Cvičenia

Cvičenie 9.1. Stanovte typ matice jej názov

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, $t = (2,2)$, štvorcová matica

(b) $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $t = (2,4)$, obĺžniková matica

(c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $t = (1,4)$, riadkový vektor

Cvičenie 9.2. Nájdite hodnoty a, b, c a d tak, aby platilo

$$\begin{pmatrix} 3a & -b \\ c & 2d+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

musí platiť:

$3a = 1 \Rightarrow a = 1/3$, $-b = 3 \Rightarrow b = -3$, c = -1, $2d + 1 = 2 \Rightarrow d = 1/2$.

Cvičenie 9.3. Rozhodnite o pravdivosti týchto tvrdení:

(a) $\{\boldsymbol{A};\ \boldsymbol{A}\ \text{je jednotková matica}\} \subset \{\boldsymbol{A};\ \boldsymbol{A}\ \text{je symetrická matica}\}$,

Pravdivé tvrdenie, každá jednotková matica je aj symetrická matica.

(b) $\{\boldsymbol{A};\ \boldsymbol{A}\ \text{je symetrická matica}\} \subset \{\boldsymbol{A};\ \boldsymbol{A}\ \text{je diagonálna matica}\}$,

Nepravdivé tvrdenie, symetrická matica nemusí byť diagonálnou maticou.

(c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \{\boldsymbol{A};\ A\ \text{je jednotková matica}\}$,

Pravdivé tvrdenie, pretože $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ je jednotková matica.

Cvičenie 9.4.

(a) Zostrojte matice $\boldsymbol{A} = (A_{ij})$, $\boldsymbol{B} = (B_{ij})$ a $\boldsymbol{C} = (C_{ij})$, typu (3,2), pre ktoré platí

$$A_{ij} = i - j,\ B_{ij} = i - 2j,\ C_{ij} = 4i + 3j.$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 0 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 11 & 14 \\ 15 & 18 \end{pmatrix}$$

(b) Zostrojte maticu $\boldsymbol{A} = (A_{ij})$ typu (4,4), ktorá je symetrická a má tieto vlastnosti:

$$A_{ii} = i^2,\ A_{13} = A_{24} = 0,\ A_{14} = 3,\ A_{12} = A_{23} = A_{11} + A_{22},\ A_{34} = A_{23} - A_{14}.$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 & 3 \\ 5 & 4 & 5 & 0 \\ 0 & 5 & 9 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & 16 \end{pmatrix}$$

(c) Zostrojte maticu, ktorá je súčasne riadkovým a stĺpcovým vektorom.

Matica typu (1,1), $A=\left(a_{11}\right)$

Cvičenie 9.5. Zostrojte transponované matice k maticiam

(a) $\begin{pmatrix}1\\2\\0\\-1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1 & 2 & 0 & -1\end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix}-1 & 1 & 2\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\2 & 1 & 0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1 & 2\\0 & 1\\2 & 0\end{pmatrix}$

Cvičenie 9.6. Pre matice

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & -1\\2 & 0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0 & 1\\2 & 2\end{pmatrix},\ \boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 3\\1 & 2 & 2\end{pmatrix}$$

vypočítajte matice (ak existujú)

(a) $2\boldsymbol{A}$, $2\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & -2\\4 & 0\end{pmatrix}$

(b) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1 & -1\\2 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 1\\2 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\4 & 2\end{pmatrix}$

(c) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{C}$, neexistuje, pretože matice sú rôzneho typu.

(d) $\boldsymbol{AC}$, $\boldsymbol{AC}=\begin{pmatrix}1 & -1\\2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 3\\1 & 2 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -2 & 1\\2 & 0 & 6\end{pmatrix}$

(e) $\boldsymbol{CB}$, neexistuje, pretože matice typu (2,3) a (2,2) nie je možné násobiť.

(f) $\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 2\\3 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\2 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 3\\4 & 4\\4 & 7\end{pmatrix}$.

Cvičenie 9.7.

Pre maticu $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0 & 1\\2 & 2\end{pmatrix}$ riešte rovnicu

$$2\boldsymbol{X}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}$$

kde $\boldsymbol{X}$ je matica typu (2,2) a $\boldsymbol{E}$ je jednotková matica typu (2,2).

$$\boldsymbol{X}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B})=\frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&1\\2&2\end{pmatrix}\right)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&-1\\-2&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/2&-1/2\\-1&-1/2\end{pmatrix}$$

Cvičenie 9.8. Pre každú dvojicu matíc $\boldsymbol{A}$ a $\boldsymbol{B}$ určite ich typ a či súčin matíc existuje, ak existuje, tak ho vypočítajte.

(a) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&3\\-1&2\\5&4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4&1&2\\3&2&1\end{pmatrix}$,

$t(A)=(3,2)$, $t(B)=(2,3)$, $AB=\begin{pmatrix}17&8&7\\2&3&0\\32&13&14\end{pmatrix}$.

(b) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-1&0\\0&0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4&0\\1&2\\3&-1\end{pmatrix}$,

$t(A)=(2,2)$, $t(B)=(3,2)$, súčin AB neexistuje.

Cvičenie 9.9.

Nech $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}$ a $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ sú diagonálne matice, vypočítajte $\boldsymbol{AB}$, $\boldsymbol{BA}$, $\boldsymbol{A}^2$ a $\boldsymbol{B}^2$.

$$AB=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&4&0\\0&0&3\end{pmatrix},\ BA=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&4&0\\0&0&3\end{pmatrix},\ A^2=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&4&0\\0&0&9\end{pmatrix},\ B^2=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&4&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

Cvičenie 9.10.

Nech $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ a $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&0&1\end{pmatrix}$ sú binárne matice, zostrojte

(a) $\boldsymbol{A}\wedge\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{A}\wedge\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

(b) $\boldsymbol{A}\vee\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{A}\vee\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\vee\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}$

Príklad 9.11.

Nech matice majú typ $t(\boldsymbol{A}_1)=(4,5)$, $t(\boldsymbol{A}_2)=(5,8)$, $t(\boldsymbol{A}_3)=(8,3)$ a $t(\boldsymbol{A}_4)=(3,2)$. Nájdite také zátvorkovanie produktu týchto matíc, aby sa vykonal minimálny počet elementárnych súčinov.

Použitím „greedy" algoritmu dostaneme zátvorkovanie $\left(A_1\left(A_2\left(A_3A_4\right)\right)\right)$, ktoré obsahuje 280 elementárnych súčinov.

Príklad 9.12.

Nech matice majú typ $t(\boldsymbol{A}_1)=(2,3)$, $t(\boldsymbol{A}_2)=(3,8)$, $t(\boldsymbol{A}_3)=(8,2)$, $t(\boldsymbol{A}_4)=(2,5)$, $t(\boldsymbol{A}_5)=(5,4)$. Nájdite také zátvorkovanie produktu týchto matíc, aby sa vykonal minimálny počet elementárnych súčinov.

Použitím „greedy" algoritmu dostaneme zátvorkovanie $\left(\left(\left(A_1A_2\right)A_3\right)\left(A_4A_5\right)\right)$, ktoré obsahuje 136 elementárnych súčinov.