4. kapitola

Úvod do epistemickej logiky

Motto:

Zviera nepochybne vie, ale nevie, že vie.
(Teilhard de Chardin)

Osoba, ktorá všetko vie, potom vie, že vie a vie, že vie, že vie, až do nekonečna.
(Baruch de Spinoza)

4.1 Syntax epistemickej logiky

Pod syntaxom v logike sa rozumie metóda konštrukcie platných formúl danej logiky z výrokových premenných a logických spojok. Táto konštrukcie formúl má charakter rekuretného postupu, keď z menších častí (podformúl) zostrojujeme postupne výslednú formulu. Tento postup umožňuje každú formulu reprezentovať pomocou syntaktického stromu, ktorý jednoznačne špecifikuje jeho rekurentnú konštrukciu a teda aj všetky jej podformuly.

Epistemická logika je rozšírenie klasickej výrokovej logiky o dve epistemické (modálne) unárne spojky $\Box$ a $\Diamond$, ktoré majú túto interpretáciu:

(1) formula $\Box\varphi$ sa číta „*agent vie, že platí* φ“,
(2) formula $\Diamond\varphi$ sa číta „*agent sa domnieva, že platí* φ“, čo môžeme alternatívne formulovať „*agent nevie, že neplatí* φ“.

Z takto špecifikovanej unárnej spojky $\Diamond$ vyplýva, že je určená pomocou spojky $\Box$ známou formulou $\Diamond\varphi = \neg\Box\neg\varphi$.

Definícia 4.1. Nech $\Omega = \{p, q, ..., p', q', ...\}$ je množina ***výrokových premenných*** (***atomických výrokov***) a nech $\{\neg, \wedge, \Box\}$ sú logické spojky. Minimálna ***množina formúl*** epistemickej logiky $\Lambda(\Omega)$ je rekurentne definovaná takto:
(1) $\Omega \subseteq \Lambda$,
(2) ak $(\varphi \in \Lambda(\Omega))$, potom $(\neg\varphi), (\Box\varphi) \in \Lambda(\Omega)$,
(3) ak $(\varphi, \psi \in \Lambda(\Omega))$, potom $(\varphi \wedge \psi) \in \Lambda(\Omega)$.

K tejto definícii formúl epistemickej logiky uvedieme dve poznámky:

(a) V definícii (2.1) boli explicitne použité len tri logické spojky, ostatné môžu byť považované za skratky týchto výrazov

$$\varphi \vee \psi =_{def} \neg(\neg\varphi \vee \neg\psi) \tag{2.1a}$$

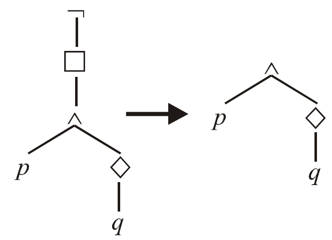
$$\varphi \Rightarrow \psi =_{def} \neg\varphi \vee \psi \tag{2.1b}$$

$$\varphi \equiv \psi =_{def} (\varphi \Rightarrow \psi) \wedge (\psi \Rightarrow \varphi) \tag{2.1c}$$

$$\Diamond\varphi =_{def} \neg\Box\neg\varphi \tag{2.1d}$$

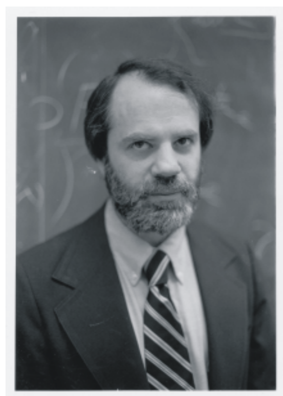
(b) Vonkajšie zátvorky obvykle vynechávame pre zvýšenie zrozumiteľnosti formuly. Avšak zátvorky ponechávame, pokiaľ ich odstránenie by viedlo k nejednoznačnosti „čítania“ formuly. K zníženiu tejto nejednoznačnosti sa zavádzajú pravidlá priority aplikácie logických spojok: $\{\neg\} > \{\Box, \Diamond\} > \{\wedge, \vee\} > \{\Rightarrow\} > \{\equiv\}$.

