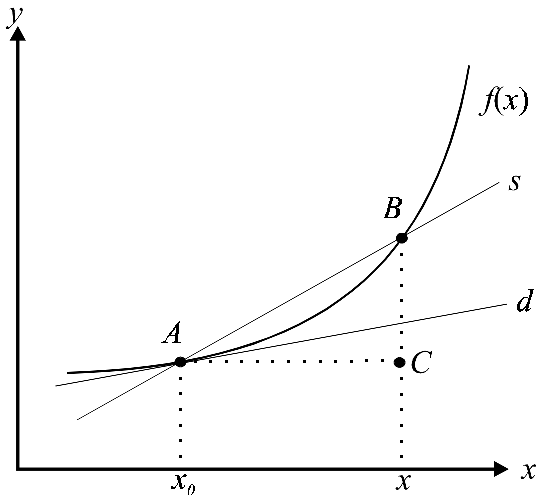
Derivácia reálnej funkcie

1. úloha (Leibnitz) - konštrukcia dotyčnice ku grafu funkcie



Smernica sečny *s* je určená vzťahom

$$k_s = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

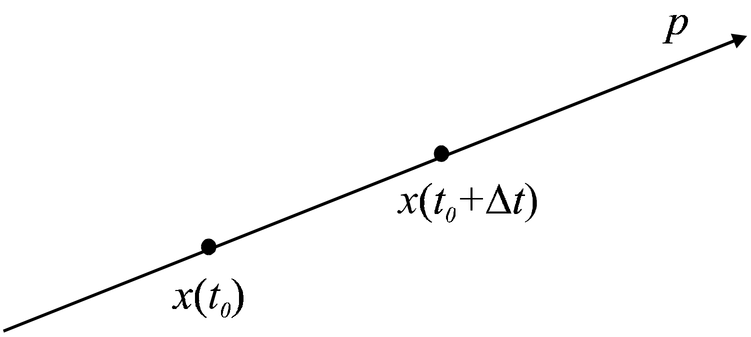
Našou úlohou je zostrojiť dotyčnicu v bode *A* ku grafu funkcie *f*(*x*) , z obrázku vyplýva, že $k_s \to k_d$ ak $x \to x_0$

$$k_d = f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

V prípade, že táto limita existuje, hovoríme, že existuje dotyčnica v bode *A* ku grafu funkcie *f*(*x*), jej smernica je $k_d = f'(x_0)$. Analytický tvar tejto dotyčnice je

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

2. úloha (Newton) - určenie okamžitej rýchlosti bodu, ktorý sa pohybuje nerovnomerne priamočiaro



Hmotný bod sa pohybuje priamočiarym nerovnomerným pohybom, jeho poloha na priamke p je určená funkciou $x(t)$, kde je nezávislá premenná - čas. Priemerná rýchlosť medzi bodmi $x(t_0)$ a $x(t_0+\Delta t)$ je

$$\langle v \rangle_{t_0, t_0+\Delta t} = \frac{x(t_0+\Delta t) - x(t_o)}{\Delta t}$$

Takto definovaná priemerná rýchlosť medzi dvoma polohami $x(t_0)$ a $x(t_0+\Delta t)$ sa stáva okamžitou rýchlosťou $v(t_0)$ ak $\Delta t \to 0$

$$v(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t_0+\Delta t) - x(t_o)}{\Delta t}$$

V prípade, že táto limita existuje, potom hovoríme, že hmotný bod má v čase t_0 rýchlosť $v(t_0)$.

Definícia. Nech funkcia $f(x)$ je definovaná v určitom okolí bodu x_0. Ak existuje limita

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

potom hovoríme, že funkcia $f(x)$ má v bode x_0 **deriváciu**, ktorú značíme

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

alebo, ak položíme $x = x_0 + \Delta x$, pričom $x \to x_0 \Rightarrow \Delta x \to 0$, potom

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Príklad. Spočítajte dotyčnicu ku grafu funkcie $f(x)=x^2$ v bode $x_0=1$.

