3. kapitola

Axiomatická formulácia modálnej logiky
Vzťah medzi syntaxou a sémantikou

Axiomatická výstavba modálnej logiky

- Cieľom tejto prednášky je ukázať axiomatickú výstavbu rôznych verzií epistemickej logiky. Ukážeme, že axiomatický systém modálnej logiky je možné zostrojiť jednoduchým zovšeobecnením axiomatického systému výrokovej logiky. Nech $L_{prop}(\Omega)$ je množina tautológií výrokovej logiky.

- Význam Kripkeho prístupu k sémantickej interpretácii modálnej logiky spočíva v tom, že sa mu podarilo ukázať, ako pomocou podmienok kladených na binárnu reláciu R z jeho systému $M = (W,R,v)$ sme schopný modelovať jednotlivé modálne logiky, ktoré boli zostrojené Lewisom použitím rôznych rozšírení axióm výrokovej logiky o ďalšie axiómy reprezentované formulami modálnej logiky.

Definícia

Základný axiomatický systém modálnej logiky je tvorený:

(1) množinou tautológií výrokovej logiky $L_{prop}(\Omega)$,

(2) tautológiou modálnej logiky (označenou písmenom K na počesť Saula Kripkeho) $\Box(\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow (\Box\varphi \Rightarrow \Box\psi)$ a

(3) ***pravidlom modus ponens*** (pravidlo odlúčenia), kde platí, že ak formuly φ a $\varphi \Rightarrow \psi$ sú tautológie, potom aj formula ψ je tautológia. Toto pravidlo sa niekedy zapisuje aj ako schéma

$$\begin{array}{|l} \varphi \\ \varphi \Rightarrow \psi \\ \hline \psi \end{array}$$

(4) ***Pravidlo nutnosti* (*necesitácie*)**. Ak formula φ je tautológia, potom aj formula $\Box\varphi$ je tautológia

$$\begin{array}{|l} \varphi \\ \hline \Box\varphi \end{array}$$

(5) ***Pravidlo substitúcie***. Nech φ je tautológia, ktorý obsahuje výrokové premenné $\left(p_1, p_2, ..., p_n\right)$. Nech $\left\{\psi_1, \psi_2, ..., \psi_n\right\}$je množina ľubovolných formúl (ktorých počet je rovnaký ako počet premenných v φ). Nech formula ψ vznikne z φ tak, že každá premenná p_i je substituovaná formulou ψ_i, pre $i = 1, 2, ..., n$

$$\psi = \varphi\left(p_1/\psi_1, p_2/\psi_2, ..., p_n/\psi_n\right)$$

Potom takto vytvorená formula ψ je opäť tautológiou.

(6) ***Pravidlo nahradenia ekvivalentých podformúl***. Nech φ je tautológia a nech ψ vznikne z φ substitúciou jej ľubovolnej podformuly $\varphi' \subset \varphi$ formulou ψ', ktorá je s ňou ekvivalentná, $\varphi' \equiv \psi'$

$$\psi = \varphi\left(\varphi'/\psi'\right)$$

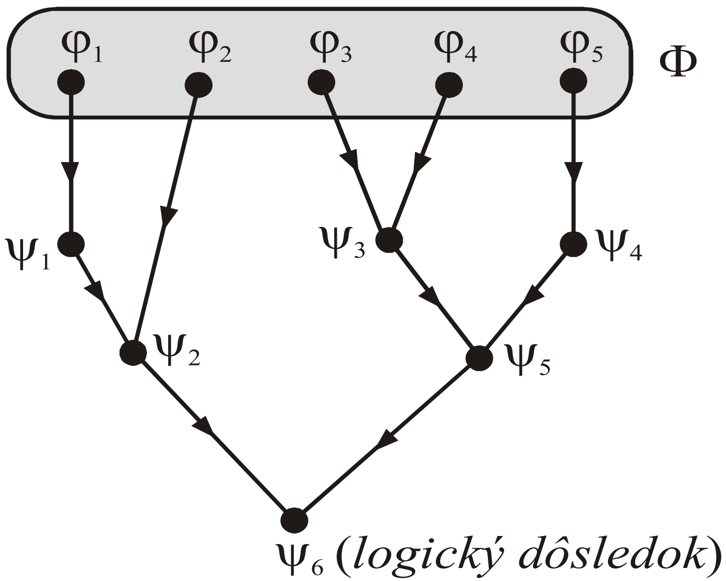
potom aj ψ je tautológia.

Definícia 3.2.

