Mentálne modely logiky v kognitívnej vede

Vladimír Kvasnička

Ústav aplikovanej informatiky FIIT STU, 812 37 Bratislava
kvasnicka@fiit.stuba.sk

Abstrakt

V práci sú diskutované dva rôzne prístupy ku konštrukcii mentálneho modelu logiky v kognitívnej vede. Prvý prístup je čisto syntaktický a je založený na Gentzenovej prirodzenej dedukcii. Systém obsahuje približne tucet jednoduchých pravidiel usudzovania (napr. modus ponens a modus tollens, hypotetický sylogizmus, inverzia implikácie, atď.) a niekoľko východiskových predpokladov – premís. Tento prístup je vhodný pre užívateľov, ktorí už absolvovali tréning v matematickej logike a sú schopní aplikovať pravidlá usudzovania. Druhý prístup je čisto sémantický a je založený na diagramatickej technike sémantických tabiel. Od užívateľov tento prístup požaduje len elementárnu schopnosť korektne ohodnocovať logické spojky pravdivostnými hodnotami, čo môžeme v našom civilizačnom okruhu považovať za elementárnu kognitívnu schopnosť.

Kľúčové slová: Mentálny model, logika, kognitívna veda, syntaktický model, sémantický model.

Mental models of logic in cognitive science

Abstract

We present two different approaches for the construction of mental models of logic in cognitive science. The first model is a pure syntactical one and is based on the well-known Gentzen natural deduction system. As we have concluded, this approach to the mental modeling is suitable for those users that are already trained in mathematical logic and are able to apply basic syntactic rules of logic. The second model is a pure semantic one and is based on a diagrammatic technique of semantic tableaux. It requires from users only basic knowledge about semantic (truth) evaluation of logical connectives, which belongs in our civilization area to basic human cognitive capabilities.

Key words: Mental models, logic ,cognitive science, syntactic model, semantic model.

Úvodné poznámky

Postavenie logiky v kognitívnej vede je veľmi kontroverzné, je v protiklade s naším intuitívnym pohľadom na logiku, ako na *posvätný grál* kognitívnej vedy a umelej inteligencie. Logika nám slúži ako hlavný teoretický symbolický prostriedok na modelovanie usudzovania (Návrat, 2001; Russel, Novig, 1995). Avšak na druhej strane, pri analýze ľudských schopností používať logiku na elementárnej úrovni (Johnson – Laird, 1983; Stenning, van Lambalgen, 2007), pozorujeme závažné nedostatky. Tieto experimentálne závery sú v kontradikcii s našou všeobecnou vierou, že človek je bytosť racionálna, ktorá uvážlivo používa zásady logiky pri vyvodzovaní nových poznatkov z daných predpokladov – poznatkov a viedli spolu s inými argumentmi ku vzniku koncepcie *ohraničenej racionality* (Cosmides, Tooby, 1992; Gigerenzer, Selten, 2001; Johnson – Laird, 1983; Stenning, van Lambalgen, 2007).

Cieľom tejto práce je prezentovať pohľad súčasnej kognitívnej vedy na tvorbu mentálneho *modelu*[1] logiky. Kognitívna veda sa už niekoľko desaťročí zaoberá problémom, ako ľudia používajú jednoduché logické zákony a aké sa pritom vyskytujú chyby. Inovatívnosť kognitivistického pohľadu na túto zaujímavú problematiku (Johnson – Laird, 1983; Stenning, van Lambalgen, 2007) spočíva v tom, že sa navrhujú mentálne modely kognitívnych aktivít človeka pri riešení jednoduchých logických úloh. Požaduje sa, aby tieto modely boli schopné postihnúť nielen správne riešenia ale aj interpretovať chyby pri konštrukcii riešenia. Mentálny model má určitú zložitosť, ktorá je premenlivá pri aplikovaní na rôzne problémy (na rôzne kategorické sylogizmy) (Johnson – Laird, 1983), pričom očakávame, že táto zložitosť modelu koreluje s výskytom chýb. Existuje dve možnosti pre tvorbu mentálneho modelu logiky:

(1) *Syntaktický prístup*. Mentálny model je stotožnený s Gentzenovou prirodzenou dedukciou (Szabo, 1969), ktorá obsahuje okolo tuctu pravidiel usudzovania vychádzajúcich z elementárnych zákonov logiky s jednoduchou a jasnou interpretáciou ich významu. Z množiny predpokladov $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n\}$ použitím vyššie zmienených pravidiel prirodzenej dedukcie odvodíme záver ψ. Hovoríme, že tento záver logicky vyplýva z predpokladov (alebo, že existuje logický dôkaz formuly ψ z množiny predpokladov $\{\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n\}$) , čo zapisujeme pomocou „relácie“ $\vdash$ takto: $\Phi \vdash \psi$. Syntaktický prístup k tvorbe mentálneho modelu logiky je vhodný pre ľudí, ktorí už absolvovali určité základné vzdelanie z logiky a preto môžu suverénne používať prirodzenú dedukciu ku konštrukcii dôkazov zložitejších formúl.

(2) *Sémantický prístup.* Mentálny model je stotožnený s tvorbou *sémantického* modelu množiny predpokladov, Φ, spolu s tautologickým dôsledkom ψ, čo zapisujeme $\Phi \vDash \psi$. Sémantický prístup je založený na grafickej metóde nazývanej *sémantické tablá*. K ich konštrukcii potrebujeme poznať len elementárne základné pojmy sémantickej interpretácie logických spojok.

---

[1] *Mentálny model* je psychologická reprezentácia reálnej alebo imaginárnej situácie, prvý krát bol postulovaný škótskym psychológom Kennethom Craikom (1943). Predpokladal, že v našej mysli vznikajú modely skutočnosti (reálnej alebo imaginárnej), ktoré napomáhajú k pochopeniu udalostí a javov vznikajúcich v súvislosti s danou skutočnosťou. Podľa Johnsona – Lairda (1983) tieto modely vznikajú v pracovnej pamäti našej mysle ako výsledok percepcie a/alebo imaginácie, snahy vysvetliť a pochopiť danú situáciu. Základnou črtou týchto modelov je, že sú štrukturálne podobné objektom, ktoré reprezentujú (asi tak, ako drevené modely molekúl v chémii ku skutočným molekulám).

Syntax, sémantika a pragmatika výrokovej logiky

Jeden z prvých formálnych systémov v ľudskej histórii bol Euklidov axiomatický systém geometrie, ktorý sa stal vzorom pre rozvíjanie ďalších systémov hlavne v rámci matematiky, informatiky a logiky. V teórii formálnych systémoch sa obvykle od seba striktne separujú tieto tri aspekty:

(1) *syntax* – spôsob konštrukcie jazyka (formúl) teórie,
(2) *sémantika* – významová interpretácia jazyka (jednotlivých formúl), a
(3) *pragmatika* – zmena sémantiky pri zmene prostredia/situácie v ktorej prebieha významová interpretácia formúl.

Pri špecifikácii formálneho systému vystupujú do popredia nasledujúce dve otázky: (1) Za akých podmienok je dôkaz formuly - vety korektný a (2) aké metódy môžu byť použité pri konštrukcii týchto dôkazov.

Veta (teorém, formula, výrok, zákon, argument, ...) je výrok o ktorom môže byť ukázané, že je pravdivý. V tejto súvislosti hovoríme o *dôkaze* vety, ktorý spočíva v postupnosti jednotlivých „medzikrokov“, ktoré sú odvodené buď z množiny jednoduchých postulátov, nazývaných *axiómy*, alebo z predchádzajúcich viet (pomocných viet, často nazývaných lemy) danej postupnosti. Komplikované dôkazy sú obvykle jasnejšie formulované, keď ich dôkaz je rozdelený na jednotlivé medzikroky, ktoré sú formulované ako samostatné vety. Tieto medzikroky - vety v postupnosti sú vytvárané pomocou *pravidiel odvodzovania* (*pravidiel usudzovania*), ktoré z niekoľkých pravdivých tvrdení - argumentov vytvorí nové pravdivé tvrdenie - argument.

