Neurčitý integrál

Úvaha: Pre priamočiary pohyb hmotného bodu platí, že okamžitá rýchlosť sa rovná derivácii dráhy

$$v(t) = s'(t) = \frac{d\,s(t)}{dt}$$

Inverzný problém k tomuto problému je, že poznáme rýchlosť $v(t)$ a chceme poznať dráhu $s(t)$.

Matematicky môžeme túto úlohu formulovať takto: Daná je funkcia f, treba nájsť funkciu F, ktorej derivácia je funkcia f, teda $F' = f$.

Definícia. Funkcia F sa nazýva ***primitívna funkcia*** k funkcii f na intervale (a,b), ak

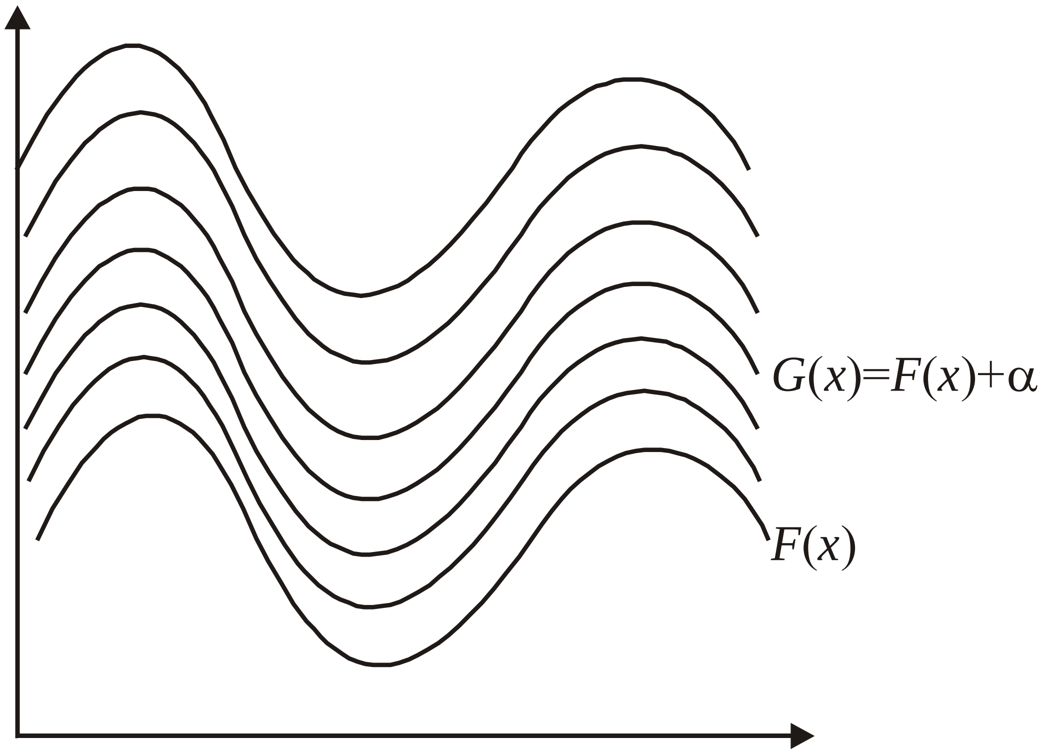
$$\forall x \in (a,b): F'(x) = f(x)$$

Príklad. Funkcia rýchlosti v(t) sa nazýva primitívna funkcia k funkcii dráhy s(t), $s'(t)=v(t)$.

Príklad. K funkcii $f(x) = x^2$ je primitívnou funkciou $F(x) = \frac{x^3}{3}$, lebo

$$F'(x) = \left(\frac{x^3}{3}\right)' = x^2$$

Veta. Ak funkcie F(x) a $G(x)$ sú primitívnou funkciou k funkcii f(x) na intervale (a,b), potom $G(x)=F(x)+\alpha$.



Definícia. Ak funkcia $F(x)$ je primitívna funkcia k funkcii $f(x)$, potom vyraz F(x)+α sa nazýva neurčitým integrálom z funkcie $f(x)$ a označujeme ho symbolom

$$\int f(x)\,dx = F(x) + \alpha$$

znak integralu

integrand, alebo integrovaná funkcia

Konvencia: Operácia, pomocou ktorej k danej funkcii f hľadáme jej primitívnu funkciu, nazývame integrovanie funkcie f. Integrovanie je inverzný proces k derivovaniu, aj keď je potrebné poznamenať, že o mnoho zložiyejší.

Veta (existenčná). Ak je funkcia $f(x)$ spojitá na intervale (a,b), potom k nej existuje na intervale (a,b) primitívna funkcia.

