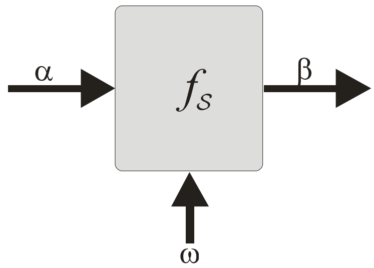
16. kapitola

Logická teória diagnózy zložitých systémov

16.1 Úvodné poznámky

Stanovenie diagnózy zložitých systémov (v medicíne u človeka, veľkých výrobných zariadení, elektronických obvodov, a pod.) patrí už od vzniku umelej inteligencie pred polstoročím k jedným z jej základných problémov. V 60. a 70. rokoch minulého storočia boli vytvorené expertné systémy pre stanovenie diagnózy v medicíne, ktoré pokrývajú rôzne oblasti internej medicíny, psychiatrie, farmakológie a pod. (pozri učebnicu expertných systémov od Poppera a Kelemena [xx]). Základnou paradigmou týchto prístupov je ***model*** daného systému, ktorý je vytvorený pomocou súboru poznatkov – pravidiel. Potom hľadanie diagnózy pre abnormálne správanie sa systému spočíva v hľadaní takých poznatkov o danom szst0me, ktoré sú schopné vysvetliť pozorované abnormálne správanie sa systému. Hľadanie týchto vhodných poznatkov je obvykle založené na inferenčnom aparáte klasickej výrokovej logiky. Až v súčasnosti je študované použitie neklasických a nemonotónnych logík, ktoré umožňujú inkorporovať do procesu vytvárania hypotéz pre diagnózy aj aspekty defaultovej logiky a fuzzy logiky. Cieľom tejto práce je nahradiť klasický inferenčný prístup numerickým princípom minimalizacie účelovej funkcie, ktorá nám popisuje „vzdialenosť" medzi pozorovaným a očakávaným (teoretickým) správaním sa systému v závislosti od binárneho parametru $\omega \in \{0,1\}^p$, ktorý špecifikuje korektnosť alebo nekorektnosť (chybovosť) podsystémov daného študovaného systému.



Obrázok 16.1. Znázornenie zložitého systému $\mathcal{S}$, ktorý je modelovaný pomocou Boolovej funkcie zobrazujúcej m-rozmerné binárne vektory $\alpha \in \{0,1\}^m$ na n-rozmerné binárne vektory $\beta \in \{0,1\}^n$, kde $\omega \in \{0,1\}^p$ je p-rozmerný binárny vektor, ktorý špecifikujú elementy daného systémy, či i-tý element je korektný ($\omega_i = 1$) alebo je nekorektný ($\omega_i = 0$).

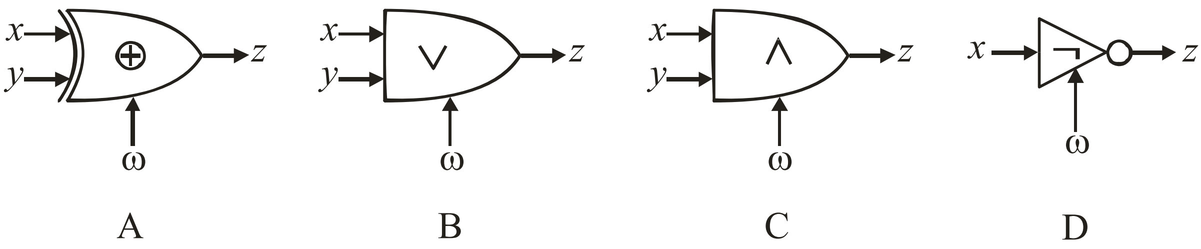
V tejto kapitole budeme študovať konštrukciu diagnózy zložitých systémov, ktoré sú modelované pomocou ***binárneho systému*** $\mathcal{S}$ znázorneného na obrázku 16.1. K tomuto binárnemu systému je priradená Boolova funkcia

$$f_S(\omega):\{0,1\}^m \to \{0,1\}^n \tag{16.1a}$$

kde $\omega \in \{0,1\}^p$ je „parameter“ zobrazenia $f_S(\omega)$, ktorý je reprezentovaný p-rozmerným binármym vektorom. Zobrazenie (16.1) môžeme vyjadriť alternatívne takto

$$\beta = f_S(\alpha;\omega) \tag{16.1b}$$

Vektor $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m) \in \{0,1\}^m$ nazývame ***vstup*** binárneho systému (reprezentovaného zobrazením *f*) , vektor $\beta = (\beta_1, \beta_2, ..., \beta_m) \in \{0,1\}^n$ sa nazýva ***výstup*** binárneho systému a vektor $\omega = (\omega_1, \omega_2, ..., \omega_m) \in \{0,1\}^n$ sa nazýva ***parameter*** binárneho systému.