Každá formula epistemickej logiky môže byť reprezentovaná pomocou syntaktického stromu, ktorý špecifikuje postup, akým bola formula zostrojená pomocou rekuretnej definície 2.1, pozri obr. 2.1. Každý podstrom syntaktického stromu špecifikuje podformulu danej formuly.



Obrázok 4.1. Syntaktický strom formuly $\varphi = \neg\Box(p \wedge \Diamond q)$ a jeden z možných jeho podstromov, ktorý špecifikuje podformulu $\psi = p \wedge \Diamond q$.

Jaakko Hintikka ($*$1928)



Saul Kripke ($*$1940)

4.2 Kripkeho sémantika modálnej logiky

V prípade, že formula obsahuje epistemickú spojku, princíp extensionality je nepoužiteľný pre výpočet pravdivostnej hodnoty celkovej formuly. Študujme výrok „vo svete w agent vie, že platí p“, čo formálne môžeme zapísať pomocou epistemickej unárnej spojky ako $\Box p$. Pravdivosť tohto výroku $\Box p$ vo svete w nemôžeme rozhodnúť len na základe pravdivosti výroku p vo svete w, modálna spojka $\Box$ s významom „nutne“ komplikuje situáciu s určením pravdivosti výroku $\Box p$ vo svete w, klasická logika nemá prostriedky na to, aby postihla, že niečo „nutne“ platí. Neklasické riešenie tohto problému pochádza od logikov a filozofov Jaakko Hintikku a Saula Kripkeho, ktorí počiatkom 60. rokov minulého storočia navrhli sémantický model alternatívnych svetov pre pravdivostnú interpretáciu formúl modálnej logiky (ktorej základy boli už naznačené v predchádzajúcej prednáške, pozri kapitolu 1.3).

Definícia 4.2. *Kripkeho sémantika* modálnej logiky (alebo ***Kripkeho model***) je definovaná pomocou usporiadanej trojice

$$\mathbb{M} = (W, R, v) \tag{2.2}$$

kde

(1) $W = \{w_1, w_2, ..., w_n\}$ je ***množina prípustných*** (alternatívnych) ***svetov***,

(2) $R \subseteq W \times W$ je ***binárna relácia dosiahnuteľnosti***, definovaná nad množinou prípustných svetov, ak $(w, w') \in R$, potom hovoríme, že zo sveta w je ***dosiahnuteľný*** aj svet w'. Budeme postulovať, že relácia pre každé $w \in W$ má nasledovníka $w' \in W$, že $(w, w') \in R$. Podmnožina $\Gamma_i(w) = \{w'; (w, w') \in R_i\} \subseteq W$ obsahuje svety, ktoré sú dosiahnuteľné zo sveta w, táto podmnožina je pre každé $w \in W$ neprázdna, t. j. $\Gamma_i(w) \neq \emptyset$.

(3) $v : W \times \Omega \to \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$ je ***ohodnotenie***, ktoré každú výrokovú premennú $p \in \Omega$ vo svete $w \in W$ ohodnotí pravdivostnou hodnotou $\mathbf{0}/\mathbf{1}$; ak platí $v(w, p) = \mathbf{1}(\mathbf{0})$, potom výroková premenná p je vo svete w pravdivá (nepravdivá).

Nech φ je formula modálnej logiky, potom skutočnosť, že táto formula je pravdivá (nepravdivá) v Kripkeho modeli $\mathbb{M}$ a vo svete w je označená symbolom $(\mathbb{M}, w) \models \varphi$ ($(\mathbb{M}, w) \not\models \varphi$)

$$((\mathbb{M}\ , w) \models \varphi) =_{def} (v(w, \varphi) = \mathbf{1}) \qquad (((\mathbb{M}, w) \not\models \varphi) =_{def} (v(w, \varphi) = \mathbf{0})) \tag{2.3a}$$

symbol $(\mathbb{M}, w) \not\models \varphi$ môžeme vyjadriť dvoma alternatívnymi spôsobmi

$$((\mathbb{M}, w) \not\models \varphi) =_{def} \begin{cases} ((\mathbb{M}, w) \models \neg\varphi) \\ \neg((\mathbb{M}, w) \models \varphi) \end{cases} \tag{2.3b}$$

Špecifikácia pravdivostných hodnôt formúl modálnej logiky je v rámci Kripkeho modelu vykonaná rekurentne tak, že pravdivosť formúl, ktoré neobsahujú modálne spojky je špecifikovaná klasickým spôsobom pomocou princípu extensionality. Avšak formuly, ktoré, ktoré obsahjujú epistemické spojky, už nemajú pravdivostnú hodnotu určenú pomocou princípu extensionality, v tomto prípade používame Kripkeho model prípustných svetov.