Tabuľka elementárnych neurčitých integrálov

1	$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad (n \neq -1)$	7	$\int e^x dx = e^x + c$
2	$\int \frac{1}{x} dx = ln\lvert x \rvert + c$	8	$\int a^x dx = \frac{a^x}{ln\, a} + c$
3	$\int sin\, x\, dx = -cos\, x + c$	9	$\int \frac{1}{1+x^2} dx = arctg\, x + c = -arccotg\, x + c$
4	$\int cos\, x\, dx = sin\, x + c$	10	$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = arcsin\, x + c = -arccos\, x + c$
5	$\int \frac{1}{cos^2 x} dx = tg\, x + c$	11	$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = ln\lvert f(x) \rvert + c$
6	$\int \frac{1}{sin^2 x} dx = -cotg\, x + c$		

Základné vlastnosti neurčitého integrálu

Veta (existenčná). Ak je funkcia $f(x)$ spojitá na intervale (a,b), potom k nej existuje na intervale (a,b) primitívna funkcia.

Veta. Derivácia neurčitého integrálu sa rovná integrovanej funkcii

$$\left(\int f(x)\,dx\right)' = \left(F(x)+c\right)' = f(x)$$

Veta. Ak funkcie $f(x)$ a $g(x)$ majú neurčitý integrál, potom

$$\int\left[\alpha f(x)+\beta g(x)\right]dx = \alpha\int f(x)\,dx + \beta\int g(x)\,dx$$

Dôsledok: Táto veta umožňuje jednoduchý výpočet niektorých integrálov.

Príklad. Vypočítajte neurčitý integrál

$$\int \left(2x^3 + 3\sin x + \frac{1}{\sqrt{x}} \right) dx$$

Riešenie

$$\int \left(2x^3 + 3\sin x + \frac{1}{\sqrt{x}} \right) dx = 2\int x^3 dx + 3\int \sin x \, dx + \int x^{-1/2} dx$$

$$= 2\frac{x^4}{4} - 3\cos x + \frac{x^{1/2}}{1/2}$$

$$= \frac{1}{2} x^4 - 3\cos x + 2\sqrt{x} + c$$

.

Príklad. Vypočítajte neurčitý integrál

$$\int \frac{x}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{\left(1+x^2\right)'}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)$$

$$= \ln\sqrt{\left(1+x^2\right)} + c$$

Poznámka. Pri výpočte tohto neurčitého integrálu sme použili formulu

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln\left|f(x)\right| + c$$

Pozorovanie. Týmto spôsobom (použitím tabuľky integrálov elementárnych funkcii) sme schopní spočítať len veľmi jednoduché integrály.

$$\int \sqrt{1+x}\,dx = ?$$

Substitučná metóda

$$\int f(x)\,dx = \left| \begin{array}{c} x=\varphi(t) \\ dx=\varphi'(t)\,dt \end{array} \right| = \int f\left[\varphi(t)\right]\varphi'(t)\,dt$$

tento integrál by mal byť jednoduchší ako integrál na pravej strane

Dôkaz. Vyplýva priamo z formule pre deriváciu zloženej funkcie. Nech $F(x)$ je primitívna funkcia k funkcii $f(x)$, $F'(x)=f(x)$, potom

$$\left(F(x)\right)' = \left(F\left[\varphi(t)\right]\right)' = F'\left[\varphi(t)\right]\varphi'(t) = f\left[\varphi(t)\right]\varphi'(t)$$

$$\Rightarrow F(x) = \int f(x)\,dx = \int f\left[\varphi(t)\right]\varphi'(t)\,dt$$

Príklad. Vypočítajte $\int \sqrt{\sin x}\, \cos x\, dx$

$$\int \sqrt{\sin x}\, \cos x\, dx = \left| \begin{array}{l} \sin x = t \\ \cos x\, dx = dt \\ dx = \dfrac{dt}{\cos x} \end{array} \right| = \int \sqrt{t}\, \cos x \frac{dt}{\cos x} = \int t^{1/2} dt$$

$$= \frac{t^{3/2}}{3/2} = \frac{2}{3}\sqrt{\sin^3 x} + c$$

Na záver sa vrátime
k pôvodnej premennej *x*

Príklad. Vypočítajte $\int \frac{arctg^2 x}{1+x^2}dx$

$$\int \frac{arctg^2 x}{1+x^2}dx = \left| \begin{array}{c} arctg\, x = t \\ \frac{dx}{1+x^2} = dt \\ dx = \left(1+x^2\right)dt \end{array} \right| = \int \frac{t^2}{1+x^2}\left(1+x^2\right)dt = \int t^2 dt = \frac{t^3}{3}$$

