

9. prednáška

Kvantové počítanie III – kvantové brány,

9.1 Kvantové brány

9.1.1 1-qubitové brány

Budeme študovať päť jednoduchých 1-qubitových brán, ktoré sú reprezentované unitárnymi maticami $\{I, X, Y, Z, H\}$ v ortonormálnej báze $\{|0\rangle, |1\rangle\}$.

(1) Operátor identity

$$\begin{aligned} I|0\rangle &= |0\rangle \\ I|1\rangle &= |1\rangle \end{aligned}$$

Maticová reprezentácia operátora I má tvar

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (9.1)$$

(2) Operátor negácie

$$\begin{aligned} X|0\rangle &= |1\rangle \\ X|1\rangle &= |0\rangle \end{aligned}$$

Maticová reprezentácia operátora negácie je

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (9.2)$$

(3) Operátor fázového posunu

$$\begin{aligned} Y|0\rangle &= -|1\rangle \\ Y|1\rangle &= |0\rangle \end{aligned}$$

Maticová reprezentácia operátora Y je

$$Y = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (9.3)$$

(4) Operátor zmeny znamienka

$$\begin{aligned} Z|0\rangle &= |0\rangle \\ Z|1\rangle &= -|1\rangle \end{aligned}$$

Maticová reprezentácia operátora Z je

$$Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (9.4)$$

Túto transformáciu môžeme vyjadriť ako súčin $Z = XY$.

(5) *Hadamardov operátor*

$$H|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$$

$$H|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)$$

Jeho maticová reprezentácia je

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad (9.5)$$

Tento 1-qubitový operátor pomocou tenzorového súčinu môžeme aplikovať na stav $|000\dots 0\rangle = |0\rangle \otimes |0\rangle \otimes \dots \otimes |0\rangle$, potom

$$\begin{aligned} |\psi\rangle &= (H|0\rangle) \otimes (H|0\rangle) \otimes \dots \otimes (H|0\rangle) = (H \otimes H \otimes \dots \otimes H)|00\dots 0\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{2^n}} (|0\rangle + |1\rangle) \otimes (|0\rangle + |1\rangle) \otimes \dots \otimes (|0\rangle + |1\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{x=0}^{2^n-1} |x\rangle \end{aligned} \quad (9.6)$$

kde x je celé číslo priradené bitovému reťazcu dĺžky n .

9.1.2 Brána 2-qubitová riadenej negácie

Táto brána v klasickej reverzibilnej forme bola študovaná v kapitole 7.2.2. V kvantovej podobe je reprezentovaná unitárnym operátorom C_{not} , ktorý pôsobí na 2-qubitové stavové vektory

$$C_{not}|xy\rangle = \begin{cases} |x\bar{y}\rangle & (\text{pre } x = 1) \\ |xy\rangle & (\text{pre } x = 0) \end{cases} \quad (9.7a)$$

alternatívne

$$C_{not}|xy\rangle = |x, (x \wedge \bar{y}) \vee (\bar{x} \wedge y)\rangle = |x, x \oplus y\rangle \quad (9.7b)$$

alebo v rozpísanom tvare

$$\begin{aligned} C_{not}|00\rangle &= |00\rangle, C_{not}|01\rangle = |01\rangle \\ C_{not}|10\rangle &= |11\rangle, C_{not}|11\rangle = |10\rangle \end{aligned} \quad (9.8)$$

Pomocou dyadických súčinov môžeme operátor C_{not} vyjadriť takto

$$\begin{aligned} C_{not} &= |00\rangle\langle 00| + |01\rangle\langle 01| + |10\rangle\langle 11| + |11\rangle\langle 10| \\ &= |0\rangle\langle 0| \otimes (|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|) + |1\rangle\langle 1| \otimes (|0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0|) \\ &= |0\rangle\langle 0| \otimes I + |1\rangle\langle 1| \otimes X \end{aligned} \quad (9.9)$$

kde operátory I a X majú maticovú reprezentáciu v báze $\tilde{\mathcal{B}} = \{|0\rangle, |1\rangle\}$ (9.1) a (9.2). Pravú stranu (9.9) môžeme zovšeobecniť do tvaru