Obrázok 16.2. Logické brány (elementárnych binárnych Boolovych funkcií – logických spojok) XOR, OR, AND a logická brána (elementárna unárna Boolova funkcia – logická spojka) NOT.

Z teórie Boolových funkcií vyplýva [xx], že každá Boolova funkcia môže byť vyjadrená pomocou elementárnych (binárnych alebo unárnych) Boolových funkcií, ktoré sú priradené logickým spojkám XOR, OR, AND a NOT, pozri obrázok 16.2. Tieto elementárne Boolove funkcie sú špecifikované pomocou logických spojok a parametru ω

$$z = XOR(x, y;\omega) = ((x \oplus y) \wedge \omega) \vee ((x \equiv y) \wedge \neg\omega) \tag{16.2a}$$

$$z = OR(x, y;\omega) = ((x \vee y) \wedge \omega) \vee ((\neg x \wedge \neg y) \wedge \neg\omega) \tag{16.2b}$$

$$z = AND(x, y;\omega) = ((x \wedge y) \wedge \omega) \vee ((\neg x \vee \neg y) \wedge \neg\omega) \tag{16.2c}$$

$$z = NOT(x;\omega) = (\neg x \wedge \omega) \vee (x \wedge \neg\omega) \tag{16.2d}$$

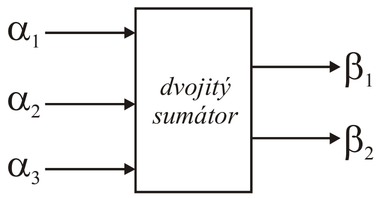
kde $x \equiv y$ je ekvivalencia, ktorá je určená vzťahom $(x \equiv y) \equiv (\overline{x \oplus y})$. Z uvedených špecifikácií vyplýva aj úloha „parametru“ ω v zadaní elementárnych Boolových funkcii, ktoré sú použité pre špecifikáciu binárneho systému (pozri text k obrázku 15.1). Ak hodnota tohto parametru je $\omega = 1$ (true), potom elementárna Boolova funkcia je „korektná“ (t. j. jej výstupná funkčná hodnota je modelovaná danou logickou spojkou); v opačnom prípade, ak jej hodnota je $\omega = 0$ (false), potom výstupná funkčná hodnota je modelovaná negáciou danej logickej spojky. To znamená, že pomocou tohto binárneho parametra sme schopný jednoducho modelovať „korektnosť“ elementárnych podsystémov celkového binárneho systému (pozri obrázok 16.1).

16.1.1 **Dvojitý sumátor**

Ako ilustračný príklad binárneho systému budeme študovať ***dvojitý sumátor*** (ang. *full adder*), ktorý je reprezentovaný schémou

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \beta_1\beta_2 \tag{16.3}$$

sumácie troch 1-bitových čísel α_1, α_2 a α_3, pričom výsledok je uložený v 2-bitovom čísle $\beta_1\beta_2$. K takto špecifikovanému sumátoru priradíme tabuľku vstupných a výstupných hodnôt špecifikovaných schémou (16.3), pozri obrázok 16.3.



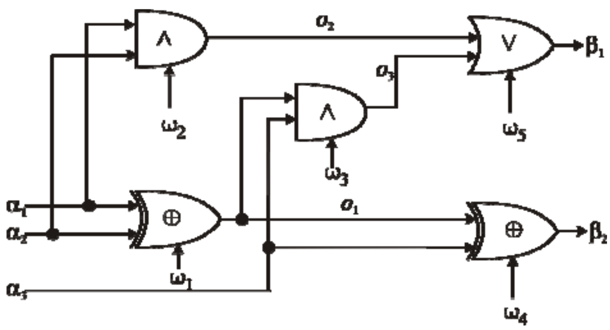
	vstup			výstup	
#	α_1	α_2	α_1	β_1	β_2
1	0	0	0	0	0
2	0	0	1	0	1
3	0	1	0	0	1
4	0	1	1	1	0
5	1	0	0	0	1
6	1	0	1	1	0
7	1	1	0	1	0
8	1	1	1	1	1

Obrázok 16.3. Znázornenie dvojitého sumátora ako binárneho systému, ktorého vstupné a výstupné hodnoty sú špecifikované tabuľkou.

