

# Hopfieldova sieť



**Prednáška “*Neurónové siete*”**

**12. 12. 2007**

# **Neural Networks - A Systematic Introduction**

*a book by Raul Rojas*

Foreword by Jerome Feldman

Springer-Verlag, Berlin, New-York, 1996 (502 p.,350 illustrations).  
<http://page.mi.fu-berlin.de/rojas>



John J. Hopfield, Princeton University

# 1. Špecifikácia neurónovej siete

- Nech neurónová sieť má  $n$  binárnych neurónov, Jej stav je popísaný **stavovým vektorom**

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \{0, 1\}^n$$

Nech  $\mathbf{x}^{(t)} = (x_1^{(t)}, x_2^{(t)}, \dots, x_n^{(t)})$  je stavový vektor neurónovej siete, ktorý popisuje aktivity jednotlivých neurónov v čase  $t$ .

- Neurónová sieť je popísaná **obnovovacou funkciou**

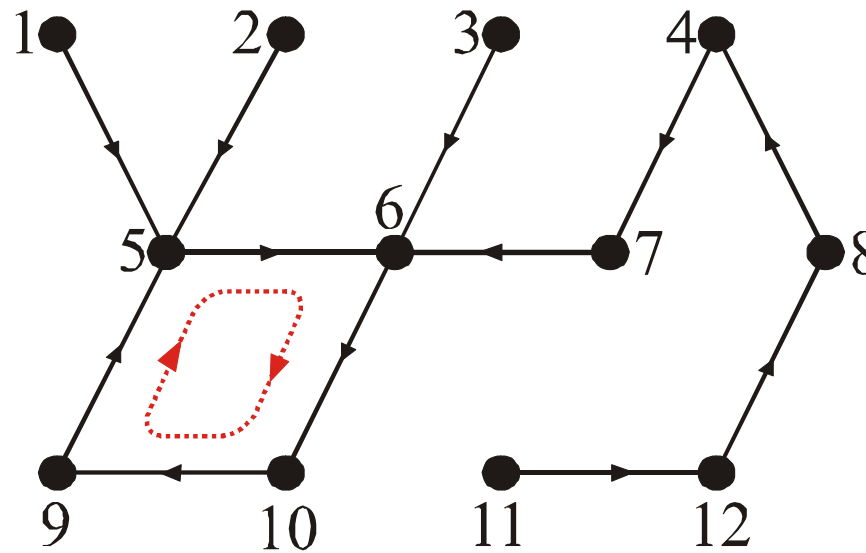
$$f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}^n$$

ktorá určuje stavový vektor  $\mathbf{x}^{(t+1)}$  pomocou stavového vektora z predchádzajúceho okamžiku  $\mathbf{x}^{(t)}$

$$\mathbf{x}^{(t+1)} = f(\mathbf{x}^{(t)})$$

K úplnej špecifikácii tejto funkcie musíme mať zadaný aj počiatočný stavový vektor  $\mathbf{x}^{(1)}$ .

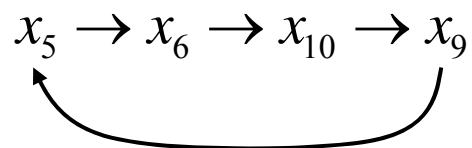
### Ilustračný príklad A



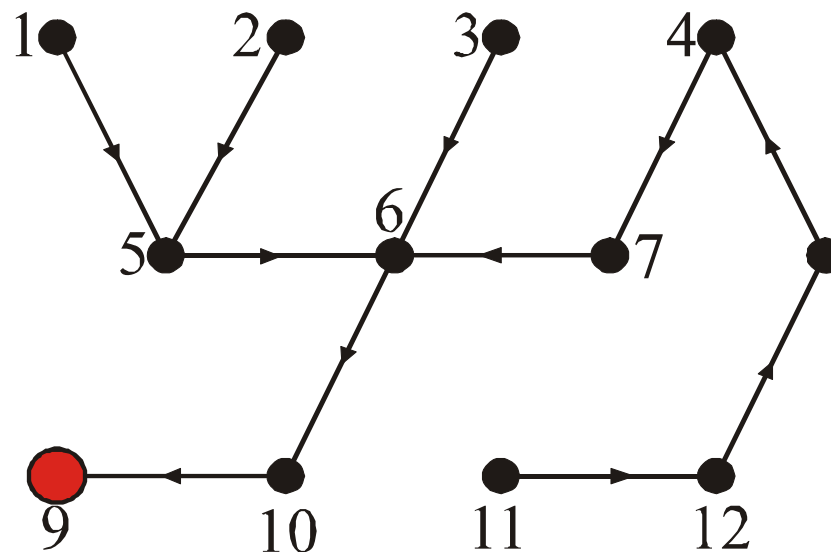
*limitný cyklus*

$$\begin{array}{l} \mathbf{x}_5 = f(\mathbf{x}_1) \quad \mathbf{x}_5 = f(\mathbf{x}_2) \quad \mathbf{x}_6 = f(\mathbf{x}_3) \quad \mathbf{x}_7 = f(\mathbf{x}_4) \quad \mathbf{x}_6 = f(\mathbf{x}_5) \quad \mathbf{x}_{10} = f(\mathbf{x}_6) \\ \mathbf{x}_6 = f(\mathbf{x}_7) \quad \mathbf{x}_4 = f(\mathbf{x}_8) \quad \mathbf{x}_5 = f(\mathbf{x}_9) \quad \mathbf{x}_9 = f(\mathbf{x}_{10}) \quad \mathbf{x}_{12} = f(\mathbf{x}_{11}) \quad \mathbf{x}_8 = f(\mathbf{x}_{12}) \end{array}$$

Cyklus:



## Ilustračný príklad B

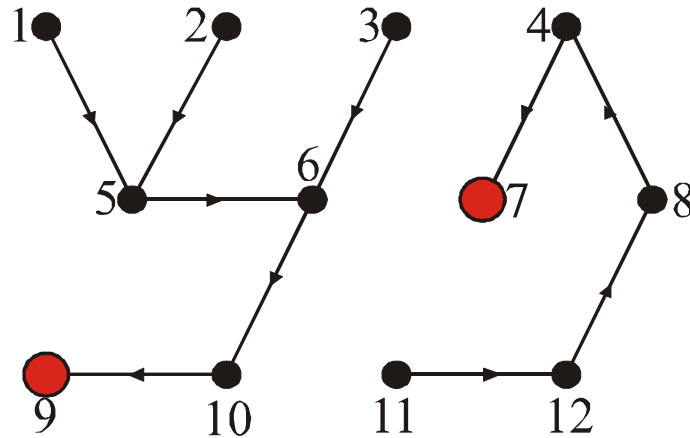


*asymptoticky stabilný stav*

$$\begin{array}{cccccc} \mathbf{x}_5 = f(\mathbf{x}_1) & \mathbf{x}_5 = f(\mathbf{x}_2) & \mathbf{x}_6 = f(\mathbf{x}_3) & \mathbf{x}_7 = f(\mathbf{x}_4) & \mathbf{x}_6 = f(\mathbf{x}_5) & \mathbf{x}_{10} = f(\mathbf{x}_6) \\ \mathbf{x}_6 = f(\mathbf{x}_7) & \mathbf{x}_4 = f(\mathbf{x}_8) & \mathbf{x}_9 = f(\mathbf{x}_9) & \mathbf{x}_9 = f(\mathbf{x}_{10}) & \mathbf{x}_{12} = f(\mathbf{x}_{11}) & \mathbf{x}_8 = f(\mathbf{x}_{12}) \end{array}$$

System je asymptoticky stabilný, každá trajektória končí v stave  $x_9$ .

