

8. prednáška

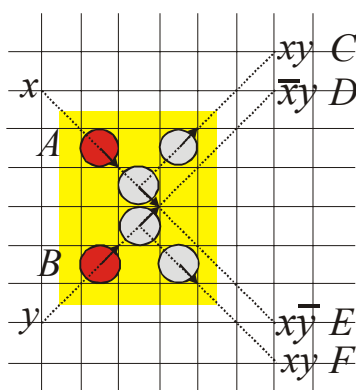
Kvantové počítanie II – výpočty pomocou biliardových gúľ, model celulárnych automatov

8.1 Klasický model reverzibilného výpočtu pomocou biliardových gúľ

Ilustračný model výpočtu pomocou biliardových gúľ, ktorý bol navrhnutý Fredkinom a Toffolim, je názorným príkladom „gedanken“ experimentu, ktorý vo vede zohral a zohráva dôležitú úlohu. V súvislosti s kvantovým počítaním pripomeňme slávnu publikáciu Alberta Eisteina, Borisa Podolského a Nathana Rosena z r. 1935, ktorá sa zaoberala „gedanken“ experimentu s *entaglovanými* časticami a ktorá zohrala veľkú úlohu pri precizovaní pojmového aparátu kvantovej mechaniky a jej interpretácie pre potreby kvantového počítania.

Model počítania pomocou biliardových gúľ je založený na fyzikálnych zákonoch pružného rázu. Predpokladá sa, že pre vhodnú počiatočnú konfiguráciu gúľ, ktorých poloha evoluje v čase podľa známych fyzikálnych zákonitostí dokonalého rázu, uskutočňuje sa špecifický výpočet (prinajmenšom môžeme povedať, že systém počíta svoje budúce stavy).