$$A = |0\rangle\langle 0| \otimes I + |1\rangle\langle 1| \otimes U \quad (9.10)$$

kde U je 1-qubitový unitárny operátor, ktorý je interpretovaný ako nejaké „výpočtová transformácia“. Tento operátor A môžeme formálne interpretovať ako riadená aplikácia operátora U

$$A|00\rangle = |00\rangle \quad (9.11a)$$

$$A|01\rangle = |01\rangle \quad (9.11b)$$

$$A|10\rangle = |1\rangle \otimes U|0\rangle \quad (9.11c)$$

$$A|11\rangle = |1\rangle \otimes U|1\rangle \quad (9.11d)$$

Maticová reprezentácia tohto operátora v báze $\mathcal{B} = \{|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle\}$ má tvar unitárnej matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \langle 0|U|0\rangle & \langle 0|U|1\rangle \\ 0 & 0 & \langle 1|U|0\rangle & \langle 1|U|1\rangle \end{pmatrix} \quad (9.12)$$

Diagramatická interpretácia operátora C_{not} je identická s reprezentáciou na obr. 7.5.

Maticová reprezentácia operátora C_{not} v báze $\mathcal{B} = \{|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle\}$ má tvar unitárnej matice (pozri (9.12))

$$\mathbf{C}_{not} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (9.13)$$

9.1.3 Toffoliho 3-qubitová brána

Klasická reverzibilná verzia tohto operátora bola študovaná v kapitole 7.2.3. Toffoliho brána je trojbitový operátor, ktorý je špecifikovaný takto

$$T|xyz\rangle = \begin{cases} |xy\bar{z}\rangle & (\text{pre } x \wedge y = 1) \\ |xyz\rangle & (\text{pre } x \wedge y = 0) \end{cases} \quad (9.14)$$

To znamená, že tretí bit je negovaný vtedy ak prvé dva bity sú jednotkové (ich konjunkcia je jednotková). Maticová reprezentácia Toffoliho operátora v báze

$$\mathcal{B} = \{|000\rangle, |001\rangle, |010\rangle, |011\rangle, |100\rangle, |101\rangle, |110\rangle, |111\rangle\}$$

má tvar

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Toffoliho operátor môže byť vyjadrený v tvare (3.5), podobne ako brána riadenej negácie

$$\begin{aligned}
 T &= |000\rangle\langle 000| + |001\rangle\langle 001| + |010\rangle\langle 010| + |011\rangle\langle 011| \\
 &\quad + |100\rangle\langle 100| + |101\rangle\langle 101| + |110\rangle\langle 110| + |111\rangle\langle 110| \\
 &= |0\rangle\langle 0| \otimes \underbrace{(|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|)}_I \otimes \underbrace{(|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|)}_I + |1\rangle\langle 1| \otimes C_{not} \\
 &= |0\rangle\langle 0| \otimes I \otimes I + |1\rangle\langle 1| \otimes C_{not}
 \end{aligned} \tag{9.15}$$

Diagramatická interpretácia tejto brány je uvedená na obr. 7.9.

Toffoliho brána môže byť použitá ku konštrukcii úplného súboru logických spojok, táto možnosť je založená na jej vlastnostiach

$$T|1,1,x\rangle = |1,1,\bar{x}\rangle, T|x,y,0\rangle = |x,y,x \wedge y\rangle \tag{9.16a}$$

Spojka disjunkcie je vyjadrená takto

$$T|\bar{x},\bar{y},0\rangle = |\bar{x},\bar{y},\bar{x} \wedge \bar{y}\rangle, T|1,1,\bar{x} \wedge \bar{y}\rangle = |1,1,x \vee y\rangle \tag{9.16b}$$