### Ilustračný príklad C



*dva asymptoticky stabilné stavy*

$$\begin{array}{cccccc}
 \mathbf{x}_5 = f(\mathbf{x}_1) & \mathbf{x}_5 = f(\mathbf{x}_2) & \mathbf{x}_6 = f(\mathbf{x}_3) & \mathbf{x}_7 = f(\mathbf{x}_4) & \mathbf{x}_6 = f(\mathbf{x}_5) & \mathbf{x}_{10} = f(\mathbf{x}_6) \\
 \mathbf{x}_7 = f(\mathbf{x}_7) & \mathbf{x}_4 = f(\mathbf{x}_8) & \mathbf{x}_9 = f(\mathbf{x}_9) & \mathbf{x}_9 = f(\mathbf{x}_{10}) & \mathbf{x}_{12} = f(\mathbf{x}_{11}) & \mathbf{x}_8 = f(\mathbf{x}_{12})
 \end{array}$$

System je asymptoticky stabilný, každá trajektória buď končí v  $x_7$  alebo v stave  $x_9$ .

$$S = \{x_1, x_2, \dots, x_{12}\} = \underbrace{\{x_1, x_2, x_3, x_5, x_6, x_9, x_{10}\}}_{\text{stabilný stav } x_9} \cup \underbrace{\{x_4, x_7, x_8, x_{11}, x_{12}\}}_{\text{stabilný stav } x_7}$$

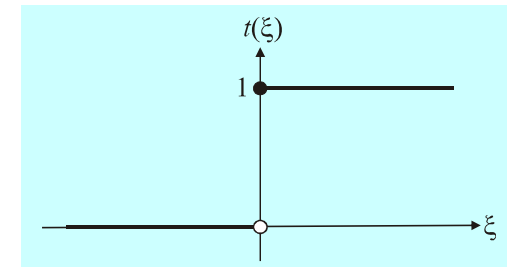
**Veta.** Každá trajektória končí buď v limitnom cykle alebo v asymptoticky stabilnom stave

Špeciálny typ neurónovej siete (podľa McCullocha a Pittsa, 1943)

$$x_i = t\left(\sum_j w_{ij}x_j + \vartheta_i\right)$$

kde

$$t(\xi) = \begin{cases} 1 & (\xi \geq 0) \\ 0 & (\xi < 0) \end{cases}$$



**Asynchrónna** obnova aktivity: v čase  $t$  sa náhodne vyberie jeden neurón  $i$ , ktorého aktivita sa obnoví



$$x_i^{(t+1)} = t \left( \sum_j w_{ij} x_j^{(t)} + \vartheta_i \right)$$

Špeciálny prípad neurónovej siete podľa McCullocha a Pitsa, ktorá má

- nulové diagonálne váhové koeficienty,
- nediagonálne elementy sú symetrické,
- aktivity neurónov sa obnovujú asynchrónne,

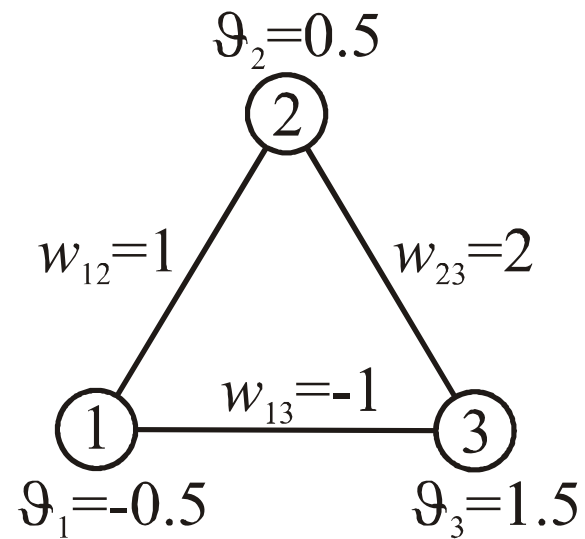
sa nazýva ***Hopfieldova (neurónová) sieť***.

**Veta.** Hopfieldova neurónová sieť má len asymptoticky stabilné stavy.

Dôkaz vety sa vykoná pomocou Ljapunovej funkcie

$$L(\mathbf{x}) = -\frac{1}{2} \sum_{i,j} x_i w_{ij} x_j + \sum_{i=1}^n x_i \vartheta_i$$

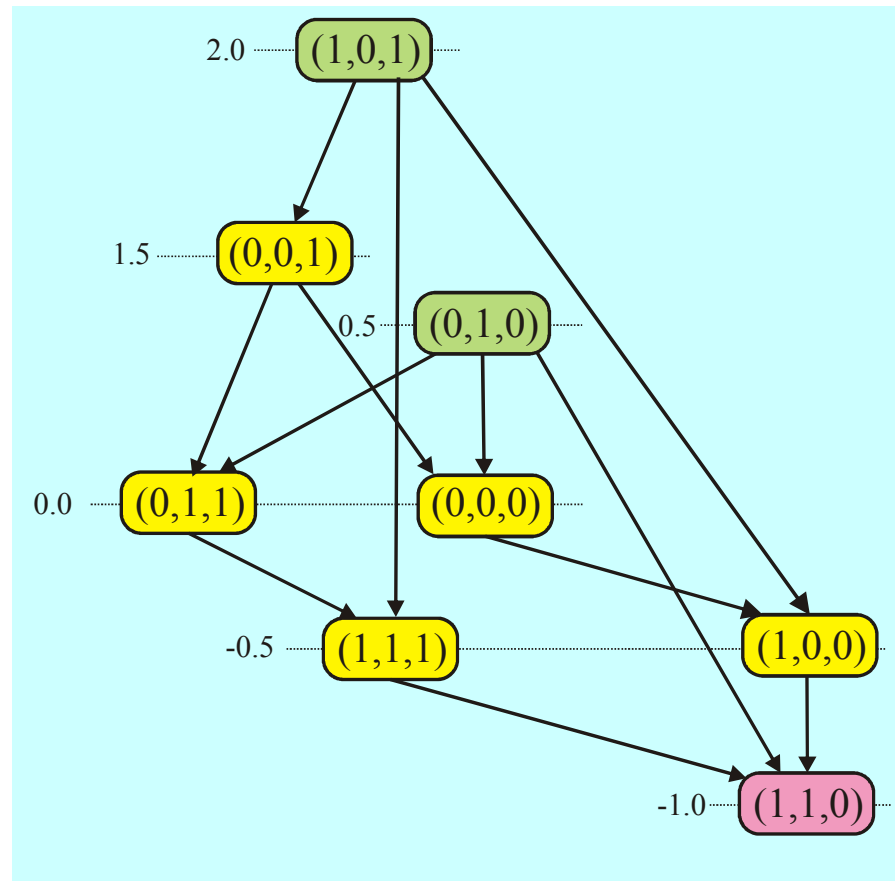
## Ilustračný príklad 1 Hopfieldovej siete



$$W = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \vartheta = (-0.5, 0.5, 1.5)$$

$$E(\mathbf{x}) = -(x_1x_2 - x_1x_3 + 2x_2x_3) + (-0.5x_1 + 0.5x_2 + 1.5x_3)$$

stav.vektor		$E(x)$
$\mathbf{x}_1$	(0,0,0)	0
$\mathbf{x}_2$	(0,0,1)	1.5
$\mathbf{x}_3$	(0,1,0)	0.5
$\mathbf{x}_4$	(0,1,1)	0
$\mathbf{x}_5$	(1,0,0)	-0.5
$\mathbf{x}_6$	(1,0,1)	2.0
$\mathbf{x}_7$	(1,1,0)	-1.0
$\mathbf{x}_8$	(1,1,1)	-0.5

