2. kapitola

Intuitívny úvod do jednoduchej (K) modálnej logiky

Úvodné poznámky

- *Modálna logika* patrí medzi neklasické logiky, ktoré využívajú modálne spojky pre kvalitatívnu špecifikáciu pravdivosti usudzovania. *Modálna logika* zahrňuje takú modifikáciu výrokovej logiky, ktorá obsahuje dve nové unárne spojky „je nutné, aby...“ a „je možné, aby...“.

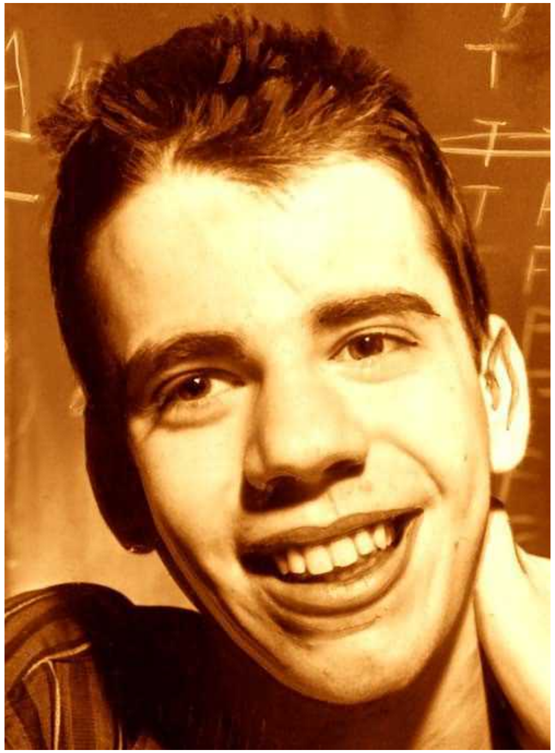
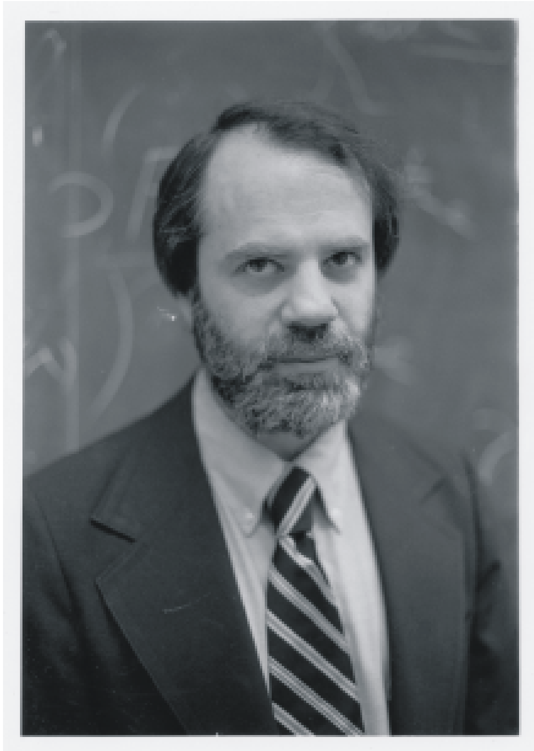
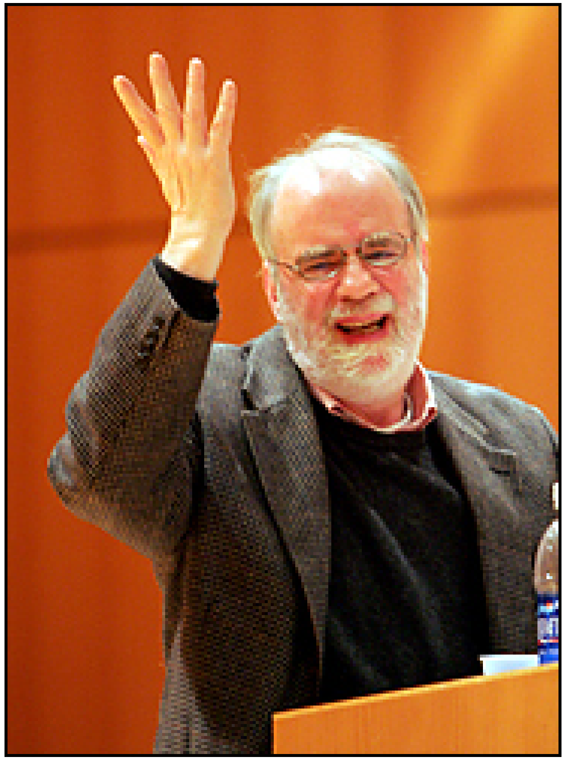
- Modálne logiky majú význam nielen vo filozofii, kde umožňujú analyzovať a precizovať jej argumenty modálneho charakteru, ktoré sú často veľmi neurčité a ťažko „uchopiteľné“, ale aj vo vedách prírodovedných, v informatike a v umelej inteligencii, kde umožňujú rozšírenie spôsobov usudzovania a reprezentácií vedomostí.