Definícia 4.3. V rámci Kripkeho modelu $\mathbb{M} = (W, R, v)$ pravdivostné hodnoty formúl sú učené rekurentne takto:

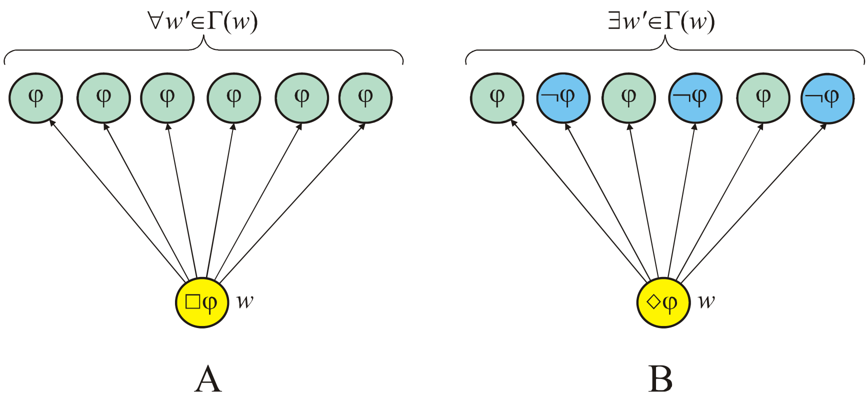
(1) $((\mathbb{M}, w_1) \models \neg\varphi)$ vtedy a len vtedy, ak $((\mathbb{M}, w_1) \not\models \varphi)$, (2.4a)

(2) $((\mathbb{M}, w_1) \models \varphi \wedge \psi)$ vtedy a len vtedy, ak $((\mathbb{M}, w_1) \models \varphi) \wedge ((\mathbb{M}, w_1) \models \psi)$, (2.4b)

(3) $\left(\left(\mathcal{M},w_1\right)\vDash\Box\varphi\right)$ vtedy a len vtedy, ak (2.4c)

$$\forall\left(w_2\in\Gamma_i\left(w_1\right)\right)\left(\left(\mathcal{M},w_1\right)\vDash\varphi\right)=_{def}\bigwedge_{w'\in\Gamma(w)}\left(\left(\mathcal{M},w_1\right)\vDash\varphi\right)\text{'}$$

Vrátime sa k predošlému problému z úvodnej časti tejto podkapitoly, aká je pravdivostná hodnota výroku „vo svete w_1 agent vie, že platí p“, alebo $\left(\mathcal{M},w\right)\vDash\Box p$. Podľa formuly (2.4c), pravdivostná hodnota $\Box p$ vo svete w je určená pravdivostnými hodnotami výroku p vo svetoch $w_2\in\Gamma\left(w_1\right)$. Názorne si to môžeme predstaviť tak, že ak sa má rozhodnúť agent existujúci vo svete w, či výrok „pri prechode hraníc do Česka nutne potrebujem občiansky preukaz“ je pravdivý, zistí jeho pravdivosť u najbližších známych - agentov (ktorí tvoria podmnožinu $\Gamma(w_1)$). Ak dostane len pozitívne odpovede, potom vie, že daný výrok s epistemickou spojkou „agent vie, že platí“ je pravdivý, na cestu do Prahy si zoberiem občiansky preukaz.



Obrázok 2.3. (A) znázorňuje výrok $\Box\varphi$, jeho pravdivosť vo svete w je určená pravdivosťou výroku φ v susedných svetoch $w'\in\Gamma(w)$. Ak je pravdivý vo všetkých týchto svetoch w', potom je pravdivý vo svete w; v opačnom prípade, ak je nepravdivý v aspoň jednom svete w', potom výrok $\Box\varphi$ je nepravdivý vo svete w. (B) znázorňuje výrok $\Diamond\varphi$, tento výrok je pravdivý vo svete vtedy a len vtedy, ak existuje aspoň jeden svet w' v ktorom je formula φ pravdivá; v opačnom prípade, ak je nepravdivý v každom svete w', potom výrok $\Diamond\varphi$ je nepravdivý. Tieto závery sú v súhlase s rovnicami (2.5h-k).