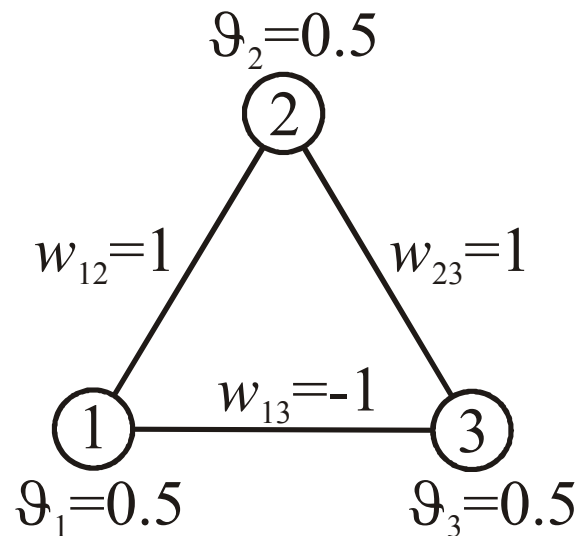


### Vlastnosti:

- Spojené orientovanou čiarou sú len také dva stavy, medzi ktorými je jednotková Hammingova vzdialenosť.

- Stavý môžeme charakterizovať na vstupné (zelené), výstupné (červené) a prechodné (žlté).

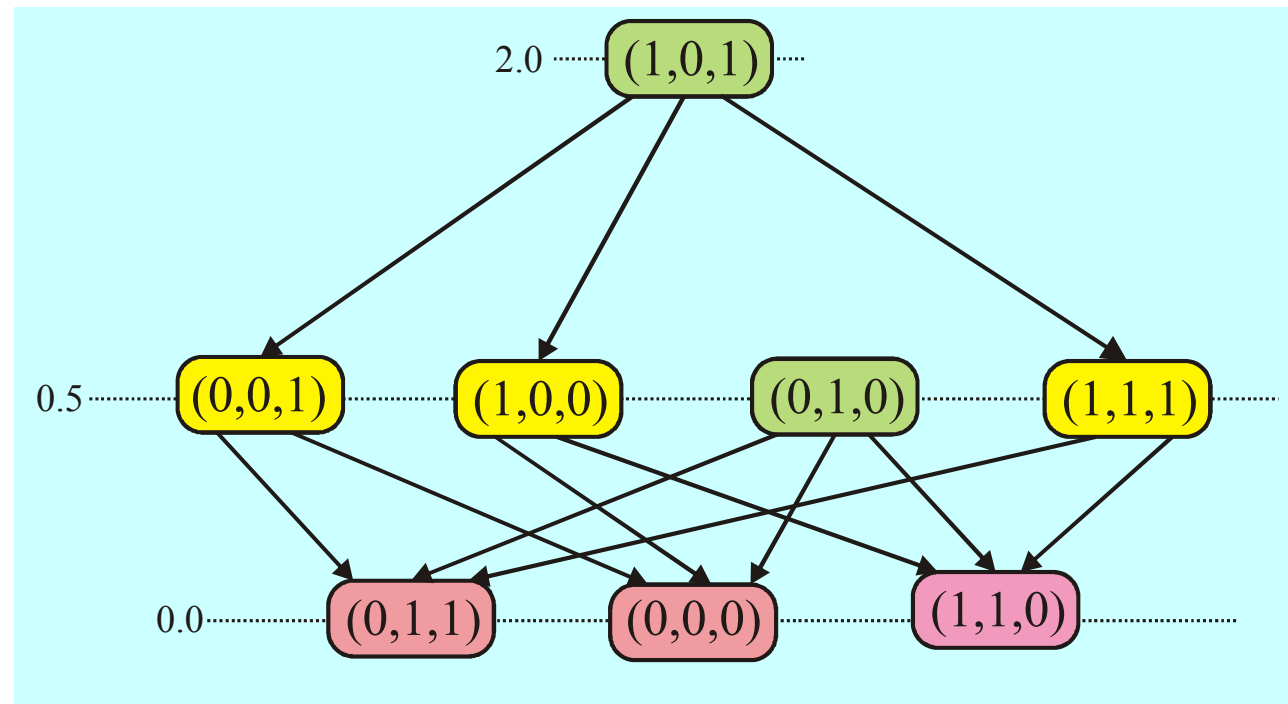
## Ilustračný príklad 2 Hopfieldovej siete



$$W = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \vartheta = (0.5, 0.5, 0.5)$$

$$E(\mathbf{x}) = -(x_1x_2 - x_1x_3 + x_2x_3) + (0.5x_1 + 0.5x_2 + 0.5x_3)$$

stav.vektor		$E(x)$
$\mathbf{x}_1$	(0,0,0)	0
$\mathbf{x}_2$	(0,0,1)	0.5
$\mathbf{x}_3$	(0,1,0)	0.5
$\mathbf{x}_4$	(0,1,1)	0
$\mathbf{x}_5$	(1,0,0)	0.5
$\mathbf{x}_6$	(1,0,1)	2.0
$\mathbf{x}_7$	(1,1,0)	0
$\mathbf{x}_8$	(1,1,1)	0.5



## Dôkaz vety

Nech stav  $\mathbf{x}'$  vznikne zo stavu  $\mathbf{x}$  zmenou aktivity neurónu  $i$

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n)$$
$$\mathbf{x}' = (x_1, x_2, \dots, x'_i = 1 - x_i, \dots, x_n)$$

Pre rozdiel Ljapunových funkcií  $L(\mathbf{x}) - L(\mathbf{x}')$  platí

$$L(\mathbf{x}) = -\frac{1}{2} \sum_{k,l} x_k w_{kl} x_l + \sum_{k=1} x_k \vartheta_k = -\frac{1}{2} \sum_{k,l \neq i} x_k w_{kl} x_l - \sum_{k \neq i} x_k w_{ki} x_i + \sum_{k \neq i} x_k \vartheta_k + x_i \vartheta_i$$
$$L(\mathbf{x}') = -\frac{1}{2} \sum_{k,l \neq i} x_k w_{kl} x_l - \sum_{k \neq i} x_k w_{ki} x'_i + \sum_{k \neq i} x_k \vartheta_k + x'_i \vartheta_i$$