Metódy dôkazu logiky sú dôležité nielen pre tvorbu korektných dôkazov v samotnej logike, ale aj v matematike a v informatike. V teoretickej informatike sa napr. študujú rôzne metódy verifikácie korektnosti programu, alebo či operačný systém je bezpečný. V umelej inteligencii pri odvodzovaní nových faktov z danej databázy poznatkov (množiny výrokových formúl, ktorá sa vo výrokovej logike nazýva teória) je dôležité mať zabezpečené, aby daná databáza bola konzistentná (korektná), teda aby z nej súčasne nevyplýval nejaký výrok a taktiež aj jeho negácia. Môžeme teda konštatovať, že zvládnutie metód matematického dôkazu je dôležité tak v samotnej logike, ako aj v matematike a v informatike.

Na záver tejto [vodnej kapitoly uvedieme ešte niekoľko poznámok k pragmatike formálneho systému logiky. Obvykle sa toto hľadisko vôbec nespomína pri špecifikácii logiky, verí sa, že logika je rigidný formálny systém, u ktorého nemôže nastať zmena sémantickej interpretácie pri zmene prostredia (napr. sociálneho). Medzi logikmi existuje pevná viera, ktorá pochádza už od starovekých gréckych logikov, že logika je len jedna a používanie jej zákonov nezávisí na prostredí v ktorom užívateľ vykonáva usudzovania a pod.

Oblasť pragmatiky bola otvorená v logike ruským psychológom z prvej polovice minulého storočia Alexandrom R. Luria (Luria, 1979), ktorý v 30. rokoch vykonal so svojimi spolupracovníkmi expedíciu do stredoázijských oblastí vtedajšieho Ruska, kde skúmali kultúrnu závislosť používania jednoduchých logických zákonov. Miestnemu negramotnému obyvateľovi najprv vysvetlili vstupnú premisu úlohy, že každé zviera, ktoré žije za polárnym kruhom má bielu farbu kožušiny, potom nasledovala konkrétne otázka, akú farbu kožuchu má ľadový medveď, ktorý žije za polárnym kruhom, čo formálne môžeme vyjadriť pomocou schémy

každé zviera žijúce za polárnym kruhom má bielu farbu kožušiny
ľadový medveď žije za polárnym kruhom
―――――――――――――――――――――
?

Väčšina negramotných respondentov odpovedala, že nevie, pretože za polárnym kruhom nikdy nebola. Odpoveď na túto otázku gramotných respondentov (hlavne tých, čo absolvovali vzdelanie v ruskom jazyku), bola diametrálne odlišná, odpovedali, že polárny medveď má biely kožuch

$$\begin{array}{|l}
\textit{každé zviera žijúce za polárnym kruhom má bielu farbu kožušiny} \\
\textit{ľadový medveď žije za polárnym kruhom} \\
\hline
\textit{ľadový medveď má bielu farbu kožušiny}
\end{array}$$

A. Luria z týchto a podobných pozorovaní vyvodzoval, že existuje *kultúrna závislosť* pri používaní schém usudzovania logiky, že ich používanie je závislé od vzdelania respondentov a pod. Tieto experimenty sú neobyčajne zaujímavé a boli v podstate zreprodukované aj v iných oblastiach (napr. v Afrike a v Pacifiku). Žiaľ, existuje aj ich veľmi tvrdá kritika, že sa nejedná o žiadnu kultúrnu závislosť používania elementárnych schém usudzovania, ale beží o problém komunikácie medzi negramotným respondentom a riešiteľom, medzi ktorými existuje veľká kultúrna bariéra, pričom je vôbec otázne, či respondenti správne pochopili položenú otázku. Gramotní respondenti, ktorí zvládli v škole základné trívium (čítanie, písanie a počítanie) obvykle v ruskom jazyku, zrejme už podstatne lepšie chápu riešený problém a sú schopní použiť pravidlo modus ponens na konštrukciu správnej odpovede – riešenia.

Špecifikácia jazyka výrokovej logiky (syntax)

Jazyk L výrokovej logiky je tvorený formulami výrokovej logiky, ktoré sú definované pomocou množiny atomických výrokových premenných $\{p,q,...,p',q',...\}$ a množiny logických spojok $\{\wedge,\vee,\Rightarrow,\equiv,\neg\}$ je množina logických spojok.

Formuly výrokovej logiky, ktoré tvoria jazyk L, sú rekurentne definované ako minimálna množina, ktorá vyhovuje týmto vlastnostiam

(1) $\{p,q,...,p',q',...\} \subseteq L$,

(2) ak $(\varphi \in L)$, potom $(\neg\varphi) \in L$,

(3) ak $(\varphi,\psi \in L)$, potom $(\varphi \wedge \psi),(\varphi \vee \psi),(\varphi \Rightarrow \psi),(\varphi \equiv \psi) \in L$,

Špecifikácia významu výrokovej logiky (sémantiky)

Ďalší pojem dôležitý pre výrokovú logiku je *sémantika*. Pojem pochádza z teórie prirodzených jazykov, kde sémantika špecifikuje význam danej vety (ktorá ma tiež aj svoju syntax). Vo výrokovej logike, ktorá sa zaoberá len pravdivostnými hodnotami premenných a ich formúl, *sémantika* nie je veľmi bohatá. Sémantika výrokovej formuly je vlastne tabuľka pravdivostných hodnôt formuly pre rôzne hodnoty jej výrokov. Formuly (elementy jazyka L výrokovej logiky) majú pravdivostný význam, ktorý je špecifikovaný takto (symbol ´1´ reprezentuje ´pravdivý´ a symbol ´0´ reprezentuje ´nepravdivý´), pozri Tabuľku 1:

(1) *Konjunkcia* $\alpha \wedge \beta$ je pravdivá vtedy a len vtedy (vtt) ak obe jej komponenty sú pravdivé, v opačnom prípade je nepravdivá

$$val(\alpha \wedge \beta) = 1 \text{ vtt } val(\alpha) = 1 \text{ a } val(\beta) = 1$$

$$val(\alpha \wedge \beta) = 0 \text{ vtt } val(\alpha) = 0 \text{ alebo } val(\beta) = 0$$

(2) *Disjunkcia* $\alpha \vee \beta$ je pravdivá vtt, ak aspoň jedna jej komponenta je pravdivá, v opačnom prípade je nepravdivá

$$val(\alpha \vee \beta) = 1 \text{ vtt } val(\alpha) = 1 \text{ alebo } val(\beta) = 1$$

$$val(\alpha \wedge \beta) = 0 \text{ vtt } val(\alpha) = 0 \text{ a } val(\beta) = 0$$

(3) *Implikácia* $\alpha \Rightarrow \beta$ je pravdivá vtt, ak prvá jej komponenta (α) je nepravdivá alebo druhá komponenta (β) je pravdivá, v opačnom prípade (prvá komponenta je pravdivá a druhá komponent je nepravdivá) je nepravdivá

$$val(\alpha \Rightarrow \beta) = 1 \text{ vtt } val(\alpha) = 0 \text{ alebo } val(\beta) = 1$$

$$val(\alpha \Rightarrow \beta) = 0 \text{ vtt } val(\alpha) = 1 \text{ a } val(\beta) = 0$$

(4) *Ekvivalencia* $\alpha \equiv \beta$ je pravdivá vtedy vtt, ak obe komponenty majú rovnakú pravdivostnú hodnotu, v opačnom prípade je nepravdivá

$$val(\alpha \equiv \beta) = 1 \text{ vtt } val(\alpha) = val(\beta)$$

$$val(\alpha \equiv \beta) = 0 \text{ vtt } val(\alpha) \neq val(\beta)$$

(5) *Negácie* $\neg\alpha$ je pravdivá vtt, ak jej komponenta je nepravdivá, v opačnom prípade je nepravdivá

$$val(\neg\alpha) = 1 \text{ vtt } val(\alpha) = 0$$

$$val(\neg\alpha) = 0 \text{ vtt } val(\alpha) = 1$$

Tabuľka 1. Tabuľková metóda pre výpočet pravdivostných hodnôt formúl $\varphi_1 = (p \vee q) \Rightarrow (p \wedge q)$ a $\varphi_2 = (p \wedge q) \Rightarrow (p \vee q)$

w	p	q	$P \vee q$	$p \wedge q$	$\varphi_1 = (p \vee q) \Rightarrow (p \wedge q)$	$\varphi_2 = (p \wedge q) \Rightarrow (p \vee q)$
w_1	0	0	0	0	1	1
w_2	0	1	1	0	0	1
w_3	1	0	1	0	0	1
w_4	1	1	1	1	1	1

