Reálne funkcie viac premenných - parciálne derivácie

Číselné množiny

Bod v n-rozmernom priestore R^{n} je vyjadrený pomocou usporiadanej n-tice reálnych čísel

$$A \in R^n \quad \Rightarrow \quad A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$$

Vzdialenosť medzi dvoma bodmi $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ a $B = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ je určená vzťahom

$$d(A,B) = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + \ldots + (b_n - a_n)^2}$$

Vzdialenosť vo všeobecnosti musí vyhovovať týmto podmienkam

1. $d(A,B) \geq 0 \quad (d(A,B) = 0$ len pre $A = B)$
2. $d(A,B) = d(B,A)$ (symetričnosť)
3. $d(A,C) \leq d(A,B) + d(B,C)$ (trojuholníková nerovnosť, rovnosť platí len, ak body A,B a C ležia na priamke)

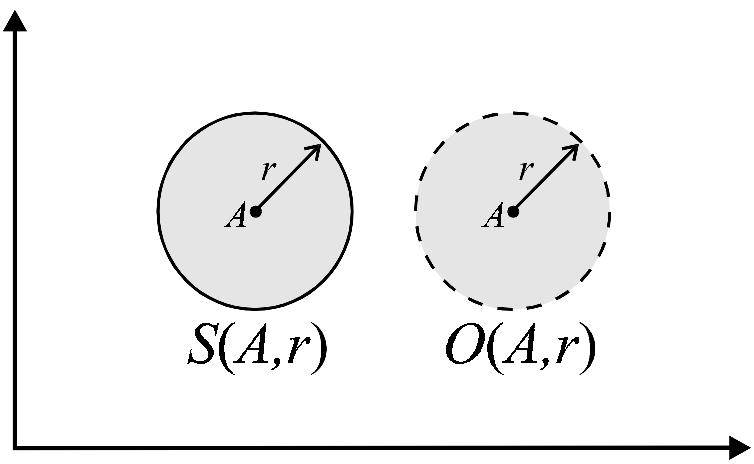
Okolie bodov

Guľa so stredom v bode A a polomerom r je množina

$$S(A,r)=\{X\in R^n;\quad d(A,R)\le r\}$$

Otvorená guľa so stredom v bode A a polomerom r je množina

$$O(A,r)=\{X\in R^n;\quad d(A,R)< r\}$$



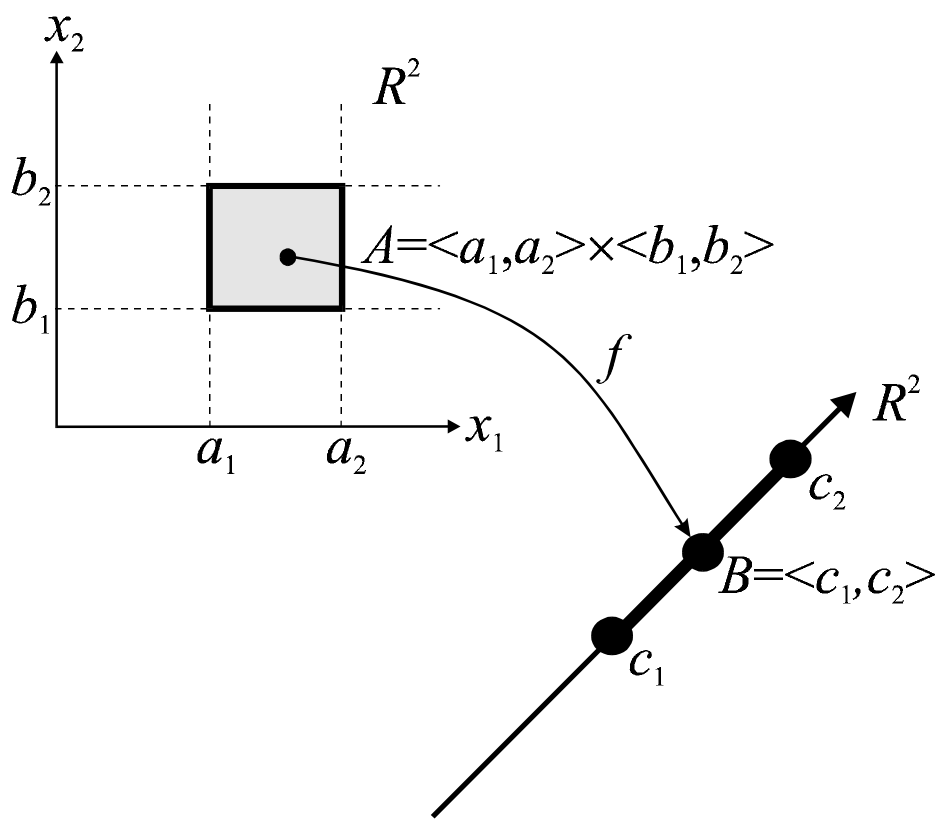
Reálna funkcia *n* premenných

Reálna funkcia n premenných je zobrazenia takto

$$f : A \subset R^n \to B \subset R$$

