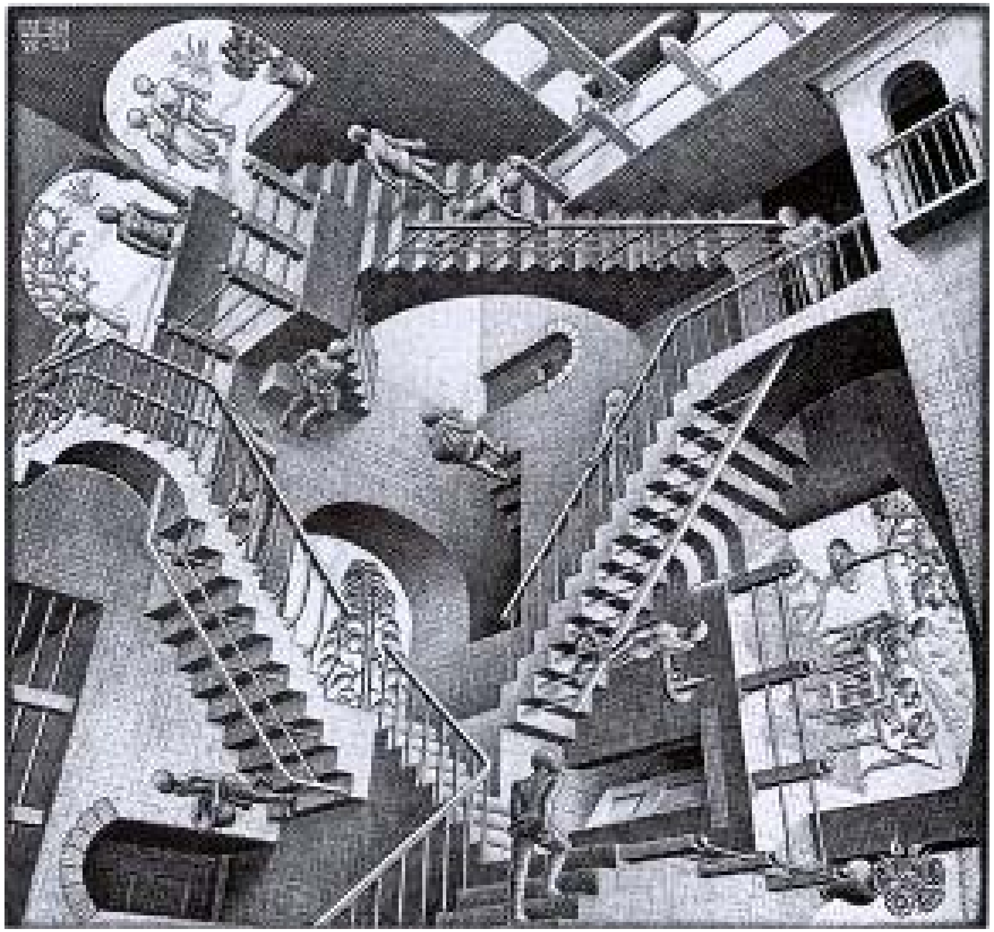
Maticové algoritmy II

- **systém lineárnych rovníc**
- **riešenie SLR pomocou Gaussovej eliminačnej metódy (GEM)**
- **determinanty**
- **výpočet determinantu pomocou GEM**



M. C. Escher: *Relativity*

Systém lineárnych rovníc

Systém lineárnych rovníc, ktorý obsahuje *m* rovníc o *n* neznámych

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m$$

Zavedením matíc

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix}$$

prepíšeme systém do kompaktného maticového tvaru

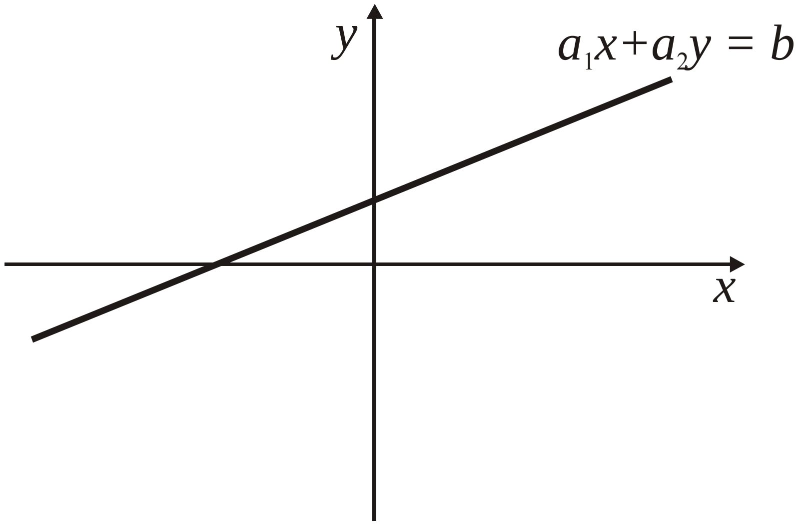
$$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$$

kde $\boldsymbol{A}$ sa nazýva ***matica koeficientov***, $\boldsymbol{x}$ sa nazýva ***vektor neznámych*** a $\boldsymbol{b}$ sa nazýva ***vektor konštantných členov*** (alebo ***vektor pravých strán***)