- Spoločným rysom modálnych logík je, že modálne spojky nevyhovujú princípu extensionality, ktorý je platný v klasickej výrokovej logike. V modálnej logike pravdivosť výroku $\clubsuit\varphi$ (s *unárnou modálnu spojkou* $\clubsuit$) nie je plne určená len pravdivostnou hodnotou výroku φ. Tento problém spôsoboval veľké problémy pri korektnej formulácii modálnych logík.

Koncom 50. rokov minulého storočia americký filozof a logik Saul Kripke navrhol novú sémantickú interpretáciu, ktorá využíva aj iné možné svety, ako je len náš svet. Problém určenia pravdivostnej hodnoty výrokov „φ ***je nutne pravdivý***“´a „φ ***je možne pravdivý***“ vo svete *w*, spočíva v tom, že pri jeho riešení sa musíme obracať aj na svety, ktoré sú dostupné zo sveta *w*:

- ***výrok φ je nutne pravdivý vo svete w vtedy a len vtedy (vtt), ak φ je pravdivý vo všetkých svetoch, ktoré sú dostupné zo sveta w***.
- ***výrok φ je možne pravdivý vo svete w vtedy a len vtedy (vtt), ak φ je pravdivý aspoň v jednom svete, ktorý je dostupný zo sveta w.***

Tento prístup má univerzálny charakter a je pomerne ľahko aplikovateľný aj pre iné typy modálnych logík.

Saul Kripke (*1940)

Kripkeho sémantika

Pri skúmaní pravdivosti modálnych výrokov „*p je nutné*“ a „*p je možné*“ hľadáme odpoveď v možných svetoch $W = \{w_1, w_2,.., w_n,...\}$. Ak je nejaká skutočnosť pravdivá v každom možnom svete, ktorý je dostupný zo sveta *w* a tvoria podmnožinu $\Gamma(w) \subseteq W$, potom povieme, že je *nutne pravdivá* aj v našom svete *w*, alebo, ak je pravdivá aspoň v jednom prístupnom svete, povieme, že je *možne pravdivá* aj v našom svete.

Príklad 1.Študujme výrok „*nutne platí, že vlak do Prahy odchádza o 10.15*“. Ako sa jednoducho vysporiadať s unárnou modálnou spojkou „nutne“? Najjednoduchší prístup k riešeniu tohto problému bude, keď sa obrátime s otázkou „*odchádza vlak do Prahy o 10.15*“ ? na našich susedov v dome kde bývame. Potom $\Gamma(w) = susedia\_v\_dome(w)$, táto množina obsahuje susedov indivídua *w*, ktorý s ním bývajú na jednej chodbe. Ak nám každý takýto sused odpovie „*áno*“, potom môžeme pokladať daný výrok za nutne pravdivý. Ak nám odpovie „*áno*“ len určitá časť susedov (aspoň jeden), potom daný výrok môžeme pokladať za možne pravdivý.

Príklad 2. Predstavme si školu, v ktorej sa nachádza množstvo tried, pričom v každej triede ja tabuľa, na ktorej sú vypísané pravdivé výroky (napr. „Eva miluje Ivana“). Ak chceme poznať v danej triede w, v ktorej sa nachádzame, pravdivosť nejakého modálneho výroku „nutne φ“, tak musíme skontrolovať platnosť výroku φ vo všetkých triedach, ktoré sú napr. na rovnakej chodbe ako daná trieda, $w' \in triedy\_v\_škole\_na\_rovnakej\_chodbe(w)$. Ak je v každej triede výrok φ pravdivý, potom φ je „nutne“ pravdivý v danej triede. Podobne, ak chceme poznať pravdivostnú hodnotu „možne φ“ v danej triede, stačí nájsť aspoň jednu triedu na rovnakej chodbe, kde na tabuli je uvedený výrok φ, potom výrok φ je „možne“ pravdivý v danej triede.

- Výrok „*číslo 3 je prvočíslo*“ je pravdivý za každej situácie v každej triede v celej škole, t. j. je napísaný na tabuli v každej triede, potom je takýto výrok nutne pravdivý.

- Výrok „*Eva miluje Ivana*“ je pravdivý len v niektorých triedach na rovnakej chodbe, potom tento výrok nie je nutne pravdivý ale len možne pravdivý.

- Výrok „*prvočíslo väčšie ako 2 je deliteľné 2*“, ktorý nie je pravdivý v žiadnej triede, t. j. je nutne nepravdivý.