Pri tejto príležitosti je vhodné spomenúť psychológov B. Inheldera a J. Piageta, ktorí dôvodia (Inhelder, Piaget, 1964), že už deti vo veku 10 rokov zvládajú zásady sémantického prístupu k výrokovej logike. Sú schopné korektne reprodukovať tabuľku pravdivostných hodnôt pre disjunkciu, konjunkciu a negáciu. Problémy so sémantickou interpretáciou implikácie pretrvávajú až do dospelosti, správna interpretácia vyžaduje základné logické vzdelanie. Z týchto dôvodov sémantický prístup k tvorbe mentálneho modelu logiky je vhodný pre „laikov v logike“, ktorí sú schopní správne zreprodukovať pravdivostné tabuľky logických spojok a nemusia mať žiadne iné špeciálne vedomosti z logiky. K hlbšiemu vysvetleniu týchto pretrvávajúcich problémov sa ešte vrátime v kapitole venovanej Wasonovej selekčnej úlohe. Teraz len toľko, interpretácia implikácie je silne textovo závislá, v niektorých extrémnych prípadoch v prirodzenom jazyku sa interpretuje ako konjunkcia, čo môže spôsobovať v iných prípadoch určité problémy s korektnou implikácie. Preto ako jediné možné riešenie tohto problému vidíme v tom, že už malý deťom by sa malo „drilom“ zafixovať, že implikácia $p \Rightarrow q$ je pravdivá práve vtedy, ak p je nepravdivé alebo q je pravdivé a taktiež, že implikácia $p \Rightarrow q$ je nepravdivá práve vtedy, ak p je pravdivé a q je nepravdivé (tieto dve skutočnosti je možné vyjadriť dikciou, že pravda implikuje len pravdu a nepravda implikuje čokoľvek, čiže výrok $1 \Rightarrow 0$ musí byť nepravdivý). Pravdivostnú hodnotu formuly φ môžeme jednoducho určiť pomocou tabuľkovej metódy, pozri tabuľku 1.

Formula φ sa nazýva *tautológia* (alebo *zákon*, čo vyjadríme $\vDash \varphi$), ak pre každú interpretáciu ***w*** platí $val_w(\varphi) = 1$

$$\left(\vDash \varphi\right) =_{def} \forall(\boldsymbol{w})\left(val_w(\varphi) = 1\right)$$

V tab. 2 formula φ_2 je tautológia, je pravdivá pre všetky možné interpretácie $\boldsymbol{w}_i$, $i = 1, 2, 3, 4$. V opačnom prípade, ak pre každú interpretáciu ***w*** platí $val_w(\varphi) = 0$, formula sa nazýva *kontradikcia*. Ak existuje aspoň jedna interpretácia ***w*** taká, že $val_w(\varphi) = 1$, potom formula φ je *splniteľná* (to znamená, že tautológia je špeciálny prípad splniteľnosti, čo zapisujeme $\nvDash \varphi$). V tab. 2 formula φ_1 je splniteľná pre dve interpretácie $\boldsymbol{w}_1$ a $\boldsymbol{w}_4$, Môžeme teda povedať, že všetky formuly, ktoré nie sú kontradikcie sú splniteľné a tautológie sú také splniteľné formuly, ktoré sú pre všetky možné interpretácie ***w*** pravdivé.

Tautológie majú vo výrokovej logike mimoriadne postavenie *zákonov* logiky, tieto formule sú vždy pravdivé pre ľubovoľné pravdivostné hodnoty premenných. Niektoré tautológie sa často používajú nielen v samotnej výrokovej logike, ale aj v bežnom usudzovaní a sú obvykle označované aj vlastným menom. Väčšinou ide o tautológie tvaru ekvivalencie, ktoré umožňujú nahradzovať jedny formuly inými bez straty vlastnosti ich tautologickosti.

Ľubovoľná neprázdna množina formúl, $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n\}$ sa nazýva *teória* výrokovej logiky. Ak pre teóriu Φ existuje taká interpretácia ***w***, pre ktorú sú všetky formuly pravdivé, $val_w(\varphi_i) = 1$, pre $i = 1, 2, ..., n$, potom táto interpretácia ***w*** sa nazýva *model teórie*. Teória Φ sa nazýva *konzistentná*, ak má model. Ak teória nemá model, potom sa nazýva *nekonzistentná*.

Tabuľka 2. Konštrukcia modelu pre tri formuly výrokovej logiky

$$\varphi_1 = (p \vee q) \Rightarrow (p \wedge q)$$

1	2	3	4	5
P	Q	$p \vee q$	$p \wedge q$	$3 \Rightarrow 4$
0	0	0	0	1
0	1	1	0	0
1	0	1	0	0
1	1	1	1	1

$$\varphi_2 = (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$$

1	2	3	4	5
p	q	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$4 \wedge 5$
0	0	1	1	1
0	1	1	0	0
1	0	0	1	0
1	1	1	1	1

$$\varphi_3 = (\neg p \wedge \neg q) \Rightarrow (p \Rightarrow q)$$

1	2	3	4	5	6	7
p	q	$\neg p$	$\neg q$	$3 \wedge 4$	$p \Rightarrow q$	$5 \Rightarrow 6$
0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	1	0	0	1
1	1	0	0	0	1	1

Príklad 1. Nech

$$\Phi = \{\varphi_1 = (p \vee q) \Rightarrow (p \wedge q), \varphi_2 = (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p), \varphi_3 = (\neg p \wedge \neg q) \Rightarrow (p \Rightarrow q)\}$$

chceme zistiť, či táto teória má model. Pomocou tabuľkovej metódy určíme pravdivostné hodnoty týchto formúl pre všetky možné interpretácie, pozri tab. 3.

Z týchto tabuliek vyplýva, že existuje dve interpretácie premenných, $\boldsymbol{w}_1 = (p/0, q/0)$ a $\boldsymbol{w}_4 = (p/1, q/1)$, pre ktoré všetky formuly z Φ sú pravdivé, t.j. interpretácie $\boldsymbol{w}_1$ a $\boldsymbol{w}_4$ sú modelom teórie Φ. Tiež môžeme povedať, že teória Φ je konzistentná, čo vyplýva priamo zo skutočnosti, že má model.

Formula φ sa nazýva *tautologický dôsledok teórie* Φ (čo označíme $\Phi \vDash \varphi$) práve vtedy, ak každý model teórie Φ je aj modelom formuly φ (t.j. formula φ je v ňom pravdivá). Majme teóriu $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n\}$, potom pre každú interpretácia $\boldsymbol{w}$, ktorá je modelom teórie Φ platí, že pravdivostné hodnoty všetkých formúl sú 1, $val_w(\varphi_i) = 1$. Nech φ je tautologickým dôsledkom teórie Φ, potom pre každý model – interpretáciu τ platí: $val_w(\varphi) = val_w(\varphi_i) = 1$, pre $i = 1, 2, ..., n$.

Príklad 2. Nech teória Φ je definovaná rovnako ako v predchádzajúcom príklade, má dva modely určené interpretáciame premenných $\boldsymbol{w}_1 = (p/0, q/0)$ a $\boldsymbol{w}_2 = (p/1, q/1)$. Uvažujem formulu φ v tvare $p \wedge q$, potom táto formula nie je tautologickým dôsledkom teórie Φ, pretože len pre model $\boldsymbol{w}_2$ je formula pravdivá, $val_{w_2}(\varphi) = 1$, pre model $\boldsymbol{w}_1$ už nie je pravdivá, $val_{w_1}(\varphi) = 0$.