Ďalšie spôsoby určenia pravdivostných hodnôt formúl s inými centrálnymi logickými spojkami môžu byť zostrojené pomocou formúl (2.1a-d).

Veta 4.1. V rámci Kripkeho modelu $\mathcal{M}=\left(W,R,v\right)$ pravdivostné hodnoty formúl sú učené rekurentne pre všetky možné typy centrálnych logických spojek takto:

(1) $\left(\mathcal{M},w_1\right)\vDash\neg\varphi$ vtt $\left(\mathcal{M},w_1\right)\nvDash\varphi$, (2.5a)

(2) $\left(\mathcal{M},w_1\right)\vDash\left(\varphi\wedge\psi\right)$ vtt $\left(\mathcal{M},w_1\right)\vDash\varphi$ a $\left(\mathcal{M},w_1\right)\vDash\psi$, (2.5b)

(2´) $\left(\mathcal{M},w\right)\nvDash\left(\varphi\wedge\psi\right)$ vtt $\left(\mathcal{M},w\right)\nvDash\varphi$ alebo $\left(\mathcal{M},w\right)\nvDash\psi$, (2.5c)

(3) $\left(\mathcal{M},w\right)\vDash\left(\varphi\vee\psi\right)$ vtt $\left(\mathcal{M},w_1\right)\vDash\varphi$ alebo $\left(\mathcal{M},w\right)\vDash\psi$, (2.5d)

(3´) $\left(\mathcal{M},w\right)\nvDash\left(\varphi\vee\psi\right)$ vtt $\left(\mathcal{M},w\right)\nvDash\varphi$ a $\left(\mathcal{M},w\right)\nvDash\psi$, (2.5e)

(4) $\left(\mathcal{M},w\right)\vDash\left(\varphi\Rightarrow\psi\right)$ vtt $\left(\mathcal{M},w\right)\nvDash\varphi$ alebo $\left(\mathcal{M},w\right)\vDash\psi$, (2.5f)

(4´) $\left(\mathcal{M},w\right)\nvDash\left(\varphi\Rightarrow\psi\right)$ vtt $\left(\mathcal{M},w\right)\vDash\varphi$ a $\left(\mathcal{M},w\right)\nvDash\psi$, (2.5g)

(5)	$(\mathbb{M},w)\vDash\Box\varphi$ vtt pre každé $w'\in\Gamma(w)$ platí $(\mathbb{M},w')\vDash\varphi$,		(2.5h)
(5´)	$(\mathbb{M},w)\nvDash\Box\varphi$ vtt existuje také $w'\in\Gamma(w)$, že platí $(\mathbb{M},w')\nvDash\varphi$,		(2.5i)
(6)	$(\mathbb{M},w)\vDash\Diamond\varphi$ vtt existuje také $w'\in\Gamma(w)$, že platí $(\mathbb{M},w')\vDash\varphi$,		(2.5j)
(6´)	$(\mathbb{M},w)\nvDash\Diamond\varphi$ vtt pre každé $w'\in\Gamma(w)$ platí $(\mathbb{M},w')\nvDash\varphi$.		(2.5k)

Poznamenajme, že stačí definovať len vzťahy (2.5a), (2.5b) a (2.5h) (ktoré už boli použité v definícii (1.3) a v vete 2.1 sú tmavo vysvietené), ostatné môžu byť odbodené. Tak napríklad formulu (2.5d) zostrojíme pomocou modifikovaného de Morganovho vzťahu (2.1a)

$$\big((\mathbb{M},w)\vDash\varphi\vee\psi\big)\equiv\big((\mathbb{M},w)\vDash\neg(\neg\varphi\wedge\neg\psi)\big)\equiv\big((\mathbb{M},w)\nvDash\neg\varphi\wedge\neg\psi\big)$$

$$\equiv\big((\mathbb{M},w)\nvDash\neg\varphi\big)\vee\big((\mathbb{M},w)\nvDash\neg\psi\big)\equiv\big((\mathbb{M},w)\vDash\varphi\big)\vee\big((\mathbb{M},w)\vDash\neg\psi\big)$$