Použitím všeobecnej teórie syntézy Boolových funkcií zadaných tabuľkou ich funkčných hodnôt, dostaneme tieto výrazy pre Boolovu funkciu, ktorá simuluje tabuľku z obrázku16.3.

$$\beta_1 = \bar{\alpha}_1\alpha_2\alpha_3 + \alpha_1\bar{\alpha}_2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_2\bar{\alpha}_3 + \alpha_1\alpha_2\alpha_3 = \left(\alpha_1 \oplus \alpha_2\right)\alpha_3 + \alpha_1\alpha_2 \tag{16.4a}$$

$$\beta_2 = \bar{\alpha}_1\bar{\alpha}_2\alpha_3 + \bar{\alpha}_1\alpha_2\bar{\alpha}_3 + \alpha_1\bar{\alpha}_2\bar{\alpha}_3 + \alpha_1\alpha_2\alpha_3 = \alpha_1 \oplus \alpha_2 \oplus \alpha_3 \tag{16.4b}$$



Obrázok 16.4. Binárny obvod realizujúci dvojitý sumátor (16.3) pomocou Boolovych funkcií (16.4a-b). Tento obvod môžeme chápať ako binárny systém obsahujúci 5 elementov (logických brán z obrázku 16.2), pričom každá brána obsahuje ako vstup aj parameter ω, ktorý špecifikuje korektnosť výstupnej hodnoty danej brány.

```
procedure full_adder(α1,α2,α3: Boolean; {input_activities}
                     var β1,β2: Boolean; {output_activities}
                     ω1, ω2, ω3, ω4, ω5: Boolean {parameters});
var o1,o2,o3 : Boolean; {inner activities}
begin o1:=XOR(α1,α2, ω1); o2:=AND(α1,α2, ω2); o3:=AND(α3,o1, ω3);
|     β1:=OR(o3,o2, ω5); β2:=XOR(o1,α3, ω4);
end;
```

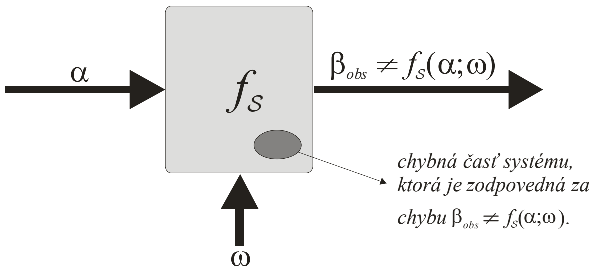
Obrázok 16.5. Pseudopascalovská procedúra dvojitého sumátora.

Pomocou dvoch výsledkov (16.4a-b) môžeme binárny systém, ktorého vlastnosti sú špecifikované tabuľkou z obrázku 16.3, vyjadriť „logickým obvodom“ znázorneným na obrázku 16.4. Poznamenajme, že vstupné a výstupné premenné a a tzv. vnútorné premenné priradené spojom medzi dvoma logickými bránami sa nazývajú ***aktivity***. Podobne, ako pre neurónové siete [xx], môžu byť nazývané ***vstupné aktivity***, ***výstupné aktivity*** a ***vnútorné aktivity***. Pseudopascalovský kód výpočtu aktivít dvojitého sumátora je uvedený na obrázku

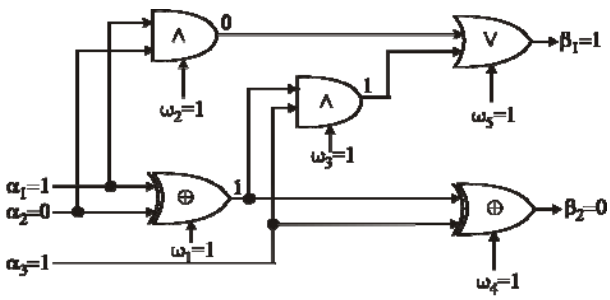
16.5. Existencia tohto kódu pre výpočet aktivít bináneho systému je dôležitá skutočnosť pre zvolený prístup k riešeniu problému stanovenia jeho diagnózy, kde medzi základné predpoklady zvoleného prístupe je postulát, že sme schopný vypočítať vnútorné a výstupné aktivity binárneho systému, ako odozvu na dané vstupné aktivity a vektor parametrov ω špecifikujúceho logické brány binárneho systému. Dvojitý sumátor z tejto podkapitoly nám bude slúžiť ako ilustračný príklad všeobecného binárneho systému modelovaného Boolovou funkciou.

16.2 Formálna špecifikácia systému

Ak poznáme „matematický model“ systému, potom sme schopný spočítať jeho odozvu $\beta = f_{\mathcal{S}}(\alpha)$ na ľubovoľný vstup α, a teda aj rozhodnúť, či nejaký aktuálny výstup systému β je v súhlase s očakávaním výstupom $f_{\mathcal{S}}(\alpha;\omega)$, ktorý je reakciou na vstup α. V prípade, že platí $f_{\mathcal{S}}(\alpha;\omega) \neq \beta$, t. j. očakávaný výstup (podľa modelovej funkcie $f_{\mathcal{S}}$) sa líši od skutočného výstupu, potom vystupuje do popredia otázka „prečo“. Toto je problém stanovenia diagnózy, t. j. určenia tej (alebo tých) elementárnej Boolovej funkcie podieľajúcej sa na konštrukcii celkovej modelovej funkcii $f_{\mathcal{S}}$, ktorá je zodpovedná (alebo ktoré sú zodpovedné) za tento chybný výsledok, pozri obrázok 16.6. V ďalšej časti tejto kapitoly budeme riešiť a diskutovať hlavne problém stanovenia diagnózy systému reprezentovaného Boolovou funkciou.