kde A je definičný obor funkcie a B je obor funkčných hodnôt. Funkciu zapisujeme

$$y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$



Príklad. Nájdite definičný obor funkcie

$$f(x,y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$$

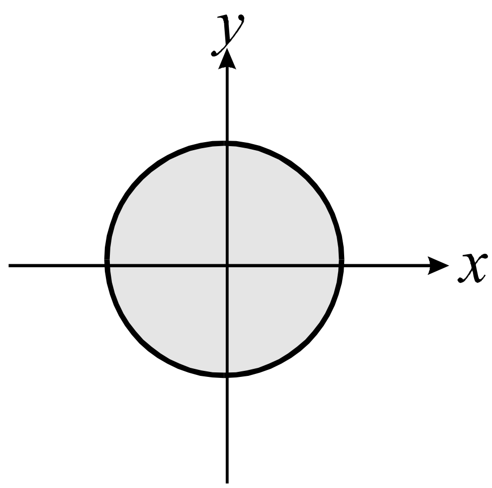
Výraz pod odmocninou musí byť nezáporný

$$4 - x^2 - y^2 \geq 0$$

Riešením tejto nerovnice dostaneme, že obor definície funkcie f je číselná množina

$$A = \left\{ X = (x,y) \, ; \, x^2 + y^2 \leq 4 \right\}$$

Táto množina je uzavretá a obsahuje všetky body ležiace v kruhu so stredom v bode (0,0) a s polomerom 2

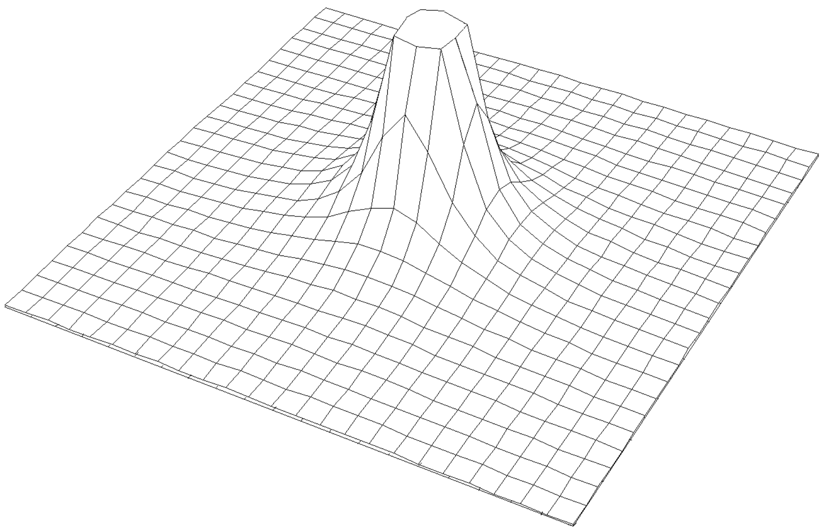


Príklad. Nakreslite graf funkcie

$$f(x,y) = \frac{1}{x^2 + y^2}$$

Obor definície tejto funkcie je celá "rovina" R^2 okrem počiatku (0,0), funkčné hodnoty sú nezáporné

$$A = R^2 - (0{,}0)$$
$$B = (0,\infty)$$



Limita funkcie

Definícia. Nech funkcia $z = f(X)$ je definovaná v nejakom okolí bodu A. Potom hovoríme, že funkcia $f(X)$ má v bode A limitu rovnú b,

$$\lim_{X \to A} f(X) = b,$$

ak pre každú postupnosť $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$, kde $X_n \in D_f$ a $X_n \neq A$, ktorá konverguje k bodu A, $\lim_{n \to \infty} X_n = A$, platí