9.1.4 Fredkinova 3-qubitová brána

Táto brána v klasickej reverzibilnej verzii bopla študovaná v kapitoly 3.2.3 spolu s Toffoliho reverzibilnou bránou. Jej tabuľka a špecifikácia pomocou Boolových formúl bola taktiež uvedená v tejto kapitole. Použitím týchto vzťahov, Fredkinov operátor môžeme definovať takto

$$F|x,y,z\rangle = |x,\bar{x}y + xz,\bar{x}z + xy\rangle \tag{9.17a}$$

alebo

$$F|0,y,z\rangle = |0,y,z\rangle, F|1,y,z\rangle = |0,z,y\rangle \tag{9.17b}$$

V dyadickej forme Fredkinova brána má tvar

$$\begin{aligned}
 F &= |000\rangle\langle 000| + |001\rangle\langle 001| + |010\rangle\langle 010| + |011\rangle\langle 011| \\
 &\quad + |100\rangle\langle 100| + |101\rangle\langle 110| + |110\rangle\langle 101| + |111\rangle\langle 111| \\
 &= |0\rangle\langle 0| \otimes I \otimes I + |1\rangle\langle 1| \otimes S
 \end{aligned} \tag{9.18}$$

kde S je výmenný (swap) operátor $S = |00\rangle\langle 00| + |01\rangle\langle 10| + |10\rangle\langle 01| + |11\rangle\langle 11|$, ktorého maticová reprezentácia v báze $\mathcal{B} = \{|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle\}$ má tvar

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Maticová reprezentácia operátora F má tvar

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Na záver budeme študovať unitárny operátor U_f , ktorý vytvára ľubovoľnú Boolovu funkciu $f: \{0,1\}^n \rightarrow \{0,1\}$. Ako ilustračný príklad uvažujme funkciu *AND*, ktorá je špecifikovaná pomocou postupnosti troch tabuliek.

x	y	AND
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

x	y	x'	AND
0	0	0	0
0	1	0	0
1	0	0	0
1	1	0	1

x	y	z	x	y	AND
0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	1	0
0	0	0	1	0	0
1	1	0	1	1	1

Tabuľka 1 obsahuje funkciu *AND* v štandardnom tvare, prvé dva stĺpce obsahujú argumenty x a y , tretí stĺpec obsahuje argument. Pretože funkcia *AND* nie je 1-1-značná, potom transformácia prvých dvoch stĺpcov na tretí stĺpec nie je jednoznačná. Tabuľka 2 obsahuje pokus odstránenia tejto nejednoznačnosti tak, že sme zaviedli tretí stĺpec, ktorý obsahuje nový binárny argument, ani tento pokus nevedie k odstráneniu nejednoznačnosti. Tabuľka 3 už vyjadruje možný spôsob zavedenia jednoznačnosti do špecifikácie funkcie *AND*, argumentu boli rozšírené o tretí stĺpec, ktorý pre jednoduchosť obsahuje len nulové hodnoty. Ďalšie tri stĺpce sú funkčné, špecifikujú jednoznačným spôsobom funkciu *AND*, potom unitárny operátor U_{AND} môžeme špecifikovať takto

$$U_{AND} |000\rangle = |000\rangle, U_{AND} |010\rangle = |010\rangle, U_{AND} |100\rangle = |100\rangle, U_{AND} |110\rangle = |111\rangle$$

alebo

$$U_{AND} = |000\rangle\langle 000| + |010\rangle\langle 010| + |100\rangle\langle 100| + |110\rangle\langle 111|$$

Tento prístup ku konštrukcii unitárnej transformácie pre funkciu Boolovej s n argumentmi vyjadrieme takto

$$\begin{aligned} U_f |x_1, x_2, \dots, x_n, 0\rangle &= U_f |x_1, x_2, \dots, x_n\rangle \otimes |0\rangle = |x_1, x_2, \dots, x_n\rangle \otimes |f(x_1, x_2, \dots, x_n)\rangle \\ &= |x_1, x_2, \dots, x_n, f(x_1, x_2, \dots, x_n)\rangle \end{aligned} \quad (9.19)$$

kde U_f je unitárny operátor špecifikovaný

$$U_f = \sum_{x_1, \dots, x_n \in \{0,1\}^n} |x_1, \dots, x_n, 0\rangle\langle x_1, \dots, x_n, f(x_1, \dots, x_n)|$$

Boolova funkcia f môže byť alternatívne špecifikovaná pomocou n -qubitovej funkcie $|\psi\rangle$ určenej (9.6), jej jednoduchou modifikáciou dostaneme

$$|\psi\rangle \otimes |0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{x=0}^{2^n-1} |x\rangle \otimes |0\rangle$$

Použitím (9.18) dostaneme

$$U_f |\psi\rangle \otimes |0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{x=0}^{2^n-1} |x\rangle \otimes |f(x)\rangle \quad (9.20)$$

Týmto spôsobom sme dostali špecifikáciu ľubovoľnej Boolovej funkcie $f: \{0,1\}^n \rightarrow \{0,1\}$ pomocou unitárneho operátora. Formulu (9.20) môžeme interpretovať ako tabuľku funkcie f , ktorá pre každý argument špecifikuje jej funkčnú hodnotu.

