Príklad 1. Nájdite obor definície funkcií

(a) $f(x,y)=ln(xy)$

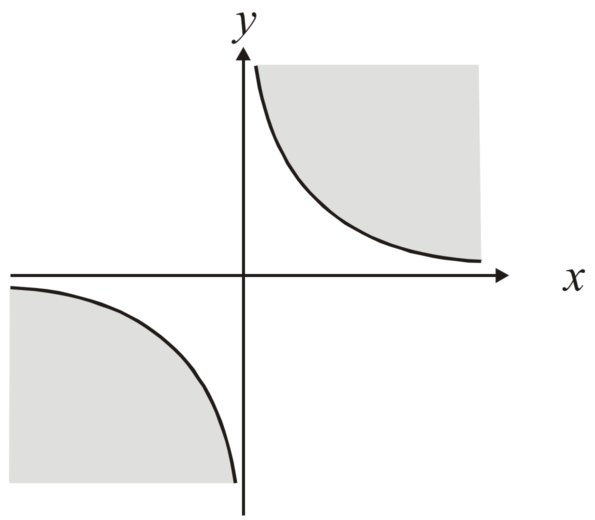
(b) $f(x,y)=\sqrt{4-x^2-y^2}$

(c) $f(x,y)=\dfrac{1}{x^2-y^2}$

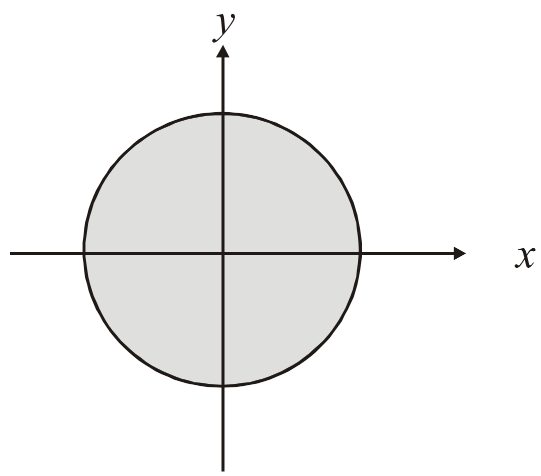
Riešenie.

(a) Základná podmienka pre definičný obor funkcie je $xy>1$, riešením tejto nerovnice dostaneme

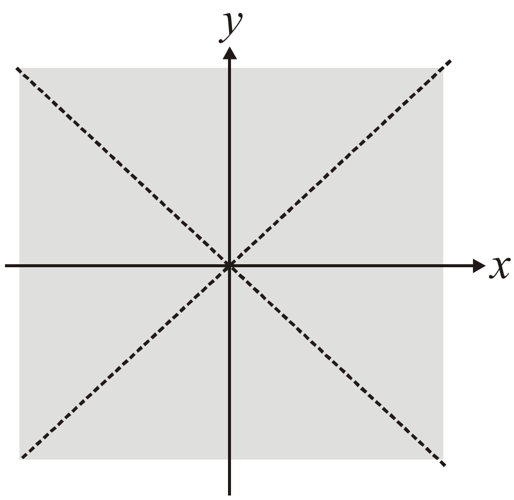
$$y>\frac{1}{x} \text{ (pre } x>0\text{) alebo } y<\frac{1}{x} \text{ (pre } x<0\text{)}$$



(b) Argument pod odmocninou musí byť nezáporný, čiže $x^2+y^2\le 2^2$, potom obor definície funkcie je určený oblasťou uzavretou kružnicou o polomere 2 so stredom v počiatku súradnicového systému



(c) Definičný obor funkcie je určený podmienkou $x^2 - y^2 \neq 0$, riešením tejto nerovnice dostaneme $x^2 \neq y^2$, alebo $|x| \neq |y|$, potom definičný obor funkcie je celá rovina okrem priamok $y = x$ a $y = -x$.



Príklad 2. Vypočítajte diferenciál funkcie $f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ v bode $A = (1,1)$ pre výchylky Δx a Δy.

Riešenie. Parciálne derivácie funkcie sú určené takto

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-x}{\sqrt{\left(x^2+y^2\right)^3}} \Rightarrow \frac{\partial f(A)}{\partial x} = \frac{-1}{2\sqrt{2}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-y}{\sqrt{\left(x^2+y^2\right)^3}} \Rightarrow \frac{\partial f(A)}{\partial y} = \frac{-1}{2\sqrt{2}}$$

Potom diferenciál $df(A)$ má tvar

$$df(A) = -\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\Delta x + \Delta y\right)$$

Príklad 3. Vypočítajte približne pomocou diferenciálu výraz $e^{0.1} \cos 0.1$. Potom $f(x,y) = e^x \cos y$, $x_0 = 0, \Delta x = 0.1$, $y_0 = 0, \Delta y = 0.1$, A=(0,0). Parciálne derivácie funkcie f sú určené takto

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^x \cos y \Rightarrow \frac{\partial f(A)}{\partial x} = 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -e^x \sin y \Rightarrow \frac{\partial f(A)}{\partial x} = 0$$

Pre totálny diferenciál $df(A)$ v bode $A = (0,0)$ platí $df(A) = \Delta x = 0.1$, čiže približná hodnota výrazu $e^{0.1} \cos 0.1$ je určená vzťahom

$$e^{0.1} \cos 0.1 \doteq f(A) + df(A) = 1 + 0.1 = 1.1$$

Príklad 4. Nájdite pre funkciu $f(x,y)=5x^2+y^2+xy+x-y$ extrémy.

Riešenie. Stacionárny bod (v ktorom 1. parciálne derivácie sú nulové) je určený rovnicami

$$\frac{\partial f}{\partial x}=10x+y+1=0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=2y+x-1=0$$

Riešením týchto dvoch lineárnych rovníc dostaneme $A=\left(-\frac{3}{19},\frac{11}{19}\right)$. Tento stacionárny bod je charakterizovaný vlastnosťami Hessiánu

$$H(A)=\begin{pmatrix}10 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

ktorého determinant je kladný a element h_{11}=10>0, čiže bod A je minimum. Priebeh funkcie je znázornenený vrstevnicovým grafom, pričom oblasť v strede grafu odpovedá minimu funkcie