Nech $\Phi = \varnothing$ je prázdna teória (neobsahuje žiadnu formulu), formálne môžeme teda povedať, že ľubovoľná interpretácia $\boldsymbol{w}$ je modelom tejto teórie. Ak formula φ je tautológia (pre každú interpretáciu $\boldsymbol{w}$ platí $val_w(\varphi) = 1$), potom $\varnothing \vDash \varphi$, alebo jednoduchšie $\vDash \varphi$.

Teória dôkazu – prirodzená dedukcia (syntaktický prístup)

Klasický spôsob riešenie logického dôkazu vo výrokovej logike je Hilbertova axiomatická metóda (Gahér, 1998; Jirků, Vejnarová, 2000; Kvasnička, Pospíchal, 2006; Peregrin, 2004; Sochor, 2001; Švejdar, 2002), ktorá postuluje systém 10 axióm a jedného pravidla usudzovania. Aj keď je tento syntaktický prístup vysoko elegantný a v zásade jednoduchý, jeho použitie na dôkaz nových zákonov výrokovej logiky (ktoré nie sú obsiahnuté v množine axióm) v mnohých prípadoch je netriviálna záležitosť, ktorá obvykle vyžaduje množstvo „jemných" trikov a postupov, aby sme dokázali aj pomerne jednoduché zákony výrokovej logiky (napr. $\vdash p \Rightarrow p$). Alternatívny prístup ku konštrukcii teórie dôkazu je Gentzenova prirodzená dedukcia z r. 1935 (Szabo, 1969), ktorá je založená na jednej triviálnej axióme (napr. $p \Rightarrow p$ alebo $p \vee \neg p$) a okolo tuctu pravidiel odvodzovania). Pravidlá usudzovania v prirodzenej dedukcii sú tvorené schémou (pozri tab. 3)

$$\begin{array}{|l} predpoklad_1 \\ \dots\dots\dots\dots \\ predpoklad_n \\ \hline záver \end{array} \Rightarrow \begin{array}{|l} \varphi_1 \\ \dots\dots \\ \varphi_n \\ \hline \psi \end{array}$$

ktorá obsahuje *n predpokladov* $\Phi = \{\varphi_1,...,\varphi_n\}$ a jeden *záver* ψ. Táto schéma usudzovania je formalizovaná pomocou „relácie“ $\vdash$ *logického dôkazu* (alebo *vyplývania*)

$$\{predpoklad_1,..., predpoklad_n\} \vdash záver \quad \text{alebo} \quad \{\varphi_1,...,\varphi_n\} \vdash \varphi \quad \text{alebo} \quad \Phi \vdash \varphi$$

Pomerne jednoduchými prostriedkami môžeme dokázať, že relácia „logického dôkazu – vyplývania) je ekvivalentný logickým zákonom

$$\vdash \varphi_1 \wedge ... \wedge \varphi_n \Rightarrow \varphi \equiv \vdash \varphi_1 \Rightarrow \left(\varphi_2 \Rightarrow \left(\Rightarrow ...\left(\varphi_n \Rightarrow \varphi\right)\right)\right)$$

V oboch týchto formulách používame symbol $\vdash$ s prázdnou množinou predpokladov, $\Phi = \emptyset$, čo znamená, že formula $\varphi_1 \wedge ... \wedge \varphi_n \Rightarrow \varphi$ (alebo $\varphi_1 \Rightarrow \left(\varphi_2 \Rightarrow \left(\Rightarrow ...\left(\varphi_n \Rightarrow \varphi\right)\right)\right)$) je zákonom výrokovej logiky, ku ktorého konštrukcii nepotrebujeme žiadne predpoklady. Podľa ľavej formuly, konjunkcia predpokladov implikuje záver.

Naše úvahy zformalizujeme pomocou nasledujúceho sledu definícií:

(1) Formula φ sa nazýva *bezprostredným logickým dôsledkom* množiny formúl $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2,...,\varphi_n\}$ vtedy a len vtedy, ak vznikne aplikáciou jedného z pravidiel logického dôkazu na formuly z Φ.

(2) Formula φ sa nazýva *logický dôsledok* množiny formúl Φ (čo označíme $\Phi \vdash \varphi$ vtedy a len vtedy, ak $\varphi \in \Phi$ alebo je bezprostredným dôsledkom Φ alebo je bezprostredným dôsledkom Φ rozšírenej o niektoré jej bezprostredné dôsledky.

(3) Konečná postupnosť formúl $\varphi_1, \varphi_2,...,\varphi_n$ sa nazýva ***dôkaz*** formuly φ z množiny Φ vtedy a len vtedy, ak $\varphi = \varphi_n$ a každá formula φ_i z tejto postupnosti je buď bezprostredným logickým dôsledkom niektorých formúl z Φ alebo formúl $\varphi_1, \varphi_2,...,\varphi_{i-1}$.

Tabuľka 3. Pravidlá usudzovania prirodzenej dedukcie

#	Schéma usudzovania	Ekvivalentný zákon výrokovej logiky	Názov
1	$\begin{array}{\|l} p \\ \hline p \vee q \end{array}$	$p \Rightarrow (p \vee q)$	*adícia*
2	$\begin{array}{\|l} p \wedge q \\ \hline p \end{array}$, $\begin{array}{\|l} p \wedge q \\ \hline q \end{array}$	$(p \wedge q) \Rightarrow p$, $(p \wedge q) \Rightarrow q$	*simplifikácia*
3	$\begin{array}{\|l} p \\ q \\ \hline p \wedge q \end{array}$	$p \Rightarrow (q \Rightarrow (p \wedge q))$	*introdukcia konjunkcie*
4	$\begin{array}{\|l} p \\ p \Rightarrow q \\ \hline q \end{array}$	$p \Rightarrow ((p \Rightarrow q) \Rightarrow q)$	*modus ponens*
5	$\begin{array}{\|l} \neg q \\ p \Rightarrow q \\ \hline \neg p \end{array}$	$\neg q \Rightarrow ((p \Rightarrow q) \Rightarrow \neg p)$	*modus tollens*
6	$\begin{array}{\|l} q \\ \hline p \Rightarrow q \end{array}$	$q \Rightarrow (p \Rightarrow q)$	*introdukcia implikácie*

7	$\dfrac{p \Rightarrow q \quad q \Rightarrow r}{p \Rightarrow r}$	$(p \Rightarrow q) \Rightarrow ((q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r))$	*hypotetický sylogizmus*
8	$\dfrac{p \vee q \quad \neg p}{q}$, $\dfrac{p \vee q \quad \neg q}{p}$	$((p \vee q) \wedge \neg p) \Rightarrow q$ $((p \vee q) \wedge \neg q) \Rightarrow p$	*eliminácia disjunkcie*
9	$\dfrac{p \Rightarrow q}{\neg p \vee q}$, $\dfrac{\neg p \vee q}{p \Rightarrow q}$	$(p \Rightarrow q) \equiv (\neg p \vee q)$	*disjunktívny sylogizmus*
10	$\dfrac{p \Rightarrow q}{\neg q \Rightarrow \neg p}$	$(p \Rightarrow q) \Rightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$	*inverzia implikácie*
11	$\dfrac{p \Rightarrow q \quad p \Rightarrow \neg q}{\neg p}$	$(p \Rightarrow q) \Rightarrow ((p \Rightarrow \neg q) \Rightarrow \neg p)$	*reductio ad absurdum*
12	$\dfrac{\neg\neg p}{p}$, $\dfrac{p}{\neg\neg p}$	$\neg\neg p \equiv p$	*dvojitá negácia*

Príklad 3. Majme dva jednoduché výroky
(1) Keď bude pršať, potom pôjdem do kina
(2) Keď bude pršať, potom pôjdem do kaviarne
Aký záver z nich vyplýva?