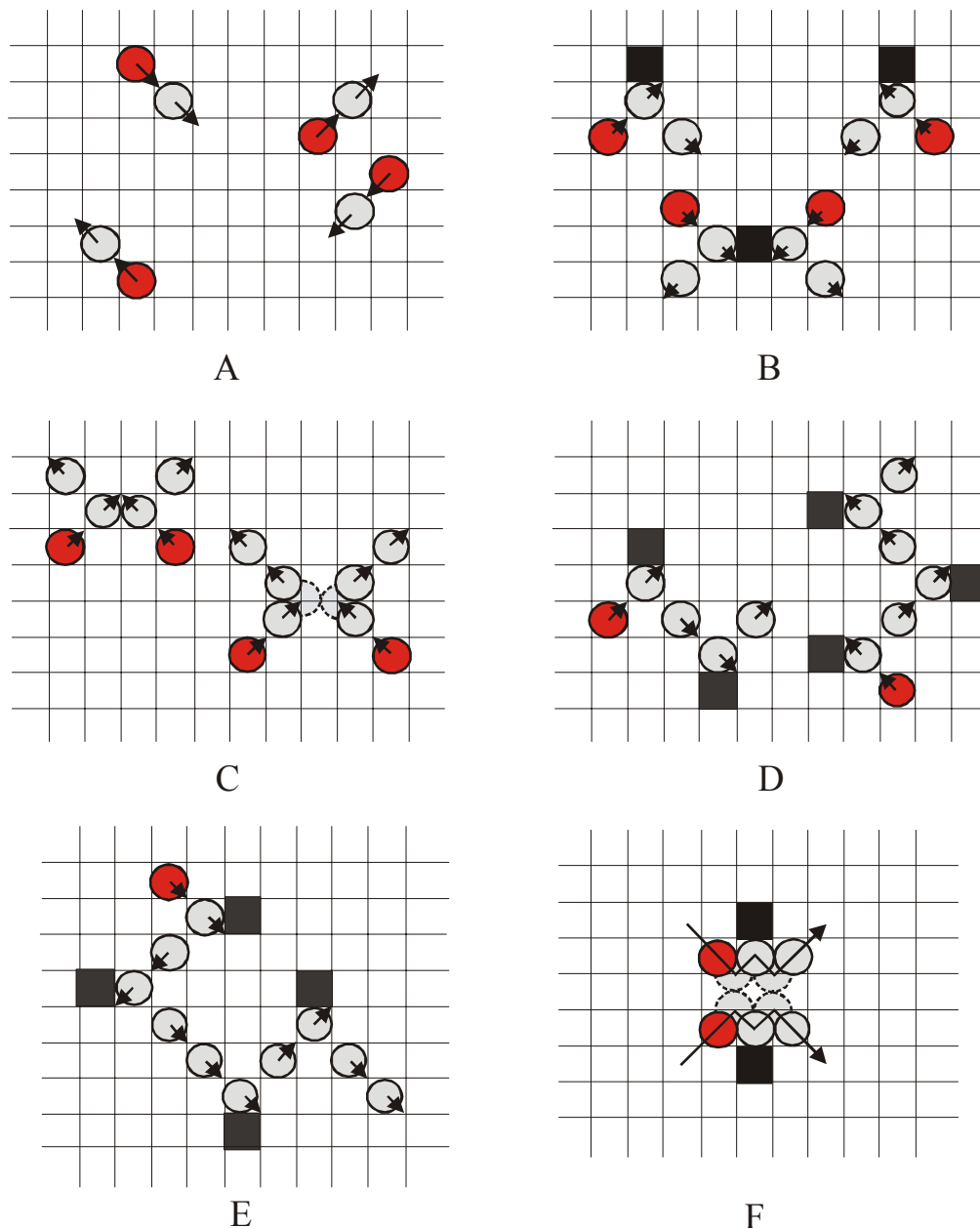
Interakčná brána (obr. 7.14 je v tomto prístupe modelovaná pomocou elementárneho aktu interakcie-zrážky dvoch biliardových gúľ, pozri obr. 8.1. Tento experiment môže byť jednoducho špecifikovaný pomocou dvojice Boolových premenných x a y , ich pravdivostná hodnota určuje či vo východiskovom postavení v pozíciách existujú červené biliardové gule s vhodnými hybnosťami v polohách A resp. B. Ak sú obe premenné pravdivé, potom na výstupe obe gule sa v určitom následnom čase $t = 3$ nachádzajú v polohách C a F. Ak $x = 1$ a $y = 0$ v čase $t = 1$ (guľa B neexistuje), potom výsledná pozícia v čase $t = 3$ je E (t. j. guľa z A sa pohybuje priamočiaro, nezúčastnila sa aktu pružnej zrážky s druhou guľou).



Obrázok 8.1. Dokonalá elastická zrážka dvoch biliardových gúľ simuluje interakčnú bránu znázornenú na obr. 7.14. Binárne premenné x a y špecifikujú, či v čase $t = 1$ sa v daných východiskových polohách nachádza prvá resp. druhá guľa. K elementárnemu aktu zrážky dochádza v čase $t = 2$. Výsledné polohy v čase $t = 3$ sú špecifikované súčinnými binárnymi premennými $xy, \bar{x}y, x\bar{y}, xz$.

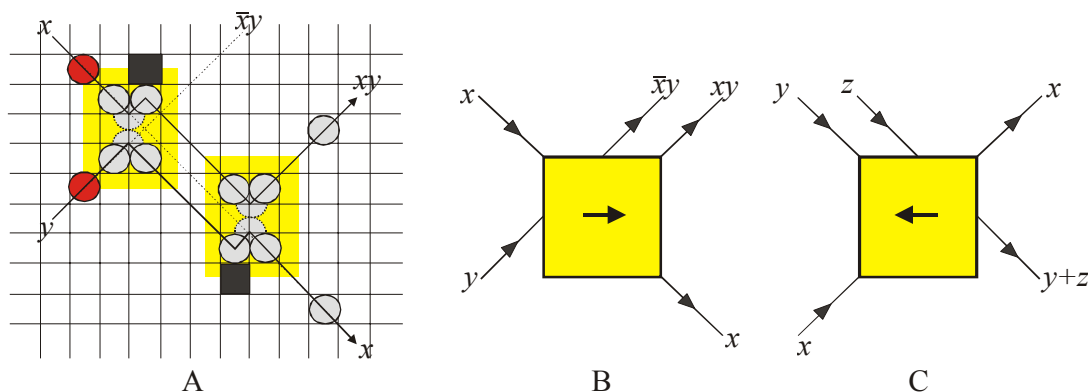
Jednotlivé elementárne situácie, ktoré sa môžu vyskytovať pri modelovaní výpočtu pomocou biliardových gúľ sú znázornené na obr. 8.2. Vhodnou kombináciou týchto