Zovšeobecnenie

Zovšeobecníme tieto dva jednoduché ilustračné príklady. Nech výrok „nutne φ“ má tvar □φ, kde symbol □ reprezentuje unárnu modálnu spojku „nutne“. Nech svet v ktorom sa skúma pravdivosť výroku □φ je označený symbolom *w*, množina možných svetov je označená *W*. Ak výrok φ je pravdivý pre každý svet $w' \in \Gamma(w)$, potom budeme pokladať skúmaný výrok □φ za pravdivý aj pre svet *w*

$$val(w,\Box\varphi)=1 \quad vtt \quad \forall w' \in \Gamma(w): val(w',\varphi)=1$$

$$val(w,\Box\varphi)=0 \quad vtt \quad \exists w' \in \Gamma(w): val(w',\varphi)=0$$

Podobným spôsobom môžeme diskutovať aj výrok tvaru ◊φ,

$$val(w,\Diamond\varphi)=1 \quad vtt \quad \exists w' \in \Gamma(w): val(w',\varphi)=1$$

$$val(w,\Diamond\varphi)=0 \quad vtt \quad \forall w' \in \Gamma(w): val(w',\varphi)=0$$

Modálne spojky sú navzájom spriahnuté vzťahmi

$$\neg\Box\varphi \equiv \Diamond\neg\varphi$$

$$\neg\Diamond\varphi \equiv \Box\neg\varphi$$

Intuitívna formulácia modálnych unárnych operátorov

V prvok kroku budeme špecifikovať tvorbu formúl jazyka L modálnej logiky. Nech $\Omega = \{p, q, ..., p', q', ..., p_1, q_1, ...\}$ je konečná množina atomických výrokov (výrokových premenných), z ktorých pomocou unárnych a binárnych logických spojok (včítane modálnych $\Box$ a $\Diamond$) vytvárame formuly modálnej logiky, kde L je minimálna množina špecifikovaná týmto rekurentným spôsobom:

(1) $L := \Omega$,

(2) Ak $\varphi, \psi \in L$, potom $(\varphi \wedge \psi), (\varphi \vee \psi), (\varphi \Rightarrow \psi), (\varphi \equiv \psi), (\neg\varphi), (\Box\varphi), (\Diamond\varphi) \in L$

Kripkeho model M je definovaný ako usporiadaná trojica

$$M = (W, R, v)$$

kde množina $W = \{w_1, w_2, ..., w_n\}$ obsahuje možné svety, $R \subseteq W \times W$ je binárna relácia definovaná nad množinou svetov a v je zobrazenie

$$v : \Omega \times W \to \{0,1\} \tag{2.7b}$$

ktoré ohodnocuje atomické premenné $\Omega = \{p, q, ..., p', q', ..., p_1, q_1, ...\}$ v každom svete $w \in W$ pravdivostnou ohodnotí $w(p, w) \in \{0,1\}$ s interpretáciou

$$w(p, w) = 1 \Rightarrow p \text{ je pravdivé vo svete } w$$

$$w(p, w) = 0 \Rightarrow p \text{ je \textit{ne}pravdivé vo svete } w$$

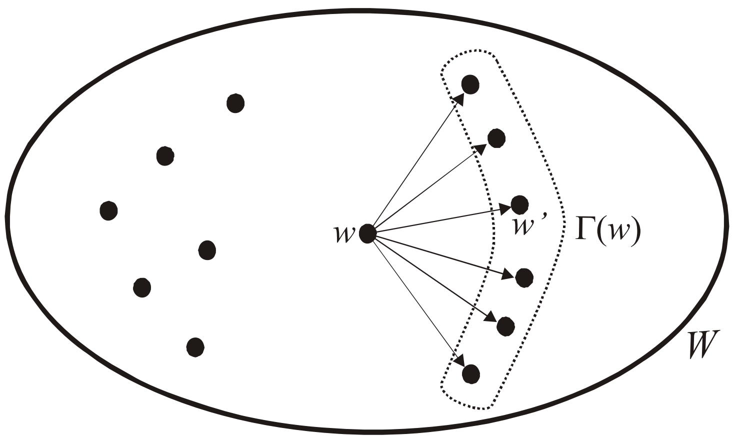
Skutočnosť, že výrok p je pravdivý vo svete w zapíšeme $w \models p$ (podobný formalizmus bol použitý aj v predchádzajúcej kapitole pri špecifikácii výrokovej logiky, pozri formuly (1.2a-b))

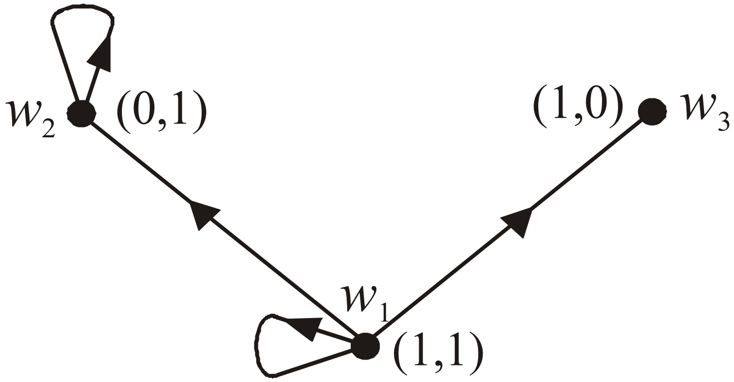
$$\left(w \models p\right) =_{def} v\left(p, w\right) = 1$$