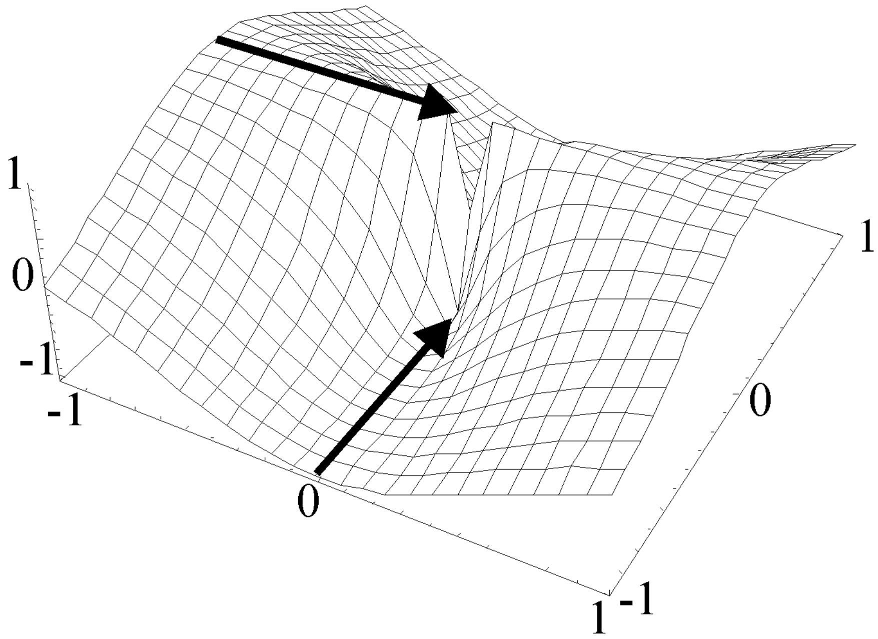
$$\lim_{n \to \infty} f(X_n) = b.$$

Dôsledok definície. V prípade, že existujú také dve postupnosti, že funkcia má pre ne rôzne limity, potom hovoríme, že funkcia nemá limitu v bode A.

Príklad. Zistite, či funkcia

$$f(x,y)=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$$

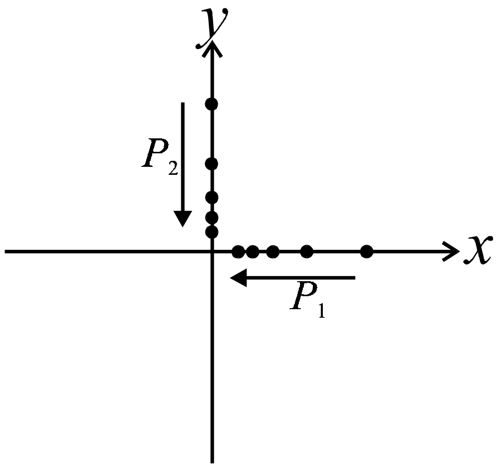
má v bode A=(0,0) limitu.



Definujme si nasledujúce dve postupnosti

$$P_1=\left\{\left(\frac{1}{n},0\right)\right\}_{n=1}^{\infty} \quad \text{a} \quad P_2=\left\{\left(0,\frac{1}{n}\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$$

ktoré majú rovnakú limitu A=(0,0), líšia sa len spôsobom približovania k tomuto bodu



$$P_1 \quad : \quad \lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n},0\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{(1/n)^2}{(1/n)^2+0} = \lim_{n\to\infty} 1 = 1$$