Po jednoduchých úpravách dostaneme

$$L(\mathbf{x}) - L(\mathbf{x}') = (x'_i - x_i) \left( \sum_{k \neq i} w_{ki} x_k - \vartheta_i \right) = (1 - 2x_i^{(t)}) \underbrace{\left( \sum_{k \neq i} w_{ki} x_k^{(t)} - \vartheta_i \right)}_{e_i^{(t)}} = (2x_i^{(t)} - 1) e_i^{(t)}$$

Budeme diskutovať jednotlivé prípade tejto formuly:

(1) Nech  $(x_i = 0) \rightarrow (x'_i = 1)$ , potom

$$\left( (x'_i - x_i) > 0 \right) \quad \text{and} \quad \left( \left( \sum_{k \neq i} w_{ki} x_k - \vartheta_i \right) = e_i > 0 \right)$$

$$(L(\mathbf{x}) - L(\mathbf{x}') > 0) \Rightarrow (L(\mathbf{x}) > L(\mathbf{x}'))$$

(2) Nech  $(x_i = 1) \rightarrow (x'_i = 0)$ , potom

$$\left( (x'_i - x_i) < 0 \right) \quad \text{and} \quad \left( \left( \sum_{k \neq i} w_{ki} x_k - \vartheta_i \right) = e_i < 0 \right)$$

$$(L(\mathbf{x}) - L(\mathbf{x}') > 0) \Rightarrow (L(\mathbf{x}) > L(\mathbf{x}'))$$

Týmto sme dokázali, že každá asynchrónna zmena stavového vektora vedie k znižovaniu Ljapunovej funkcie. Pretože existuje len konečný počet stavov, sieť musí dosiahnuť stav, v ktorom už sa Ljapunova funkcia neznižuje.  $\square$

Asymptoticky stabilné stavy Hopfieldovej siete sú určené podmienkou

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$$

Nech  $\mathbf{x}_1$  je počiatočný stav, potom existuje sekvencia stavov, ktoré končia v asymptoticky stabilnom stave  $\tilde{\mathbf{x}}$

$$\mathbf{x}_2 = f(\mathbf{x}_1), \mathbf{x}_3 = f(\mathbf{x}_2) = f(f(\mathbf{x}_1)) = f^2(\mathbf{x}_1), \dots, \mathbf{x}_n = f(\mathbf{x}_{n-1}) = f^{n-1}(\mathbf{x}_1)$$

$$\forall(\mathbf{x}_1) \exists(n_0) \forall(n \geq n_0) \quad \tilde{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}_n)$$

$$([\mathbf{x}] = \tilde{\mathbf{x}}) =_{def} \left( \tilde{\mathbf{x}} = \lim_{n \rightarrow \infty} f^n(\mathbf{x}) \right)$$

Symbol  $[\mathbf{x}]$  sa rovná finálnemu stacionárnemu stavu  $\tilde{\mathbf{x}}$ , ktorý leží na konci trajektórie s počiatočným stavom  $\mathbf{x}$ .

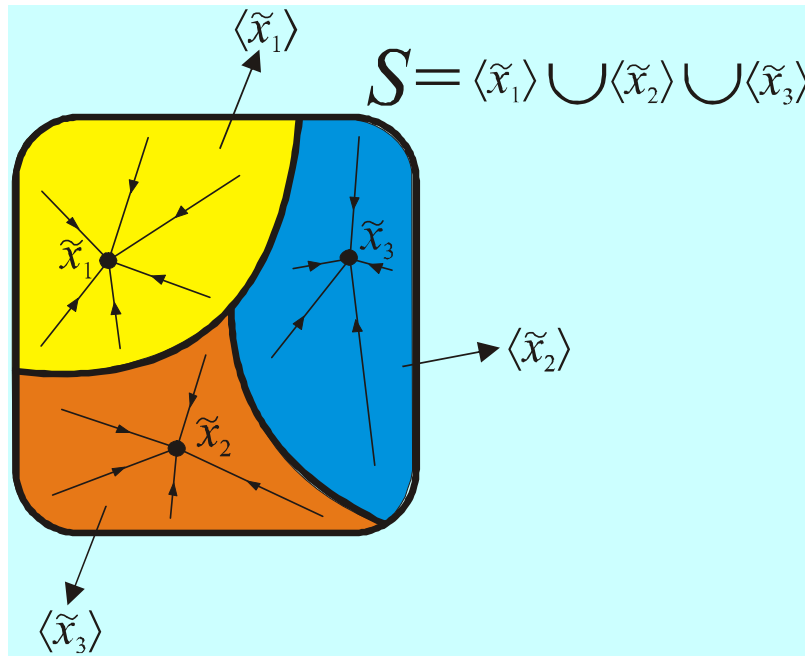
$$\langle \tilde{\mathbf{x}} \rangle = \{ \mathbf{x} \in S; \tilde{\mathbf{x}} = [\mathbf{x}] \} \subseteq S$$

bazén príťažlivosti stabilného stavu  $\tilde{\mathbf{x}}$ .

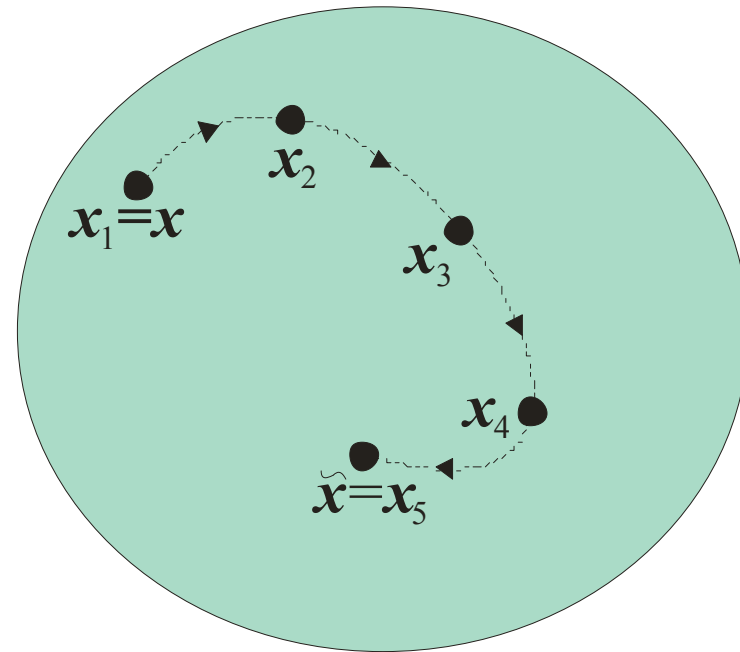
Hovoríme, že dva stavy  $\mathbf{x}$  a  $\mathbf{y}$  sú **ekvivalentné** ak majú rovnaké finálne stabilné stavy

$$(\mathbf{x} \sim \mathbf{y}) =_{def} ([\mathbf{x}] = [\mathbf{y}])$$

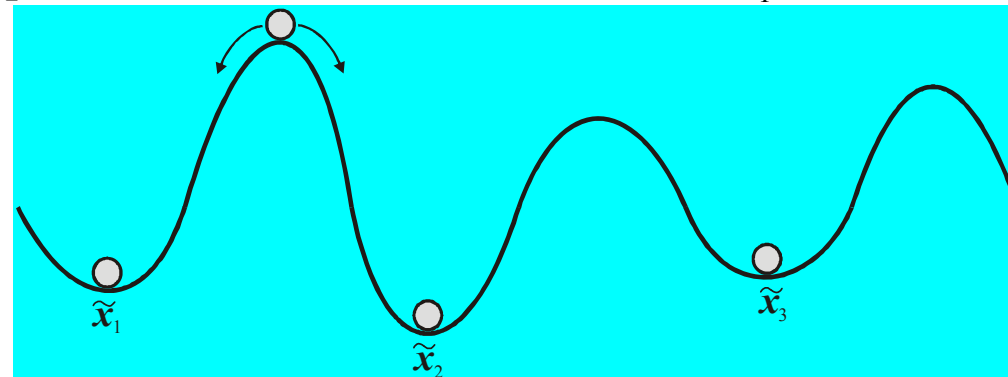




Rozklad množiny stavov na bazény príťažlivosti



Znázornenie trajektórie, ktorá začína v stave  $x_1$  a končí v stabilnom stave  $\tilde{x}$ .