$$= \frac{1}{3} arctg^3 x + c$$

Príklad. Vypočítajte $\int \frac{1}{a^2 + x^2}\, dx$

$$\int \frac{1}{a^2 + x^2}\, dx = \frac{1}{a^2} \int \frac{1}{1 + \left(x/a \right)^2}\, dx = \left| \begin{array}{c} \frac{x}{a} = t \\ dx = a\,dt \end{array} \right| = \frac{1}{a^2} \int \frac{1}{1 + t^2}\, a\,dt =$$

$$= \frac{1}{a} \int \frac{1}{1 + t^2}\, dt = \frac{1}{a}\, arctg\, t = \frac{1}{a}\, arctg\, \frac{x}{a} + c$$

Metóda per-partes

$$\int u'(x)v(x)\,dx = u(x)v(x) - \int u(x)v'(x)\,dx$$

$$\int u(x)v'(x)\,dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\,dx$$

Tieto formule sú jednoduchým dôsledkom vzorca pre deriváciu súčinu dvoch funkcií

$$\big(u(x)v(x)\big)' = u(x)'\,v(x) + u(x)v(x)' \qquad (*)$$

Použijeme formulu $\int F'(x)\,dx = F(x)$, táto formula je jednoduchým dôsledkom základnej vlastnosti neurčitého integrálu $\left(\int f(x)\,dx\right)' = f(x)$. Potom použitím $(*)$ dostaneme formulu integrovania per-partes

$$u(x)v(x) = \int u'(x)v(x)\,dx + \int u(x)v'(x)\,dx$$

Príklad. Vypočítajte $\int xe^x dx$

$$\int xe^x dx = \begin{vmatrix} u'(x) = e^x \Rightarrow u(x) = e^x \\ v(x) = x \quad \Rightarrow v'(x) = 1 \end{vmatrix} = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + c$$

Poznámka. Integrál na pravej strane by mal byť „jednoduchší“ ako integrál na ľavej strane.

Alternatívne riešenie príkladu.

$$\int xe^x dx = \begin{vmatrix} u'(x) = x \Rightarrow u(x) = x^2/2 \\ v(x) = e^x \Rightarrow v'(x) = e^x \end{vmatrix} = \frac{x^2}{2} e^x - \int \frac{x^2}{2} e^x dx = ?$$

Príklad. Vypočítajte $\int x \sin x \, dx$

$$\int x \sin x \, dx = \left| \begin{array}{l} u'(x) = \sin x \Rightarrow u(x) = -\cos x \\ v(x) = x \qquad\quad \Rightarrow v'(x) = 1 \end{array} \right| = -x \cos x + \int \cos x dx = -x \cos x + \sin x + c$$

Príklad. Vypočítajte $\int arctg\ x \, dx$

$$\int arctg\ x \, dx = \int (1) arctg\ x \, dx = \left| \begin{array}{l} u'(x) = 1 \qquad\qquad\quad \Rightarrow u(x) = x \\ v(x) = arctg\ x \Rightarrow v'(x) = \dfrac{1}{1+x^2} \end{array} \right| =$$

$$= x\, arctg\ x - \int \frac{x}{1+x^2} dx = x\, arctg\ x - \frac{1}{2} \int \frac{2x}{1+x^2} dx =$$

$$= x\, arctg\ x - ln \sqrt{1+x^2} + c$$

Príklad. Vypočítajte $\int e^x \sin x \, dx$

$$I = \int e^x \sin x \, dx = \begin{vmatrix} u'(x) = e^x & \Rightarrow u(x) = e^x \\ v(x) = \sin x & \Rightarrow v'(x) = \cos x \end{vmatrix} = e^x \sin x - \int e^x \cos x \, dx =$$

$$= e^x \sin x - \int e^x \cos x \, dx = \begin{vmatrix} u'(x) = e^x & \Rightarrow u(x) = e^x \\ v(x) = \cos x & \Rightarrow v'(x) = -\sin x \end{vmatrix}$$

$$= e^x \sin x - e^x \cos x - \int e^x \sin x \, dx = e^x \sin x - e^x \cos x - I$$

Dvojnásobným použitím per-partes sme dostali, že $I = e^x \sin x - e^x \cos x - I$, potom

$$I = \frac{1}{2} e^x \left(\sin x - \cos x \right)$$

Integrácia racionálnej funkcie

$$\int \frac{1}{x^2 + px + q} dx$$

Pri výpočte tohto integrálu budeme rozlišovať tri ípady, keď ratická rovnica $x^2 + px + q = 0$ má diskriminant kladný (dva rôzne reálne korene), diskriminant nulový (dvojnásobný reálny koreň), a záporný diskriminant (komplexné korene).