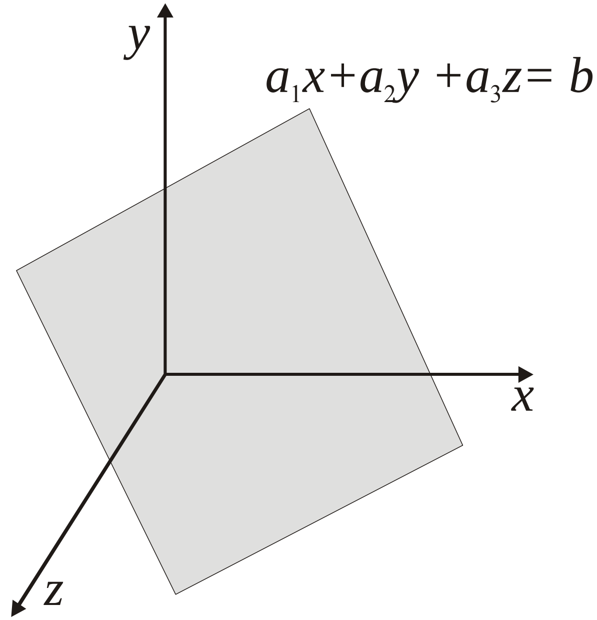
Riešenie systému môže byť reprezentované stĺpcovým vektorom

$$\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \dots \\ c_n \end{pmatrix}$$

ktorý keď dosadíme do $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}$, dostaneme maticovú identitu $\boldsymbol{Ac} = \boldsymbol{b}$.



A



B

Geometrická interpretácia rovnice zo systému lineárnych rovníc pre (A) $n = 2$, rovnica je interpretovaná priamkou, (B) $n = 3$, rovnica je interpretovaná rovinou.

Riešenie systému $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ je potom určené prienikom týchto geometrických útvarov priradených jednotlivým rovniciam. Označme „nadrovinu“ priradenú i-tej lineárnej rovnici z $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ symbolom σ_i, potom riešenie je zadané ich prienikom

$$\mathcal{X} = \sigma_1 \cap \sigma_2 \cap \ldots \cap \sigma_m$$

Z geometrického pohľadu vyplýva, že tento prienik buď obsahuje

(i) len jeden element,
(ii) má nekonečne mnoho elementov,
(iii) je prázdny.

Jeden z hlavných cieľov teórie systémov lineárnych rovníc je rozhodnúť za ktorých podmienok majú alebo nemajú riešenie a v prípade, že ho majú, tak ako ho zostrojiť.

Definícia. Štvorcová matica $\boldsymbol{A}$, typu $t(\boldsymbol{A}) = (n,n)$, sa nazýva ***regulárna*** vtedy a len vtedy, keď je hodnosť $h(\boldsymbol{A}) = n$.

Rozšírená matica

Definujme **rozšírenú maticu (koeficientov)** $\boldsymbol{A}'$ tak, že matica koeficientov $\boldsymbol{A}$ je rozšírená o stĺpcový vektor konštantných členov

$$\boldsymbol{A}' = \left(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b}\right) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

Pomocou hodností matice koeficientov $\boldsymbol{A}$ a rozšírenej matice $\boldsymbol{A}'$ môžeme stanoviť, kedy systém lineárnych rovníc má alebo nemá riešenie.

Veta (Frobeniova veta). Systém lineárnych rovníc $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ má riešenie vtedy a len vtedy, ak

$$h(\boldsymbol{A}) = h(\boldsymbol{A}')$$

Pričom, podrobnejšou analýzou tejto podmienky zistíme, že

(1) ak $h(\boldsymbol{A}) \neq h(\boldsymbol{A}')$, potom systém nemá riešenie,

(2) ak $h(\boldsymbol{A}) = h(\boldsymbol{A}') = n$, potom systém má práve jedno riešenie,

(3) ak $h(\boldsymbol{A}) = h(\boldsymbol{A}') < n$, potom systém má nekonečne mnoho riešení.

Táto veta patrí medzi fundamentálny teoretický výsledok teórie lineárnych rovníc, špecifikuje nutné a postačujúce podmienky pre existenciu riešenia.

Príklad

Systém lineárnych rovníc

$$x_1 + x_2 = 1$$

$$x_1 - x_2 = 0$$

Matica koeficientov a rozšírená matica majú tvar

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}' = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

Hodnosti týchto matíc vyhovujú podmienke

$$h(\boldsymbol{A}) = h(\boldsymbol{A}') = 2$$

To znamená, že systém má práve jedno riešenie, $\boldsymbol{x} = (1/2, 1/2)^T$.

Príklad

Systém lineárnych rovníc

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 1 \\ -x_1 - x_2 &= -1 \end{aligned}$$

Matica koeficientov a rozšírená matica majú tvar

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad A' = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

Hodnosti týchto matíc vyhovujú podmienke

$$h(A) = h(A') = 1 < 2$$

To znamená, že systém má nekonečne mnoho riešení, $\boldsymbol{x} = (t, 1-t)^T, \forall t \in \mathbb{R}$.