$$\left(w \not\models p\right) =_{def} v\left(p, w\right) = 0$$

Pomocou relácia R môžeme definovať pre každý svet $w \in W$ množiny dostupných (susedných) svetov $\Gamma\left(w\right) \subseteq W$ zo sveta w,

$$\Gamma\left(w\right) = \left\{w' ; \left(w, w'\right) \in R\right\}$$





Znázornenie binárnej relácie $R \subseteq W \times W$ pomocou orientovaného grafu, pričom množina svetov W obsahuje tri svety, $W = \{w_1, w_2, w_3\}$. Množina Ω obsahuje dve výrokové premenné, $\Omega = \{p, q\}$. Každý vrchol grafu je ohodnotený binárnou dvojicou (α,β), kde α (β) špecifikuje pravdivostnú hodnotu premennej p (q). Tak napríklad dvojica (0,1) pri vrchole w_2 špecifikuje pravdivostnú hodnotu p (q) ako 0 (1), alebo $w_2 \nvDash p$ resp. $w_2 \vDash q$. Množiny Γ sú určené takto: $\Gamma(w_1) = \{w_1, w_2, w_3\}$, $\Gamma(w_2) = \{w_2\}, \Gamma(w_3) = \emptyset$. Ohodnotenie v je určené takto:

$$v(p, w_1) = 1,\ v(p, w_2) = 0,\ v(p, w_3) = 1,\ v(q, w_1) = 1,\ v(q, w_2) = 1,\ v(q, w_3) = 0.$$

Použitím podmnožín Γ modálne unárne operátory (spojky) sú definované takto

$$\left(w \vDash \Box\varphi\right) =_{def} \begin{cases} \bigwedge\limits_{w' \in \Gamma(w)} \left(w' \vDash \varphi\right) & \left(pre\,\Gamma(w) \neq \varnothing\right) \\ 1 & \left(pre\,\Gamma(w) = \varnothing\right) \end{cases}$$

$$\left(w \vDash \Diamond\varphi\right) =_{def} \begin{cases} \bigvee\limits_{w' \in \Gamma(w)} \left(w' \vDash \varphi\right) & \left(pre\,\Gamma(w) \neq \varnothing\right) \\ 0 & \left(pre\,\Gamma(w) = \varnothing\right) \end{cases}$$

Sémantická interpretácia formúl modálnej logiky

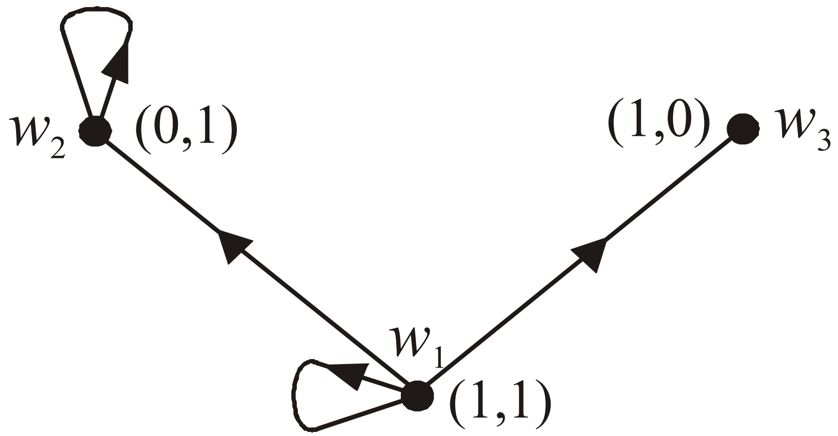
(1)	$w \models \neg\varphi$ vtt $w \not\models \varphi$
(2)	$w \models (\varphi \wedge \psi)$ vtt $w \models \varphi$ a $w \models \psi$
(2′)	$w \not\models (\varphi \wedge \psi)$ vtt $w \not\models \varphi$ alebo $w \not\models \psi$
(3)	$w \models (\varphi \vee \psi)$ vtt $w \models \varphi$ alebo $w \models \psi$
(3′)	$w \not\models (\varphi \vee \psi)$ vtt $w \not\models \varphi$ a $w \not\models \psi$
(4)	$w \models (\varphi \Rightarrow \psi)$ vtt $w \not\models \varphi$ alebo $w \models \psi$
(4′)	$w \not\models (\varphi \Rightarrow \psi)$ vtt $w \models \varphi$ a $w \not\models \psi$
(5)	$w \models \Box\varphi$ vtt pre každé $w' \in \Gamma(w)$ platí $w' \models \varphi$
(5′)	$w \not\models \Box\varphi$ vtt existuje také $w' \in \Gamma(w)$, že platí $w' \not\models \varphi$
(6)	$w \models \Diamond\varphi$ vtt existuje také $w' \in \Gamma(w)$, že platí $w' \models \varphi$
(6′)	$w \not\models \Diamond\varphi$ vtt pre každé $w' \in \Gamma(w)$ platí $w \not\models \varphi$

Príklad.