V prvom kroku vykonáme formalizáciu týchto výrokov, zavedieme tri atomické výrokové premenné

p = ′nude pršať′, q = ′pôjdem do kina′, r = ′pôjdem do kaviarne′

Potom množina predpokladov má tvar $\Phi = \{p \Rightarrow q, p \Rightarrow r\}$, zaujíma nás, aký netriviálny dôsledok vyplýva z týchto predpokladov, $\Phi = \{p \Rightarrow q, p \Rightarrow r\} \vdash ?$ Množinu predpoklad rozšírime o pomocný predpoklad (hovoríme, že je aktivovaný).

1.	$p \Rightarrow q$	(1. predpoklad φ_1)
2.	$p \Rightarrow r$	(2. predpoklad φ_2)
3.	p	(aktivácia pomocného predpokladu φ)
4.	q	(použitie pravidla 4 *modus ponens* na predpoklady 1 a 3)
5.	r	(použitie pravidla 4 *modus ponens* na predpoklady 2 a 3)
6.	$q \wedge r$	(introdukcia konjunkcie na dôsledky 4 a 5)
6.	$p \Rightarrow q \wedge r$	(deaktivácia pomocného predpokladu 3 pomocou dôsledku 6)

Záver, ktorý vyplýva z predpokladov je $p \Rightarrow q \wedge r$ = ′ak bude pršať pôjdem do kina a kaviarne′.

Na záver tejto kapitoly zosumarizujeme hlavné závery syntaktického prístupu pre logický dôkaz formúl výrokovej logiky:

(1) *Pôvodný Hilbertov formálny systém* logického dôkazu je pre kognitívnu vedu bezcenný, je veľmi zložitý na to, aby sa dal použiť ako mentálny model usudzovania.

(2) *Gentzenov systém prirodzenej dedukcie* (ktorý je formálne rovnocenný Hilbertovmu systému) nesie všetky znaky jednoduchosti a intuitívnosti, preto je vhodný ako *mentálny model logiky* pre tých, čo už absolvovali základné vzdelanie v logike.

V predchádzajúcich dvoch kapitolách 2.2 a 2.3 boli formulované dva nezávislé pojmy:
(1) V syntaktickom prístupe pojem logického dôsledku formuly ψ z množiny predpokladov Φ, čo formálne zapisujeme $\Phi \vdash \psi$.
(2) V sémantickom prístupe pojem tautologického dôsledku formuly ψ z teórie Φ, čo formálne zapisujeme $\Phi \vDash \psi$.

Aj keď sú tieto pojmy definované nezávislým spôsobom (syntaktickým a sémantickým), existuje medzi nimi tesná väzba, Podľa Postovej vety výrokovej logiky (Jirků, Vejnarová, 2000; Kvasnička, Pospíchal, 2006; Peregrin, 2004; Sochor, 2001; Švejdar, 2002) platí tvrdenie:

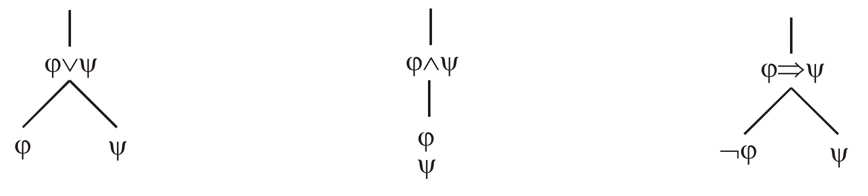
Pre ľubovoľnú formulu φ vzťah $\Phi \vdash \psi$ platí práve vtedy, ak $\Phi \vDash \psi$

$$(\Phi \vdash \psi) \equiv (\Phi \vDash \psi)$$

Z tejto vety vyplýva ekvivalentnosť syntaktického a sémantického prístupu, je úplne jedno, či použijeme syntaktickú metódu na stanovenie relácie $\Phi \vdash \psi$ alebo sémantickú metódu na stanovenie relácie $\Phi \vDash \psi$. Hlavným kritériom výberu metódy bude jej vhodnosť a efektívnosť k riešeniu daného problému.

Model výrokovej logiky – sémantické tablá (sémantický prístup)

V kapitole 2.2 boli formulované základné princípy sémantického prístupu k výrokovej logiky, Cieľom tejto kapitoly bude ukázať realizáciu sémantického prístupu pomocou diagramatickej techniky nazývanej sémantické tablá (Smullyan, 1968). V rámci tejto metódy riešime reláciu $\Phi = \{\varphi_1, ..., \varphi_n\} \vDash \psi$ tak, že formuly predpokladov $\varphi_1, ..., \varphi_n$ a záveru ψ rozkladáme postupne na podformuly, pričom tento rekurentný proces končíme vtedy, keď podformuly obsahujú len atomické premenné alebo in negácie (tzv. literály), pozri obr. 3.



A (*disjunkcia*) *B* (*konjunkcia*) *C* (*implikácia*)

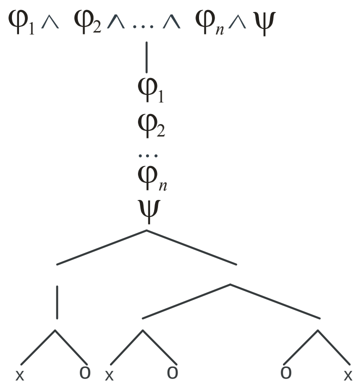
Obrázok 3. Tri základné rozklady pre tvorbu sémantického tabla. V prípade, že vzniklá podformula má tvar $\neg(\varphi \wedge \psi)$ alebo $\neg(\varphi \vee \psi)$, použijeme De Morganove vztahy na ich ekvivalentný prepis na $(\neg\varphi \vee \neg\psi)$ resp. na $(\neg\varphi \wedge \neg\psi)$, pre ktoré už existujú diagramtické rozklady.

Pomocou metódy sémantických tabiel budeme riešiť úlohu, či daná výroková formula ψ má model, t. j. či existuje aspoň jedna interpretácia ***w*** taká, že $val_w(\psi) = 1$. Táto úloha je vo všeobecnosti riešiteľná pomocou tabuľkovej metódy (pozri tab. 3), avšak metóda sémantických tabiel predstavuje veľmi efektívnu alternatívu k tabuľkovej metódy, kde musíme vyšetrovať 2^n riadkov, keď formula ψ má n atomických výrokových premenných. Metóda sémantických tabiel je založená na postupnej diagramatickej transformácii formuly ψ do ekvivalentného DNF (Kvasnička, Pospíchal, 2006) tvaru ψ_{DNF} (disjunktívna normálna forma, ktorá obsahuje disjunkcie konjunkcií literálov)

Príklad 5. Prepíšeme formulu $\psi = (p \equiv q) \wedge (r \vee \neg(r \vee \neg p))$ do ekvivalentného DNF tvaru