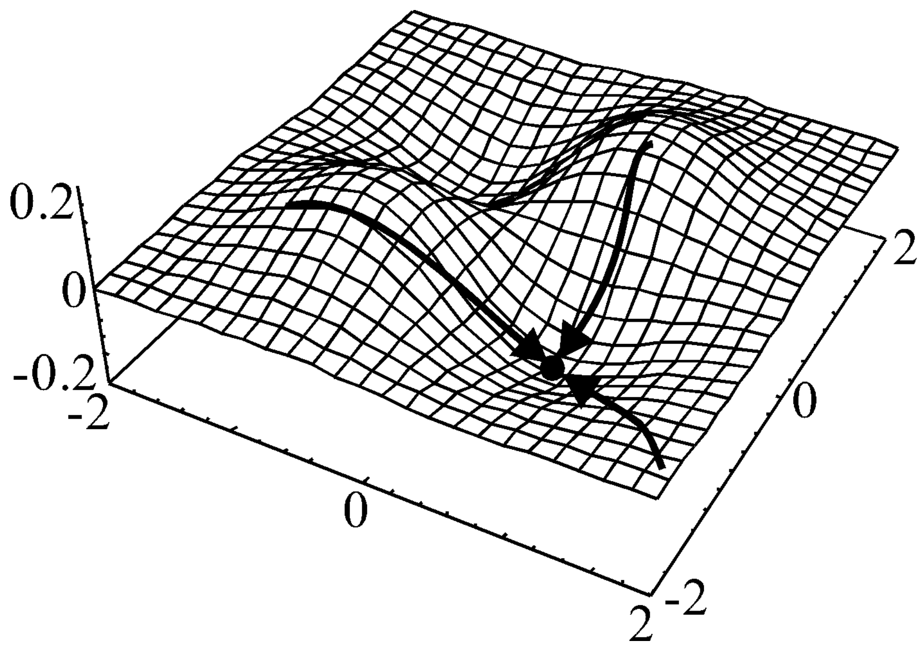
$$P_2 \quad : \quad \lim_{n\to\infty} f\left(0,\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{-(1/n)^2}{0+(1/n)^2} = \lim_{n\to\infty} (-1) = -1$$

To znamená, že funkcia nemá v bode A=(0,0) limitu.

Spojitá funkcie

Definícia. Funkcia $z = f(X)$ je *spojitá* v bode A, ak je v tomto bode definovaná a platí

$$\lim_{X \to A} f(X) = f(A)$$



Poznámka. Pre funkciu $z = f(X)$ spojitú v bode A, jej limita v bode A nezávisí od spôsobu blíženia sa k tomuto bodu a jej hodnota sa rovná funkčnej hodnote v tomto bode.

Parciálne derivácie

Definícia. Nech funkcia $z = f(x, y)$ je definovaná v nejakom okolí bodu $A = (x_0, y_0)$. Ak existuje limita

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

nazývame ju *parciálnou deriváciou* podľa x v bode $A = (x_0, y_0)$ a zapisujeme

$$f'_x(A) \text{ alebo } f'_x(x_0, y_0) \text{ alebo } \frac{\partial f(A)}{\partial x} \text{ alebo } \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}$$

Analogickým spôsobom sa definuje parciálna derivácia funkcie $z = f(x, y)$ podľa y v bode $A = (x_0, y_0)$

$$f'_y(x_0, y_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}$$

Poznámky

1. Z definície parciálnych derivácií vyplýva, že ich výpočet sa realizuje podobne ako výpočet obyčajných derivácií tak, že sa predpokladá konštantnosť druhej premennej.

2. Zovšeobecnenie parciálnych derivácií pre viac ako dve premenné je priamočiare. Tak napríklad, parciálna derivácia funkcie $u = f(x, y, z)$ v bode $A = (x_0, y_0, z_0)$ podľa premennej x je definovaná takto

$$f'_x(x_0, y_0, z_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0, z_0) - f(x_0, y_0, z_0)}{\Delta x}$$

Príklad. Vypočítajte parciálne derivácie funkcie

$$f(x, y) = xy - x^2 + y^3$$

v bode $A = (x_0, y_0)$.