Pravdivosť formúl pre Kripkeho model s reláciou *R* znázornenou na obrázku

.

formula	w_1	w_2	w_3
p	1	0	1
q	1	1	0
$p \wedge q$	1	0	0
$p \vee q$	1	1	1
$\Box p$	0	0	1
$\Box q$	0	1	1
$\Diamond p$	1	0	0
$\Diamond q$	1	1	0
$\Box p \wedge \Box q$	0	0	1
$\Box p \vee \Box q$	0	1	1
$\Diamond p \wedge \Diamond q$	1	0	0
$\Diamond p \vee \Diamond q$	1	1	0
$\Box (p \wedge q)$	0	0	1
$\Box (p \vee q)$	1	1	1
$\Diamond (p \wedge q)$	1	0	0
$\Diamond (p \vee q)$	1	1	0



Tautológia

Rámec pre daný model $M = (W, R, v)$ je definovaný takto:

$$F = (W, R),\text{ potom } M = (F, v)$$

Výrok ´formula $\varphi \in L$ je ***pravdivá pre model M a svet w***´ zapisujeme pomocou symbolu – relácie $\models$ takto

$$(M, w) \models \varphi$$

Negácia tohto výroku má tvar

$$(M, w) \not\models \varphi$$

Ktorú čítame ´formula φ je nepravdivá pre model M a svet w´.
Hovoríme, že formula $\varphi \in L$ je ***tautológia vzhľadom k rámcu*** F vtedy a len vtedy, ak

$$F \models \varphi =_{def} \forall(v)\forall(w \in W)\Big(\big((W, R, v), w\big) \models \varphi\Big)$$

Hovoríme, že $\varphi \in L$ je ***tautológia*** vtedy a len vtedy, ak je tautológiou pre každý rámec F

$$\models \varphi =_{def} \forall(F)(F \models \varphi)$$

Vybrané tautológie jednoduchej modálnej logiky

(1)	$\models\left(\Diamond p\equiv\neg\Box(\neg p)\right)$
(2)	$\models\left(\Box p\Rightarrow\Diamond p\right)$
(3)	$\models\left(\left(\Box\left(p\wedge q\right)\right)\equiv\left(\left(\Box p\right)\wedge\left(\Box q\right)\right)\right)$
(4)	$\models\left(\Diamond\left(p\vee q\right)\equiv\left(\Diamond p\right)\vee\left(\Diamond q\right)\right)$
(5)	$\models\left(\left(\Box p\right)\vee\left(\Box q\right)\Rightarrow\Box\left(p\vee q\right)\right)$
(6)	$\models\left(\Diamond\left(p\wedge q\right)\Rightarrow\left(\Diamond p\right)\wedge\left(\Diamond q\right)\right)$
(7)	$\models\left(\Box\left(p\Rightarrow q\right)\Rightarrow\left(\Box p\Rightarrow\Box q\right)\right)$
(8)	$\models\left(\Box\left(p\Rightarrow q\right)\Rightarrow\left(\Diamond p\Rightarrow\Diamond q\right)\right)$
(9)	$\models\left(\Diamond p\Rightarrow\Diamond q\right)\Rightarrow\left(\Diamond\left(p\Rightarrow q\right)\right)$

Použijeme metódu sémantických tabiel (ktorej pôvodná verzia výrokovej logiky je teraz rozšírená o dva spôsoby predlžovania vetví) ne verifikáciu toho, či daná formula φ je alebo nie je tautológia.

$$\begin{array}{l} w_1 \models \Box\varphi \\ \quad | \\ w_2 \models \varphi \quad \forall w_2 \in \Gamma(w_1) \end{array}$$