Príklad

Systém lineárnych rovníc

$$x_1 + x_2 = 1$$

$$x_1 + x_2 = 2$$

Matica koeficientov a rozšírená matica majú tvar

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A' = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Hodnosti týchto matíc vyhovujú podmienke

$$h(\boldsymbol{A}) = 1 \neq h(\boldsymbol{A}') = 2$$

To znamená, že systém nemá riešenie.

Komentár

- Frobeniova veta nám len zabezpečuje či systém $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ má alebo nemá riešenie, ale v prípade, že existuje, neumožňuje nám toto riešenie nájsť.
- Aplikácia vety vyžaduje stanovenie hodností tak matice koeficientov A, ako aj rozšírenej matice $\boldsymbol{A}'$, tento problém môže byť uskutočnený súčasne tak, že stanovíme hodnosť rozšírenej matice, pričom nebudeme používať elementárne operácie transpozície stĺpcových vektorov (menovite stĺpcového vektora konštantných členov $\boldsymbol{b}$ so stĺpcovými vektormi matice koeficientov, a taktiež, aj stĺpcových vektorov z matice $\boldsymbol{A}$ samotne).
- Upravená rozšírená matica v trojuholníkovom tvare je vhodná na konštrukciu riešenia pomocou metódy spätných substitúcií. Tento prístup tvorí obsah Gaussovej eliminačnej metódy (GEM), ktorá tvorí jeden z najefektívnejších algoritmov pre riešenie systému lineárnych rovníc.

Riešenie systému lineárnych rovníc
Gaussovou eliminačnou metódou (GEM)

Nad rozšírenou maticou ***A***' sa vykonáva postupnosť nasledujúcich elementárnych operácií nad jej riadkami:

(1) transpozícia dvoch riadkov,
(2) vynásobenie riadku nenulovým číslom a
(3) pripočítanie násobku vybraného riadku k inému riadku.

Cieľom týchto úprav je pretransformovať rozšírenú maticu na trojuholníkový tvar. Riešenie získame z takto upravenej rozšírenej matice metódou spätných substitúcií.

Príklad

Použitím Gaussovej eliminačnej metódy riešte systém

$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 &= 3 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &= 12 \end{aligned}$$

Rozšírená matica má tvar

$$\boldsymbol{A}' = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 12 \end{array}\right)$$

1. krok. Vykonáme vynulovanie prvkov pod diagonálou v prvom stĺpci

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 0 \\ \boxed{1} & 2 & -1 & 3 \\ \boxed{2} & 1 & 1 & 12 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & 3 & -6 \\ 0 & 4 & 0 & 12 \end{array}\right)$$

2. krok. Vykonáme vynulovanie prvku pod diagonálou v druhom stĺpci

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & 3 & -6 \\ 0 & \boxed{4} & 0 & 12 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & 3 & -6 \\ 0 & \boxed{7} & 0 & 21 \end{array}\right)$$

K tretiemu riadku pripočítame druhý riadok

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & 3 & -6 \\ 0 & \boxed{7} & 0 & 21 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & 3 & 15 \end{array}\right)$$

Posledná matica znamená, že pôvodný systém rovníc bol pretransformovaný do tvaru

$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + x_3 &= 0 \\ -7x_2 + 3x_3 &= -6 \\ 3x_3 &= 15 \end{aligned}$$

$$\boldsymbol{x}^T = (1,3,5)$$

Príklad

Použitím Gaussovej eliminačnej metódy riešte systém

$$
\begin{aligned}
2x_1 - x_2 + 5x_3 + 3x_4 &= 5\\
x_1 + x_2 + 4x_3 + 3x_4 &= 7\\
x_1 \phantom{{}+x_2} + 3x_3 + 2x_4 &= 4\\
x_2 + x_3 \phantom{{}+3x_3} + x_4 &= 3
\end{aligned}
$$

Rozšírená matica má tvar

$$
\boldsymbol{A}' = \left(\begin{array}{cccc|c}
2 & -1 & 5 & 3 & 5\\
1 & 1 & 4 & 3 & 7\\
1 & 0 & 3 & 2 & 4\\
0 & 1 & 1 & 1 & 3
\end{array}\right)
$$

1. krok, nulujeme prvky v 1. stĺpci pod diagonálou

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 5 & 3 & 5 \\ \boxed{1} & 1 & 4 & 3 & 7 \\ \boxed{1} & 0 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 5 & 3 & 5 \\ -2 & -2 & -8 & -6 & -14 \\ -2 & 0 & -6 & -4 & -8 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 5 & 3 & 5 \\ 0 & -3 & -3 & -3 & -9 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 5 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

(i) Vynásobíme 2. a 3. riadok rozšírenej matice číslom –2
(ii) K druhému a tretiemu riadku pripočítame prvý riadok
(iii) Posledné tri riadky sú lineárne závislé, tak napr. 2. a 3. riadok získame vynásobením 4. riadku číslom –3 resp. –1, môžeme teda vynechať 2. a 3. riadok.