Podobným spôsobom dokážeme aj formulu (2.5j)

$$\big((\mathbb{M},w)\vDash\Diamond\varphi\big)\equiv\big((\mathbb{M},w)\vDash\neg\Box\neg\varphi\big)\equiv\neg\big((\mathbb{M},w)\vDash\Box\neg\varphi\big)\equiv\neg\forall\big(w'\in\Gamma(w)\big)\big((\mathbb{M},w')\vDash\neg\varphi\big)$$

$$\equiv\exists\big(w'\in\Gamma(w)\big)\big((\mathbb{M},w')\vDash\neg\neg\varphi\big)\equiv\exists\big(w'\in\Gamma(w)\big)\big((\mathbb{M},w')\vDash\varphi\big)$$

Dôkaz ostatných formúl z vety (2.1) prenechávame čitateľovi ako vynikajúce cvičenie.

Definícia 2.4. Nech $\varphi\in\Lambda(\Omega)$ je formula.

(1) Hovoríme, že formula $\varphi\in\Lambda(\Omega)$ je ***splniteľná vo svete*** $w\in W$ z Kripkovho modelu $\mathbb{M}=(W,R,v)$, čo zapisujeme $(\mathbb{M},w)\vDash\varphi$, vtedy a len vtedy, ak $v(w,\varphi)=1$.

(2) Hovoríme, že formula $\varphi\in\Lambda(\Omega)$ je ***tautológia v Kripkovom modele*** $\mathbb{M}=(W,R,v)$, čo zapisujeme $\mathbb{M}\vDash\varphi$, vtedy a len vtedy, ak je splniteľná pre každý svet z tohto modelu, $\forall(w\in W)(\mathbb{M},w)\vDash\varphi$.

(3) Hovoríme, že formula $\varphi\in\Lambda(\Omega)$ je ***tautológia***, čo zapisujeme $\vDash\varphi$, vtedy a len vtedy, ak je pravdivá pre každý Kripkeho model, $\forall(\mathbb{M})(\mathbb{M})\vDash\varphi$.

Veta 4.2.

(1)	Ak φ je tautológia výrokovej logiky, potom $\vDash\varphi$	(2.6a)
(2)	$\vDash\big(\Box\varphi\wedge\Box(\varphi\Rightarrow\psi)\big)\Rightarrow\Box\psi$	(2.6b)
(3)	ak $\vDash\varphi$ a $\vDash\varphi\Rightarrow\psi$, potom $\vDash\psi$ (modus ponens)	(2.6c)
(4)	ak $\vDash\varphi$, potom $\vDash\Box\varphi$ (každá tautológia je aj poznatok)	(2.6d)
(5)	$\vDash\big(\Diamond p\Rightarrow\neg\Box(\neg p)\big)$	(2.6e
(6)	$\vDash(\Box p\Rightarrow\Diamond p)$	(2.6f
(7)	$\vDash\big((\Box(p\wedge q))\equiv((\Box p)\wedge(\Box q))\big)$	(2.6g)
(8)	$\vDash\big(\Diamond(p\vee q)\equiv(\Diamond p)\vee(\Diamond q)\big)$	(2.6h)
(9)	$\vDash\big((\Box p)\vee(\Box q)\Rightarrow\Box(p\vee q)\big)$	(2.6a)
(10)	$\vDash\big(\Diamond(p\wedge q)\Rightarrow(\Diamond p)\wedge(\Diamond q)\big)$	(2.6i)
(11)	$\vDash\big(\Box(p\Rightarrow q)\Rightarrow(\Box p\Rightarrow\Box q)\big)$	(2.6j)
(12)	$\vDash(p\equiv q)\Rightarrow\vDash(\Box p\equiv\Box q)$	(2.6k)
(13)	$\vDash\big(\Box(p\Rightarrow q)\Rightarrow(\Diamond p\Rightarrow\Diamond q)\big)$	(2.6l)

(14)	$\models\left(\lozenge p\Rightarrow\lozenge q\right)\Rightarrow\left(\lozenge\left(p\Rightarrow q\right)\right)$	(2.6m)
(15)	$\not\models\varphi\Rightarrow\Box\varphi$	(2.6n)
(16)	$\not\models\Box\varphi\Rightarrow\varphi$	(2.6o)
(17)	$\not\models\Box\varphi\Rightarrow\Box\Box\varphi$	(2.6p)

Dôkaz (1). Nech φ je tautológia výrokovej logiky (neobsahuje modálne epistemické spojky), t. j. je pravdivá pre ľubovoľnú interpretáciu výrokových premenných. Z definície pravdivosti formúl epistemickej logiky vyplýva, že táto formula je pravdivá aj pre každá model Kripkeho sémantickej interpretácie.