9.2 Kvantový replikátor a nemožnosť klonovania

Nech H je unitárny priestor H pre ktorý platí $\dim(H) \geq 2$, unitárna transformácia U sa nazýva **kvantový replikátor** vtedy a len vtedy, ak vyhovuje podmienke

$$U|\alpha, 0\rangle = |\alpha, \alpha\rangle \quad (9.21)$$

kde $|\alpha, 0\rangle = |\alpha\rangle \otimes |0\rangle, |\alpha, \alpha\rangle = |\alpha\rangle \otimes |\alpha\rangle \in H \otimes H$ a stav $|0\rangle \in H$ sa nazýva **prázdny**. V ďalšej časti tejto kapitoly dokážeme, že kvantový replikátor nemôže existovať.

Predpokladajme, že existuje taký unitárny operátor U , že pre dva lineárne nezávislé 1-qubitové stavy $|\alpha\rangle$ a $|\beta\rangle$ platí

$$U|\alpha, 0\rangle = |\alpha, \alpha\rangle \quad \text{a} \quad U|\beta, 0\rangle = |\beta, \alpha\rangle$$

Zavedieme nový stavový vektor $|\gamma\rangle = (1/2)(|\alpha\rangle + |\beta\rangle)$, potom musí taktiež platiť

$$U|\gamma, 0\rangle = (1/2)(|\alpha, \alpha\rangle + |\beta, \beta\rangle) \quad (9.22a)$$

Potom taktiež musí platiť

$$U|\gamma, 0\rangle = |\gamma, \gamma\rangle = (1/4)(|\alpha\rangle + |\beta\rangle) \otimes (|\alpha\rangle + |\beta\rangle) = (1/4)(|\alpha, \alpha\rangle + |\alpha, \beta\rangle + |\beta, \alpha\rangle + |\beta, \beta\rangle) \quad (9.22b)$$

Porovnaním (9.22a) a (9.22b) dostaneme, že tieto dve aplikácie unitárneho operátora na stav $|\gamma, 0\rangle$ poskytujú dva diametrálne odlišné vektory. Z tejto skutočnosti vypláva, že nemôže existovať taký unitárny operátor U , ktorý by bol kvantový replikátor, jeho existencia vedie ku kontradikcii.

Nemožnosť klonovania je veľmi dôležitá vlastnosť, ktorá má zásadný význam pre kvantové počítanie. Ako bolo ukázané možnosť klonovanie vedie k paradoxom. Tak napríklad, kombinácia klonovania s teleportáciou môže viesť k procesom, ktoré sa šíria rýchlejšie ako svetlo.

Poznamenajme, že dôkazy vety o nemožnosti klonovania sme využili len vlastnosť lineárnosti operátora U , predpoklad o jeho unitárnosti nebol použitý. Dôkaz je potrebné interpretovať tak, že predpoklad unitárnosti transformácie je implicitný, vyplýva zo skutočnosti, že každá transformácia stavov v kvantovej mechanike musí byť unitárna. „Pikantné“ na dôkaze je to, že z neho vyplýva neexistencia lineárneho operátora U , ktorý by realizoval transformáciu (3.23), bez ohľadu na to, či je unitárny alebo nie je.

