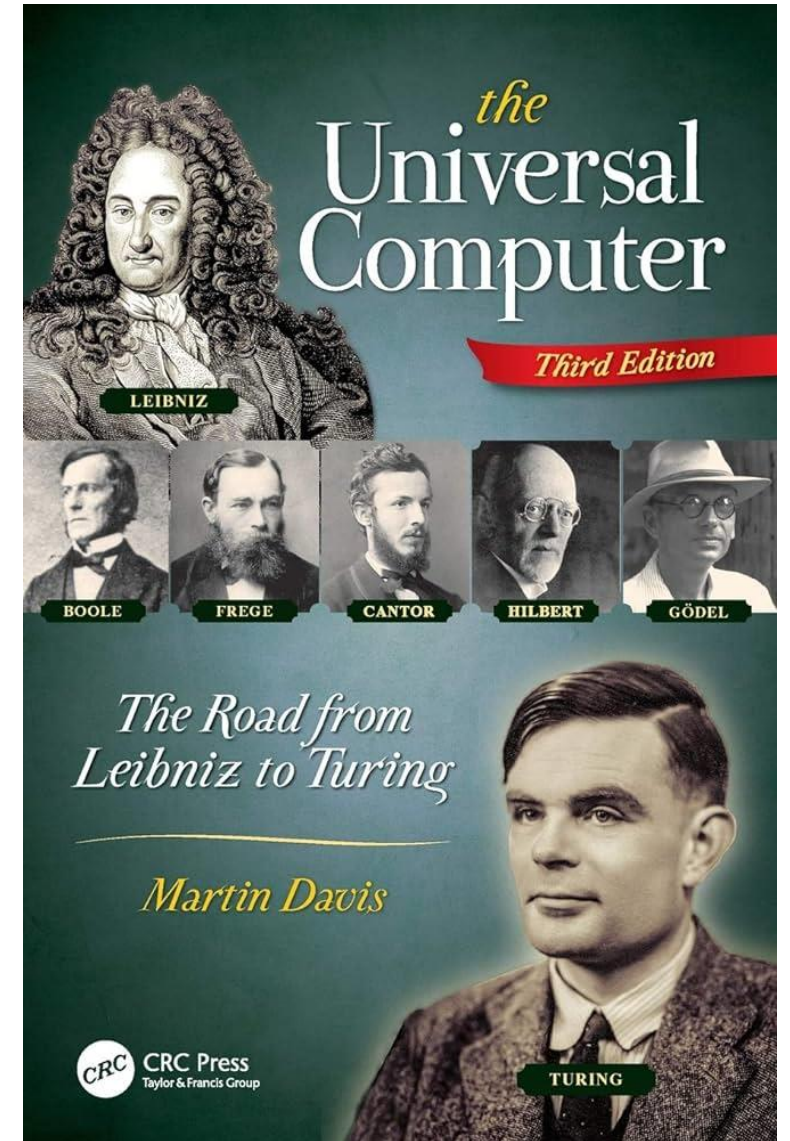


Od Leibniza po Turinga

Podľa M. Davis: *The Universal Computer*
Spracoval M.Winczer, KDMFI, FMFI UK

Na pamiatku Martina Davisa, ktorý zomrel 1.1. 2023



Gottfried Wilhelm Leibnitz

* 1646 (Lipsko)

† 1716 (Hannover)



Leibnitz

- Leibnitzov sen

- Úspechy v matematike, ako právnik, ako filozof a teológ, diplomat
- Pohorie Harz, banská činnosť už od X.st, z baní bolo treba odčerpávať vodu, čerpadlá boli na vodný pohon – v zime potoky zamrzli a nedalo sa ťažiť.

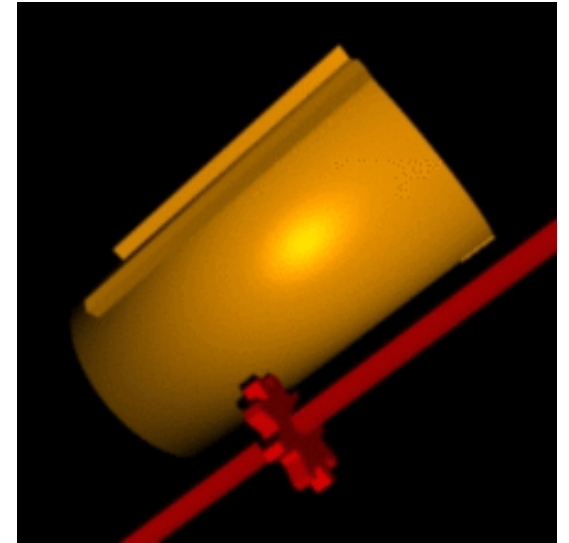
Leibnitz navrhol veterný pohon čerpadiel, čo by umožnilo celoročnú ťažbu.

Projekt skončil neúspechom. Podcenil ťažkosti pri realizácii, nepredvídateľnosť vetra, odpor banských inžinierov, ktorým sa miešal do remesla,...