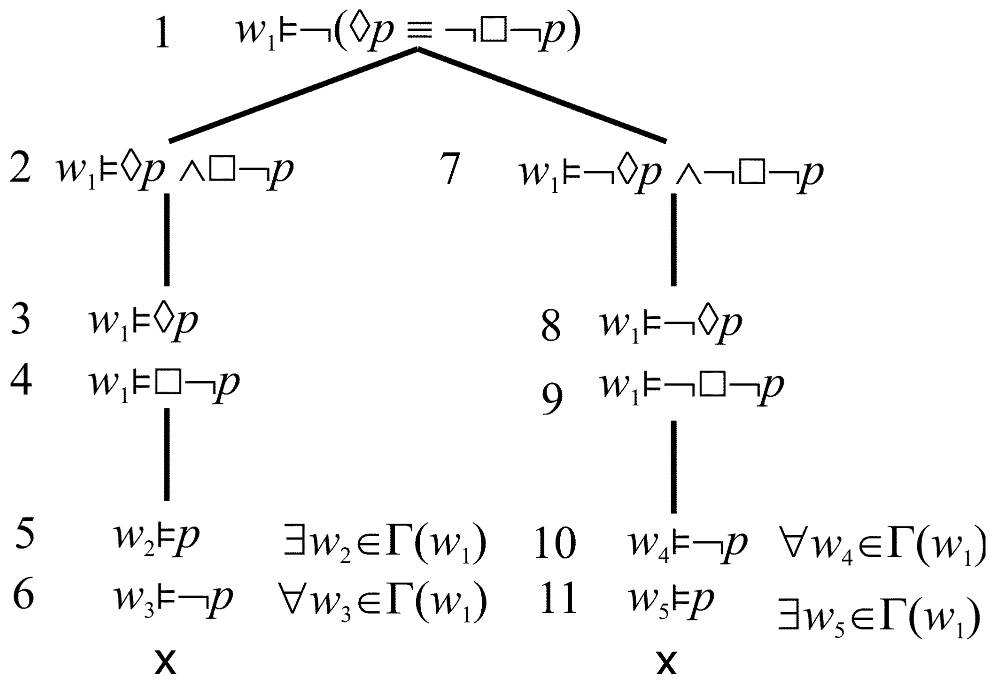
(A) *Modálna spojka ´nutne´*

$$\begin{array}{l} w_1 \models \Diamond\varphi \\ \quad | \\ w_2 \models \varphi \quad \exists w_2 \in \Gamma(w_1) \end{array}$$

(B) *Modálna spojka ´možne´*

Príklad 1

Metódou sémantického tabla ukážte, že formula $\varphi = \left(\Diamond p \equiv \neg\Box\left(\neg p\right)\right)$ je tautológia. Vzniknuté sémantické tablo je znázornené na obr. 2.4, kde pre jednoduchosť sú jednotlivé uzly tabla sú označená číslami 1,…,11 s nasledujúcim komentárom:



Príklad 2

Metódou sémantického tabla ukáže, že formula $\varphi = (\Box p \Rightarrow \Diamond p)$ je tautológia,

1 $w_1 \models \neg(\Box p \Rightarrow \Diamond p)$

2 $w_1 \models \Box p$

3 $w_1 \models \neg\Diamond p$

4 $w_2 \models p \quad \forall w_2 \in \Gamma(w_1)$

5 $w_1 \models \Box\neg p$

6 $w_3 \models \neg p \quad \forall w_3 \in \Gamma(w_1)$

x

Príklad 3

Metódou sémantického tabla zistíme, že formula $\varphi = \left(\left(\square\left(p \wedge q\right)\right) \equiv \left(\left(\square p\right) \wedge \left(\square q\right)\right)\right)$ je tautológia

1 $w_1 \vDash \neg(\square(p \wedge q) \equiv (\square p) \wedge (\square q))$

2 $w_1 \vDash \square(p \wedge q) \wedge ((\Diamond\neg p) \vee (\Diamond\neg q))$