(1) kladný diskriminant, $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q > 0$, $x^2 + px + q = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)$, integrál má potom tvar

$$\int \frac{1}{x^2 + px + q} dx = \int \frac{1}{(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)} dx$$

Integrand na pravej strane upravíme do jednoduchšieho tvaru

$$\frac{1}{(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)} = \frac{A}{(x-\alpha_1)} + \frac{B}{(x-\alpha_2)}$$

Potom

$$\int \frac{1}{x^2+px+q}dx = A\int \frac{1}{(x-\alpha_1)}dx + B\int \frac{1}{(x-\alpha_2)}dx$$

$$= A ln|x-\alpha_1| + B ln|x-\alpha_2| + c$$

(2) nulový diskriminant, $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q > 0$, $x^2+px+q = (x-\alpha)^2$, integrál ma potom tvar

$$\int \frac{1}{x^2+px+q}dx = \int \frac{1}{(x-\alpha)^2}dx = -\frac{1}{x-\alpha} + c$$

(3) záporný diskriminant, $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 0,\; x^2 + px + q = (x-a)^2 + b^2,$, integral m8

potom tvar

$$\int \frac{1}{x^2 + px + q}\,dx = \int \frac{1}{(x-a)^2 + b^2}\,dx = \frac{1}{b^2}\int \frac{1}{\left(\frac{x-a}{b}\right)^2 + 1}\,dx$$

ktorý po substitúcii $(x-a)/b = t \Rightarrow dx = b\,dt$ sa zjednoduší na elementárny integrál

$$\int \frac{1}{x^2 + px + q}\,dx = \frac{1}{b}\int \frac{1}{t^2+1}\,dt = \frac{1}{b}\,arctg\; t = \frac{1}{b}\,arct\,\frac{x-a}{b} + c$$

Nasledujúce tri príklady budú ilustrovať výpočet racionálneho integrálu.

Príklad (kladný diskriminant). Vypočítajte $\int \frac{1}{x^2-3x+2}dx$

Kvadratická rovnica $x^2-3x+2=0$ má dva reálne korene $\alpha_1=1$ a $\alpha_2=2$, racionálny výraz upravíme do tvaru

$$\frac{1}{x^2-3x+2}=\frac{1}{(x-1)(x-2)}=\frac{-1}{(x-1)}+\frac{1}{(x-2)}$$

Potom pre počítaný integrál platí

$$\int \frac{1}{x^2-3x+2}dx=\int \frac{-1}{(x-1)}dx+\int \frac{1}{(x-2)}dx=-ln|x-1|+ln|x-2|=$$

$$=ln\left|\frac{x-2}{x-1}\right|+c$$

Príklad (nulový diskriminant). Vypočítajte $\int \frac{1}{x^2 - 2x + 1} dx$

Kvadratická rovnica $x^2 - 2x + 1 = 0$ má jeden dvojnásobný koreň $\alpha_1=1$, racionálny výraz upravíme do tvaru

$$\frac{1}{x^2 - 2x + 1} = \frac{1}{(x-1)^2}$$

Potom pre počítaný integrál platí

$$\int \frac{1}{x^2 - 2x + 1} dx = \int \frac{1}{(x-1)^2} dx = \frac{-1}{x-1} + c$$

Príklad (záporný diskriminant). Vypočítajte $\int \frac{1}{x^2+x+1}dx$

Kvadratická rovnica $x^2+x+1=0$ ma záporný diskriminant, kvadratický polynóm upravíme do tvaru

$$x^2+x+1=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$$

Racionálny výraz upravíme do tvaru

$$\frac{1}{x^2+x+1}=\frac{1}{\left(x+1/2\right)^2+\left(\sqrt{3}/2\right)^2}=\frac{1}{\left(\sqrt{3}/2\right)^2}\frac{1}{\left(2/\sqrt{3}\right)^2\left(x+1/2\right)^2+1}=$$

$$=\frac{4}{3}\frac{1}{\left[\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right]^2+1}$$