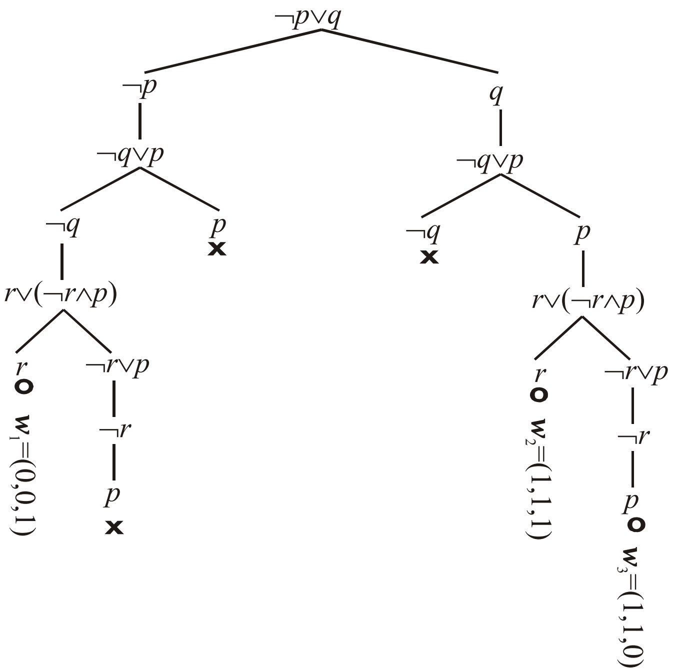
$$
\begin{aligned}
\psi' = \psi_{DNF} &= \underbrace{(\neg p \wedge \neg q \wedge r)}_{\circ} \vee \underbrace{(\neg p \wedge p \wedge r)}_{\times} \vee \underbrace{(q \wedge \neg q \wedge r)}_{\times} \vee \underbrace{(q \wedge p \wedge r)}_{\circ} \vee \\
&\quad \underbrace{(\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r \wedge p)}_{\times} \vee \underbrace{(\neg p \wedge p \wedge \neg r \wedge p)}_{\times} \vee \underbrace{(q \wedge \neg q \wedge \neg r \wedge p)}_{\times} \vee \\
&\quad \underbrace{(q \wedge p \wedge \neg r \wedge p)}_{\circ} \\
&= \underbrace{(\neg p \wedge \neg q \wedge r)}_{w_1=(0,0,1)} \vee \underbrace{(q \wedge p \wedge r)}_{w_2=(1,1,1)} \vee \underbrace{(q \wedge p \wedge \neg r \wedge p)}_{w_3=(1,1,0)}
\end{aligned}
$$

Vidíme, že v takto upravenej DNF formule existujú klauzuly, ktoré sú a-prori nepravdivé (obsahujú konjunkciu premennej a jej negácie), ktoré sú označené symbolom ´$\circ$´. Pre zostávajúce klauzule, ktoré sú označené symbolom ´$\times$´ existuje vždy interpretácia, pre ktorú sú pravdivé. Tento algebraický rozklad formuly ψ je znázornený pomocou sémantického tabla na obr. 4.



Obrázok 4. Tvorba sémantického tabla pre verifikáciu relácie $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\} \models \psi$. Jednotlivé komponenty konjunkcie sa rozkladajú na podgrafy pomocou grafickej interpretácie znázornenej na obr. 3. Vetvy tabla, ktoré obsahujú atomický symbol a jeho negáciu sa nazývajú uzavreté a sú označené symbolom $\times$. V opačnom prípade, ak vetva neobsahuje túto dvojicu atomického symbolu a jeho negácie, sa nazýva otvorená a je označená symbolom $\circ$.

Pre ilustráciu sa vrátime k poslednému príkladu, kde bola formula ψ prepísaná do DNF tvaru (Disjunktívna Normálna Forma, ktorá obsahuje disjunkcie konjuktívnych klauzúl), pozri obr. 5. Jednotlivé klauzule z DNF tvaru formuly sú jednoznačne identifikovateľné pomocou vetví sémantického tabla. Poznamenajme, že v prípade, že nejaká vetva už na počiatku obsahuje dvojicu atomickej premennej a jej negácie, môže byť predčasne uzavreté, pretože ďalšie predlžovanie tejto väzby už nemôže zmeniť pravdivostnú hodnotu.



Obrázok 5. Konštrukcia sémantického tabla pre formulu $\psi = (p \equiv q) \wedge (r \vee \neg(r \vee \neg p))$. Vetvy tabla, ktoré sú označené symbolom × sa neuvažujú, pretože reprezentujú nepravdivé klauzule. Vetvy označené symbolom ○ majú reprezentujú klauzuly s pravdivou interpretáciou. Poznamenajme, že vetve označené symbolom ○ .

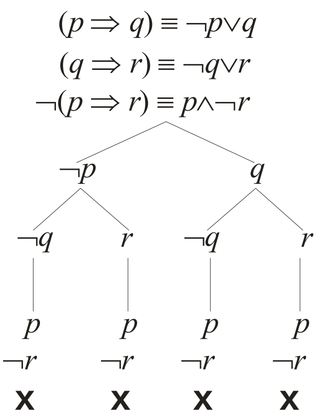
Význam sémantického tabla je založená na nasledujúcej vete:

Formula ψ je tautologickým dôsledkom formúl $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n\}$, $\Phi \vDash \psi$, vtedy a len vtedy, ak sémantické tablo zostrojené pre formuly $\{\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n, \neg\psi\}$ obsahuje len uzavreté vetvy.

Táto veta nám umožňuje verifikovať čí formula ψ je tautologickým dôsledkom teórie s modelom $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n\}$. Podstatne zaujímavší problém je riešenie relácie $\{\varphi_1, ..., \varphi_n\} \vDash ?$, t. j. hľadáme taký záver ψ, ktorý je tautologickým dôsledkom teórie Φ. Riešenie ψ zostrojíme pomocou nasledujúceho postupu:

Zostrojíme sémantické tablo pre formuly z teórie $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n\}$, predpokladajme, že existuje aspoň jedna otvorená vetva tabla (t. j. teória je konzistentná). Potom riešenie ψ zostrojíme ako disjunkciu konjunkcií vrcholov otvorených vetví, ktoré sú interpretované atomickým symbolom alebo jeho negáciou.

Príklad 6. Pomocou sémantického tabla budeme verifikovať reláciu tautologického dôsledku $\{p \Rightarrow q, q \Rightarrow r\} \vDash (p \Rightarrow r)$. Pomocou sémantického tabla budeme študovať konjunkciu $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r) \wedge \neg(p \Rightarrow r)$, ak sa nám podarí ukázať, že príslušné sémantické tablo má všetky vetve uzavreté, potom platí relácia $\{p \Rightarrow q, q \Rightarrow r\} \vDash (p \Rightarrow r)$, pozri obr. 6.



Obrázok 6. Sémantické tablo pre $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r) \wedge \neg(p \Rightarrow r)$, každá vetva je uzavretá, to znamená, že relácia tautologického dôsledku $\{p \Rightarrow q, q \Rightarrow r\} \vDash (p \Rightarrow r)$ je platná.

Príklad 7. Pomocou sémantického tabla budeme riešiť príklad 2, kde je potrebné zistiť záver z teórie $\Phi = \{p \Rightarrow q, p \Rightarrow r\}$, t. j. budeme riešiť reláciu $\Phi = \{p \Rightarrow q, p \Rightarrow r\} \vdash ?$. Výsledky sú znázornené na obr. 7

Z obr. 6 vyplýva, že teória $\Phi = \{p \Rightarrow q, p \Rightarrow r\}$ má štyri rôzne interpretácie – modely, pre ktoré sú predpoklady teórie pravdivé

$$w_1 = (p/0, q/?, r/?)$$
$$w_2 = (p/0, q/?, r/1)$$
$$w_3 = (p/0, q/1, r/?)$$
$$w_4 = (p/?, q/1, r/1)$$

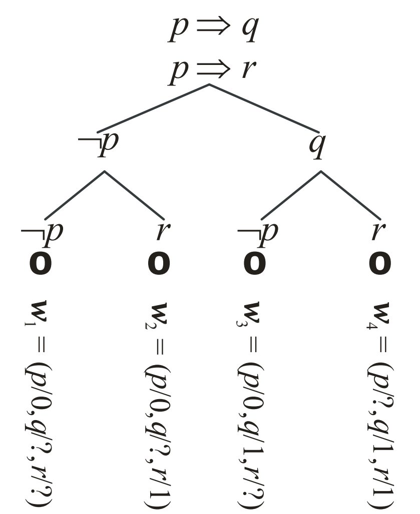
kde symbol ´?´ znamená, že pravdivostná hodnota danej premennej nie je špecifikovaná (čiže môže byť ľubovoľná). Každému modelu môžeme pripísať riešenie, ktoré je pravdivé

$$\psi_1 = \neg p$$
$$\psi_2 = \neg p \wedge r$$
$$\psi_3 = \neg p \wedge q$$
$$\psi_4 = q \wedge r$$

To znamená, že máme štyri riešenia relácie $\Phi = \{p \Rightarrow q, p \Rightarrow r\} \vdash ?$ v tvare $\Phi = \{p \Rightarrow q, p \Rightarrow r\} \vdash \psi_i$, pre i = 1, 2, 3, 4. Tieto riešenia môžeme „skladať“ pomocou disjunkcie do nového riešenia, disjunkciou všetkých ψ_i dostaneme riešenie, ktoré je pravdivé pre všetky modely teórie $\Phi = \{p \Rightarrow q, p \Rightarrow r\}$

$$\begin{aligned} \psi' &= \neg p \vee (\neg p \wedge r) \vee (\neg p \wedge q) \vee (q \wedge r) \\ &\equiv \neg p \wedge \underbrace{(1 \vee r \vee q)}_{1} \vee (q \wedge r) \\ &\equiv \neg p \vee (q \wedge r) \equiv p \Rightarrow (q \wedge r) \end{aligned}$$

ktoré je totožné s riešením z príkladu 2 zostrojené pomocou prirodzenej dedukcie.