3 $w_1 \vDash \square(p \wedge q)$

4 $w_1 \vDash (\Diamond\neg p) \vee (\Diamond\neg q)$

5 $w_2 \vDash p \wedge q$ $\quad \forall w_2 \in \Gamma(w_1)$

6 $w_2 \vDash p$

7 $w_2 \vDash q$

8 $w_1 \vDash \Diamond\neg p$

9 $w_3 \vDash \neg p$ $\quad \exists w_3 \in \Gamma(w_1)$

x

8´ $w_1 \vDash \Diamond\neg q$

9´ $w_4 \vDash \neg q$

$\exists w_4 \in \Gamma(w_1)$

x

10 $w_1 \vDash (\square p \wedge \square q) \wedge \Diamond(\neg p \vee \neg q)$

11 $w_1 \vDash \square p \wedge \square q$

12 $w_1 \vDash \Diamond(\neg p \vee \neg q)$

13 $w_1 \vDash \square p$

14 $w_1 \vDash \square q$

15 $w_3 \vDash p$ $\quad \forall w_3 \in \Gamma(w_1)$

16 $w_4 \vDash q$ $\quad \forall w_4 \in \Gamma(w_1)$

17 $w_5 \vDash \neg p \vee \neg q$ $\quad \exists w_5 \in \Gamma(w_1)$

18 $w_5 \vDash \neg p$

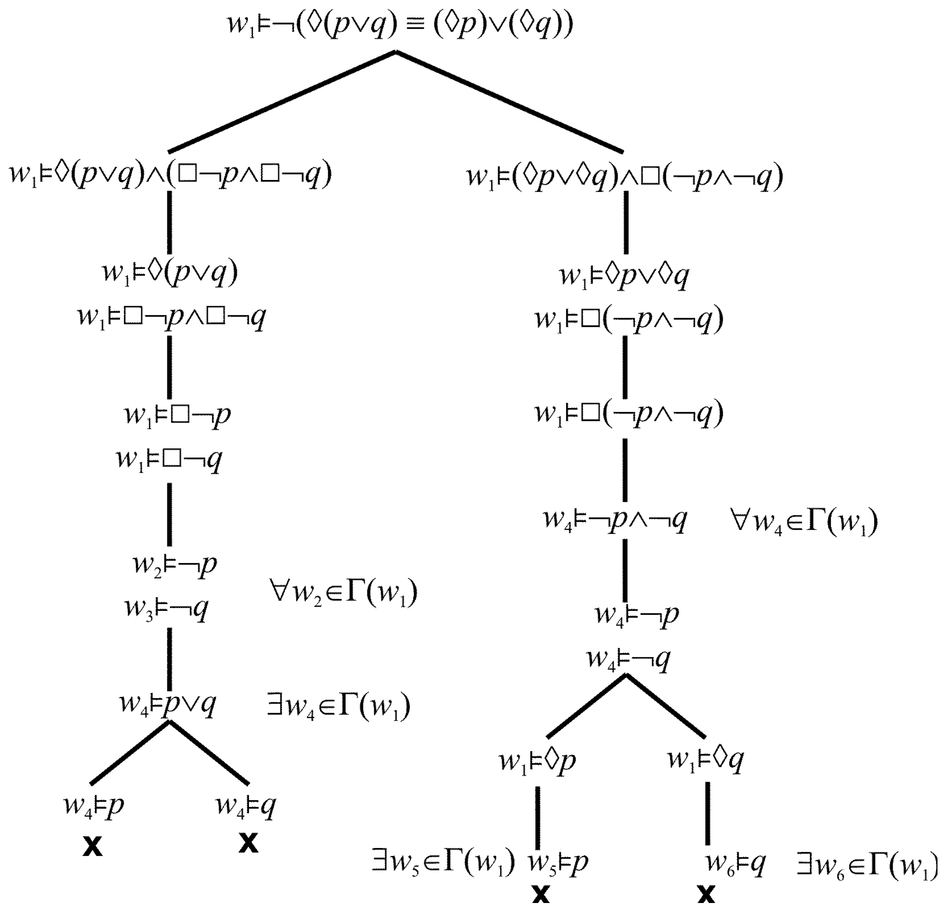
x

18´ $w_5 \vDash \neg q$

x

Príklad 4

Dôkaz tautologičnosti formuly $\varphi = \left(\Diamond\left(p \vee q\right) \equiv \left(\Diamond p\right) \vee \left(\Diamond q\right)\right)$ pomocou sémantického tabla.



Príklad 5

Dôkaz tautologičnosti formuly $\varphi = (\Box p) \vee (\Box q) \Rightarrow \Box(p \vee q)$ pomocou sémantického tabla.

$$w_1 \vDash \neg((\Box p) \vee (\Box q) \Rightarrow \Box(p \vee q))$$

$$w_1 \vDash (\Box p) \vee (\Box q)$$

$$w_1 \vDash \Diamond \neg (p \vee q)$$

$$w_1 \vDash \Diamond(\neg p \wedge \neg q)$$

$$w_2 \vDash \neg p \wedge \neg q \qquad \exists w_2 \in \Gamma(w_1)$$

$$w_2 \vDash \neg p$$

$$w_2 \vDash \neg q$$

$$w_1 \vDash \Box p \qquad\qquad w_1 \vDash \Box q$$

$$\forall w_3 \in \Gamma(w_1) \quad w_3 \vDash p \qquad\qquad w_4 \vDash q \quad \forall w_4 \in \Gamma(w_1)$$

$$\times \qquad\qquad \times$$

Príklad 6

Falzifikácia tautologičnosti formuly $\varphi = \Box(p \vee q) \Rightarrow (\Box p) \vee (\Box q)$ pomocou sémantického tabla

1 $w_1 \models \neg(\Box(p \vee q) \Rightarrow (\Box p) \vee (\Box q))$

2 $w_1 \models \Box(p \vee q)$

3 $w_1 \models \Diamond \neg p$

4 $w_1 \models \Diamond \neg q$

5 $w_2 \models \neg p$ $\quad \exists w_2 \in \Gamma(w_1)$

6 $w_3 \models \neg q$ $\quad \exists w_3 \in \Gamma(w_1)$ $\quad w_2 \neq w_3$

7 $\bigwedge_{w_4} w_4 \models p \vee q$ $\quad \forall w_4 \in \Gamma(w_1)$

8 $w_2 \models p \vee q$

9 $w_3 \models p \vee q$

10 $w_2 \models p$ **x** $\qquad$ 11 $w_2 \models q$

12 $w_3 \models p$ **o** $\qquad$ 13 $w_3 \models q$ **x**

Sémantická interpretácia podformúl formuly $\Box(p \vee q) \Rightarrow (\Box p) \vee (\Box q)$

formula	$\boldsymbol{w}_1$	$\boldsymbol{w}_2$	$\boldsymbol{w}_3$
p	1	0	1
q	1	1	0
$\Box p$	0	0	1
$\Box q$	0	1	0
$\Box p \vee \Box q$	0	1	1
$p \vee q$	1	1	1
$\Box(p \vee q)$	1	1	1
$\Box(p \vee q) \Rightarrow (\Box p \vee \Box q)$	0	1	1