Potom pre počítaný integrál platí

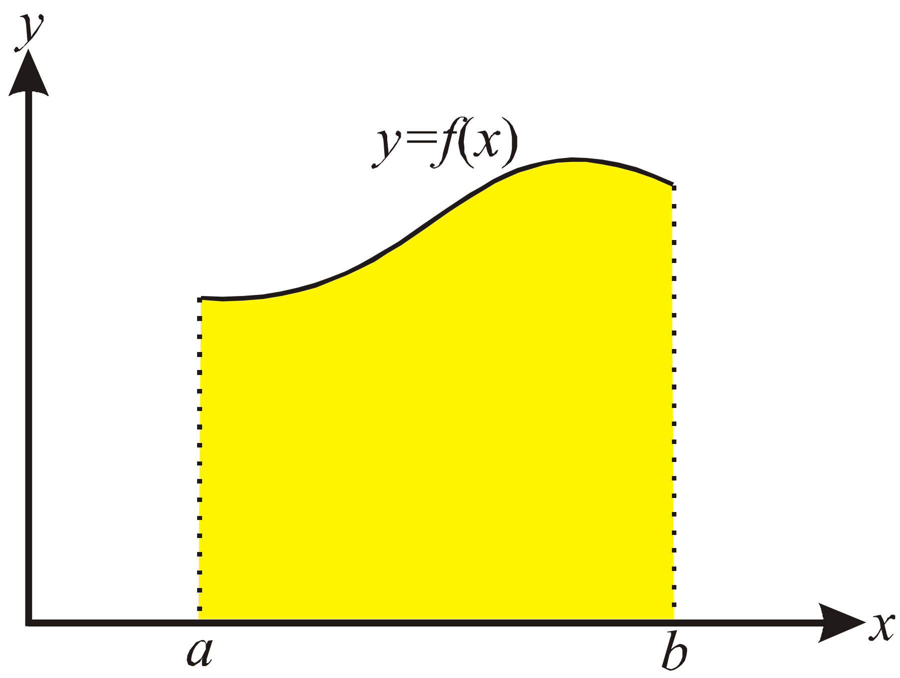
$$\int \frac{1}{x^2+x+1}dx = \frac{4}{3}\int \frac{1}{\left[\frac{(2x+1)}{\sqrt{3}}\right]^2+1}dx = \left| \begin{array}{l} \frac{(2x+1)}{\sqrt{3}} = t \\ dx = \frac{\sqrt{3}}{2}dt \end{array} \right| = \frac{4}{3}\int \frac{1}{t^2+1}\frac{\sqrt{3}}{2}dt =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} arctg\, t = \frac{2}{\sqrt{3}} arctg \frac{(2x+1)}{\sqrt{3}} + c$$

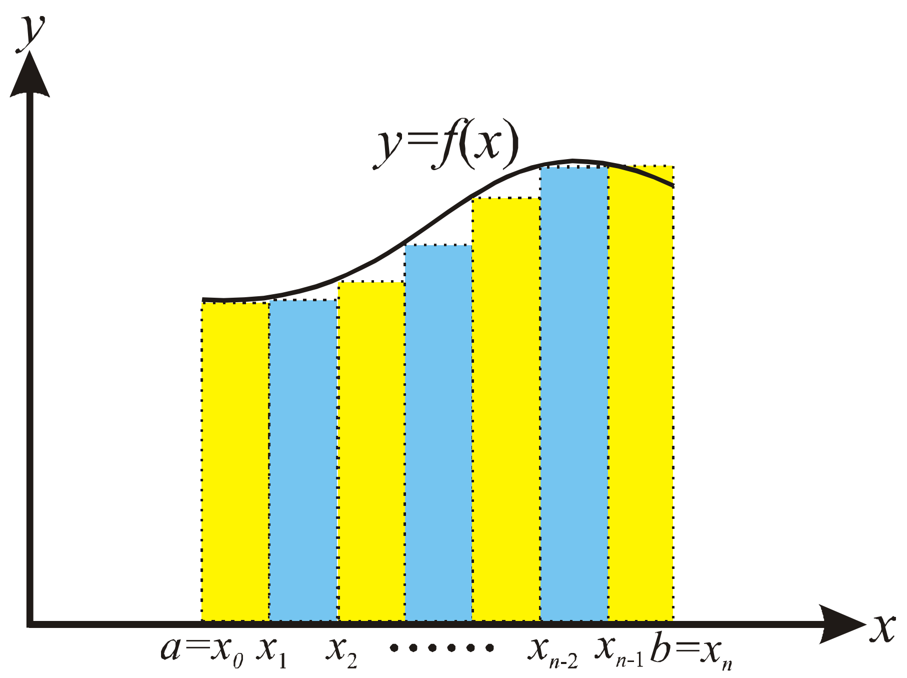
Určitý integrál

Úloha vedúca k pojmu určitého integrálu: Vypočítať plošný obsah krivočiareho lichobežníka

$$L = \left\{ \left(x, y \right) \mid \forall x \in \left\langle a, b \right\rangle : y \in \left\langle 0, f\left(x \right) \right\rangle \right\}$$