$$f'_x(x_0, y_0) = y_0 - 2x_0, \quad f'_y(x_0, y_0) = x_0 - 3y_0^2$$

Vyššie parciálne derivácie

$$f''_{xx}(x,y) = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$$

$$f''_{xy}(x,y) = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

$$f''_{yx}(x,y) = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$$

$$f''_{yy}(x,y) = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

Veta. Ak funkcia $f(x,y)$ má v bode $A=(x_0,y_0)$ zmiešané druhé parciálne derivácie $f''_{xy}(x_0,y_0)$ a $f''_{yx}(x_0,y_0)$, pričom sú v bode $A=(x_0,y_0)$ spojité, potom tieto zmiešané parciálne derivácie sú si rovné

$$\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial y \partial x}$$

Príklad. Vypočítajte prvé a druhé parciálne derivácie funkcie

$$f(x,y) = sin(x-2y) + x^2y^3$$

Prvé parciálne derivácie majú tvar

$$\frac{\partial f}{\partial x} = cos(x-2y) + 2xy^3$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = -2\,cos(x-2y) + 3x^2y^2$$

Druhé parciálne derivácie spočítame tak, že budeme parciálne derivovať 1. parciálne derivácie

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(cos(x-2y) + 2xy^3\right) = -sin(x-2y) + 2y^3$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(cos(x-2y) + 2xy^3\right) = 2\,sin(x-2y) + 6xy^2$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-2\,cos(x-2y) + 3x^2y^2\right) = 2\,sin(x-2y) + 6xy^2$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(-2\,cos(x-2y) + 3x^2y^2\right) = 4\,sin(x-2y) + 6x^2y$$

Zmiešané druhé parciálne derivácie sú si rovné, čo potvrdzuje predchádzajúcu vetu.

Totálny diferenciál

Definícia. Ak je funkcia $y = f(x,y)$ diferencovateľná v bode $A=(x_0,y_0)$, potom totálny diferenciál je určený vzťahom

$$df(A)=\frac{\partial f(A)}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial f(A)}{\partial y}\Delta y$$

Príklad. Vypočítajte totálny diferenciál funkcie $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ v bode $A=(3,4)$

Parciálne derivácie funkcie f v bode A majú tieto hodnoty

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\sqrt{x^2+y^2}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\Rightarrow\frac{\partial f(A)}{\partial x}=\frac{3}{5}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\sqrt{x^2+y^2}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\Rightarrow\frac{\partial f(A)}{\partial y}=\frac{4}{5}$$

Potom totálny diferenciál funkcie f v bode A má tvar

$$df(3,4)=\frac{3}{5}\Delta x+\frac{4}{5}\Delta y$$

Význam totálneho diferenciálu

$$f\left(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y\right) \doteq f\left(x_0, y_0\right)+df\left(x_0, y_0\right)$$

Príklad. Pomocou totálneho diferenciálu spočítajte približne výraz $\sqrt{(3.02)^2+(3.98)^2}$.

Výraz prepíšeme do tvaru

$$\sqrt{(3+0.02)^2+(4-0.02)^2}$$

Jeho približný výpočet uskutočníme pomocou totálneho diferenciálu funkcie

$$f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$$

v bode $A=\left(x_0, y_0\right)=(3,4)$ a pre diferencie $\Delta x_1=0.02$ a $\Delta x_2=-0.02$. Pomocou predchádzajúceho príkladu môžeme vypočítať totálny diferenciál funkcie f v bode A

$$df(3,4)=\frac{3}{5}\Delta x+\frac{4}{5}\Delta y=\frac{3}{5}0.02+\frac{4}{5}(-0.02)=-\frac{0.02}{5}=-0.004$$

Pre študovaný konkrétny prípad platí

$$\sqrt{(3+0.02)^2+(4-0.02)^2} \doteq \sqrt{(3)^2+(4)^2}-0.004$$
$$=5-0.004=4.996$$

Príklad. Pomocou totálneho diferenciálu zostrojte formulu pre odhad chyby pri výpočte nejakej veličiny, ktorá je funkciou dvoch nezávislých merateľných veličín určených s určitou chybou.