Príklad 7

Pravidlo modus tollens v modálnej logike má alternatívny tvar

$$\begin{array}{|l}\Box(p \Rightarrow q)\\ \Box p\\ \hline \Box q\end{array}$$

Pomocou sémantického tabla dokážeme, že formula $\Box(p \Rightarrow q) \wedge \Box p \Rightarrow \Box q$ je tautológia

1 $w_1 \vDash \neg(\Box(p \Rightarrow q) \wedge \Box p \Rightarrow \Box q)$

2 $w_1 \vDash \Box(p \Rightarrow q)$

3 $w_1 \vDash \Box p$

4 $w_1 \vDash \Diamond \neg q$

5 $w_2 \vDash p$ $\quad \forall w_2 \in \Gamma(w_1)$

6 $w_3 \vDash \neg q$ $\quad \exists w_3 \in \Gamma(w_1)$

7 $w_4 \vDash p \Rightarrow q$ $\quad \forall w_4 \in \Gamma(w_1)$

8 $w_2 \vDash \neg p$ $\quad$ 9 $w_2 \vDash q$ $\quad$ ($w_3 = w_2 = w_4$)

X $\quad$ X

Úúplnosti a korektnosti jednoduchej modálnej logiky

Pomocou techniky sémantických tabiel môže byť dokázané, že modálna logika **K** vyhovuje dvom podmienkam

- *korektná* $\left(\vdash_K \varphi\right) \Rightarrow \left(\models_K \varphi\right)$
- *úplná* $\left(\models_K \varphi\right) \Rightarrow \left(\vdash_K \varphi\right)$

To znamená, že relácie $\vdash_K \varphi$ a $\models_K \varphi$ sú ekvivalentné

Príklad

Ukážte, že pre model *M*, kde pre každé $w \in W$, množiny dostupných svetov sú prázdne, $\Gamma(w) = \varnothing$, každá formula φ je nutná a nie je možná, t. j. pre ľubovoľnú formulu φ platí $\Box\varphi \equiv 1$ a $\Diamond\varphi \equiv 0$.

Návod:

$$\bigwedge_{i=1}^{n} p_i \equiv 1 \wedge p_1 \wedge \ldots \wedge p_n \equiv \begin{cases} p_1 \wedge \ldots \wedge p_n & (pre\ n \geq 1) \\ 1 & (pre\ n = 0) \end{cases}$$

$$\bigvee_{i=1}^{n} p_i \equiv 0 \vee p_1 \vee \ldots \vee p_n \equiv \begin{cases} p_1 \vee \ldots \vee p_n & (pre\ n \geq 1) \\ 0 & (pre\ n = 0) \end{cases}$$

$$\left(w \vDash \Box\varphi\right) =_{def} \begin{cases} \bigwedge\limits_{w' \in \Gamma(w)} \left(w' \vDash \varphi\right) & \left(pre\,\Gamma\left(w\right) \neq \varnothing\right) \\ 1 & \left(pre\,\Gamma\left(w\right) = \varnothing\right) \end{cases}$$

$$\left(w \vDash \Diamond\varphi\right) =_{def} \begin{cases} \bigvee\limits_{w' \in \Gamma(w)} \left(w' \vDash \varphi\right) & \left(pre\,\Gamma\left(w\right) \neq \varnothing\right) \\ 0 & \left(pre\,\Gamma\left(w\right) = \varnothing\right) \end{cases}$$

Príklad

Pre model $M = (W, R, v)$, ktorý je špecifikovaný zvolenou vlastnosťou relácie R, dokážte pomocousémantických tabiel formuly:

(a) $w \vDash \Box p \Rightarrow p$, pre reflexívnu reláciu R , kde pre každé $w \in W$ platí $(w, w) \in R$,

(b) $w \vDash p \Rightarrow \Box \Diamond p$, pre symetrickú reláciu R , kde pre každé $w_1, w_2 \in W$ platí $(w_1, w_2) \in R \Rightarrow (w_2, w_1) \in R$,

(c) $w \vDash \Box p \Rightarrow \Box \Box p$, pre tranzitívnu reláciu R , kde pre každé $w_1, w_2, w_3 \in W$ platí $(w_1, w_2), (w_2, w_3) \in R \Rightarrow (w_1, w_3) \in R$,

(d) $w \vDash \Diamond p \Rightarrow \Box \Diamond p$, pre symetrickú a tranzitívnu reláciu.

The End