Dôkaz (2). Použijeme metódu označeného sémantického tabla.

1. $\left(0,w_1\right):\left(\Box\varphi\wedge\Box\left(\varphi\Rightarrow\psi\right)\right)\Rightarrow\Box\psi$
2. $\left(1,w_1\right):\Box\varphi\wedge\Box\left(\varphi\Rightarrow\psi\right)$ rozklad 1
3. $\left(0,w_1\right):\Box\psi$ rozklad 1
4. $\left(1,w_1\right):\Box\varphi$ rozklad 2
5. $\left(1,w_1\right):\Box\left(\varphi\Rightarrow\psi\right)$ rozklad 2
6. $\left(0,w_2\right):\psi\quad\exists w_2\in\Gamma_i\left(w_1\right)$ prepis 3
7. $\left(1,w_3\right):\varphi\quad\forall w_3\in\Gamma\left(w_1\right)$ prepis 4
8. $\left(1,w_4\right):\left(\varphi\Rightarrow\psi\right)\quad\forall w_4\in\Gamma\left(w_1\right)$ prepis 5
9. $\left(0,w_4\right):\varphi$ $\quad\left(1,w_4\right):\psi$ alternatívny rozklad 8

X X

Obe vetve sú uzavreté, preto formula $\left(\Box\varphi\wedge\Box\left(\varphi\Rightarrow\psi\right)\right)\Rightarrow\Box\psi$ je tautológia epistemickej logiky.

Dôkaz (3). Nech φ a $\varphi\Rightarrow\psi$ sú tautológie epistemickej logiky, $\models\varphi$ a $\models\left(\varphi\Rightarrow\psi\right)$. To znamená, že pre každý Kripkeho model $\mathcal{M}=\left(W,R,v\right)$ a pre každý $w_1\in W$ platí $\left(M,w\right)\models\varphi$ a $\left(\mathcal{M},w\right)\models\left(\varphi\Rightarrow\psi\right)$, potom podľa modus ponens platí $\left(M,w\right)\models\psi$. Pretože $\mathcal{M}$ a w_1 sú ľubovoľné, potom musí platiť aj $\models\psi$, čo bolo potrebné dokázať.

Dôkaz (4). Nech platí $\models\varphi$, potom pre každý Kripkeho model $\mathcal{M}$ a každý svet $w\in W$ platí $\left(M,w\right)\models\varphi$. Z tejto podmienky taktiež vyplýva $\forall\left(w_1\in\Gamma_i\left(w\right)\right)\left(M,w_1\right)\models\varphi$, čo je ekvivalentné epistemickej formuly $\models\Box\varphi$, čo bolo potrebné dokázať.

Dôkaz (5).

1. $\left(0,w_1\right):\varphi\Rightarrow\Box\varphi$
2. $\left(1,w_1\right):\varphi$
3. $\left(0,w_1\right):\Box\varphi$
4. $\left(0,w_2\right):\varphi\qquad\exists w_2\in\Gamma_i\left(w_1\right)$

Vetva nie je uzavretá, preto formula $\varphi \Rightarrow \Box\varphi$ nie je tautológia epistemickej logiky

Dôkaz (6).

1. $(0, w_1) : \Box\varphi \Rightarrow \varphi$
2. $(1, w_1) : \Box\varphi$
3. $(0, w_1) : \varphi$
4. $(1, w_2) : \varphi \qquad \forall w_2 \in \Gamma_i(w_1)$

Vetva nie je uzavretá, preto formula $\Box\varphi \Rightarrow \varphi$ nie je tautológia epistemickej logiky

Dôkaz (7).