$$
\begin{aligned}
2x_1 - x_2 + 5x_3 + 3x_4 &= 5 \\
x_2 \quad + x_3 \quad + x_4 &= 3
\end{aligned}
$$

Máme dve rovnice pre štyri neznáme, t. j. dve neznáme môžu byť charakterizované ako volné parametre, $x_3 = u, x_4 = v$, potom upravený systém prepíšeme do formálneho tvaru dvoch lineárnych rovníc pre dve neznáme

$$
\begin{aligned}
2x_1 - x_2 &= 5 - 5u - 3v \\
x_2 &= 3 \; - u \; - v
\end{aligned}
$$

Dosadením druhej rovnice do prvej dostaneme konečné riešenie pre neznámu x_1

$$
x_1 = \frac{1}{2}\left(5 - 5u - 3v + \left(3 \; - u \; - v\right)\right) = 4 - 3u - 2v
$$

Stĺpcový vektor riešenia má tvar

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 4-3u-2v \\ 3-u-v \\ u \\ v \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{a}} - u\underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{b}} - v\underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{c}} = \boldsymbol{a} - u\boldsymbol{b} - v\boldsymbol{c}$$

Môžeme teda uzavrieť, že systém má nekonečne mnoho riešení, ktoré tvoria množinu $\mathcal{X} = \{\boldsymbol{a} - u\boldsymbol{b} - v\boldsymbol{c}; u, v \in \mathbb{R}\}$. Ak napríklad položíme $u = v = 1$, potom vektor riešení má tvar

$$\boldsymbol{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{a}} - \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{b}} - \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{c}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Pseudopascalovský program pre riešenie systému lineárnych rovníc algoritmom GEM

```
procedure GEM;
begin for k:=1 to N-1 do {index through columns}
      begin for i:=k+1 to N do
            begin σ:=-A_ik/A_kk;
                  for j:=k to N do A_ij:=A_ij+σ*A_kj;
                  b_i:=b_i+σ*b_k;
            end;
      end;
      x_N:=b_N/A_NN;
      for i:=N-1 downto 1 do
      begin σ:=b_i;
            for k:=i+1 to N do σ:= σ-A_ik*x_k;
            x_i:= σ/A_ii;
      end;
end {of procedure GEM};
```

Poznámky

- Algoritmus GEM obsahuje len základné operácie, ktoré sú nutné k jeho implementácii.
  - Prvý vonkajší cyklu (s premennou `k`) obsahuje tzv. priamu fázu algoritmu, ktorá spočíva v nulovaní elementov pod diagonálou.
  - Druhý vonkajší cyklus obsahuje tzv. spätnú fázu algoritmu (s premennou `i`) v ktorej sa metódou spätných substitúcii počíta riešenie systému.
- Použiteľný algoritmus GEM musí ešte obsahovať v rámci priamej fáze (vonkajší cyklus premennou *k*) vyhľadávanie maximálneho elementu v *k*-tom stĺpci pod diagonálou (včítane aj diagonálneho elementu). Ak takýto element existuje (v `l`-tom riadku, kde $l \geq k$), potom sa vykoná transpozícia `k`-teho a `l`-teho riadku.
- Týmto máme zabezpečené, že ak matica koeficientov je regulárna, potom maticový element A_{kk} je nenulový. Ak sa nám nepodarí zaistiť nenulovosť tohto diagonálneho elementu, potom matica A je singulárna (t.j. systém lineárnych rovníc nemá jednoznačné riešenie).

Odhad zložitosti algoritmu GEM

V priamej fáze algoritmu pre každý index k=1,2,...,N-1 existuje (k-1)k súčinov, potom celkový počet súčinov v tejto fáze je

$$\sum_{k=1}^{N-1}(k-1)k=\sum_{k=1}^{N-1}k^2-\sum_{k=1}^{N-1}k=\frac{1}{6}(N-1)N(2N-1)-\frac{1}{2}(N-1)N$$

V nepriame fáze algoritmus je celkový počet súčinov určený formulou

$$\sum_{i=1}^{N-1}(j-1)=\sum_{i=1}^{N-1}j-\sum_{i=1}^{N-1}1=\frac{1}{2}N(N-1)-(N-1)$$

To znamená, že zložitosť GEM algoritmu asymptoticky pre $N\to\infty$ rastie kubicky s dimenziou problému

$$t_{CPU}\sim N^3$$

Príklad

$$\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 30 \\
2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 &= 24 \\
3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 &= 22 \\
4x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 24
\end{aligned}$$

$$\boldsymbol{A}' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 30 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 24 \\ 3 & 4 & 1 & 2 & 22 \\ 4 & 1 & 2 & 3 & 24 \end{pmatrix}$$

$$r_2 = r_2 + (-2)\,r_1$$

1.krok.

1.0000	2.0000	3.0000	4.0000	30.000
2.0000	3.0000	4.0000	1.0000	24.000
3.0000	4.0000	1.0000	2.0000	22.000
4.0000	1.0000	2.0000	3.0000	24.000

$$r_3 = r_3 + (-3)\,r_1$$

2.krok.