elementárnych situácií môžeme vytvárať zložité výpočtové zariadenia, ktoré simulujú Boolové funkcie. Pretože dá sa ukázať, že Fredkinova brána je univerzálne výpočtové zariadenie, ktoré je, ako bude ukázané neskoršie, simulovateľné pomocou biliardových gúl, môžeme konštatovať, že tento prístup k výpočtom je ekvivalentný s Turingovým strojom.



Obrázok 8.2. Prostredie v ktorom sa pohybujú biliardové gule je reprezentované ortogonálnou mriežkou, gule sa môžu pohybovať len po diagonálach ortogonálnej oblasti. Čase t sa guľa nachádza v danej štvorcovej oblasti, prechod gule pri zmene času $t \rightarrow t+1$ sa deje tak, že obsadí voľné štvorcové mieste, ktoré je susedné po „diagonále“ s pôvodným miestom. Gule vo východnej pozícii sú označené červenou farbou. Niektoré oblasti prostredia sú permanentne obsadené „prekážkami“, ktoré sú reprezentované čiernou farbou a ktoré slúžia ako „reflektor“ pre odraz. Počiatočná poloha gule je znázornená červenou farbou, smer pohybu gule je špecifikovaný malou šipkou, zmena pohybu gule (pri odraze) je reprezentovaná zmenou orientácie šipky. Šesť základných foriem pohybu biliardových gúl: (A) priamočiary pohyb, guľa neinteraguje so svojim okolím, (B) odraz od reflektora (prekážky), guľa v dôsledku odrazu mení smer svojej dráhy, (C) pružný náraz dvoch gúl, (D) posun dráhy gule o dve jednotky v dôsledku dvojnásobného odrazu od reflektora, (E) pozdržanie gule v dôsledku štyroch odrazov od reflektorov a (F) kríženie dvoch dráh v dôsledku dvoch pružných zrážok a dvoch odrazov od reflektorov (efektívne pôsobí ako vzájomná výmena gúl).

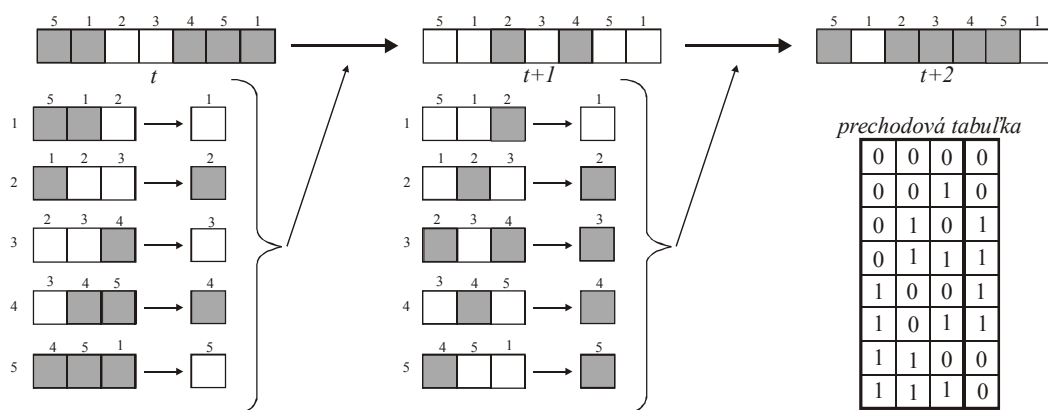
Implementácia elementárnej prepínanej brány pomocou biliardových gúľ je znázornená na obr. 8.3. Táto elementárna brána môže slúžiť ako „stavebný element“ pre konštrukciu Fredkinovej brány (pozri obr. 7.16). Pretože Fredkinova brána má univerzálny charakter (pomocou nej môžu byť definované elementárne binárne operácie Boolovej algebry), potom môžeme konštatovať, že ľubovoľná Boolova funkcia je vypočítateľná pomocou implementácie založenej na biliardových guliach, čím sa dostávame k náznaču dôkazu ekvivalentnosti s Turingovým strojom.