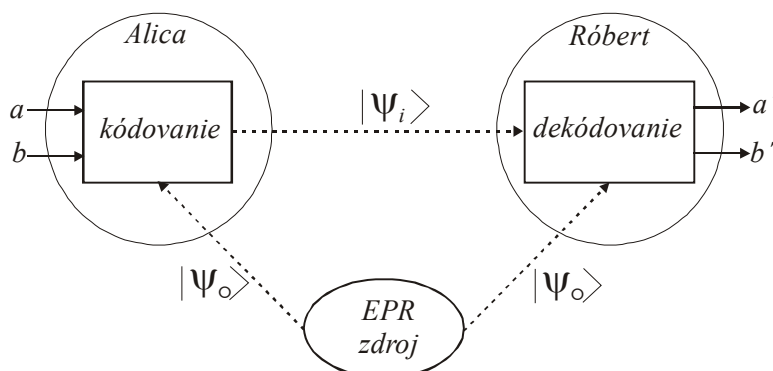
9.3 Ilustračné príklady

Použitie jednoduchých kvantových brán budeme demonštrovať na nasledujúcich dvoch jednoduchých príkladoch. Prvý príklad sa bude zaoberať s tzv. *hustým kódovaním* v ktorom sa používa jeden kvantový bit spolu s EPR dvojicou na zakódovanie a prenos dvoch klasických bitov. To znamená, že jedna častica (qubit) môže preniesť informáciu 2 bitov; tento výsledok je prekvapujúci, pretože v 3. kapitole bolo ukázané, že z jedného qubitu môžeme extrahovať len jedno-bitovú informáciu. Druhý príklad sa bude zaoberať tzv. *teleportáciou*, čo je jav opačný k hustému kódovaniu v tom zmysle, že používa dva klasické bity na prenos jedného qubitu. Teleportácia je prekvapujúcom javom z pohľadu nemožnosti klonovania neznámych kvantových stavov, pretože pomocou nej vlastne prenášame neznámy kvantový stav.

Základný proces v oboch ilustračných príkladoch hustého kódovania a teleportácie je použitie entaglovaného 2-časticového stavu

$$|\psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$$

ktorý majú rovnaký oba zúčastnení (Alica a Róbert) v komunikačnom procese.



Obrázok 9.1. Kvantového hustého kódovania.

9.3.1 Husté kódovanie.

Alica. Prijala dva bity a a b klasickej informácie a taktiež qubit reprezentovaný neseparovateľnou časticou $|\psi_0\rangle$ (pozri obr. 9.1). Alica v závislosti na celom čísle $i = 2a + b$, vykoná transformáciu qubit $|\psi_0\rangle$ pomocou elementárnych transformácií I , X , Y a Z na nový qubit podľa tejto tabuľky

(a,b)	i	transformácia	nový stav
00	0	$ \psi_0\rangle = (I \otimes I) \psi_0\rangle$	$ \psi_0\rangle = 1/\sqrt{2}(00\rangle + 11\rangle)$
01	1	$ \psi_1\rangle = (X \otimes I) \psi_0\rangle$	$ \psi_1\rangle = 1/\sqrt{2}(10\rangle + 01\rangle)$
10	2	$ \psi_2\rangle = (Y \otimes I) \psi_0\rangle$	$ \psi_2\rangle = 1/\sqrt{2}(- 10\rangle + 01\rangle)$
11	3	$ \psi_3\rangle = (Z \otimes I) \psi_0\rangle$	$ \psi_3\rangle = 1/\sqrt{2}(00\rangle - 11\rangle)$

Alica pošle nový stav Róbertovi.

Róbert. Aplikuje riadenú negáciu C_{not} na prijatý qubit $|\psi_i\rangle, |\psi'_i\rangle = C_{not}|\psi_i\rangle$ výsledky sú uvedené v tabuľke

prijatý stav	nový stav	prvý bit	druhý bit (b)
$ \psi_0\rangle = 1/\sqrt{2}(00\rangle + 11\rangle)$	$ \psi'_0\rangle = 1/\sqrt{2}(00\rangle + 10\rangle)$	$1/\sqrt{2}(0\rangle + 1\rangle)$	$ 0\rangle$
$ \psi_1\rangle = 1/\sqrt{2}(10\rangle + 01\rangle)$	$ \psi'_1\rangle = 1/\sqrt{2}(11\rangle + 01\rangle)$	$1/\sqrt{2}(1\rangle + 0\rangle)$	$ 1\rangle$
$ \psi_2\rangle = 1/\sqrt{2}(- 10\rangle + 01\rangle)$	$ \psi'_2\rangle = 1/\sqrt{2}(- 11\rangle + 01\rangle)$	$1/\sqrt{2}(- 1\rangle + 0\rangle)$	$ 1\rangle$
$ \psi_3\rangle = 1/\sqrt{2}(00\rangle - 11\rangle)$	$ \psi'_3\rangle = 1/\sqrt{2}(00\rangle - 10\rangle)$	$1/\sqrt{2}(0\rangle - 1\rangle)$	$ 0\rangle$