1.0000	2.0000	3.0000	4.0000	30.000
0.0000	-1.0000	-2.0000	-7.0000	-36.000
3.0000	4.0000	1.0000	2.0000	22.0000
4.0000	1.0000	2.0000	3.0000	24.0000

$$r_4 = r_4 + (-4)\,r_1$$

3.krok.

1.0000	2.0000	3.0000	4.0000	30.000
0.0000	-1.0000	-2.0000	-7.0000	-36.000
0.0000	-2.0000	-8.0000	-10.000	-68.000
4.0000	1.0000	2.0000	3.0000	24.000

$$r_3 = r_3 + (-2)\, r_2$$

4. krok.

1.0000	2.0000	3.0000	4.0000	30.0000
0.0000	-1.0000	-2.0000	-7.0000	-36.000
0.0000	-2.0000	-8.0000	-10.000	-68.000
0.0000	-7.0000	-10.000	-13.000	-96.000

$$r_4 = r_4 + (-7)\, r_2$$

5. krok.

1.0000	2.0000	3.0000	4.0000	30.000
0.0000	-1.0000	-2.0000	-7.0000	-36.000
0.0000	0.0000	-4.0000	4.0000	4.0000
0.0000	-7.0000	-10.000	-13.000	-96.000

$$r_4 = r_4 + (1)\, r_3$$

6. krok.

1.0000	2.0000	3.0000	4.0000	30.000
0.0000	-1.0000	-2.0000	-7.0000	-36.000
0.0000	0.0000	-4.0000	4.0000	4.0000
0.0000	0.0000	4.0000	36.0000	156.00

7. krok.

1.0000	2.0000	3.0000	4.0000	30.000
0.0000	-1.0000	-2.0000	-7.0000	-36.000
0.0000	0.0000	-4.0000	4.0000	4.0000
0.0000	0.0000	0.0000	40.000	160.00

Výpočet neznámych pomocou metódy spätných substitúcií

$$x_4 = \tilde{b}_4 / \tilde{A}_{44} = 160/40 = 4$$

$$x_3 = \left(\tilde{b}_3 - x_4 \tilde{A}_{34}\right) / A_{33} = \left(4 - 4 \times 4\right) / \left(-4\right) = 3$$

$$x_2 = \left(\tilde{b}_2 - x_4 \tilde{A}_{24} - x_3 A_{34}\right) / A_{22}$$

$$= \left(-36 - 4 \times \left(-7\right) - 3 \times \left(-2\right)\right) / \left(-1\right) = 2$$

$$x_1 = \left(\tilde{b}_1 - x_4 \tilde{A}_{14} - x_3 \tilde{A}_{13} - x_2 A_{12}\right) / A_{11}$$

$$= \left(30 - 4 \times 4 - 3 \times 3 - 2 \times 2\right) / 1 = 1$$

Determinanty

Nech $\mathcal{A}$ je množina všetkých možných matíc. Hodnosť matice môžeme formálne chápať ako zobrazenie množiny matíc $\mathcal{A}$ na množinu kladných celých čísel

$$h:\mathcal{A}\to\{1,2,...\}$$

Analogicky, pod pojmom ***determinant*** budeme rozumieť zobrazenie množiny štvorcových matíc $\mathcal{A}_{\square}\subset\mathcal{A}$ na množinu reálnych čísel

$$det:\mathcal{A}_{\square}\to\mathbb{R}$$

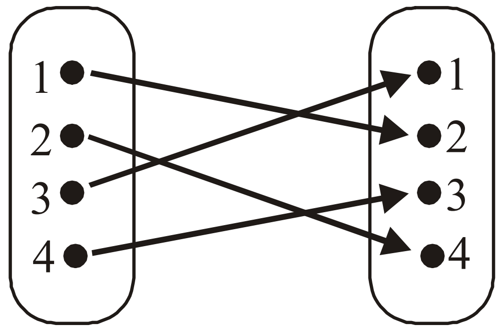
Determinant matice $\boldsymbol{A}\in\mathcal{A}_{\square}$ budeme označovať symbolom $|\boldsymbol{A}|$, je to reálne číslo z $\mathbb{R}$ priradené štvorcovej matici $\boldsymbol{A}$.

Prv než pristúpime k definícii determinantu uvedieme základné skutočnosti o permutáciách. ***Permutáciu*** P priradenú n objektom budeme vyjadrovať symbolom

$$P = \left(p_1, p_2, \ldots, p_n \right)$$

kde elementy p_1, p_2,..., p_n sú prirodzené čísla z množiny $\{1,2,\ldots,n\}$, ktoré vyhovujú podmienke

$$i \neq j \Rightarrow p_i \neq p_j$$



Celkový počet permutácií n objektov je $n!$, tieto permutácie tvoria symetrickú grupu (množinu) permutácií S_n.