Obrázok 7. Sémantické tablo pre teóriu $\Phi = \{p \Rightarrow q, p \Rightarrow r\}$

Príklad 8. Pomocou sémantického tabla budeme riešiť príklad 3, kde je potrebné zistiť záver z teórie $\Phi = \{p \Rightarrow r, q \Rightarrow r\}$, t. j. budeme riešiť relláciu $\Phi = \{p \Rightarrow q, r \Rightarrow q\} \vdash ?$. Výsledky sú znázornené na obr. 7

Z obr. 7 vyplýva, že teória $\Phi = \{p \Rightarrow r, q \Rightarrow r\}$ má štyri rôzne interpretácie – modely, pre ktoré sú predpoklady teórie pravdivé

$$w_1 = (p/0, q/0, r/?)$$
$$w_2 = (p/0, q/?, r/1)$$
$$w_3 = (p/?, q/0, r/1)$$
$$w_4 = (p/?, q/?, r/1)$$

Každému modelu môžeme pripísať riešenie, ktoré je pravdivé

$$\psi_1 = \neg p \wedge \neg q$$
$$\psi_2 = \neg p \wedge r$$
$$\psi_3 = \neg q \wedge r$$
$$\psi_4 = r$$

To znamená, že máme štyri riešenia relácie $\Phi = \{p \Rightarrow r, q \Rightarrow r\} \vdash ?$ v tvare $\Phi = \{p \Rightarrow q, p \Rightarrow r\} \vdash \psi_i$, pre i = 1, 2, 3, 4. Ak tieto riešenia „poskladáme“ pomocou disjunkcie do nového riešenia, tak dostaneme nové riešenie

$$\psi' = (\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge r) \vee (\neg q \wedge r) \vee r$$
$$\equiv \neg(p \vee q) \vee \underbrace{(\neg p \vee \neg q \vee 1)}_{1} \wedge r \equiv (p \vee q) \Rightarrow r$$

ktoré je totožné s riešením z príkladu 3 zostrojené pomocou prirodzenej dedukcie.

Na záver môžeme konštatovať, že sémantické tablá poskytujú jednoduchý a efektívny prostriedok pre kontrolu vzťahu „tautologického vyplývania“, $\Phi \vDash \psi$, pričom nemusím poznať relatívne zložitú syntaktickú teóriu dôkazu „logického vyplývania“ . Taktiež, sémantické tablo je vhodnou technikou na riešenie relácie tautologického vyplývania

$\{\varphi_1,...,\varphi_n\} \models ?$, pomocou „partikulárnych“ riešení pre jednotlivé otvorené vetvy dostaneme riešenie, ktoré je tautologickým dôsledkom teórie $\Phi = \{\varphi_1,...,\varphi_n\}$.

Wasonove experimenty (úloha výberu)

V r. 1968 Peter Wason (Johnson – Laird, 1983; Stenning, van Lambalgen, 2007; Wason, 1968) navrhol klasický experiment v ktorom je kombinované uvažovanie s vykonávanou činnosťou, pri ktorej sa vyberie jedna alebo niekoľko kariet z množiny štyroch kariet (z týchto dôvodov sa táto úloha nazýva úloha výberu – selection task).

Špecifikácia: Pred vami ležia štyri karty, z ktorých môžete vidieť len jednu stranu, avšak nie odvrátenú stranu. Na jednej strane každej karty je písmeno, zatiaľ čo na druhej strane je číslica, toto označenie je v súhlase s nejakým pravidlom.

Pravidlo: Ak je písmeno samohláska, potom číslica je párna.

Úloha: Rozhodnúť, ktoré z týchto 4 kariet je potrebné obrátiť, aby sme verifikovalo, či pravidlo je splnené, alebo nie je splnené. Neoznačujte tie karty, ktoré nepovažujete za potrebné obrátiť.

Karty: $\boxed{\text{A}}$ $\boxed{\text{B}}$ $\boxed{\text{1}}$ $\boxed{\text{2}}$

Tabuľka 4. Wasonove výsledky úlohy výberu (Wason, 1968)

označené karty	výskyt (%)
$\boxed{p}, \boxed{q}$	46%
$\boxed{p}$	33%
$\boxed{p}, \boxed{q}, \boxed{\overline{q}}$	7%
$\boxed{p}, \boxed{\overline{q}}$	4%
ostatné	10%

Aké je korektné riešenie tejto úlohy. Pre jednoduchosť našich úvah označme pravidlo pomocou implikácie $p \Rightarrow q$, kde premenná *p* je priradená výroku „písmeno je samohláska“ a premenná *q* je priradená výroku „číslica je párna“. V rámci tohto formalizmu, môžeme karty reprezentovať takto: $\boxed{p}$ $\boxed{q}$ $\boxed{\overline{p}}$ $\boxed{\overline{q}}$. Čiže ak chceme verifikovať pravidlo, či je splnené pre dané karty, musíme označiť dve karty $\boxed{p}$ a $\boxed{\overline{q}}$. Prvá karta odpovedá zákonu *modus ponens* (t.j. ak je pravidlo splnené, potom na opačnej strane musí byť $\boxed{q}$). Druhá karta odpovedá zákonu *modus tollen*s (t.j. na druhej strane musí byť $\boxed{\overline{p}}$). Označiť iné dve karty je irelevantné pre verifikáciu pravidla, tak napr. označenie karty $\boxed{\overline{p}}$ nám nič neposkytuje pre verifikáciu pravidla (ale ak niekto verí, že pravidlo R1 je platné, potom očakáva, že na opačnej strane výskyt $\boxed{q}$ verifikuje pravidlo hry). Pôvodné výsledky Wasona sú zhrnuté v tab. 4.

Ako interpretovať tieto a iné podobné výsledky (Johnson – Laird, 1983; Stenning, van Lambalgen, 2007)? Jedno z najdôležitejších pozorovaní je, že výsledky sú silne jazykovo závislé, iné formulácie tej istej úlohy môžu podstatne ovplyvniť výsledky. Druhé dôležité pozorovanie je, že riešitelia obvykle nechápu implikáciu v súhlase s jej postulovanou tabuľkou pravdivostných hodnôt. Uvažujme nasledujúcu výrok reklamy „*ak si u nás zakúpite auto, dostanete zadarmo HIFI vež*“. Každý predsa vie, že z tejto reklamy plynie, že „ak si nezakúpim auto, tak potom nedostaneme HIFI vež“. Alebo, že taktiež platí „ak som dostal HIFI vež, tak som si zakúpil auto“. Tieto dva výroky, odvodené pomocou schém usudzovania

$$\textit{pravidlo zdôraznenia dôsledku}\ \begin{array}{|l} q \\ p \Rightarrow q \\ \hline p \end{array}$$

$$\textit{pravidlo poprenia predpokladu}\ \begin{array}{|l} \neg p \\ p \Rightarrow q \\ \hline \neg q \end{array}$$