Obrázok 8.3. Diagram A znázorňuje prepínanú bránu implementovanú pomocou výpočtového modelu biliardových gúľ, vľavo sú umiestnené dve gule v počiatočnej polohe, ktoré sú špecifikované Boolovými premennými x a y . Vpravo na priamkach modelu sú umiestnené výstupné biliardové gule, ktoré reprezentujú výsledok výpočtu tejto elementárnej brány. Pretože prepínaná brána je reverzibilná, jednoduchou reorientáciou dráh dostaneme inverznú bránu znázornenú na diagrame B.

8.2. Celulárne automaty

Svet celulárneho automatu je realizovaný pomocou ortogonálnej štvorcovej mriežky obsahujúcej malé a pravidelne sa opakujúce oblasti - buňky. Každá bunka je v jednom z dvoch stavov $\{0,1\}$; ak je v nulovom (jednotkovom) stave, potom táto oblasť je vyfarbená bielou (čiernou) farbou, pozri obr. 8.4.



Obrázok 8.4. Jednoduchý 1-rozmerný celulárny automat obsahujúci 5 buniek vedľa seba, ktoré sú usporiadané do kružnice tak, že prvá a piata bunka sú susedné. Zmeny stavov sú špecifikované prechodovou tabuľkou, ktorá obsahuje 2^3 riadkov. Každý riadok tejto tabuľky popisuje zmenu vybranej bunky, ktorej stav (binárne hodnoty ľavej bunky, strednej – t. j. danej bunky, pravej bunky) tvorí argument prechodovej funkcie, výsledná binárna hodnota popisuje špecifikuje výsledný stav danej bunky. Tento proces je znázornený v prvom riadku obrázku, kde celulárny automat v čase t je zmenený na stav v čase $t+1$, ktorý je ďalšom kroku zmenený na stav v čase $t+2$.

Nech $x_i^{(t)} \in \{0,1\}$ reprezentuje stav i -tej bunky v čase t , potom jej stav v nasledujúcom čase je určený pomocou prechodovej funkcie $f: \{0,1\}^k \rightarrow \{0,1\}$, ktorá okoliu i -tej bunke a jej najbližšiemu okoliu priradí nový stav

$$x_i^{(t+1)} = f(\Gamma_i^{(t)})$$

Pre 1-rozmerný celulárny automat z obr. 8.4 prvých niekoľko aplikácií tejto formuly má tvar

$$x_1^{(t+1)} = f\left(\underbrace{x_5^{(t)}, x_1^{(t)}, x_2^{(t)}}_{\Gamma_1^{(t)}}\right) = f(1,1,0)$$

$$x_2^{(t+1)} = f\left(\underbrace{x_1^{(t)}, x_2^{(t)}, x_3^{(t)}}_{\Gamma_2^{(t)}}\right) = f(1,0,0)$$

.....

$$x_5^{(t+1)} = f\left(\underbrace{x_4^{(t)}, x_5^{(t)}, x_1^{(t)}}_{\Gamma_5^{(t)}}\right) = f(1,1,1)$$

Takto formulovaný celulárny automat môže byť jednoducho zovšeobecnený na viacrozmerný celulárny automat, kde bunky majú svojich susedov v 2- alebo viac-rozmernom priestore. Najznámejšie celulárne automaty sú 2-rozmerné, ktoré sa stali v informatike populárnymi vďaka hre „Život“. V tejto hre pre každú bunku platia tieto jednoduché pravidlá:

- (1) ak čierna bunka má dvoch alebo troch čiernych susedov, potom zostáva čierna,
- (2) ak biela bunka má troch čiernych susedov, potom sa zmení na čiernu bunku a
- (3) ak čierna bunka má jedného alebo štyroch čiernych susedov, potom sa zmení na bielu bunku,
- (4) ak biela bunka má jedného, dvoch alebo štyroch, potom si zachováva bielu farbu.