Ku každej permutácii môžeme priradiť nezáporné celé číslo, ktoré sa nazýva ***počet inverzií***: hovoríme, že prvky p_i a p_j tvoria inverziu v permutácia $P = (p_1,\ldots,p_i,\ldots,p_j,\ldots,p_n)$, vtedy a len vtedy, ak platí

$$i < j \Rightarrow p_i > p_j$$

Celkový počet inverzií v permutácii P je označený $I(P)$.

Príklad

Zostrojte všetky permutácie pre $n = 2$ a $n = 3$, charakterizujte každú permutáciu počtom inverzií.
Permutácie pre n=2 majú tvar

$$P = (1,2), \qquad I(P) = 0$$
$$P = (2,1), \qquad I(P) = 1$$

Permutácie pre n=3 majú tvar

$$P=(1,2,3),\qquad I(P)=0$$
$$P=(1,3,2),\qquad I(P)=1\qquad (3>2)$$
$$P=(2,1,3),\qquad I(P)=1\qquad (2>1)$$
$$P=(2,3,1),\qquad I(P)=2\qquad (2>1,3>1)$$
$$P=(3,1,2),\qquad I(P)=2\qquad (3>1,3>2)$$
$$P=(3,2,1),\qquad I(P)=3\qquad (3>2,3>1,2>1)$$

Definícia 9.1. Nech $\boldsymbol{A}=\left(A_{ij}\right)$ je štvorcová matica typu (n,n), ***determinant*** tejto matice je

$$|\boldsymbol{A}|=\sum_{P\in S_n}(-1)^{I(P)}A_{1p_1}A_{2p_2}\dots A_{np_n}\tag{9.10}$$

kde sumácia obsahuje všetky možné permutácie z S_n . Alternatívne označenie determinantu je $det(\boldsymbol{A})$ alebo $D(\boldsymbol{A})$.

Príklad

Determinant matice

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

je podľa definície určený takto

$$\begin{aligned} |\boldsymbol{A}| &= \sum_{P \in S_2} (-1)^{I(P)} A_{1p_1} A_{2p_2} \\ &= (-1)^{I(1,2)} A_{11}A_{22} + (-1)^{I(2,1)} A_{12}A_{21} \\ &= A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21} \end{aligned}$$

Diagramatická interpretácia výpočtu determinantu matice typu 2×2

$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix} = A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21}$$

Príklad

Determinant matice

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{22} \end{pmatrix}$$

je podľa definície určený v tvare, ktorý môžeme jednoducho vyjadriť pomocou diagramatickej interpretácie (Sarrusove pravidlo)

$$\left| \begin{matrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{matrix} \right| \begin{matrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \\ A_{31} & A_{32} \end{matrix}$$

$$= A_{11}A_{22}A_{33} + A_{12}A_{23}A_{31} + A_{13}A_{21}A_{32} - A_{13}A_{22}A_{31} - A_{11}A_{23}A_{32} - A_{12}A_{21}A_{33}$$

Základné vlastnosti determinantov

(1) Nech A je štvorcová matica, potom

$$\left|\boldsymbol{A}\right| = \left|\boldsymbol{A}^T\right|$$

Dôsledok tejto vlastnosti je, že ľubovolná vlastnosť, ktorá platí pre riadky determinantu musí platiť aj pre jeho stĺpce (a naopak).

(2) Nech A je štvorcová matica a nech matica $\boldsymbol{B}$ vznikne z $\boldsymbol{A}$ výmenou dvoch stĺpcov (riadkov)

$$\boldsymbol{A} = \left(\boldsymbol{s}_1,\dots,\boldsymbol{s}_i,\dots,\boldsymbol{s}_j,\dots,\boldsymbol{s}_n\right) \rightarrow \boldsymbol{B} = \left(\boldsymbol{s}_1,\dots,\boldsymbol{s}_j,\dots,\boldsymbol{s}_i,\dots,\boldsymbol{s}_n\right)$$

potom

$$\left|\boldsymbol{B}\right| = -\left|\boldsymbol{A}\right|$$

Nech matica ***A*** obsahuje dva rovnaké stĺpce v polohe *i* a *j*

$$\boldsymbol{A}=\left(\boldsymbol{s}_1,\ldots,\boldsymbol{s}_i,\ldots\boldsymbol{s}_{j-1},\boldsymbol{s}_i,\boldsymbol{s}_{j+1,},\ldots,\boldsymbol{s}_n\right)$$

Potom jednoduchým dôsledkom vlastnosti je, že táto matica je nulová

$$\left|\boldsymbol{A}\right|=0$$

(3) Nech ***A*** je štvorcová matica a nech matica ***B*** vznikne z ***A*** tak, že jeden stĺpec (riadok) vynásobíme číslom α

$$\boldsymbol{A}=\left(\boldsymbol{s}_1,\ldots,\boldsymbol{s}_i,\ldots,\boldsymbol{s}_n\right)\rightarrow\boldsymbol{B}=\left(\boldsymbol{s}_1,\ldots,\alpha\boldsymbol{s}_j,\ldots,\boldsymbol{s}_n\right)$$

potom

$$\left|\boldsymbol{B}\right|=\alpha\left|\boldsymbol{A}\right|$$

Dôsledok tejto vlastnosti je, že ak matica ***A*** obsahuje nulový stĺpec (riadok), potom determinant matice je nulový.