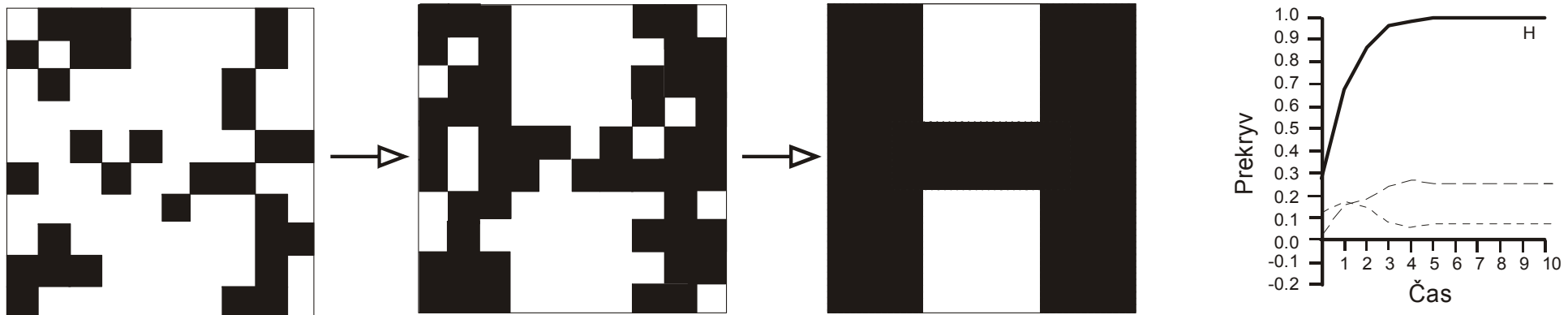
Znázornenie povrchu funkcie energie Hopfieldovej siete

## Učenie Hopfieldovej siete

Hopfieldova sieť môže fungovať ako asociatívna pamäť. Nech  $\{\mathbf{x}_k = (x_1^k, \dots, x_n^k)\}$  je množina obsahujúca  $p$  obrazcov, potom

$$w_{ij} = \begin{cases} 0 & (i = j) \\ \sum_{k=1}^p x_i^k x_j^k & (i \neq j) \end{cases}$$

Potom obvykle minimá energie Hopfieldovej siete sú priradené jednotlivým obrazcom z množiny (existencia fantómových miním)



Ilustrácia činnosti Hopfieldovej autoasociatívnej pamäti. Sieť má 100 neurónov, 5 pamät'ových vzorov (5 písmen) a deterministickú asynchrónnu dynamiku. Na vstupe je poškodené písmeno H, ktoré sieť vďaka svojej dynamike perfektne zrekonštruuje. Graf ilustruje vývoj prekryvov aktuálneho stavu siete s jednotlivými pamät'ovými vzormi. Písmenom H je označená krivka odpovedajúca vývoju prekryvu pre písmeno H, ostatné krivky vyjadrujú vývoj prekryvu s ostatnými vzormi.

## Boltzmannov stroj

Boltzmannov stroj je špeciálny prípad Hopfieldovej siete s asynchrónnym obnovovaním aktivít. Stav  $i$ -teho neurónu je určený podľa pravidla

$$x_i^{(t+1)} = \begin{cases} 1 & \text{s pravdepodobnosťou } p_i \\ 0 & \text{s pravdepodobnosťou } 1 - p_i \end{cases}$$

kde pravdepodobnosť  $p_i$  je

$$p_i = \frac{1}{1 + \exp\left(-\frac{\sum_{j=1}^n w_{ij} x_j^{(t)} - \vartheta_i}{T}\right)}$$

$T$  je kladný parameter nazývaný „teplota“.

## Asynchrónne obnovovanie aktivít

```
(1)  $t := 0$   
(2) while  $t \leq t_{max}$  do  
(3) begin  $i := 1 + \text{random}(n)$  {index  $i$  je náhodne generovaný}  
(4)  $p_i := \frac{1}{1 + \exp\left(-\frac{\sum_{j=1}^n w_{ij} x_j^{(t)} - \vartheta_i}{T}\right)}$   
(5)  $x_i^{(t+1)} := \begin{cases} 1 & \left(\sum_{j=1}^n w_{ij} x_j^{(t)} - \vartheta_i \geq 0\right) \wedge (\text{random} < p_i) \\ 0 & \left(\sum_{j=1}^n w_{ij} x_j^{(t)} - \vartheta_i < 0\right) \wedge (\text{random} < 1 - p_i) \\ x_i^{(t)} & \end{cases}$   
(6)  $t := t + 1$   
(7) end
```

# 1. príklad – hľadanie binárneho vektora

Nech  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \{0,1\}^n$  je binárny vektor, ktorého tvar bude zakódovaný v Hopfieldovej sieti, našou úlohou bude nájsť tento binárny vektor

**Poznámka:** Najzložitejšia verzia tejto úlohy je taká, že vektor  $\alpha$  je známy len *orákulu*, ktorému môžeme posielat' dotazy, či daný binárny vektor  $\mathbf{x}$  je totožný s  $\alpha$ , dostávame len odpoveď áno/nie. Takto formulovaná úloha je *neriešiteľná* aj pre evolučné algoritmy.

Definujme Ljapunovovú funkciu takto

$$L(\mathbf{x}) = \left( \sum_{i=1}^n x_i - p \right)^2 + \sum_{i=1}^n (x_i - \alpha_i)^2$$

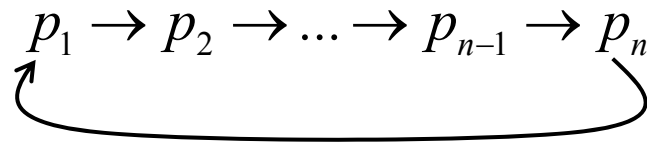
ktorú po jednoduchých úpravách prepíšeme do tvaru

$$L(\mathbf{x}) = -\frac{1}{2} \sum_{i \neq j} w_{ij} x_i x_j + \sum_i \vartheta_i x_i$$

kde  $w_{ij} = -2$  a  $\vartheta_i = 2(1 - p - \alpha_i)$ , parameter  $p = |\alpha|$  špecifikuje počet '1' v  $\alpha$ .