Intuitívny prístup k riešeniu tohto problému: Krivočiari lichobežník postriháme pomocou nožníc na prúžky rovnakej šírky, potom plošný obsah krivočiareho lichobežníka bude dobre aproximovaný súčtom plošných obsahov jednotlivých prúžkov, ktoré sú počítané, ako plošné obsahy obdĺžnikov.



$$x_i - x_{i-1} = \Delta x \Rightarrow P_n = \sum_{i=0}^{n-1} f\left(x_i\right)\Delta x$$

$$P = \lim_{n\to\infty} P_n = \int_a^b f\left(x\right)dx$$

Cauchyho-Riemannova definícia určitého integrálu

Určitý integrál funkcie $f(x)$ na intervale <a,b>.

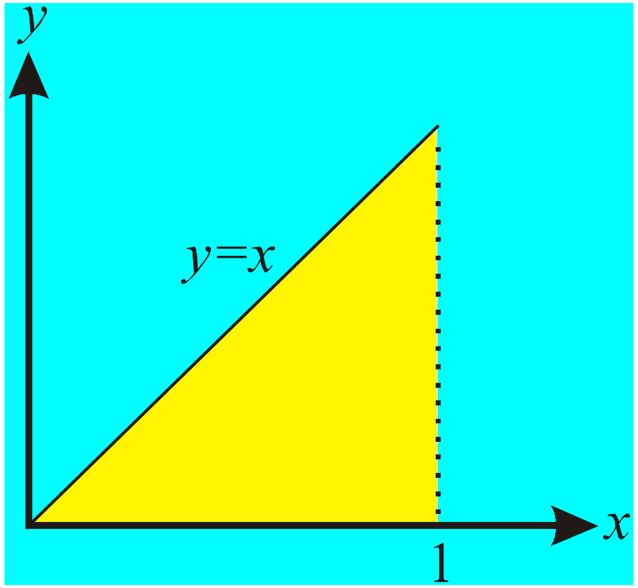
Poznámka: Tvar premennej v určitom integrálu je nepodstatný

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt = \ldots = \int_a^b f(\clubsuit)\,d\clubsuit$$

Definícia. Ak pre funkciu *f*(*x*) existuje určitý integrál $\int_a^b f(x)\,dx$, potom hovoríme, že funkcia *f*(*x*) je na intervale $\langle a,b \rangle$ **integrovateľná**.

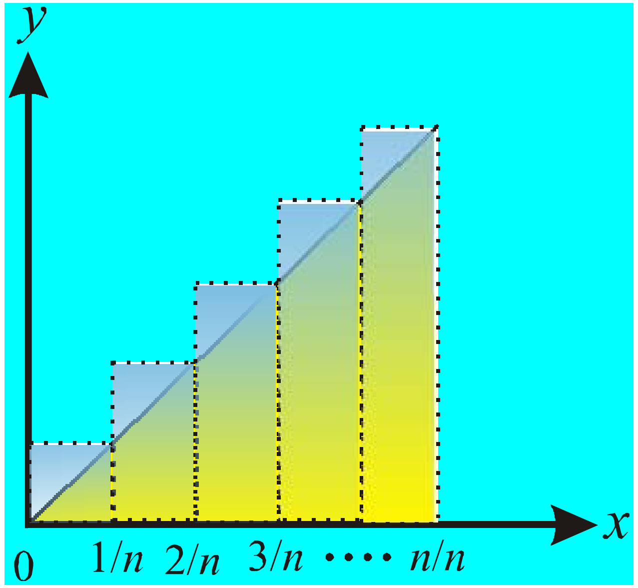
Veta (existenčná). Každá spojitá funkcia f(x) na intervale $\langle a,b \rangle$ je na tomto intervale integrovateľná.

Príklad. Vypočítajte z definície určitý integrál $\int_0^1 x\,dx$.



$$\int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}$$

Približný výpočet za predpokladu, že interval $\langle a,b \rangle$ je rozdelený na n podintervalov rovnakej hrúbky $\Delta x = 1/n$



$$P_n = \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n} + \frac{2}{n}\cdot\frac{1}{n} + \frac{3}{n}\cdot\frac{1}{n} + \ldots + \frac{n}{n}\cdot\frac{1}{n} = \frac{1}{n^2}\left(1+2+3\ldots+n\right)$$

$$= \frac{1}{n^2}\cdot\frac{n\left(n+1\right)}{2} = \frac{1}{2}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