Aj napriek skutočnosti, že tieto pravidlá pre obnovu buniek v hre „Život“ sú extrémne jednoduché, v priebehu hry vzniká obrovská rôznorodosť, ktorá sa pohybuje na hrane medzi náhodnosťou a poriadkom. Jedna z najzaujímavejších črt tejto hry je výskyt „klzákov“, čo sú špeciálne obrazce čiernych buniek, ktoré sa dokážu pohybovať po diagonálach mriežky celulárneho automatu. Celulárny automat je možné usporiadať tak, že pomocou vzájomnej interakcie medzi klzákami dochádza k výpočtom. Táto skutočnosť viedla k formulácii dôležitej vlastnosti hry „Život“, že môže emulovať univerzálny Turingov počítač.

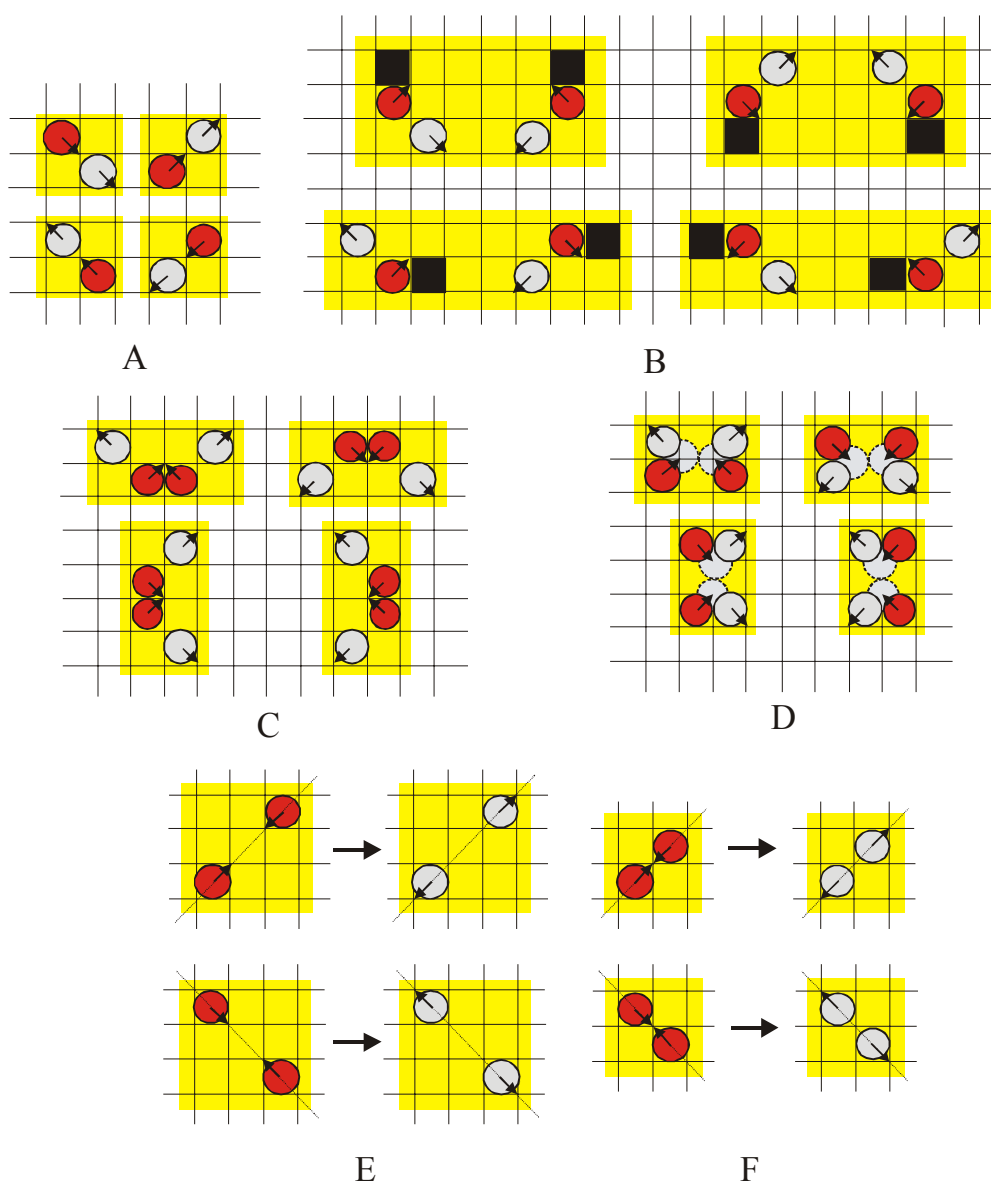
8.2.1 Biliardové gule a celulárne automaty