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{(x - x_0)(x + x_0)}{x - x_0} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} (x + x_0) = 2x_0$$

To znamená, že smernica dotyčnice v bode $A=(1,1)$ je $k_d = f'(1) = 2$, potom

$$y = 1 + 2(x - 1)$$

Konvencia. Alternatívne značenie pre deriváciu funkcie $y=f(x)$ v bode x_0 sú tieto

$$f'(x_0) \text{ alebo } y'(x_0)$$

$$\frac{df(x_0)}{dx} \text{ alebo } \frac{df}{dx}(x_0) \text{ (Leibnitz)}$$

$$\left(\frac{df}{dx}\right)_{x=x_0} \text{ alebo } \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_0} \text{ (fyzikálna chémia)}$$

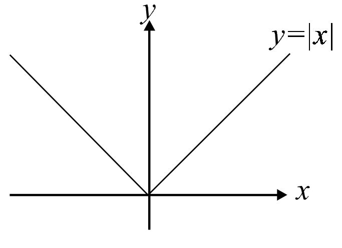
$$\dot{f}(x_0) \text{ alebo } \dot{y}(x_0) \text{ (Newton)}$$

Veta. Ak funkcia $f(x)$ má v bode x_0 deriváciu, potom je v tomto bode spojitá.

$$f(x)=f(x_0)+\left(f(x)-f(x_0)\right)=f(x_0)+\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}(x-x_0)$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0} f(x) &= f(x_0)+\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\lim_{x\to x_0}(x-x_0)\\ &= f(x_0)+f'(x_0)\lim_{x\to x_0}(x-x_0)\\ &= f(x_0)\end{aligned}$$

Túto vetu nie je možné obrátiť (t.j. ak je funkcia spojitá v bode, potom má v tomto bode deriváciu). Jednoduchý príklad je funkcia $y=f(x)=|x|$ v bode $x_0=0$, je spojitá v bode $x_0=0$, ale nemá tam deriváciu (dotyčnicu)



Derivácie niektorých elementárnych funkcií

(1) $(c)' = 0$ (derivácia konštanty je nula)

(2) $\left(x^n\right)' = nx^{n-1}$, kde n je reálny exponent

(3) $\left(a^x\right)' = \ln a \cdot a^x$, kde $a>0$ a $a\neq 1$

(3') $\left(e^x\right)' = e^x$

(4) $(\sin x)' = \cos x$

(5) $(\cos x)' = -\sin x$

(1) $f(x)=c$, potom

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{c-c}{x-x_0} = 0$$

(2) $f(x)=x^n$, kde n je prirodzené číslo

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{x^n - x_0^n}{x-x_0} =$$

$$= \lim_{x\to x_0} \frac{(x-x_0)\left(x^{n-1} + x^{n-2}x_0 + x^{n-3}x_0^2 + \ldots + xx_0^{n-2} + x_0^{n-1}\right)}{x-x_0} =$$

$$= \lim_{x\to x_0}\left(x^{n-1} + x^{n-2}x_0 + x^{n-3}x_0^2 + \ldots + xx_0^{n-2} + x_0^{n-1}\right) =$$

$$= x_0^{n-1} + x_0^{n-2}x_0 + x_0^{n-3}x_0^2 + \ldots + x_0x_0^{n-2} + x_0^{n-1} =$$

$$= nx_0^{n-1}$$

Nech n=1/2, $f(x)=\sqrt{x}$

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x_0}}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x_0}}{\left(\sqrt{x}-\sqrt{x_0}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x_0}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{1}{\left(\sqrt{x}+\sqrt{x_0}\right)}=\frac{1}{2\sqrt{x_0}}$$

Vo všeobecnosti dá sa dokázať , že pre $f(x)=x^{1/n}$ platí

$$f'(x_0)=\frac{1}{n}x_0^{\frac{1}{n}-1}$$

(4) $f(x)=\sin x$

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{\sin x-\sin x_0}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{2\sin\frac{x-x_0}{2}\cos\frac{x+x_0}{2}}{x-x_0}=$$

$$=\lim_{x\to x_0}\cos\frac{x+x_0}{2}\cdot\lim_{x\to x_0}\frac{\sin\frac{x-x_0}{2}}{\frac{x-x_0}{2}}=$$

$$=\cos x_0$$

Veta. Nech funkcie $f(x)$ a $g(x)$ majú v bode x_0 deriváciu, potom platí

(1) $\left(f(x)+g(x)\right)' = f'(x)+g'(x)$

(2) $\left(f(x)-g(x)\right)' = f'(x)-g'(x)$

(3) $\left(kf(x)\right)' = k\, f'(x)$

(4) $\left(f(x)\cdot g(x)\right)' = f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

(5) $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}$ (pre $g(x)\neq 0$)