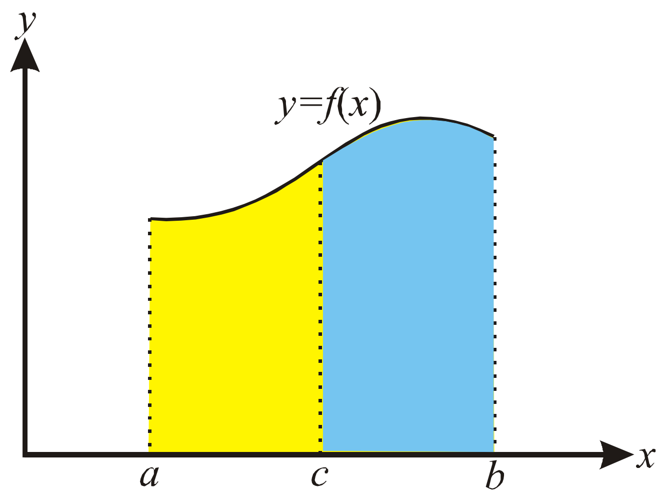
$$\int_0^1 x\,dx = \lim_{n\to\infty} P_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}$$

Vlastnosti určitého integrálu

Veta 1. $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

Veta 2. $\int_a^b \left[\alpha f(x) + \beta g(x)\right] dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx + \beta \int_a^b f(x)\,dx$

Veta 3. $\int_a^b f(x)\,dx = \int_b^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$, kde $a < c < b$



Newtonova – Leibnizova formula

Veta. Nech *f*(*x*) je integrovateľná funkcia na intervale $\langle a,b\rangle$, *F*(*x*) je spojitá funkcia na $\langle a,b\rangle$ a nech je primitívnou funkciou k funkcii *f*(*x*), potom

$$\int_a^b f(x)\,dx = \left[F(x)\right]_a^b = F(b) - F(a)$$

Dôsledkom tejto vety je, že existuje úzky vzťah medzi neurčitým a určitým, integrálom.

Príklad. Vypočítajte integrál $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx$

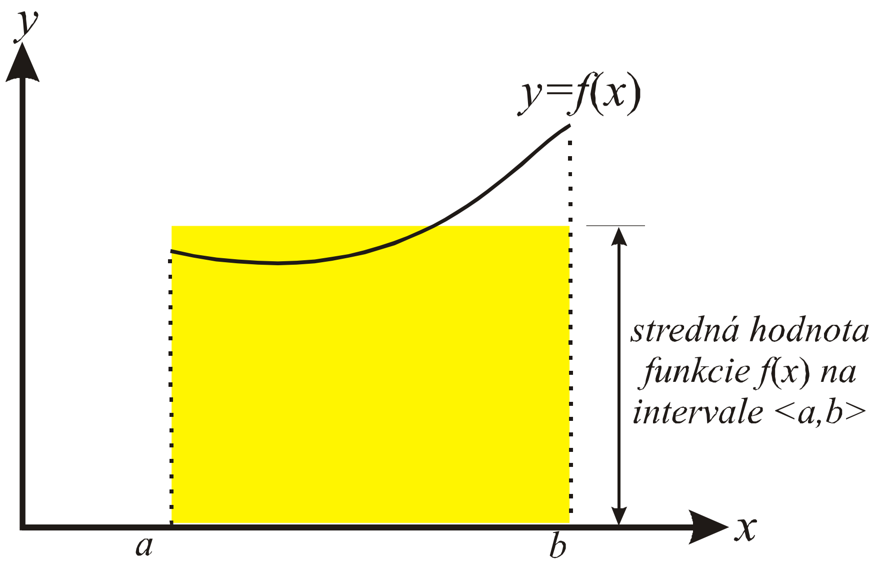
Neurčitý integrál k integrandu $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$ je $F(x)=arctg\,x$, potom pomocou Newtonovej a Leibnizovej formule platí

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx=\left[arctg\,x\right]_0^1=arctg1-arctg0=\frac{\pi}{4}-0=\frac{\pi}{4}$$

Príklad. Vypočítajte integrál $\int_0^\pi sin\,x\,dx$.

$$\int_0^\pi sin\,x\,dx=\left[-cos\,x\right]_0^\pi=-cos\,\pi+cos\,0=-(-1)+1=2$$

Stredná hodnota funkcie na intervale



$$\mu = \langle f \rangle_a^b = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

Stredná hodnota funkcie $f(x)$ na intervale $\langle a,b \rangle$ je zdola/zhora ohraničená jej minimálnou/maximálnou hodnotou

$$\min_{x\in\langle a,b\rangle} f(x) \le \langle f \rangle_a^b \le \max_{x\in\langle a,b\rangle} f(x)$$