(4) Nech $\boldsymbol{A}$ je štvorcová matica a nech matica $\boldsymbol{B}$ vznikne z $\boldsymbol{A}$ tak, že násobok vybraného stĺpca (riadka) pripočítame k inému stĺpcu (riadku)

$$\boldsymbol{A}=\left(\boldsymbol{s}_1,\ldots,\boldsymbol{s}_i,\ldots,\boldsymbol{s}_j,\ldots,\boldsymbol{s}_n\right)\to B=\left(\boldsymbol{s}_1,\ldots,\boldsymbol{s}_i+\alpha\boldsymbol{s}_j,\ldots,\boldsymbol{s}_j,\ldots,\boldsymbol{s}_n\right)$$

potom

$$\left|\boldsymbol{B}\right|=\left|\boldsymbol{A}\right|$$

(5) Nech $\boldsymbol{A}$ je štvorcová matica a nech pre jej vybraný stĺpec platí $\boldsymbol{s}_i=\boldsymbol{s}_i'+\boldsymbol{s}_i''$

$$\boldsymbol{A}=\left(\boldsymbol{s}_1,\ldots,\boldsymbol{s}_i'+\boldsymbol{s}_i'',\ldots,\boldsymbol{s}_n\right)$$

potom

$$\left|\boldsymbol{A}\right|=\left|\boldsymbol{A}'\right|+\left|\boldsymbol{A}''\right|$$

kde matica $\boldsymbol{A}'$ ($\boldsymbol{A}''$) vznikne z pôvodnej matice tak, že i-tý stĺpec $\boldsymbol{s}_i$ je nahradený stĺpcovým vektorom $\boldsymbol{s}_i'(\boldsymbol{s}_i'')$

$$\boldsymbol{A}'=\left(\boldsymbol{s}_1,\ldots,\boldsymbol{s}_i',\ldots,\boldsymbol{s}_n\right),\quad \boldsymbol{A}''=\left(\boldsymbol{s}_1,\ldots,\boldsymbol{s}_i'',\ldots,\boldsymbol{s}_n\right)$$

Veta. Nech $\boldsymbol{A}$ je štvorcová matica typu $n\times n$. $|\boldsymbol{A}|=0$ vtedy a len vtedy, ak $h(A)<n$.

Dôsledkom tejto vety je, že štvorcová matica A má nenulový determinant vtedy a len vtedy, ak jej hodnosť sa rovná počtu riadkov

$$\left(\left|\boldsymbol{A}\right| \neq 0\right) \equiv \left(h\left(\boldsymbol{A}\right) = n\right)$$

Príklad

Dokážte, že vektory $\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ a $\boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ sú lineárne nezávislé.. Tieto vektory môžeme formálne chápať ako riadkové vektory matice A typu 3×3

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ak determinant tejto matice je nenulový, potom $h(A)=3$, t.j. jej riadkové vektory sú lineárne nezávislé

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{matrix} = 1 + 2 + 0 + 3 + 1 - 0 = 7$$

Veta. Nech $\boldsymbol{A}$ je štvorcová trojuholníková matica (nepožaduje sa, aby každý diagonálny element bol nenulový)

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ 0 & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

Determinant matice sa rovná súčinu jej diagonálnych elementov

$$|\boldsymbol{A}| = A_{11}A_{22}\dots A_{nn}$$

Dôsledok tejto vety je, že determinant jednotkovej matice $\boldsymbol{E}$ sa rovná jednej

$$|\boldsymbol{E}| = 1$$

Táto veta umožňuje zostrojiť efektívny algoritmus pre výpočet determinantov ľubovolnej dimenzii n.

- Použijeme jednoduchý algoritmus, ktorý je veľmi podobný algoritmu stanovenia hodnosti matice a ktorý je založený na vlastnostiach determinantov.
- To znamená, že nad stĺpcami a riadkami budeme vykonávať jednoduché elementárne operácie tak, aby sme dostali trojuholníkovú maticu (t. j. nulujeme elementy pod diagonálou).
- Na rozdiel od stanovenia hodnosti matice, pri tomto výpočte determinantu jeho hodnota sa môže meniť, tak napríklad po transpozícii dvoch stĺpcov (riadkov) dochádza k zmene znamienka determinantu, alebo ak riadok vynásobíme číslom α, tak potom pred determinant musíme vytknúť číslo $1/\alpha$.
- To znamená, že súčasťou algoritmu musí byť aj premenná v ktorej sa kumuluje táto zmena numerickej hodnoty determinantu v priebehu aplikácií elementárnych operácií.