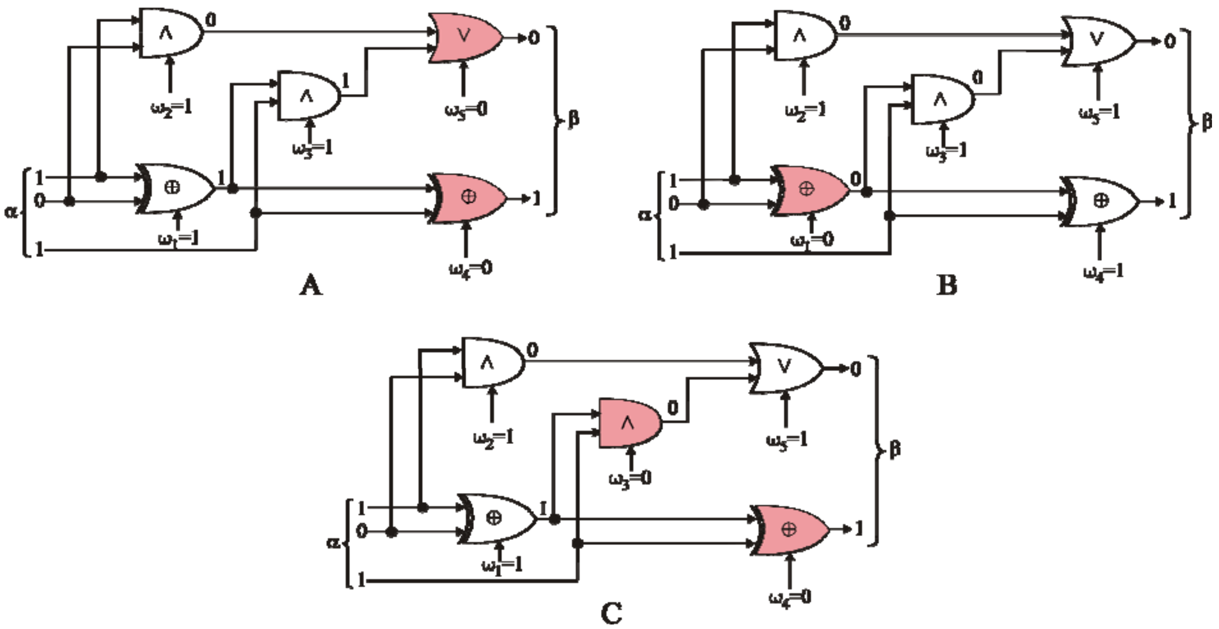


Obrázok 16.6. Znázornenie pozorovania nad binárnym systémom, ktorý je reprezentovaný Boolovou funkciou *f*. Pod pozorovaním rozumieme zistenie nesúhlasu medzi pozorovaným výstupom β_{obs} a očakávanou odozvou $f_{\mathcal{S}}(\alpha)$ na vstup α, t. j. $\beta_{obs} \neq f_{\mathcal{S}}(\alpha;\omega)$. Táto experimentálna skutočnosť je vysvetlená takou diagnózou, ktorá pomocou parametrov $\omega_1, \omega_2, ..., \omega_p$ stanoví takú časť systému (reprezentovanú elementárnymi Boolovymi funkciami), ktorá vysvetlí pozorovanie.



Obrázok 16.7. Znázornenie dvojitého sumátora z obrázku 16.5, kde vstup je $\alpha = (\alpha_1/1, \alpha_2/0, \alpha_3/1)$ a výstup je $\beta = (\beta_1/1, \beta_2/0)$, pričom $f_{\mathcal{S}}(\alpha;\omega) = \beta$ (korektný výstup).

Na obrázku 16.7 je znázornený dvojitý sumátor pre konkrétny vstup $\alpha = (\alpha_1/1, \alpha_2/0, \alpha_3/1)$ a konkrétny výstup $\beta = (\beta_1/1, \beta_2/0)$, pomocou algoritmu z obrázku 16.5, dostaneme, že tento výstup je korektný. V prípade, že výstup z logického obvodu nesúhlasí s korektným výstupom, vystupuje do popredia otázka stanovenia diagnózy zariadenia 16.7, ktorá nám určí „kandidátov“ na chybné elementárne podsystémy, ktorých nekorektnosť vysvetľuje chybné fungovanie zariadenia. Preto obrátime teraz našu pozornosť na určenie chybných elementárnych logických obvodov z dvojitého sumátora, pozri obrázok 16.8.