Róbert môže získať pôvodný prvý bit a použitím Hadamardovej transformácie H , výsledky sú uvedené v tabuľke

<i>prijatý stav</i>	<i>prvý bit</i>	<i>H (prvý bit) (a)</i>
$ \psi_0\rangle = 1/\sqrt{2}(00\rangle + 11\rangle)$	$1/\sqrt{2}(0\rangle + 1\rangle)$	$1/\sqrt{2}(H 0\rangle + H 1\rangle) = 0\rangle$
$ \psi_1\rangle = 1/\sqrt{2}(10\rangle + 01\rangle)$	$1/\sqrt{2}(1\rangle + 0\rangle)$	$1/\sqrt{2}(H 1\rangle + H 0\rangle) = 0\rangle$
$ \psi_2\rangle = 1/\sqrt{2}(- 10\rangle + 01\rangle)$	$1/\sqrt{2}(- 1\rangle + 0\rangle)$	$1/\sqrt{2}(-H 1\rangle + H 0\rangle) = 1\rangle$
$ \psi_3\rangle = 1/\sqrt{2}(00\rangle - 11\rangle)$	$1/\sqrt{2}(0\rangle - 1\rangle)$	$1/\sqrt{2}(H 0\rangle - H 1\rangle) = 1\rangle$

Týmto sme ukázali, že Alica môže prijaté bity (a,b) jednoznačne zakódovať pomocou svojho qubitu, ktorý keď pošle Róbertovi, ten môže prijatý qubit dekódovať tak, že určí pôvodné bity (a,b) .

9.3.2 Kvantová teleportácia

Proces inverzný k hustému kódovaniu sa nazýva teleportácia, ktorá spočíva v tom, že štruktúra qubitu (ktorý nie je klonovateľný) sa pošle pomocou klasického kanála prostredníctvom bytov, pričom príjemca je ho schopný zrekonštruovať (pozri obr. 9.2). Kvantovú teleportáciu (podľa sci-fi románov môžeme charakterizovať takto:

- (1) Objekt, ktorý má byť teleportovaný je najprv skanovaný, aby sme získali potrebnú informáciu o jeho zložení. Pri skanovaní pôvodný objekt zaniká, takže vlastnosť o nemožnosti klonovania nie je porušená.
- (2) Takto získaná informácia je zaslaná klasickými kanálmi na cieľové miesto teleportácie.
- (3) Rekonštrukcia presnej repliky objektu na cieľovom mieste pomocou prijatej informácie bez použitia lokálne dostupného materiálu

Alica. Alica má qubit (ktorého štruktúru nepozná)

$$|\varphi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$$

chce poslať špecifikáciu jeho stav pomocou klasického kanálu. Podobne, ako pri hustom kódovaní, Alica a Róbert vlastnia rovnaký qubit realizovaný entaglovanou časticou

$$|\psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$$

Alica aplikuje metódu použitú pre dekódovanie v hustom kódovaní. V prvom kroku sa uskutoční tenzorový súčin stavov $|\varphi\rangle$ a $|\psi_0\rangle$

$$|\varphi\rangle \otimes |\psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) \otimes (|00\rangle + |11\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha|000\rangle + \beta|100\rangle + \alpha|011\rangle + \beta|111\rangle) \quad (3.25)$$

ktorý Alica ešte upraví pomocou unitárnych transformácií $H \otimes I \otimes I$ a $C_{not} \otimes I$

$$\begin{aligned} & (H \otimes I \otimes I)(C_{not} \otimes I)(|\varphi\rangle \otimes |\psi_0\rangle) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(H \otimes I \otimes I)(\alpha|000\rangle + \beta|110\rangle + \alpha|011\rangle + \beta|101\rangle) \\ &= \frac{1}{2}(|00\rangle(\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) + |01\rangle(\alpha|1\rangle + \beta|0\rangle) + |10\rangle(\alpha|0\rangle - \beta|1\rangle) + |11\rangle(\alpha|1\rangle - \beta|0\rangle)) \end{aligned}$$