## 2. príklad – riešenie úlohy obchodného cestujúceho (TSP)

Nech  $G$  je úplný neorientovaný graf obsahujúci  $n$  vrcholov, pričom pre každú dvojicu vrcholov  $v_i$  a  $v_j$  poznáme „vzdialenosť“  $d_{ij}$  medzi nimi. Úloha obchodného cestujúceho spočíva v tom, že hľadáme uzavretú hamiltonovskú cestu na grafe  $G$ , ktorá má minimálnu vzdialenosť. Nech  $P = (p_1, p_2, \dots, p_n)$  je permutácia  $n$  objektov, ktorá nám špecifikuje uzavretú hamiltonovskú cestu na grafe



Túto schému môžeme interpretovať tak, že cesta je zahájená vo vrchole – meste  $p_1$ , z ktorého ide do  $p_2$ , potom pokračuje do  $p_3$ , atď., z posledného mesta  $p_n$  sa vracia do východiskového  $p_1$ . Dĺžka tejto cesty  $P$  je

$$F(P) = d_{p_1, p_2} + d_{p_2, p_3} + \dots + d_{p_{n-1}, p_n} + d_{p_n, p_1} = \sum_{k=1}^n d_{p_k, p_{k+1}}$$

Úloha TSP spočíva v tom, že hľadáme optimálnu cestu – permutáciu  $P$ , ktorá minimalizuje dĺžku cesty

$$P_{opt} = \arg \min_{P \in S_n} F(P)$$

K tomu, aby sme preformulovali úlohu TSP pre Hopfieldovu sieť, permutácia  $P$  bude reprezentovaná permutačnou binárnou maticou  $\mathbf{P} = (P_{ij})$ , ktorá v každom stĺpci a v každom riadku obsahuje práve jeden '1' element. Túto podmienku vyjadríme pomocou účelovej funkcie

$$G(\mathbf{P}) = \sum_i \left( \sum_j P_{ij} - 1 \right)^2 + \sum_j \left( \sum_i P_{ij} - 1 \right)^2$$

Podobným spôsobom môžeme prepísať aj funkciu vzdialenosti  $F(P)$  pre permutačnú maticu

$$F(\mathbf{P}) = \sum_{i,j=1}^n \left( \sum_{k=1}^{n-1} d_{ij} P_{i,k} P_{j,k+1} + d_{ij} P_{i,n} P_{1,1} \right) = \sum_{i,j,k=1}^n d_{ij} P_{i,k} P_{j,k+1}$$



Ljapunovova funkcia má potom tvar

$$L(\mathbf{P}) = F(\mathbf{P}) + \gamma G(\mathbf{P})$$

ktorá po jednoduchých úpravách môže byť prepísaná do tvaru

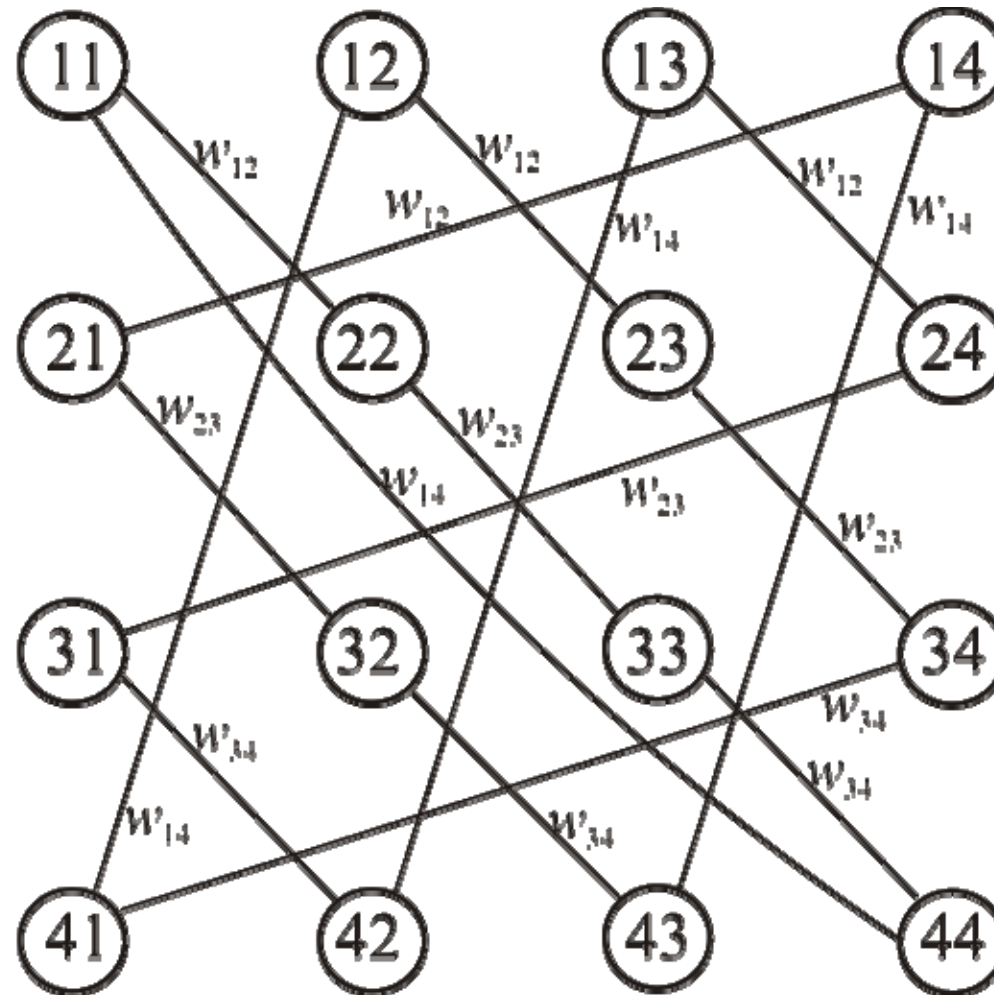
$$L(\mathbf{P}) = -\frac{1}{2} \sum_{ijk} (-2d_{ij} p_{i,k} p_{j,k+1}) + \gamma \left( \left( \sum_{jj'} \sum_i p_{ij} p_{ij'} - 2 \sum_{ij} p_{ij} + 1 \right) \left( \sum_{ii'} \sum_j p_{ij} p_{ij'} - 2 \sum_{ij} p_{ij} + 1 \right) \right)$$

Riadky a stĺpce permutačnej matice sú ortogonálne, čo vedie k zjednodušeniu Ljapunovovej funkcie

$$L(\mathbf{P}) = -\frac{1}{2} \sum_{ijk} (w_{ij} p_{i,k} p_{j,k+1})$$

kde sme zanedbali konštantné členy.

# Hopfieldova sieť pre riešenie TSP s $n = 4$



# Hopfieldova sieť a výroková logika

## Špecifikácia penalizačnej výrokovej logiky

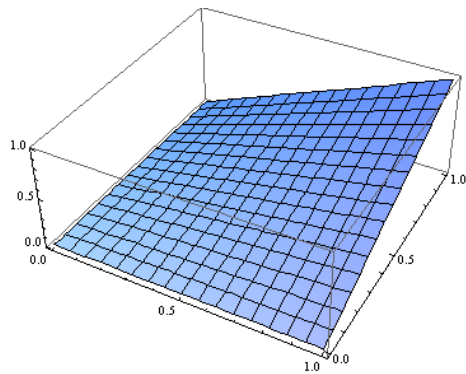
$\Omega = \{p, q, \dots, u\}$  je množina (atomických) výrokových premenných,  $|\Omega| = p$ .