Obrázok 16.8. Pre logický obvod dvojitého sumátora (pozri obr. 16.7) sú znázornené tri možné určenia chybných elementárnych logických obvodov pre chybný výstup $\beta=(\beta_1/0,\beta_2/1)$ (poznamenajme, že podľa obrázku očakávaný korektný výstup je $\beta_{exp}=(\beta_1/1,\beta_2/0)$), ktorý je odozvou na vstup $\alpha=(\alpha_1/1,\alpha_2/0,\alpha_3/1)$. Chybné elementárne bloky (tieňované) sú označené parametrom $\omega = 0$, zatiaľ čo, korektné elementárne bloky sú označené parametrom $\omega = 1$.

Akú stratégiu zvoliť pre určenie chybných elementárnych blokov tak, aby bol súhlas medzi reálným výstupom a očakávaným výstupom? Najjednoduchší prístup je zmeniť parametre ω_i tých elementárnych blokov, ktoré sú výstupné a ich výstupná aktivita je nekorektná (pozri diagram A obrázku 16.8). V tomto najjednoduchšom prípade nekorektné môžu byť len výstupné elementárne bloky (vstupné alebo vnútorne elementárne bloky zostanú nezmenené). Táto skutočnosť podstatne ohraničuje riešenie diagnózy tým, že sa ohraničuje len na určité typy (výstupných) elementárnych blokov, ostatne elementárne bloky zostávajú nemenné pri procese stanovenia diagnózy. Zovšeobecnenie tohto prístupu spočíva v systematickom prehľadávaní všetkých možných podmnožín z potenčnej množiny[1]

$$\mathcal{P}\left(\{1,2,...,p\}\right)=\left\{\Delta;\Delta\subseteq\{1,2,..,p\}\right\}$$

Pre danú podmnožinu $\Delta\in\mathcal{P}\left(\{1,2,..,p\}\right)$, parametre ω_i, kde $i\in\Delta$, sú nulové, t. j.

$$i\in\Delta\Rightarrow\omega_i=0 \tag{16.5a}$$

$$i\notin\Delta\Rightarrow\omega_i=1 \tag{16.5b}$$

[1] Pripomeňme, že študovaný binárny systém obsahuje p elementárnych blokov, ktoré sú označené indexmi 1, 2, ..., p, t. j. množina všetkých elementárnych logických blokov je označená $\{1,2,\ldots,p\}$. Potom ***potenčná množina*** $\mathcal{P}(\{1,2,\ldots,p\})$ obsahuje všetky možné podmnožiny Δ elementárnych logických blokov; kardinalita tejto potenčnej množiny je $|\mathcal{P}(\{1,2,\ldots,p\})| = 2^p$. Z tejto skutočnosti vyplýva, že zložitosť prehľadávania exponenciálne rastie s rastom počtu elementárnych blokov v tomto systéme.

Definícia 16.1.
(1) Množina $\Delta \in \mathcal{P}(\{1,2,..,p\})$ sa nazýva ***vhodná*** pre interpretáciu binárneho systému $\mathcal{S}$ s danou dvojicou vstupno-výstupných binárnych vektorov $\boldsymbol{\alpha} \in \{0,1\}^m$ a $\boldsymbol{\beta} \in \{0,1\}^n$ práve vtedy, ak vypočítaný vektor $\tilde{\boldsymbol{\beta}} = f_{\mathcal{S}}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\omega})$ je totožný s požadovaným výstupným vektorom **β**, t. j. $\tilde{\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{\beta}$. Binárny vektor parametrov $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, ..., \omega_p)$ je určený vzťahmi (16.5a-b).
(2) Vhodná množina Δ (vzhľadom k dvojici vstupno-výstupných vektorov **α** a **β**) sa nazýva ***minimálna*** práve vtedy, ak nemôžeme z nej odstrániť ani jeden element tak, aby sme nestratili jej vlastnosť vhodnosti.

Podmienka minimálnosti nám zabezpečuje takú vlastnosť ľubovoľnej dvojice množín $\Delta' \subseteq \Delta$, že ak množina Δ je minimálna a vhodná, potom podmnožina Δ′ nemôže byť vhodnou množinou. Našou snahou pre daný binárny systém $\mathcal{S}$ je zostrojiť minimálne množiny Δ, ktoré Nám budú korektne interpretovať vstupno-výstupnú dvojicu **α** a **β**. Na obrázku 16.8 sú znázornené tri riešenia pre dvojitý sumátor z obrázku 16.7 pre danú dvojicu vstupno-výstupných vektorov $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1/1, \alpha_2/0, \alpha_3/1)$ a $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1/0, \beta_2/1)$, uvedené riešenia môžeme vyjadriť pomocou troch minimálnych množín $\Delta_1 = \{4,5\}, \Delta_2 = \{1\}, \Delta_3 = \{3,4\}$.