1. $(0, w_1) : \Box\varphi \Rightarrow \Box\Box\varphi$
2. $(1, w_1) : \Box\varphi$ rozklad 1
3. $(0, w_1) : \Box\Box\varphi$ rozklad 1
4. $(1, w_2) : \varphi \qquad \forall w_2 \in \Gamma_i(w_1)$ prepis 2
5. $(0, w_3) : \Box\varphi \qquad \exists w_3 \in \Gamma_i(w_1)$ prepis 3
6. $(0, w_4) : \varphi \qquad \exists w_4 \in \Gamma_i(w_3)$ prepis 5

Vetva nie je uzavretá, preto formula $\Box\varphi \Rightarrow \Box\Box\varphi$ nie je tautológia epistemickej logiky

Komentár k vete 2.2.

(1) Výroková logika je časťou modálnej logiky, každá tautológia výrokovej logiky je aj tautológiou modálnej logiky.

(2) Tautológia $\models \left(\Box\varphi \wedge \Box(\varphi \Rightarrow \psi)\right) \Rightarrow \Box\psi$ má v modálnej logike mimoriadne postavenie, poznatky typu $\Box\varphi$ sú uzavreté vzhľadom k logickému dôsledku. Táto tautológia má ekvivalentný tvar $\models \Box(\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow (\Box\psi \wedge \Box\varphi)$, ktorý zostrojíme z pôvodnej formuly pomocou prepisom implikácie do disjunktného tvaru a použitím de Morganovej formuly

$$\left(\left(\Box\varphi \wedge \Box(\varphi \Rightarrow \psi)\right) \Rightarrow \Box\psi\right) \equiv \left(\neg\left(\Box\varphi \wedge \Box(\varphi \Rightarrow \psi)\right) \vee \Box\psi\right) \equiv \left(\neg\Box\varphi \vee \neg\Box(\varphi \Rightarrow \psi) \vee \Box\psi\right)$$
$$\equiv \left(\neg\Box\varphi \vee \neg\Box(\varphi \Rightarrow \psi) \vee \Box\psi\right) \equiv \left(\neg\Box(\varphi \Rightarrow \psi) \vee (\neg\Box\varphi \vee \Box\psi)\right)$$
$$\equiv \left(\neg\Box(\varphi \Rightarrow \psi) \vee (\Box\varphi \Rightarrow \Box\psi)\right) \equiv \left(\Box(\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow (\Box\varphi \Rightarrow \Box\psi)\right)$$

Niektoré formuly z vety 2.2 môžeme prepísať do tvaru schém usudzovania:

(1) Formula (2.6b)

$$\begin{array}{|l} \Box\varphi \\ \Box(\varphi \Rightarrow \psi) \\ \hline \Box\psi \end{array} \tag{2.7a}$$

(2) Formula (2.6j)

$$\begin{array}{|l} \Box(\varphi \Rightarrow \psi) \\ \hline \Box\varphi \Rightarrow \Box\psi \end{array} \tag{2.7b}$$

(3) Formula (2.6g)

$$\begin{array}{|l}\Box(p \wedge q) \\ \hline \Box p \\ \Box q\end{array} \qquad \begin{array}{|l}\Box q \\ \Box p \\ \hline \Box(p \wedge q)\end{array} \tag{2.7c}$$

(4) Formula (2.6h)

$$\begin{array}{|l}\Box p \\ \hline \Box(p \vee q)\end{array} \tag{2.7d}$$

(5) Formula (2.6d)

$$\begin{array}{|l}\vDash \varphi \\ \hline \vDash \Box \varphi\end{array} \tag{2.7e}$$

(6) Formula (2.6k)

$$\begin{array}{|l}\vDash (\varphi \equiv \psi) \\ \hline \vDash (\Box\varphi \equiv \Box\psi)\end{array} \tag{2.7f}$$

Platnosť týchto schém usudzovania v epistemickej logike, viedla jej zakladateľa Hintikku k záveru, že v takto formulovanej epistemickej logike sú agenti omniscientní (vševedúci), potom kognitívny orgán týchto agentov musí byť neohraničený, aby bol schopný splniť podmienku omniscientnosti. Menovite, podľa schémy usudzovania (2.7e), agent musí explicitne poznať každú tautológiu epeistemickej logiky, pretože podľa (2.6d) platí $(\vDash \varphi) \Rightarrow (\vDash \Box\varphi)$, t. j. každá tautológia je aj poznatok. Existencia omniscientnosti reprezentuje vážny problém pre teóriu multiagentových systémov, keď ich kognitívny orgán je implementovaný na symbolickej úrovni pomocou epistemickej logiky.