Nech počítaná veličina je určená funkciou $z = f(x, y)$. Budeme počítať veličinu z pre

$$x = x_0 \pm \Delta x, \quad y = y_0 + \Delta y$$

kde Δx a Δy sú chyby pri určení (meraní) nezávislých veličín x a y. Použijeme všeobecnú formulu pre približné vyjadrenie prírastku funkcie pomocou totálneho diferenciálu

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \approx f(x_0, y_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}\Delta y$$

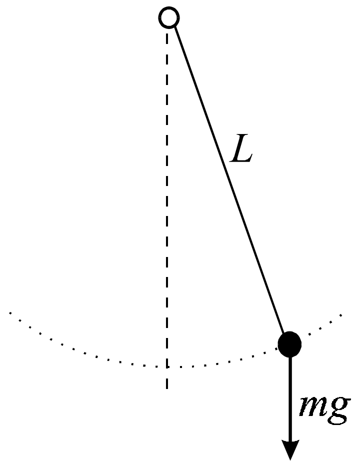
Použijeme všeobecnú formulu, ktorá aproximuje prírastok funkcie pomocou totálneho diferenciálu

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \approx f(x_0, y_0) \pm \Delta f$$

kde Δf je tzv. maximálna chyba výpočtu veličiny z, ktorá je spôsobená chybami pri určení nezávislých veličín x a y

$$\Delta f = \left|\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}\Delta x\right| + \left|\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}\Delta y\right|$$

Príklad. Matematické kyvadlo je hmotný bod o hmotnosti m , ktorý je zavesený na tuhom vlákne dĺžky L, pričom jeho hmotnosť je zanedbateľná.



Perióda matematického kyvadla je určená vzťahom

$$T = 2\pi \left(\frac{L}{g} \right)^{1/2}$$

kde g je gravitačné zrýchlenie. Riešením tohto vzťahu vzhľadom ku gravitačnému zrýchleniu g dostaneme

$$g = g(L,T) = L \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2$$

Predpokladajme, že chceme gravitačné zrýchlenie chceme určiť experimentálne pomocou matematického kyvadla, ktorého parametre sú $L = 4m \pm 1cm$ a $T = 4.01 sec \pm 0.01 sec$. S akou presnosťou sme schopní určiť gravitačné zrýchlenie?

$$\frac{\partial g}{\partial L} = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{\partial g}{\partial L}\right)_{\substack{T=1\\L=4}} = \left(\frac{6.28}{4}\right)^2 = 2.46$$

$$\frac{\partial g}{\partial T} = -\frac{8\pi^2 L}{T^3} \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{\partial g}{\partial T}\right)_{\substack{T=1\\L=4}} = \frac{8 \cdot (3.14)^2 \cdot 4}{(4)^3} = 4.93$$

Chyby merania nezávislých veličín sú

$$\Delta L = 0.01\, m \quad \text{a} \quad \Delta T = 0.01\, sec$$

Potom maximálna chyba gravitačného zrýchlenia má hodnotu

$$\Delta g = |2.46 \cdot 0.01| + |4.93 \cdot 0.01| = 0.07$$

Experimentálne gravitačné zrýchlenie určíme pomocou vzťahu

$$g = L\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad g = 4\left(\frac{6.28}{4.01}\right)^2 = 9.81$$

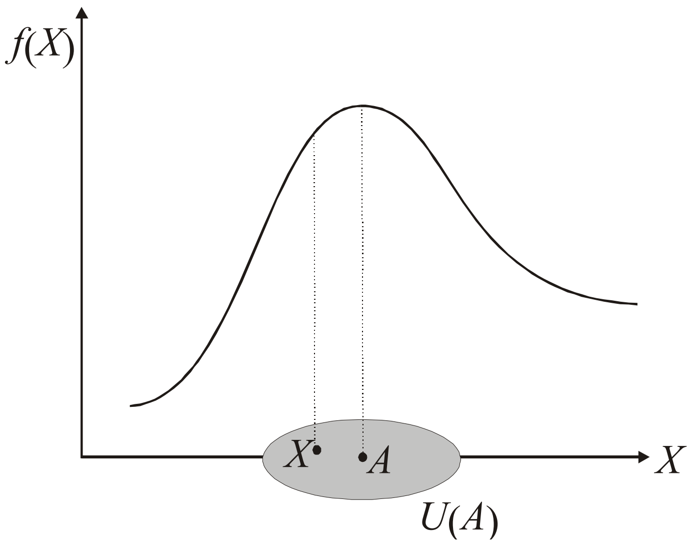
To znamená, že gravitačné zrýchlenie je experimentálne určené s chybou $g = 9.81 \pm 0.07\, m/sec^2$.