16.3 Stratégia riešenia

Cieľom tejto kapitoly je naformulovať stratégiu stanovenia diagnózy binárneho vstupno-výstupného systému pomocou experimentálneho zistenia (pozorovania) že výstup systému nie je v súhlase s požadovaným teoretickým výstupom, ktorý je odozvou na daný vstup. Nech množina

$$\mathcal{A}_{train} = \{\boldsymbol{\alpha}/\boldsymbol{\beta}_{obs}\} \tag{16.6}$$

obsahuje dvojice aktivít, kde $\boldsymbol{\beta}_{obs}$ je „pozorovaná“ (alebo „experimentálna“) odozva binárneho systému $\mathcal{S}$ na vstupné aktivity **α**, pričom požadované aktivity (vypočítané pomocou modelu binárneho systému) sú $\boldsymbol{\beta} = f_{\mathcal{S}}(\boldsymbol{\alpha}; \boldsymbol{\omega})$ (pozri obrázok 16.6). K takto definovanej množine vstupno-výstupných aktivít definujme účelovú funkciu

$$E(\boldsymbol{\omega}) = \sum_{\boldsymbol{\alpha}/\boldsymbol{\beta}_{obs}} \left| \boldsymbol{\beta}_{obs} - f_{\mathcal{S}}(\boldsymbol{\alpha}; \boldsymbol{\omega}) \right| \tag{16.7}$$

Naším cieľom bude stanoviť takú hodnotu parametrov $\boldsymbol{\omega}_{opt}$, ktorá minimalizuje (na nulovú hodnotu) funkcionál $E(\boldsymbol{\omega})$

$$\boldsymbol{\omega}_{opt} = arg \min_{\boldsymbol{\omega} \in \{0,1\}^p} E(\boldsymbol{\omega}) \tag{16.8}$$

Podľa (16.5a-b) môžeme **ω** vektory jednoznačne prepísať do tvaru podmnožín $\Delta \in \mathcal{P}(\{1,2,...,p\})$ patriacich do potenčnej množiny vytvorenej pre číselnú množinu $\{1,2,...,p\}$ obsahujúcej indexy elementárnych logických brán, potom

$$\Delta_{opt} = arg \min_{\Delta \in \mathcal{P}} E(\Delta) \tag{16.9}$$

kde účelová funkcia $E(\Delta)$ je definovaná podobne ako (16.7), len vektor **ω** je nahradený ekvivalentnou podmnožinou Δ. Hlavnou výhodou takto ekvivalentne prepísanej účelovej funkcii je, že je vhodnejším prístupom pre generovanie minimálnych množín Δ (pozri definíciu 16.1).

Veta 16.1.
Majme dve množiny $\Delta' \subset \Delta$, ak Δ' je vhodná minimálna množina, potom množina Δ nie je vhodnou minimálnou množinou.

Pomocou tejto vety môže podstatne zredukovať strom riešení pri generovaní účelovej funkcie E pre podmnožiny Δ. Postupne budeme zostrojovať množinu riešení $\mathcal{D} = \left\{\Delta_{opt}^{(1)}, \Delta_{opt}^{(2)}, ...\right\}$, pričom jej elementy vyhovujú podmienkam

$$\left(\forall \Delta_{opt} \in \mathcal{D}\right)\left(E\left(\Delta_{opt}\right) = 0\right) \tag{16.10a}$$

$$\left(\forall \Delta_{opt}, \Delta'_{opt}\right)\left(\Delta_{opt} \not\subseteq \Delta'_{opt}\right) \tag{16.10b}$$

Kde prvá podmienka hovorí, že každý element množiny $\mathcal{D}$ je riešením optimalizačného problému (16.9) a druhá podmienka hovorí, že medzi riešeniami z $\mathcal{D}$ neexistuje vzťah inklúzie. Stratégia riešenia optimalizačného problému (16.9) obsahuje túto postupnosť krokov:

1. krok. Riešenie (16.9) hľadáme v tvare jednoprvkovej množiny $\Delta = \{i\}$, kde $i \in \{1, 2, ..., p\}$ je index elementárnej logickej brány. Množina riešení $\mathcal{D}$ obsahuje všetky tieto elementárne riešenia s jednotkovou kardinalitou.

2. krok. Riešenie (16.9) hľadáme v tvare dvojprvkovej množiny $\Delta = \{i < j\}$, kde $i, j \in \{1, 2, ..., p\}$. Toto riešenie Δ_{opt} je zahrnuté do množiny $\mathcal{D}$ práve vtedy, ak platí (16.10b), t. j. táto množina $\mathcal{D}$ neobsahuje také riešenie Δ', ktoré by bolo podmnožinou aktuálneho riešenia $\Delta = \{i, j\}$.

$$\left(\Delta'_{opt} \in \mathcal{D}\right)\left(\Delta'_{opt} \not\subseteq \Delta_{opt}\right) \Rightarrow \mathcal{D} := \mathcal{D} \cup \left\{\Delta_{opt}\right\} \tag{16.11}$$

3. krok. Riešenie hľadáme v tvare trojprvkovej množiny $\Delta = \{i < j < k\}$, kde $i, j, k \in \{1, 2, ..., p\}$. Podobne ako v predchádzajúcom kroku toto riešenie je zahrnuté do množiny riešení $\mathcal{D}$ práve vtedy, ak táto množina neobsahuje také riešenie Δ', ktoré by bolo podmnožinou aktuálneho riešenia $\Delta = \{i < j < k\}$.