(ktoré nie sú zákony – tautológie) pochybnej platnosti, sú všeobecne akceptovateľné napriek tomu, že nevyplývajú priamo z pôvodného reklamného implikatívneho sľubu. Ako prirodzené vysvetlenie nás hneď napadne, že vyššie uvedený reklamný sľub, aj keď má formu implikácie, je potrebné skôr chápať ako konjunkciu. Tým sa dostávame do oblasti používanie netautologického pravidla

$$\begin{array}{|l} p \Rightarrow q \\ \hline p \wedge q \end{array} \quad \text{a} \quad \begin{array}{|l} p \wedge q \\ \hline p \Rightarrow q \end{array}$$

podľa ktorého implikácia je ekvivalentná konjunkcii. V evolučnej psychológii sa táto úloha široko diskutuje, napr. Ledou Cosmidesovou a jej manželom Johnym Toobym (Cosmides, Tooby, 1992). Ich argumentácia vychádza z predpokladu, že podobné úlohy sa riešia o mnoho ľahšie vtedy, ak sú formulované ako úlohy špecifikujúce sociálnu interakciu (napríklad pravidlo: *ak splníš podmienku A, potom získaš výhodu B*). Táto skutočnosť je odrazom základnej idey evolučnej psychológie, že určité črty ľudskej psychológie sú vrodené mechanizmy, ktoré sa vyvinuli pomocou prirodzeného výberu (Baldwinov efekt, (Turney, Whitley, Anderson, (eds.), 1996)) tak, aby rýchlo riešili dané problémy sociálnej interakcie a nie sú vyjadrením všeobecnej inteligencie ľudí.

Tieto a podobné skutočnosti našli svoj odraz v kognitívnej vede, kde sa venuje veľká pozornosť tak experimentálnym metódam výskumu používania jednoduchých pravidiel, ako aj tvorbe teoretických modelov pre vysvetlenie týchto experimentálnych skutočností práve diskusii jednotlivých prípadov pravdivostných hodnôt argumentov implikácie. Tieto pochybnosti majú svoje vyjadrenie vo vzniku tzv. neklasických logík, ktoré viac odpovedajú bežnému jazyku, alebo špeciálnemu jazyku vedy. Pred nedávnom, Stenning a van Lambalgen (Stenning, van Lambalgen, 2007) navrhujú riešiť tieto problémy s chybným používaním netautologických pravidiel pomocou špeciálneho „logického programu“ využívajúceho nemonotónnu logiku so sémantikou špecifikovanou pomocou Kleenovej 3-hodnotovej logiky.

Záver

Tvorba mentálneho modelu (mentálne modelovanie) patrí v kognitívnej vede medzi elementárne aktivity pri modelovaní kognitívnych aktivít. Koncepcia mentálneho modelovanie poskytuje kognitívnej vede črty experimentálnej prírodovedy. Pomocou teoretický argumentačného aparátu (väčšinou prevzatého z umelej inteligencie) interpretuje experimentálne merania kognitívnej vedy (kognitívnej psychológie) spôsobom, ktorý silne pripomína vzťah medzi experimentom a teóriou v prírodovede. Mentálny model pre danú kognitívnu aktivitu vystupuje v úlohe jej teórie, pričom kritériom platnosti a efektívnosti danej teórie – mentálneho modelu, je súhlas jeho predikcií s experimentálnymi pozorovaniami, výsledkami pozorovaní kognitívnej psychológie. Požaduje sa, aby mentálne modely boli schopné postihnúť nielen správne riešenia ale aj interpretovať chyby pri konštrukcii riešenia. Tieto modely majú určitú zložitosť, ktorá je premenlivá pri aplikovaní na rôzne problémy (napr. na rôzne kategorické sylogizmy) (Johnson – Laird, 1983), pričom očakávame, že táto zložitosť modelu koreluje s výskytom chýb.

V tomto článku sme venovali pozornosť konštrukcii mentálnych modelov jednoduchej výrokovej logiky. K ich konštrukcii boli použité dva rôzne prístupy:

(1) ***Syntaktický prístup***, kde mentálny model je totožný s Gentzenovým systémom prirodzenej dedukcie, ktorý obsahuje okolo tuctu elementárnych pravidiel usudzovania, ktoré sú totožné so známymi zákonmi logikmi (modus ponens a modus tollens, hypotetický sylogizmus, pravidlo inverzie implikácie a pd.). Tento mentálny model sa aplikuje užívateľmi, ktorí sú trénovaný vo formálnej logike, ktorí absolvovali základné logické vzdelanie na úrovni úvodu do výrokovej logiky.

(2) ***Sémantický prístup***, krorý poskytuje mentálny model založený na sémantických tablách. Tento prístup požaduje od užívateľa len schopnosť korektne pravdivostne (sémanticky) interpretovať elementárne logické spojky, k čomu dochádza podľa Inheldera a Piageta u detí vo veku okolo 10 rokov. Môžeme teda konštatovať, že tento sémantický prístup ku konštrukcii mentálneho modelu logiky je aplikovaný užívateľmi, ktorí neabsolvovali tréning vo výrokovej logike, ktorých jedinou kognitívnou schopnosťou je korektne pravdivostne (sémanticky) interpretovať elementárne logické spojky. Samozrejme, v tomto prístupe neustále pretrvávajú problémy s korektnou interpretáciou implikácie, ktoré môžu byť zdrojom chýb (experimentálne pozorovaných) v usudzovaní.

Poďakovanie

Práca bola vypracovaná v rámci riešenia grantov: (1) VEGA 1/1047/04 s názvom „Neurónové siete s echo stavmi“, (2) APVT 20-002504 s názvom „Teoretické štúdium a aplikácie neurónových sietí s echo stavmi v umelej inteligencii a kognitívnej vede“.

Literatúra

Cosmides, L., Tooby, J. (1992). Cognitive adaptations for social exchange. In Barkow, J., Cosmides, L., Tooby, J. (eds.). *The adapted mind*. Oxford University Press, New York.

Gahér, F.(1998): *Logika pre každého*. IRIS, Bratislava.

Gigerenzer, G., Selten, R. (Eds.) (2001). *Bounded rationality: The adaptive toolbox*. MIT Press, Cambridge6, (MA).

Inhelder, B., Piaget, J.(1964). *The Early Growth of Logic in the Child: Classification and Seriation.* Routledge and Kegan Paul, London.

Jirků, P., Vejnarová. J. (2000). *Logika - Neformální úvod do formální logiky*. VŠE, Praha.

Johnson – Laird, P.N. (1983). *Mental Models. Toward a Cognitive Science of Language, Inference, and Consciousness*. Cambridge University Press, Cambridge.

Kvasnička V., Pospíchal, J. (2006): *Matematická logika*. Vydavateľstvo STU, Bratislava.

Luria, A. R. (1979). *The Making of Mind* (Cole, M., Cole, S., eds.). Harvard University Press, Cambridge (MA).

Návrat, P., a kolekt. (2001). *Umelá inteligencia*. Vydavateľstvo STU, Bratislava.

Peregrin, J (2004). *Logika a logiky*. Academia, Praha.

Russel,. S., Norvig, P.(1995). *Artificial Intelligence. A Modern Approach*. Prentice Hall, New Jersey.

Smullyan, R. (1968). *First Order-Logic*. Springer Verlag, New York (existuje slovenský preklad knihy z r. 1979: *Logika prvého rádu*. Alfa, Bratislava).

Sochor, A. (2001). *Klasická matematická logika*. Karolinum, Praha.

Stenning, K., van Lambalgen, M. (2007). *Semantics and cognition: Semantic insight into the psychology of reasoning* (to be published).

Szabo, M. E.(1969). *Collected Papers of Gerhard Gentzen.* North-Holland, Amsterdam.

Švejdar, V. (2002). *Logika: neúplnost, složitost a nutnost*. Academia, Praha.

Turney, P., Whitley, D., Anderson, R.W. (eds.) (1996). Evolution, Learning, and Instinct: 100 Years of the Baldwin Effect. A special issue of *Evolutionary Computation* **4**, No. 3.

Wason, P. C. (1968). Reasoning about a rule. *Quarterly Journal of Experimental Psychology,* **20**, 273-281.