Príklad. Vypočítajte strednú hodnotu funkcie $f\left(x\right)=sin\,x$ na intervale $\langle 0,\pi\rangle$.

$$\langle sin\,x\rangle_0^\pi=\frac{1}{\pi-0}\int_0^\pi sin\,x\,dx=\frac{1}{\pi}\left[-cos\,x\right]_0^\pi=\frac{2}{\pi}=0.6369...$$

Vo všeobecnosti môžeme určité integrály počítať pomocou Newtonovho a Leibnizovho vzorca tak, že nájdeme primitívnu funkciu k integrandu

$$\int_a^b f\left(x\right)dx=\left[F\left(x\right)\right]_a^b=F\left(b\right)-F\left(a\right)$$

Príklad. Vypočítajte integrál $\int\limits_0^2 \frac{1}{x^2+a^2}\,dx$

Prvý krok. Hľadáme primitívnu funkciu $F(x)$ k funkcii $f(x)=\frac{1}{x^2+a^2}$, dostaneme

$$F(x)=\frac{1}{a}arctg\,\frac{x}{a}.$$

Druhý krok. Použijeme Newtonov a Leibnizov vzorec pre výpočet určitého integrálu

$$\int\limits_0^2 \frac{1}{x^2+a^2}\,dx=\left[\frac{1}{a}arctg\,\frac{x}{a}\right]_0^a=\frac{1}{a}\left(arctg1-arctg0\right)=$$

$$=\frac{1}{a}\left(\frac{\pi}{4}-0\right)=\frac{\pi}{4a}$$

Substitučná metóda

$$\int_a^b f(x)\,dx = \left| \begin{array}{l} x = \varphi(t) \\ dx = \varphi'(t)\,dt \\ \varphi(\alpha) = a \\ \varphi(\beta) = b \end{array} \right| = \int_\alpha^\beta f\left[\varphi(t)\right]\varphi'(t)\,dt$$

Príklad. Vypočítajte integrál $\int_0^2 \frac{1}{x^2+a^2}\,dx$

$$\int_0^a \frac{1}{x^2+a^2}\,dx = \frac{1}{a^2}\int_0^a \frac{1}{\left(\frac{x}{a}\right)^2+1}\,dx = \begin{vmatrix} \frac{x}{a}=t \\ dx = a\,dt \\ x=0 \Rightarrow t=0 \\ x=a \Rightarrow t=1 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{a^2}\int_0^1 \frac{1}{t^2+1}\,a\,dt = \frac{1}{a}\left[\operatorname{arctg} t\right]_0^1 = \frac{\pi}{4a}$$

Príklad. Vypočítajte integrál $\int_0^{\pi/2} sin^2 x \cos x \, dx$

$$\int_0^{\pi/2} sin^2 x \cos x \, dx = \left| \begin{array}{l} \sin x = t \\ dx = \dfrac{dt}{\cos x} \\ x = 0 \Rightarrow t = 0 \\ x = \pi/2 \Rightarrow t = 1 \end{array} \right| = \int_0^1 t^2 \cos x \frac{dt}{\cos x} = \int_0^1 t^2 dt = \left[\frac{t^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

Metóda per-partes

$$\int_a^b u'(x)v(x)\,dx = \left[u(x)v(x)\right]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)\,dx$$

Príklad. Vypočítajte $\int_0^1 xe^x dx$

$$\int_0^1 xe^x dx = \left| \begin{matrix} u'(x) = e^x, v(x) = x \\ u(x) = e^x, v'(x) = 1 \end{matrix} \right| = \left[xe^x\right]_0^1 - \int_0^1 e^x dx = \left(1e^1 - 0\right) - \left[e^x\right]_0^1 = 1$$

Príklad. Vypočítajte $\int_0^{\pi/2} e^x \sin x \, dx$

$$I = \int_0^{\pi/2} e^x \sin x \, dx = \begin{vmatrix} u'(x) = e^x, v(x) = \sin x \\ u(x) = e^x, v'(x) = \cos x \end{vmatrix} = \left[e^x \sin x \right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} e^x \cos x \, dx =$$

$$= e^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} e^x \cos x \, dx = \begin{vmatrix} u'(x) = e^x, v(x) = \cos x \\ u(x) = e^x, v'(x) = -\sin x \end{vmatrix} = e^{\pi/2} - \left[e^x \cos x \right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} e^x \sin x \, dx =$$

$$= e^{\pi/2} + 1 - I$$

$$I = \int_0^{\pi/2} e^x \sin x \, dx = \frac{e^{\pi/2} + 1}{2}$$