(1) *Formula* φ *sa nazýva* **bezprostredným logickým dôsledkom** *množiny formúl* $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n\}$ *vtedy a len vtedy, ak vznikne aplikáciou jedného z pravidiel* (3-5) *axiomatického systému na formuly z* Φ.

(2) *Formula* φ *sa nazýva* **logický dôsledok** *množiny formúl* Φ *(čo označíme* $\Phi \vdash \varphi$ *vtedy a len vtedy, ak* $\varphi \in \Phi$ *alebo je bezprostredným dôsledkom* Φ *alebo je bezprostredným dôsledkom* Φ *rozšírenej o niektoré jej bezprostredné dôsledky.*

(3) *Konečná postupnosť formúl* $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n$ *sa nazýva* **dôkaz** *formuly* φ *z množiny* Φ *vtedy a len vtedy, ak* $\varphi = \varphi_n$ *a každá formula* φ_i *z tejto postupnosti je buď bezprostredným logickým dôsledkom niektorých formúl z* Φ *alebo formúl* $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_{i-1}$.



Znázornenie postupnej tvorby logického dôsledku $\{\varphi_1,...,\varphi_5\} \vdash \psi_6$

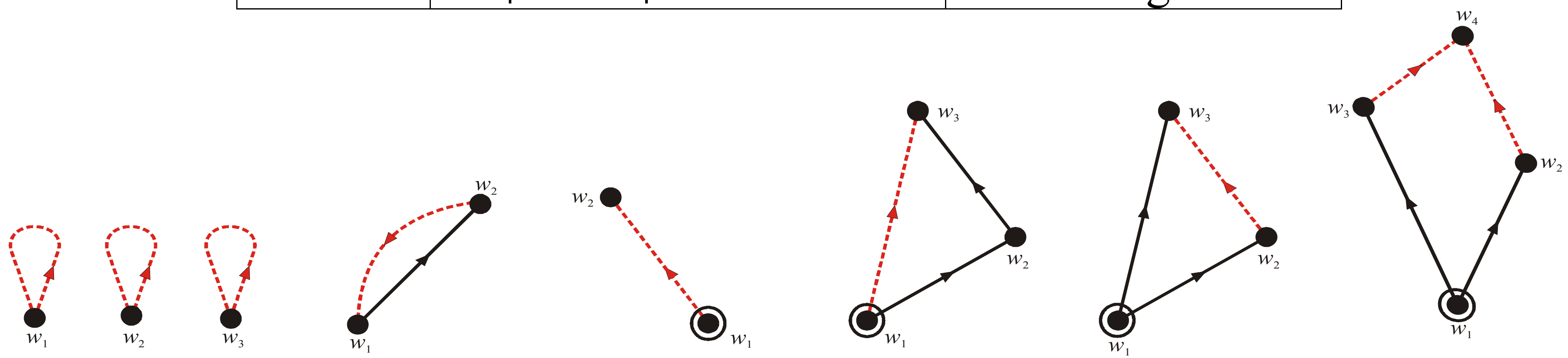
$$\psi_6 = O\Big(\big(O(\varphi_1),\varphi_2\big),O\big(O(\varphi_3,\varphi_4),O(\varphi_5)\big)\Big)$$

kde *O* je unárny/binárny operátor reprezentujúci pravidlá odvodozovania.

$$\psi_1 \to \psi_2 \to \psi_3 \to \psi_4 \to \psi_5 \to \boxed{\psi_6}$$

Dodatočné axiómy modálnej logiky

názov	*Axióma*	*relácia R*
K	$\Box(\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow (\Box\varphi \Rightarrow \Box\psi)$	–
T	$\Box\varphi \Rightarrow \varphi$	reflexívna
D	$\Box\varphi \Rightarrow \Diamond\varphi$	sériová
4	$\Box\varphi \Rightarrow \Box\Box\varphi$	tranzitívna
5	$\Diamond\varphi \Rightarrow \Box\Diamond\varphi$	euklidovská
B	$\varphi \Rightarrow \Box\Diamond\varphi$	symetrická
C	$\Diamond\Box\varphi \Rightarrow \Box\Diamond\varphi$	konvergentná



reflexívna symetrická sériová tranzitívna euklidovská konvergentná

Veta

(1) Formula $\Box\varphi \Rightarrow \varphi$ (označená T) je tautológia pre Kripkeho modely $\mathbb{M} = (W, R, v)$, ktorých relácia R je ***reflexívna***.