Alica meria vlastnosti tohto kvantového stavu vzhľadom k báze $\{|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle\}$, vždy dostane s rovnakou pravdepodobnosťou jeden zo štyroch 1-časticových stavov

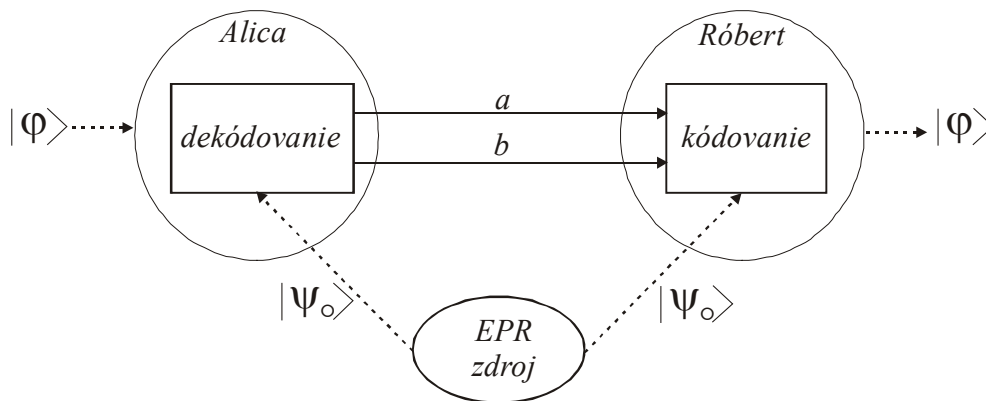
$$|\varphi_0\rangle = (\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) \quad (\text{pre } a=0, b=0)$$

$$|\varphi_1\rangle = (\alpha|1\rangle + \beta|0\rangle) \quad (\text{pre } a=0, b=1)$$

$$|\varphi_2\rangle = (\alpha|0\rangle - \beta|1\rangle) \quad (\text{pre } a=1, b=0)$$

$$|\varphi_3\rangle = (\alpha|1\rangle - \beta|0\rangle) \quad (\text{pre } a=1, b=1)$$

kde index vektorov $|\varphi_i\rangle$ je určený $i=2a+b$. Alice pošle pomocou klasického kanála Róbertovi bitovú informáciu (a,b) . Poznamenajme, že Alice meraním svojej časti (prvé dva qubity nevratne zmení stav zloženého stavu $|\varphi\rangle \otimes |\psi_0\rangle$, čo sa musí prejaviť aj Róbertovi.



Obrázok 9.2. Proces kvantovej teleportácie.

Róbert. Ak Róbert prijme klasické bity od Alici, potom vie ako transformovať stav svojej časti zloženého qubitu tak, aby zrekonštruoval pôvodný stav Alicinho qubitu $|\varphi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$

a	b	i	transformácia $ \varphi_i\rangle$
0	0	0	$ \varphi\rangle = I \varphi_0\rangle = I(\alpha 0\rangle + \beta 1\rangle) = \alpha 0\rangle + \beta 1\rangle$
0	1	1	$ \varphi\rangle = X \varphi_1\rangle = X(\alpha 1\rangle + \beta 0\rangle) = \alpha 0\rangle + \beta 1\rangle$
1	0	2	$ \varphi\rangle = Y \varphi_2\rangle = Y(-\alpha 1\rangle + \beta 0\rangle) = \alpha 0\rangle + \beta 1\rangle$
1	1	3	$ \varphi\rangle = Z \varphi_3\rangle = Z(\alpha 0\rangle - \beta 1\rangle) = \alpha 0\rangle + \beta 1\rangle$

Poznamenajme, že táto transformácia korešponduje s krokom kódovania v hustom kódovaní.