The End



Maurits Cornelis **Escher** (1898-1972)