(2) Formula $\Box\varphi \Rightarrow \Diamond\varphi$ (označená D) je tautológia pre Kripkeho modely $\mathbb{M} = (W, R, v)$, ktorých relácia R je ***sériová***.

(3) Formula $\Box\varphi \Rightarrow \Box\Box\varphi$ (označená 4) je tautológia pre Kripkeho modely $\mathbb{M} = (W, R, v)$, ktorých relácia R je ***tranzitívna***.

(4) Formula $\Diamond\varphi \Rightarrow \Box\Diamond\varphi$ (označená 5) je tautológia pre Kripkeho modely $\mathbb{M} = (W, R, v)$, ktorých relácia R je ***euklidovská***.

(5) Formula $\varphi \Rightarrow \Box\Diamond\varphi$ (označená B) je tautológia pre Kripkeho modely $\mathbb{M} = (W, R, v)$, ktorých relácia R je ***symetrická***.

(6) Formula $\Diamond\Box\varphi \Rightarrow \Box\Diamond\varphi$ (označená C) je tautológia pre Kripkeho modely $\mathbb{M} = (W, R, v)$, ktorých relácia R je ***konvergentná***.

Dôkaz (1). K tomu, aby vetva bola uzavretá musíme predpokladať, že $w_1 \in \Gamma(w_1)$, potom $(w_1,w_1)\in R$, pre každé $w_1 \in W$, t. j. relácia R je ***reflexívna***.

$$w_1 \vDash \neg(\Box\varphi \Rightarrow \varphi)$$

$$w_1 \vDash \Box\varphi$$
$$w_1 \vDash \neg\varphi$$

$$w_2 \vDash \varphi \qquad \forall w_2 \in \Gamma(w_1)$$

X

Dôkaz (2). K tomu, aby vetva bola uzavretá musíme predpokladať, že pre každé $w_1 \in W$ podmnožina $\Gamma\left(w_1\right) \neq \varnothing$, to platí vtedy, ak relácia R je ***sériová***.

$$w_1 \vDash \neg(\Box\varphi \Rightarrow \Diamond\varphi)$$

$$w_1 \vDash \Box\varphi$$

$$w_1 \vDash \Box\neg\varphi$$

$$w_2 \vDash \varphi \qquad \forall w_2 \in \Gamma(w_1)$$

$$w_3 \vDash \neg\varphi \qquad \forall w_3 \in \Gamma(w_1)$$

x

Dôkaz (3). K tomu, aby vetva tabla bola uzavretá, predpoklad ***tranzitívnosti*** (znázornený červenou hranou na obrázku) zabezpečí, že vetva je uzavretá.

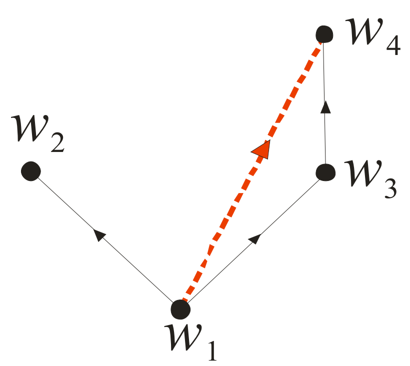
$$w_1 \vDash \neg(\Box\varphi \Rightarrow \Box\Box\varphi)$$

$$w_1 \vDash \Box\varphi$$
$$w_1 \vDash \Diamond\Diamond\neg\varphi$$

$$w_2 \vDash \varphi \qquad \forall w_2 \in \Gamma(w_1)$$
$$w_3 \vDash \Diamond\neg\varphi \qquad \exists w_3 \in \Gamma(w_1)$$

$$w_4 \vDash \neg\varphi \qquad \exists w_4 \in \Gamma(w_3)$$

x



Dôkaz (4). Uzavretosť vetvy sémantického tabla vyplýva zo skutočnosti, že relácia R je euklidovská.

$$w_1 \models \neg(\Diamond\varphi \Rightarrow \Box\Diamond\varphi)$$

$$w_1 \models \Diamond\varphi$$

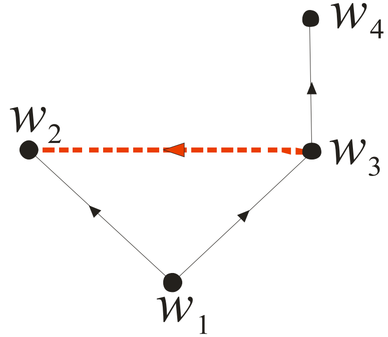
$$w_1 \models \Diamond\Box\neg\varphi$$

$$w_2 \models \varphi \qquad \exists w_2 \in \Gamma(w_1)$$

$$w_3 \models \Box\neg\varphi \qquad \exists w_3 \in \Gamma(w_1)$$

$$w_4 \models \neg\varphi \qquad \forall w_4 \in \Gamma(w_3)$$

x



Dôkaz (5). Uzavretosť vetvy sémantického tabla vyplýva zo skutočnosti, že relácia R je symetrická.