Dôkaz (4). Nech $F(x)=f(x)g(x)$, potom pre $F'(x_0)$ platí

$$F'(x_0) = \lim_{x\to x_0}\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0} =$$

$$= \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x)+f(x_0)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0} =$$

$$= \lim_{x\to x_0}\frac{\left(f(x)-f(x_0)\right)g(x)+f(x_0)\left(g(x)-g(x_0)\right)}{x-x_0} =$$

$$= \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\lim_{x\to x_0} g(x)+f(x_0)\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} =$$

$$= f'(x_0)g(x_0)+f(x_0)g'(x_0)$$

Príklad.

$$(tg\ x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'\cos x - \sin x(\cos x)'}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$(cot\,g\ x)' = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{(\cos x)'\sin x - \cos x(\sin x)'}{\sin^2 x} =$$

$$= \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

Veta (derivácia zloženej funkcie). Nech $f(x)$ má deriváciu v bode x_0 a funkcia $g(u)$ má deriváciu v bode $u_0=f(x_0)$. Potom aj zložená funkcia $F(x)=g(f(x))$ má deriváciu v bode x_0 a platí

$$F'(x_0) = g'(u_0)\cdot f'(x_0)$$

$$\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} = \frac{g(f(x))-g(f(x_0))}{x-x_0} = \frac{g(u)-g(u_0)}{u-u_0}\,\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

Pretože $x \to x_0 \Rightarrow u = f(x) \to u_0 = f(x_0)$, potom

$$F'(x_0) = \lim_{x\to x_0}\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} = \lim_{u\to u_0}\frac{g(u)-g(u_0)}{u-u_0}\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} =$$

$$= g'(u_0)\cdot f'(x_0)$$

Príklad. Nájdite deriváciu $F(x)=(x)^{m/n}$, kde m a n sú prirodzené čísla.

Funkciu $F(x)$ prepíšeme do tvaru $F(x)=g\big(f(x)\big)=\left(x^{1/n}\right)^m$, vonkajšia a vnútorná funkcia majú tvar

$$g(u)=u^m, \quad u=f(x)=x^{1/n}$$

Potom platí

$$F'(x)=\left(u^m\right)'\cdot\left(x^{1/n}\right)'=mu^{m-1}\cdot\frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}=\frac{m}{n}\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^{m-1}x^{\frac{1}{n}-1}=\frac{m}{n}x^{\frac{m}{n}-1}$$

Príklad. Nájdite deriváciu $f(x)=\sqrt{1+x^2}$

$$f'(x)=\left(\left(1+x^2\right)^{1/2}\right)'=\frac{1}{2}\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{2}-1}\left(1+x^2\right)'=\frac{1}{2}\left(1+x^2\right)^{-\frac{1}{2}}2x=$$

$$=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

Súhrn derivácií

(1) $(c)' = 0$

(2) $\left(x^n\right)' = nx^{n-1}$

(3) $\left(e^x\right)' = e^x$

(4) $\left(a^x\right)' = a^x \cdot ln\,a$

(5) $(ln\,x)' = \frac{1}{x}$

(6) $(log_a\,x)' = \frac{1}{x \cdot ln\,a}$

(7) $(sin\,x)' = cos\,x$

(8) $(cos\,x)' = -sin\,x$

(9) $(tg\,x)' = \frac{1}{cos^2\,x}$

(10) $(cotg\,x)' = \frac{-1}{sin^2\,x}$

(11) $(arcsin\,x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

(12) $(arccos\,x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

(13) $(arctg\,x)' = \frac{1}{1+x^2}$

(14) $(arccotg\,x)' = \frac{-1}{1+x^2}$

(15) $\left(f(x)+g(x)\right)' = f'(x)+g'(x)$

(16) $\left(f(x)-g(x)\right)' = f'(x)-g'(x)$

(17) $\left(kf(x)\right)' = k\,f'(x)$

(18) $\left(f(x)\cdot g(x)\right)' = f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