Príklad

Vypočítajte determinant matice s $n = 4$

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & 3 \\ -1 & 3 & -2 & 4 \\ 2 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Postup transformácie determinantu na trojuholníkový tvar je prezentovaný na tejto schéme:

$$|\boldsymbol{A}| = \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ \boxed{2} & 1 & -2 & 3 \\ -1 & 3 & -2 & 4 \\ 2 & -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}}_{A_1} = \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -6 & 5 \\ 0 & \boxed{3} & 0 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & 3 \end{vmatrix}}_{A_2} = \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -6 & 5 \\ 0 & 0 & 18 & -12 \\ 0 & 0 & \boxed{-8} & 8 \end{vmatrix}}_{A_3} = 6 \cdot 8 \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -6 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & \boxed{-1} & 1 \end{vmatrix}}_{A_4} =$$

$$6 \cdot 8 \cdot 3 \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -6 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -2/3 \\ 0 & 0 & \boxed{-1} & 1 \end{vmatrix}}_{A_5} = 6 \cdot 8 \cdot 3 \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -6 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -2/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 \end{vmatrix}}_{A_6} = 6 \cdot 8 \cdot 3 \left(1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{3} \right) = 48$$

Pseudopascalovský program pre výpočet determinantu metódou GEM

```
function DET : real;
begin for k:=1 to N-1 do {index through columns}
      begin for i:=k+1 to N do
            begin σ:=-A_ik/A_kk;
                  for j:=k to N do A_ij:=A_ij+σ*A_kj;
            end;
      end;
      σ:=1;
      for i:=1 to N do σ:=σ*A_ii;
      DET:= σ;
end {of procedure DET};
```

Poznámky

- Podobne, ako aj pre systém lineárnych rovníc, GEM algoritmus musí obsahovať hľadanie maximálneho elementu v každom stĺpci pod diagonálou.
- V prípade, ak maximálny prvok v nejakom stĺpci pod diagonálou je nulový, potom algoritmus sa môže zastaviť, determinant matice je nulový.
- Zložitosť algoritmu je podobná, ako pre systém lineárnych rovníc

$$t_{CPU} \sim N^3$$

Príklad

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 3 & 4 & 1\\ 3 & 4 & 1 & 2\\ 4 & 1 & 2 & 3\end{pmatrix},\quad det\left(\boldsymbol{A}\right)=?$$

$$\boldsymbol{r}_2=\boldsymbol{r}_2+\left(-2\right)\boldsymbol{r}_1$$

1.krok.

1.0000	2.0000	3.0000	4.0000
2.0000	1.0000	3.0000	4.0000
3.0000	4.0000	1.0000	2.0000
4.0000	1.0000	2.0000	3.0000

$$\boldsymbol{r}_3=\boldsymbol{r}_3+\left(-3\right)\boldsymbol{r}_1$$

2.krok.

1.0000	2.0000	3.0000	4.0000
0.0000	-1.0000	-2.0000	-7.0000
3.0000	4.0000	1.0000	2.0000
4.0000	1.0000	2.0000	3.0000

$$\boldsymbol{r}_4 = \boldsymbol{r}_4 + (-4)\boldsymbol{r}_1$$

3. krok.

1.0000	2.0000	3.0000	4.0000
0.0000	-1.0000	-2.0000	-7.0000
0.0000	-2.0000	-8.0000	-10.000
4.0000	1.0000	2.0000	3.0000

$$\boldsymbol{r}_3 = \boldsymbol{r}_3 + (-2)\boldsymbol{r}_2$$

4. krok.

1.0000	2.0000	3.0000	4.0000
0.0000	-1.0000	-2.0000	-7.0000
0.0000	-2.0000	-8.0000	-10.000
0.0000	-7.0000	-10.000	-13.000

$$\boldsymbol{r}_4 = \boldsymbol{r}_4 + (-7)\boldsymbol{r}_2$$

5.krok.

1.0000	2.0000	3.0000	4.0000
0.0000	-1.0000	-2.0000	-7.0000
0.0000	0.0000	-4.0000	4.0000
0.0000	-7.0000	-10.000	-13.000

$$\boldsymbol{r}_4 = \boldsymbol{r}_4 + (1)\boldsymbol{r}_3$$

6. krok.

1.0000	2.0000	3.0000	4.0000
0.0000	-1.0000	-2.0000	-7.0000
0.0000	0.0000	-4.0000	4.0000
0.0000	0.0000	4.0000	36.000

$$det(A) = 1 \times (-1) \times (-4) \times 40 = 160$$

7.krok.

1.0000	2.0000	3.0000	4.0000
0.0000	-1.0000	-2.0000	-7.0000
0.0000	0.0000	-4.0000	4.0000
0.0000	0.0000	0.0000	40.000

Veta. Nech $\boldsymbol{A}$ a $\boldsymbol{B}$ sú štvorcové matice rovnakého typu $t(\boldsymbol{A})=t(\boldsymbol{B})=(n,n)$, potom determinant súčinu týchto matíc sa rovná súčinu ich determinantov

$$|\boldsymbol{AB}|=|\boldsymbol{A}|\cdot|\boldsymbol{B}|$$

Jednoduchý dôsledok tejto vety je formula pre determinant inverznej matice $\boldsymbol{A}^{-1}$

$$\left|\boldsymbol{A}^{-1}\right|=\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}$$

Veta. Matica A je ***regulárna*** vtedy a len vtedy, ak jej determinant je nenulový

$$|\boldsymbol{A}|\neq 0$$

The End

M. C. Escher: *Waterfall*