$$w_1 \vDash \neg(\varphi \Rightarrow \Box\Diamond\varphi)$$

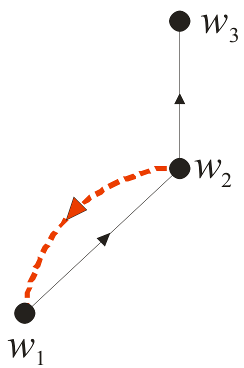
$$w_1 \vDash \varphi$$

$$w_1 \vDash \Diamond\Box\neg\varphi$$

$$w_2 \vDash \Box\neg\varphi \qquad \exists w_2 \in \Gamma(w_1)$$

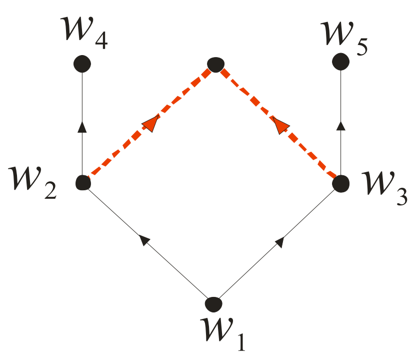
$$w_3 \vDash \neg\varphi \qquad \forall w_3 \in \Gamma(w_2)$$

X



Dôkaz (6). Ak je relácia R ***konvergentná***, potom vetva sémantického stromu je uzavretá.

1	$w_1 \vDash \neg(\Diamond\Box\varphi \Rightarrow \Box\Diamond\varphi)$	
2	$w_1 \vDash \Diamond\Box\varphi$	
3	$w_1 \vDash \Diamond\Box\neg\varphi$	
4	$w_2 \vDash \Box\varphi$	$\exists w_2 \in \Gamma(w_1)$
5	$w_3 \vDash \Box\neg\varphi$	$\exists w_3 \in \Gamma(w_1)$
6	$w_4 \vDash \varphi$	$\forall w_4 \in \Gamma(w_2)$
7	$w_5 \vDash \neg\varphi$	$\forall w_5 \in \Gamma(w_3)$
	x	



Veta.

(1) Ak je relácia *R* symetrická a tranzitívna, potom je euklidovská.

(2) Ak je relácia *R* reflexívna, potom je sériová.

(3) Tieto tri podmienky sú ekvivalentné:

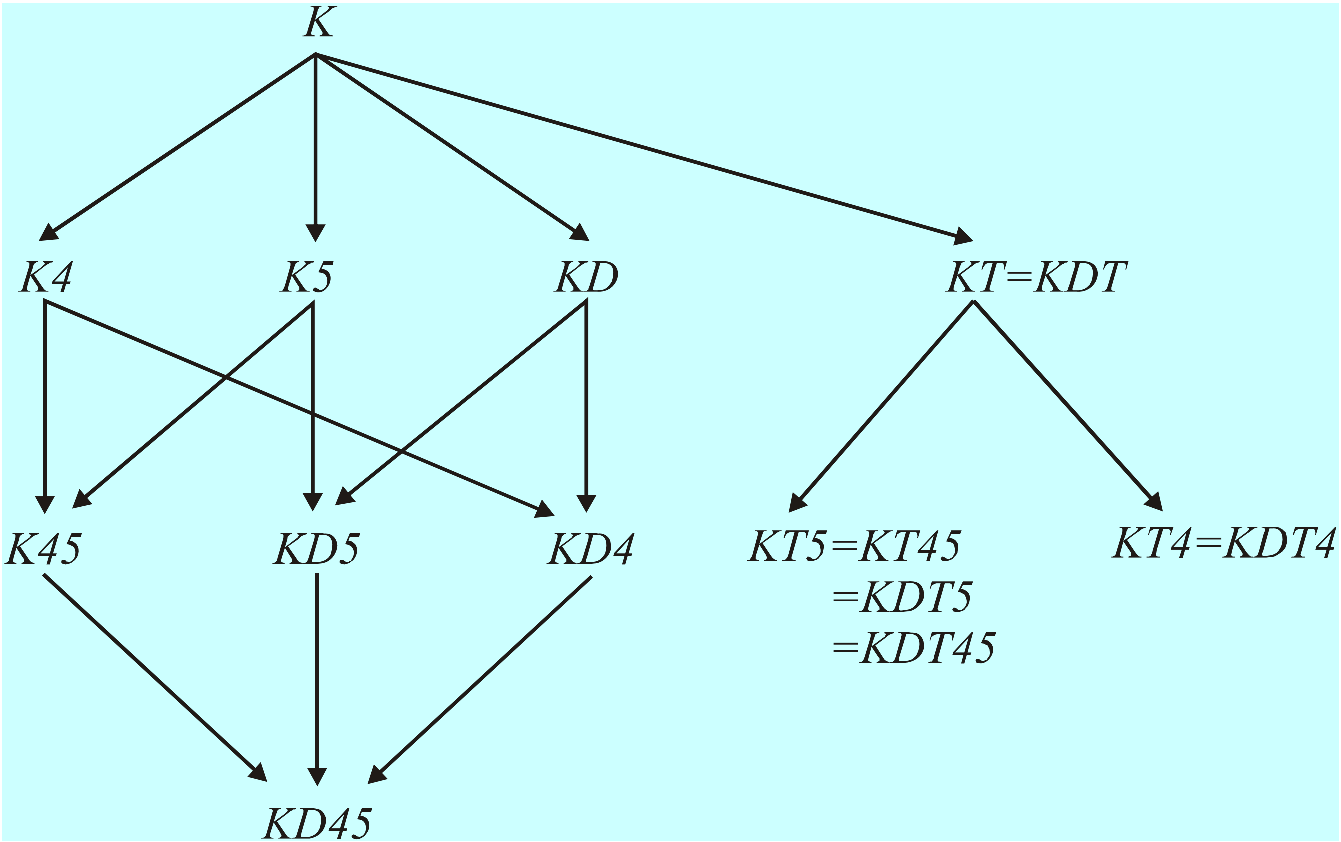
(α) Relácia *R* je symetrická, tranzitívna a sériová.

(β) Relácia *R* je reflexívna a euklidovská.

(γ) Relácia *R* je reflexívna, symetrická a tranzitívna (relácia rovnosti).

Rôzne typy logík

Rôzne axiomatické systémy modálnej logiky, ktoré sú založené na axiómach T, D, 4 a 5. Niektoré axiomatické systémy produkujú ekvivalentné modálne logiky (na obrázku sú vyznačené znamienkom rovnosti).



#	názov logiky	axiómy	Charakteristika relácie	iný názov
1	K-logika	K	-	-
2	K4-logika	K+4	tranzitívna	4
3	K5-logika	K+5	euklidovská	5
4	KD-logika	K+D	sériová	D
5	KT-logika	K+T	reflexívna	T
6	KDT-logika	K+D+T	reflexívna - sériová	
7	K45-logika	K+4+5	tranzitívna - euklidovská	45
8	KD5-logika	K+D+5	sériová - euklidovská	D5
9	KD4-logika	K+D+4	sériová - tranzitívna	D4
10	KT5-logika	K+T+5	reflexívna - euklidovská	S5
11	KT45-logika	K+T+4+5	reflexívna - euklidovská - tranzitívna	
12	KDT5-logika	K+D+T+5	reflexívna - euklidovská - sériová	
13	KDT45-logika	K+D+T+4+5	reflexívna - euklidovská - sériová - tranzitívna	
14	KD45	K+D+4+5	sériová - reflexívna - euklidovská	D45
15	KT4	K+T+4	reflexívna - tranzitívna	S4
16	KDT4	K+D+T+4	reflexívna - tranzitívna - sériová,	

Poznámka

- Kombináciou prvých štyroch axióm za tab. 3.1 môžeme zostrojiť $2^4 = 16$ rôznych axiomatických systémov pre modálnu logiku, avšak v dôsledku ekvivalentnosti kripkeovskych relácií R niektorých axióm, niektoré tieto axiomatické systémy sú navzájom ekvivalentné, takže dostávame len 11 rôznych modálnych systémov v rámci ich axiomatickej (syntaktickej) formulácie.
- K tomuto výsledku dospel už počiatkom 20. storočia americký logik C. I. Lewis v monografii *A survey of symbolic logic* (1918), kde systematicky študoval rôzne typy modálnych logík. V tejto dôležitej tabuľke susedné vysvietené susedné riadky (5-6, 10-13, 15-16) reprezentujú ekvivalentné logiky. Tieto závery vyplývajú zo skutočnosti, že je možné dokázať, že vlastnosti kripkeovských relácií R vo všetkých daných vysvietených riadkoch sú navzájom ekvivalentné.
- Tento výsledok možno pokladať za fundamentálny vklad amerického logika S. Kripkeho, ktorý ako 19-ročný publikoval v r. 1959 v prácu v *Journal of Symbolic Logic*, kde navrhol sémantickú interpretáciu pomocou alternatívnych svetov a ukázal, že pomocou vlastností relácie R je možné klasifikovať rôzne typy modálnych logík, ktoré boli odvodené už C. I. Lewisom.