Lokálne extrémy funkcií dvoch premenných

Definícia. Funkcia $f(X)$ má v bode A *lokálne minimum* (*maximum*), ak existuje také okolie bodu A, že pre každý bod X z tohto okolia platí

$$f(X) \geq f(A) \qquad \left(f(X) \leq f(A)\right)$$

Ak rovnosť platí len pre $X=A$, potom hovoríme o *ostrom lokálnom minime* (*maxime*)



Veta 1 (nutná podmienka). Ak funkcia $z = f(x,y)$ má v bode $A=(x_0,y_0)$ lokálny extrém a má v tomto bode prvé parciálne derivácie, potom

$$\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x} = 0 \quad a \quad \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y} = 0$$

Bod $A=(x_0,y_0)$ v ktorom má funkcia $z = f(x,y)$ nulové parciálne derivácie

$$\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x} = \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y} = 0$$

sa nazýva ***stacionárny bod***.

Hessián funkcie $z = f(x,y)$ bode $A=(x_0,y_0)$ je matica obsahujúca druhé parciálne derivácie

$$H(A) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f(A)}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f(A)}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial^2 f(A)}{\partial y \partial x} & \dfrac{\partial^2 f(A)}{\partial y^2} \end{pmatrix}$$

V dôsledku toho, že zmiešané druhé parciálne derivácie sú si rovné $\left(f''_{xy} = f''_{yx}\right)$, Hessián je symetrická matica.

Veta 2 (postačujúca podmienka). Ak funkcia $z = f(x,y)$ má v bode $A = (x_0, y_0)$ prvé a druhé parciálne derivácie, pričom tento bod je stacionárny a Hessián $H(A)$ vyhovuje podmienkam

A1. $\dfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x} = 0, \quad \dfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y} = 0$

A2. $\dfrac{\partial^2 f(A)}{\partial x^2} > 0, \quad \dfrac{\partial^2 f(A)}{\partial x^2}\dfrac{\partial^2 f(A)}{\partial y^2} - \left(\dfrac{\partial^2 f(A)}{\partial x \partial y}\right)^2 > 0$

potom funkcia $z = f(x,y)$ má v bode $A = (x_0, y_0)$ **minimum** (v tomto prípade hovoríme, že Hessián je **pozitívne definitný**)

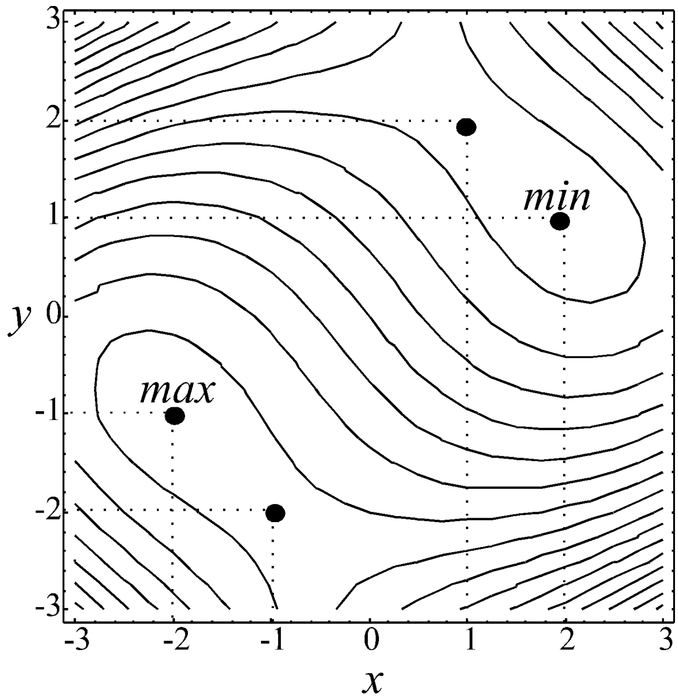
B1. $\dfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x} = 0, \quad \dfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y} = 0$