***n*. krok.** Proces z predchádzajúcich krokov opakujeme pre riešenia (16.9) s väčšou kardinalitou ako 3. Pretože v tomto prípade, už hľadáme takú diagnózu v ktorej sú chybné tri alebo viac elementárnych logických brán, pravdepodobnosť ich výskytu prudko klesá. Preto považujeme za dobrú a efektívnu heuristiku, že proces riešenia (16.9) realizujeme len pre riešenia vyhovujúce podmienke $\left|\Delta_{opt}\right| \leq 3$.

16.4 Ilustračný príklad

Teoretický prístup k stanoveniu diagnózy binárneho systému špecifikovaného v predchádzajúcej časti tejto kapitoly bude ilustruvaný pomocou jednoduchého binárneho systému znázorneného na obrázku 16.9, diagram A. Formálne tento systém môže byť interpretovaný pomocou Boolovej funkcie

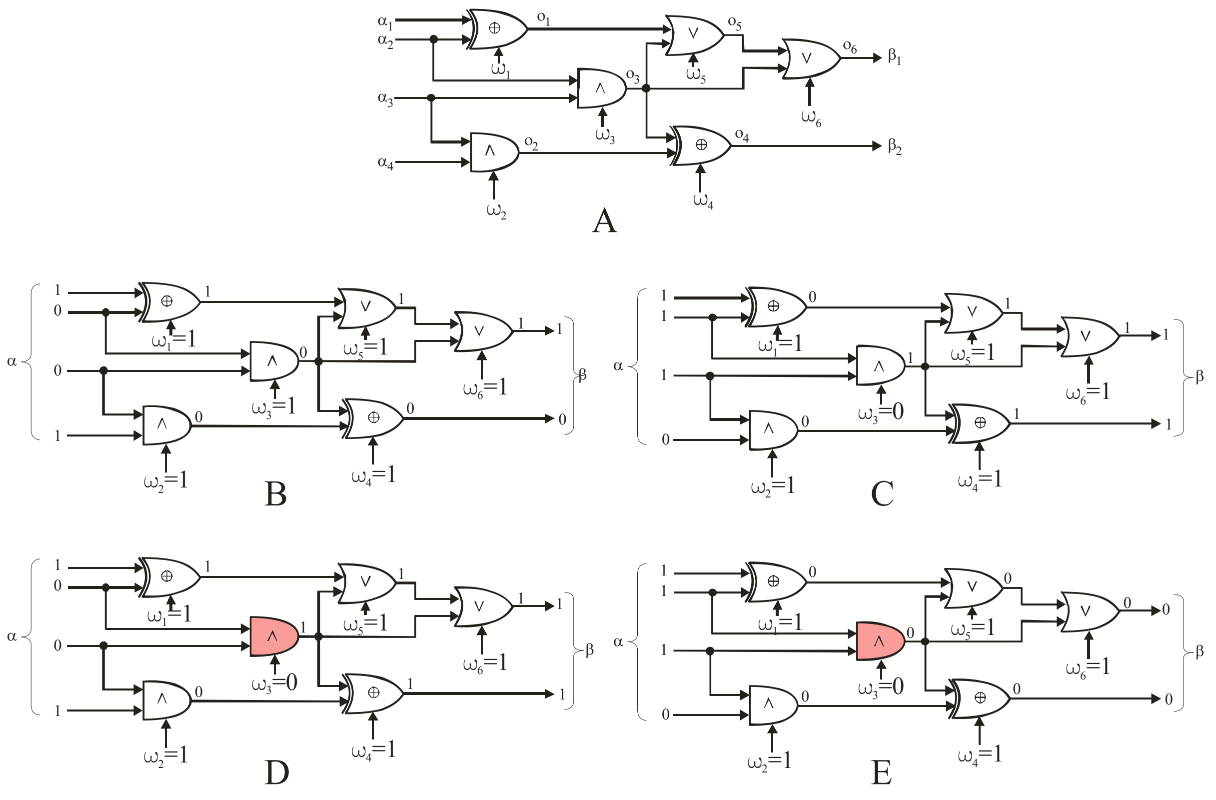
$$f_S(\omega) : \{0,1\}^4 \rightarrow \{0,1\}^2$$