Prirodzená dedukcia jednoduchej *K* modálnej logiky

Hilbertov axiomatický systém klasickej výrokovej logiky o *K*-formulu $\Box(\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow (\Box\varphi \Rightarrow \Box\psi)$ a pravidlo nutnosti (necesitácie) $\varphi / \Box\varphi$.

1. *Pravidlo K-formuly*

$$\begin{array}{|l} \Box\varphi \\ \Box(\varphi \Rightarrow \psi) \\ \hline \Box\psi \end{array}$$

Poznamenajme, že toto pravidlo nie je nič iné, ako ekvivalentný prepis *K*-formuly $\Box(\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow (\Box\varphi \Rightarrow \Box\psi)$ (pozri príklad).

2. *Pravidlo nutnosti,* ak platí φ, potom platí aj formula $\Box\varphi$

$$\begin{array}{|l} \varphi \\ \hline \Box\varphi \end{array}$$

spojka	eliminácia	introdukcia
$\wedge$	$\dfrac{\varphi\wedge\psi}{\varphi \quad \psi}$	$\dfrac{\varphi \qquad \psi}{\varphi\wedge\psi}$
$\vee$	$\dfrac{\varphi\vee\psi \qquad \neg\varphi}{\psi}$	$\dfrac{\varphi \qquad \psi}{\varphi\vee\psi}$
$\Rightarrow$	$\dfrac{\varphi\Rightarrow\psi \qquad \varphi}{\psi}$	$\dfrac{\psi \qquad \varphi}{\psi\Rightarrow\varphi}$
$\neg$	$\dfrac{\neg\,\neg\varphi}{\varphi}$	$\dfrac{\varphi\Rightarrow\psi \quad \varphi\Rightarrow\neg\psi}{\neg\varphi} \qquad \dfrac{\varphi\Rightarrow\psi \qquad \neg\psi}{\neg\varphi}$
Pravidlá K-formuly	$\dfrac{\Box\varphi \qquad \Box(\varphi\Rightarrow\psi)}{\Box\psi}$ $\dfrac{\Diamond\varphi \qquad \Box(\varphi\Rightarrow\psi)}{\Diamond\psi}$	$\dfrac{\Box\neg\psi \qquad \Box(\varphi\Rightarrow\psi)}{\Box\neg\varphi}$ $\dfrac{\Diamond\neg\psi \qquad \Box(\varphi\Rightarrow\psi)}{\Diamond\neg\varphi}$

Vybrané tautológie jednoduchej modálnej logiky

(1)	$\models\left(\Diamond p \equiv \neg\Box(\neg p)\right)$
(2)	$\models\left(\Box p \Rightarrow \Diamond p\right)$
(3)	$\models\left(\left(\Box\left(p \wedge q\right)\right) \equiv \left(\left(\Box p\right) \wedge \left(\Box q\right)\right)\right)$
(4)	$\models\left(\Diamond\left(p \vee q\right) \equiv \left(\Diamond p\right) \vee \left(\Diamond q\right)\right)$
(5)	$\models\left(\left(\Box p\right) \vee \left(\Box q\right) \Rightarrow \Box\left(p \vee q\right)\right)$
(6)	$\models\left(\Diamond\left(p \wedge q\right) \Rightarrow \left(\Diamond p\right) \wedge \left(\Diamond q\right)\right)$
(7)	$\models\left(\Box\left(p \Rightarrow q\right) \Rightarrow \left(\Box p \Rightarrow \Box q\right)\right)$
(8)	$\models\left(\Box\left(p \Rightarrow q\right) \Rightarrow \left(\Diamond p \Rightarrow \Diamond q\right)\right)$
(9)	$\models\left(\Diamond p \Rightarrow \Diamond q\right) \Rightarrow \left(\Diamond\left(p \Rightarrow q\right)\right)$

The End

I like my net