$\Phi = \{(\varphi_i, p_i); i = 1, 2, \dots, a\}$  teória zostrojená nad  $\Omega$ , obsahuje dvojice  $(\varphi_i, p_i)$ , kde  $\varphi_i$  je výroková formula nad  $\Omega$  a  $p_i$  je kladná penalizačná konštanta.

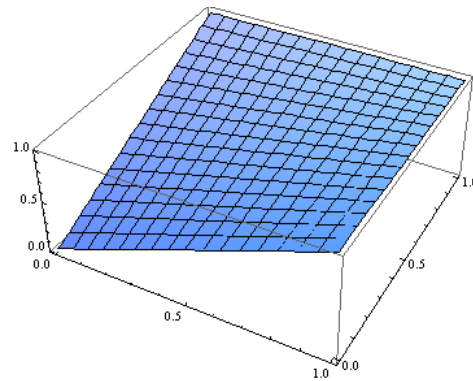
$\mathcal{I} = \{\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_b\}$  je množina interpretácií formúl z teórie  $\Phi$ , interpretácia  $\tau \in \{0, 1\}^p$  špecifikuje pravdivostné hodnoty výrokových premenných z množiny  $\Omega$ ; nech  $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_i, \dots, \tau_p)$ , potom pravdivostná hodnota  $i$ -tej premennej z  $\Omega$  je určená veličinou  $\tau_i \in \{0, 1\}$ . Sumárna penalizácia formúl z teórie  $\Phi$  pre danú interpretáciu  $\tau \in \mathcal{I}$  má tvar

$$E(\tau) = \sum_{i=1}^a (1 - \text{val}_{\tau}(\varphi_i)) p_i$$

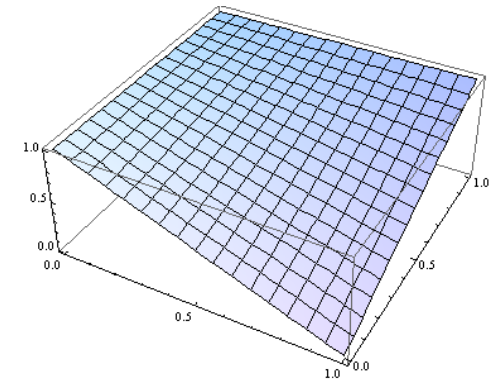
# Interpretácia logických spojok výrokovej logiky



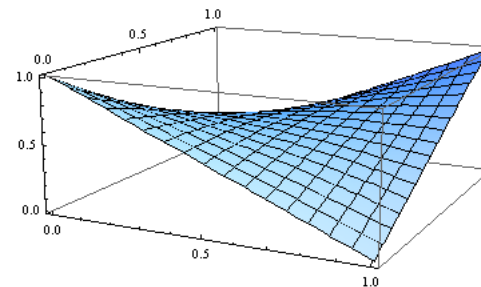
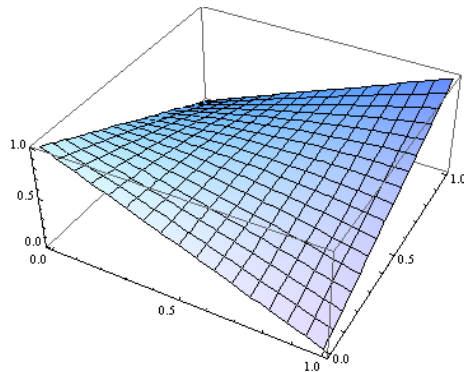
$$p \wedge q = p \cdot q$$



$$p \vee q = p + q - p \cdot q$$



$$p \Rightarrow q = 1 - p + p \cdot q$$



$$p \equiv q = (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p) = 1 - p - q + p \cdot q(3 - p - q + pq)$$

## Poznámka

V prípade, že množina  $\mathcal{I} = \{\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_b\}$  tvorí model teórie  $\Phi = \{(\varphi_i, p_i)\}$ , potom sumárna penalizácia  $E(\tau)$ , pre každé  $\tau \in \mathcal{I}$ , je nulová. V penalizačnej výrokovej logike sa môže predpokladať, že teória nie je konzistentná, prípadne nekonzistentnosti sú penalizované. Optimálna interpretácia pre nekonzistentnú teóriu je špecifikovaná ako riešenie minimalizačného problému

$$\tau_{opt} = \arg \min_{\tau} E(\tau)$$

Tento optimalizačný problém sa bude riešiť pomocou Hopfieldovej neurónovej siete kombinovanej so simulovaným žíhaním (Boltzmannovým strojom)

## Príklad 1

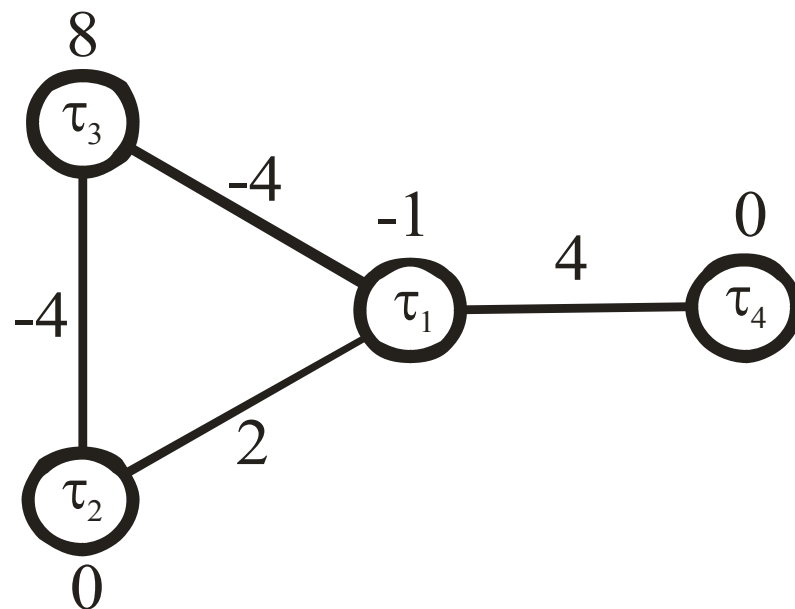
Teória  $\Phi$  je definovaná takto:

#	$\varphi$	$p$
1	$m$	1
2	$s \Rightarrow \neg m$	2
3	$c \Rightarrow s$	4
4	$c \Rightarrow m$	4
5	$v \Rightarrow \neg m$	4