(19) $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}$

(20) $F'(x) = g'(u)\cdot f'(x)$, kde $F(x)=g(u)$, $u=f(x)$

Derivácie vyšších rádov

Druhá derivácie funkcie $f(x)$ je definovaná ako derivácia prvej derivácie

$$f''(x) = \left(f'(x)\right)'$$

Všeobecná n-tá derivácia je definovaná

$$f^{(n)}(x) = \left(f^{(n-1)}(x)\right)'$$

Fyzikálna interpretácia: rýchlosť je určená ako prvá derivácia dráhy podľa času

$$v = \dot{x}(t)$$

Zrýchlenie je určené ako prvá derivácia rýchlosti podľa času, t.j. druhá derivácia dráhy podľa času

$$a = \dot{v}(t) = \ddot{x}(t)$$

Príklad. Vypočítajte n-tú deriváciu funkcie $f(x)=1/x$

$$f^{(0)}(x) = f(x) = 1/x = x^{-1}$$

$$f^{(1)} = f'(x) = (-1)x^{-2} = \frac{-1}{x^2}$$

$$f^{(2)}(x) = f''(x) = (-1)(-2)x^{-3} = \frac{2}{x^3}$$

$$f^{(3)}(x) = f'''(x) = (-1)(-2)(-3)x^{-4} = \frac{-6}{x^4}$$

....

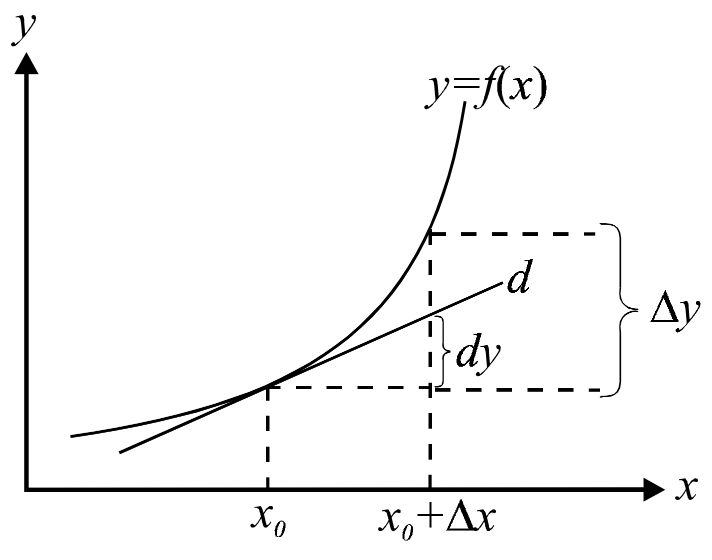
$$f^{(n)}(x) = (-1)^n \frac{n!}{x^{n+1}}$$

Diferenciál

Definícia. Diferenciálom funkcie f v bode x_0 pre prírastok argumentu Δx nazývame výraz

$$df = df(x_0) = df(x_0, \Delta x) = f'(x_0)\Delta x$$

Geometrická interpretácia diferenciálu



Význam diferenciálu

$$f(x_0 + \Delta x) \doteq f(x_0) + df(x_0) = f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$$

Príklad. Vypočítajte približne $\sqrt{10}$.

$$\sqrt{10} = \sqrt{1+3^2} = 3\sqrt{1+\frac{1}{9}}$$

Majme funkciu $f(x) = \sqrt{1+x}$, derivácia tejto funkcie v bode x_0=0 má hodnotu

$$f'(x) = \left((1+x)^{1/2}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{1+x^2}} \Rightarrow f'(0) = \frac{1}{2}$$

$$\sqrt{10} = 3\sqrt{1+\frac{1}{9}} \approx 3\left(f(0) + f'(0)\Delta x\right) = 3\left(1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{9}\right) = 3+\frac{1}{6} \approx 3.17$$

L'Hospitalovo pravidlo

Veta. Nech existujú limity $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$ alebo $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} g(x) = \infty$, potom, ak existuje limita $\lim\limits_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, platí

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Táto veta má význam pre výpočet limít podielu dvoch funkcií vtedy, ak limita podielu derivácií je *jednoduchšou limitou*, ako pôvodná limita.

Príklad. Vypočítajte limitu $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{1} = 1$$

Príklad. Vypočítajte limitu $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x}$.

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x}{1} = 1$$

Príklad. Vypočítajte limitu $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(x+1)}{x}$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{x+1}}{1} = 1.$$

Príklad. Vypočítajte limitu $\lim\limits_{x \to 0} x \ln x$.

$$\lim_{x \to 0} x \ln x = \lim_{x \to 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = 0$$

Príklad. Vypočítajte limitu $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x}{e^x}$.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x}{e^x} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{e^x} = \frac{1}{\infty} = 0.$$