Svet celulárneho automatu biliardových gúľ je realizovaný pomocou 2-rozmernej ortogonálnej mriežky pravidelných štvorcových buniek. Stav buniek je v tomto prípade o trochu zložitejší ako v štandardných celulárnych automatoch, kde sa obvykle rozlišujú len dva stavy (biely a čierny):

1. stav – bunka je neobsadená,
2. stav – bunka je obsadená guľou, pričom pohyb gule je určený jedným zo štyroch možných smerov (smer severozápadný ↖, severovýchodný ↗, juhozápadný ↙ a juhovýchodný ↘)

3. stav – bunka je obsadená pevnou čiernou kockou, ktorá je fixná pre celú evolúciu automatu a ktorá slúži ako „reflektor“ pre pohyb gúľ.

Stav celulárneho automatu v čase t je daný polohou a smerom pohybu gúľ a polohou prekážok – reflektorov. Pomocou aktuálneho stavu v čase t môžeme zostrojiť pomocou elementárnych pravidiel z obr. 8.5 stav automatu v nasledujúcom čase okamžiku $t+1$. Tak napr. na obr. 8.3 je znázornený biliardový celulárny automat, ktorý v čase t obsahuje dve gule (červenej farby), ktoré použitím elementárnych pravidiel z obrázku 8.5 sa pretransformujú (evolujú) do koncového stavu reprezentovaného dvoma tmavými guľami umiestnenými na obrázku vpravo.



Obrázok 8.5. Rôzne elementárne možnosti pohybu gúľ v celulárnom automате simulujúcom pohyb biliardových gúľ. (A) Diagram znázorňuje najjednoduchšie štyri možnosti pohybu gúľ, ktoré neinteragujú s prostredím a ktorých smer pohybu je určený počiatočným stavom. V prípade, že v priebehu mnohých časových krokov guľa neinteraguje, potom sa pohybuje po diagonálach automatu a nemení svoj smer. (B) Osem rôznych prípadov, keď guľa narazí na fixnú prekážku, potom v nasledujúcom časovom okamžiku, okrem toho, že zmení polohu, zmení aj smer pohybu. (C a D) Interakcia dvoch gúľ pomocou „bočnej“ zrážky. (E a F) Interakcia dvoch gúľ pomocou čelnej zrážky. Poznamenajme, že všetky elementárne pravidlá sú reverzibilné.

Na obrázkoch 8.1 a 8.3 sú znázornené „biliardové“ implementácie interakčnej brány resp. prepínanej brány. Na obr. 7.17 je znázornená konštrukcia Fredkinovej bráni pomocou dvoch priamych prepínaných brán a dvoch inverzných brán (pozri taktiež diagramy B a C obr. 8.3).