Matematický model tohto systému môžeme jednoducho vytvoriť pomocou diagramu A

$$o_1 = XOR\left(\alpha_1, \alpha_2 ; \omega_1\right)$$

$$o_2 = AND(\alpha_3, \alpha_4; \omega_2)$$
$$o_3 = AND(\alpha_2, \alpha_3; \omega_3)$$
$$\beta_2 = XOR(o_2, o_3; \omega_4)$$
$$o_5 = OR(o_1, o_3; \omega_5)$$
$$\beta_1 = OR(o_3, o_5; \omega_6)$$

Pomocou týchto jednoduchých formúl môžeme jednoducho spočítať odozvu β na vstup α, pričom pomocou parametrov ω_i môžeme jednoducho modelovať korektnosť alebo nekorektnosť jednotlivých elementárnych logických brán. Tak napríklad pre vstup $\alpha = (1001)$ alebo vstup $\alpha = (1110)$ môžeme jednoducho vypočítať modelové výstupy $\beta = (10)$ resp. $\beta = (11)$ (tieto výsledky porovnaj s diagramami B a C).



Obrázok 16.9. (A) Binárny systém obsahujúci šesť elementárnych logických brán, štyri vstupy a dva výstupy, vnútorné aktivity sú označené o_i. (B a C) dva rôzne vstupy (1001) a (1110) a im odpovedajúce výstupy (10) resp. (11) pre binárny systém z predchádzajúceho diagramu A. (D a E) Tretia elemntárna logická brána konjunkcie je deklarovaná ako chybná (ω_3 = 0), výstupy (11) resp. (00) sú deklarované ako pozorované (experimentálne zistené) výstupy.

Deklarujme, že tretia elementárna brána binárneho systému je nekorektná, t. j. položíme ω_3 = 0 (ostatné ω-koeficienty sú jednotkové). Pre takto špecifikovaný chybný binárny systém pre dané vstupy $\alpha = (1001)$ a $\alpha = (1110)$ dostaneme tieto „pozorované“ výstupy $\beta_{obs} = (11)$ resp. $\beta_{obs} = (00)$. Tréningová množina má potom tvar

$$\mathcal{A}_{train} = \{(1001)/(11), (1110)/(00)\} \tag{16.12}$$

Pomocou tejto tréningovej množiny môžeme vytvoriť tieto tri účelové funkcie (16.7)

$$E^{(1)}(\omega)=\left|(11)-f_S\left((1001);\omega\right)\right| \tag{16.13a}$$

$$E^{(2)}(\omega)=\left|(00)-f_S\left((1110);\omega\right)\right| \tag{16.13b}$$

$$E^{(3)}(\omega)=E^{(1)}(\omega)+E^{(2)}(\omega) \tag{16.13c}$$

kde ω parameter má tvar $\omega=(110111)$, t. j. tretia elementárna logická brána (logickej spojky konjunkcie) je špecifikovaná ako chybná. Prvá a druhá účelová funkcia je definovaná k prvej resp. druhej časti tréningovej množiny (16.12). Tretia účelová funkcia je definovaná k celej tréningovej množine (16.12) a môže byť vyjadrená ako súčet prvej a druhej. Táto skutočnosť nám implikuje zaujímavú vlastnosť účelovej funkcie (16.13c), jej riešenie ω_{opt} existuje len vtedy, aj je riešením aj pre prvú a druhú účelovú funkciu. Z čoho bezprostredne vyplýva, že účelová funkcia typu (16.13c) definovaná k viac-prvkovej tréningovej množine (16.12) nám umožňuje nájsť chybnú elementárnu logickú bránu v binárnom systéme, znižuje podstatne pravdepodobnosť toho, že by sa jednalo len o artefakt, ako to môže byť pri prvej a druhej účelovej funkcii. Výsledky optimalizácie účelových funkcií (16.13a-c) sú znázornené v tabuľke 16.1. Základná skutočnosť, ktorá vyplýva z týchto výsledkov je, že ich prienik poskytuje korektné riešenie $\Delta_1=\{3\}$. Táto skutočnosť je veľmi povzbudzujúcim momentom pre efektívnosť popísanej metódy k jednoznačnému stanoveniu diagnózy binárneho systému, pomocou viacprvkovej tréningovej množiny dostávame jednoduchú možnosť určenia korektnej diagnózy minimalizáciou účelovej funkcie (16.7).

Tabuľka 16.1. Optimálne hodnoty Δ-množiny pre rôzne tvary účelovej funkcie

$E^{(1)}(\omega)$	$E^{(2)}(\omega)$	$E^{(1)}(\omega)+E^{(2)}(\omega)$
$\Delta_2=\{3\}$	$\Delta_1=\{3\}$	$\Delta_1=\{3\}$
$\Delta_1=\{2\}$	$\Delta_2=\{2,6\}$	$\Delta_2=\{1,2,6\}$
$\Delta_3=\{4\}$	$\Delta_3=\{4,6\}$	$\Delta_3=\{1,4,6\}$
		$\Delta_4=\{2,5,6\}$
		$\Delta_5=\{4,5,6\}$