B2. $\dfrac{\partial^2 f(A)}{\partial x^2} < 0, \quad \dfrac{\partial^2 f(A)}{\partial x^2}\dfrac{\partial^2 f(A)}{\partial y^2} - \left(\dfrac{\partial^2 f(A)}{\partial x \partial y}\right)^2 > 0$

potom $z = f(x,y)$ má v bode $A = (x_0, y_0)$ **maximum** (v tomto prípade hovoríme, že Hessián je **negatívne definitný**).

Príklad. Nájdite lokálne extrémy funkcie

$$z = f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y + 1$$

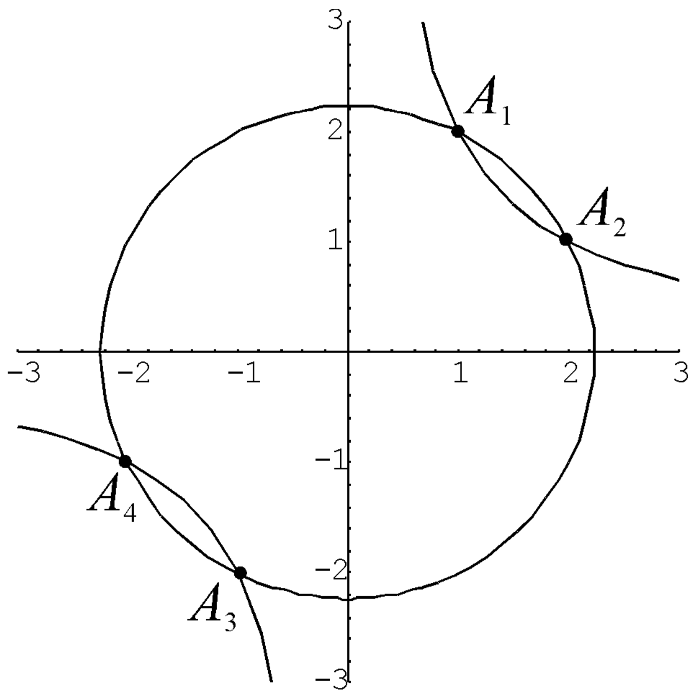


1. krok - stacionárne body

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + 3y^2 - 15 = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 6xy - 12 = 0$$

Tieto rovnice prepíšeme do tvaru

$$x^2 + y^2 = 5, \quad y = \frac{2}{x}$$



$$x^2 + \frac{4}{x^2} - 5 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^4 - 5x^2 + 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad z^2 - 5z + 4 = 0$$

$$z_{1,2} = \begin{cases} 1 \\ 4 \end{cases}$$

Funkcia má štyri stacionárne body

$$A_1 = (1{,}2), \quad A_2 = (2{,}1), \quad A_3 = (-1{,}-2), \quad A_4 = (-2{,}-1)$$

2. krok - špecifikácia stacionárnych bodov

$$H(x,y)=\begin{pmatrix}6x & 6y\\ 6y & 6x\end{pmatrix}$$

$$H(A_1)=H(1,2)=\begin{pmatrix}6 & 12\\ 12 & 6\end{pmatrix},\qquad H(A_2)=H(2,1)=\begin{pmatrix}12 & 6\\ 6 & 12\end{pmatrix}$$

$$H(A_3)=H(-1,-2)=\begin{pmatrix}-6 & -12\\ -12 & -6\end{pmatrix},\quad H(A_4)=H(-2,-1)=\begin{pmatrix}-12 & -6\\ -6 & -12\end{pmatrix}$$

Hessián $H(A_1)$ je pozitívne definitný a $H(A_4)$ je negatívne definitný. Potom dva stacionárne body sú klasifikované podľa Vety 2 takto: A_2 je minimum a A_4 je maximum, zostávajúce body A_1 a A_3 nie sú podľa vety 2 klasifikované.