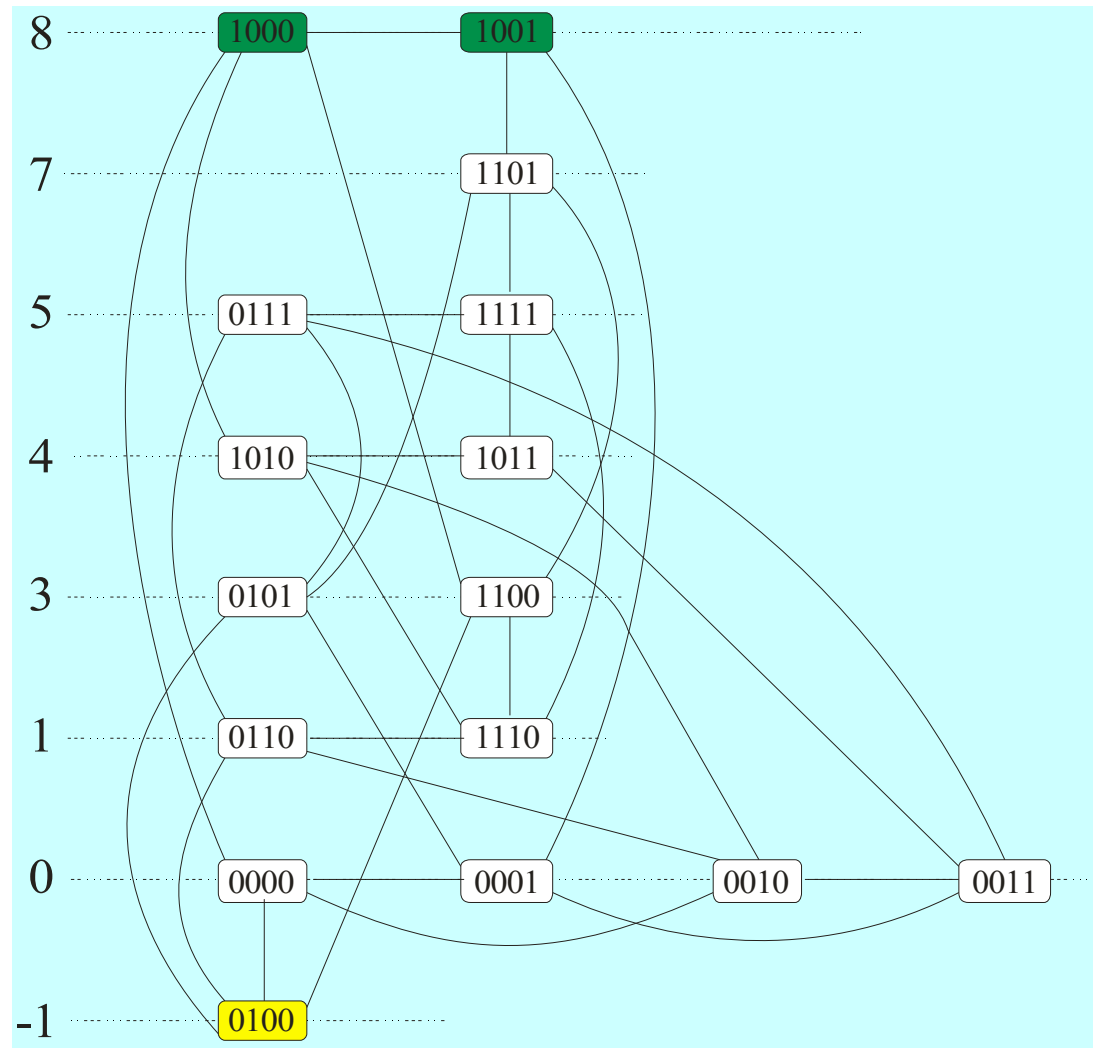
Množina  $\Omega$  obsahuje 4 výrokové premenné,  $\{m, s, c, v\}$ , potom interpretácia  $\tau$  obsahuje 4 komponenty, ktoré špecifikujú pravdivostné hodnoty premenných z množiny  $\Omega$ ,  $\tau = (m/\tau_1, s/\tau_2, c/\tau_3, v/\tau_4) \in \{0, 1\}^4$ .

## Funkcia energie má tvar

$$\begin{aligned} E(\boldsymbol{\tau}) &= \text{val}_{\boldsymbol{\tau}}(\neg m) + 2\text{val}_{\boldsymbol{\tau}}(s \wedge m) + 4\text{val}_{\boldsymbol{\tau}}(c \wedge \neg s) + 4\text{val}_{\boldsymbol{\tau}}(c \wedge \neg m) + 4\text{val}_{\boldsymbol{\tau}}(v \wedge m) \\ &= (1 - \tau_1) + 2\tau_1\tau_2 + 4\tau_3(1 - \tau_2) + 4\tau_3(1 - \tau_1) + 4\tau_4\tau_1 \\ &= \cancel{1} - \tau_1 + 8\tau_3 + 2\tau_1\tau_2 - 4\tau_1\tau_3 + 4\tau_1\tau_4 - 4\tau_2\tau_3 \end{aligned}$$



# Stavový diagram Hopfieldovej siete riešenia problému penalizačnej logiky

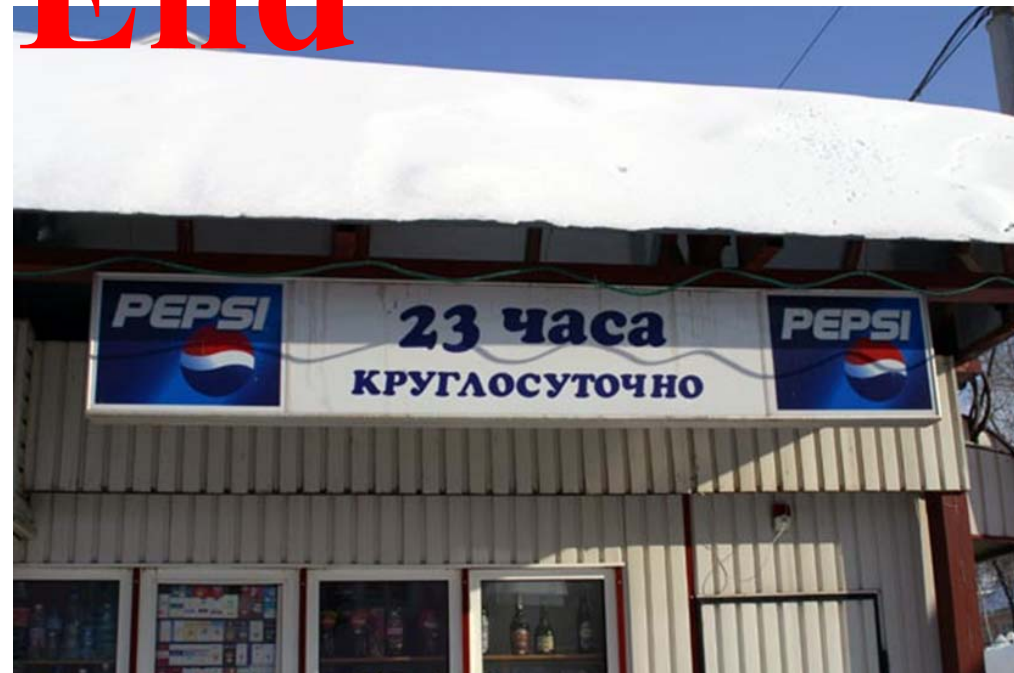




# The End



Umiestnenie bankomatu



Nepretržite otvorené 23 hodín

“Умом Россию не понять...”