- Navrhol zápis pre diferenciálny a integrálny počet, ktorý umožňoval vykonávať komplikované výpočty takmer mechanicky.
- Sníval, že niečo podobné sa podarí aj pre ľudské poznanie, univerzálny umelý matematický jazyk na vyjadrenie poznatkov a pravidiel počítania v ňom a dokonca, že by ich mohol vykonávať stroj. Človek by sa venoval kreatívnym činnostiam

Leibnitz

- V škole sa zoznámil s Aristotelovou logikou, ktorá ho ovplyvnila na celý život, rozdelenie konceptov do fixných kategórií
- Usiloval sa nájsť abecedu, ktorej prvky by boli koncepty a jazyk vytvorený nad touto abecedou by umožňoval symbolické výpočty (venoval sa tomu v jeho bakalárskej aj habilitačnej práci a rozvinul ju v práci „Dissertatio de Arte Combinatoria“)
- Štúdiá ukončil v 21 rokoch
- Kariéra:
 - Nechcel pokračovať v akademickej sfére
 - Potreboval mecenáša – 1672 Paríž



https://en.wikipedia.org/wiki/Stepped_reckoner

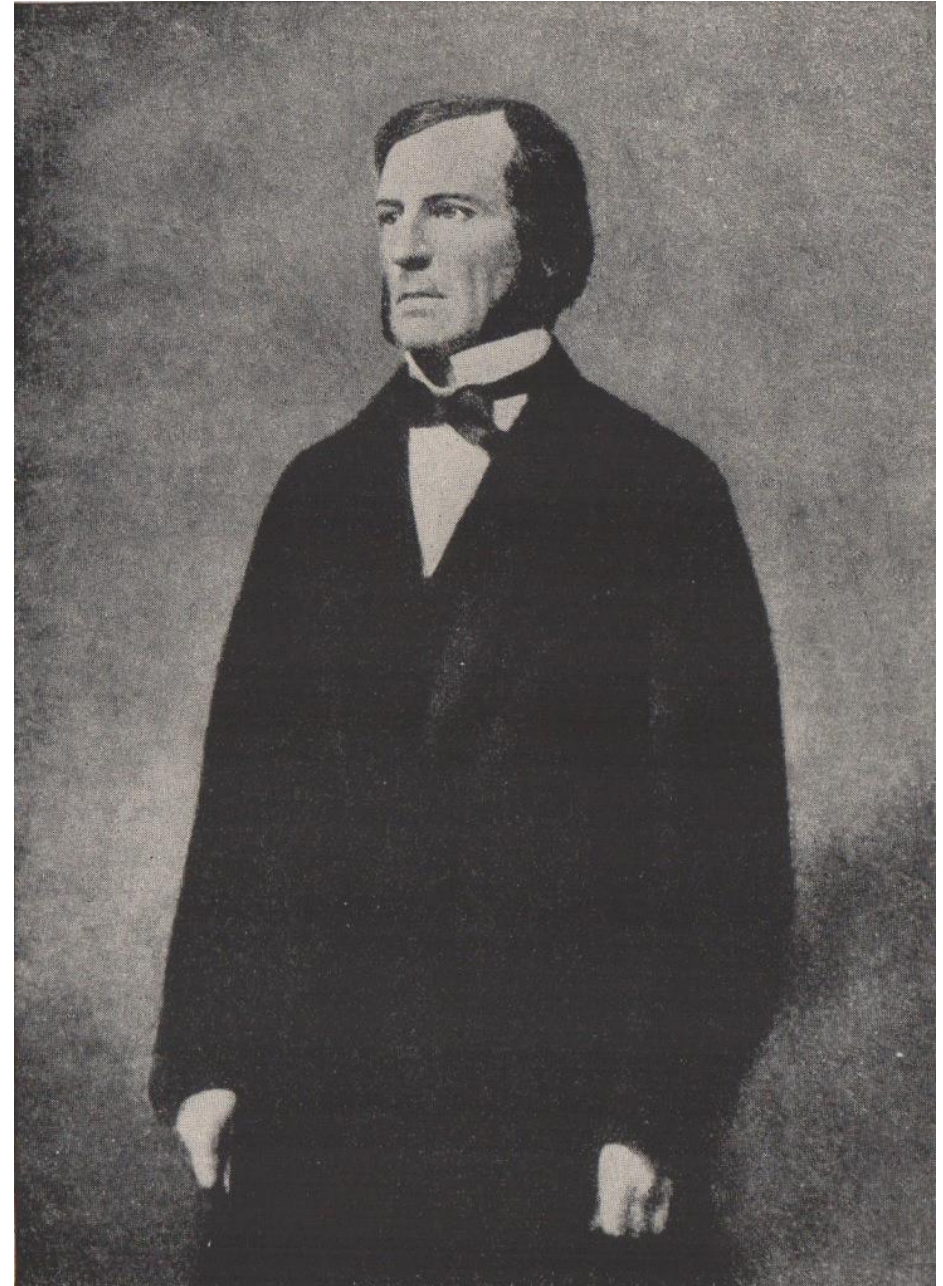
Leibnitz

- Hannover – od 1676, zvyšok života
 - Služba vojvodom z Hannoveru
 - Knižnica, veterné mlyny pre odčerpávanie vody z baní, **rodostrom vojvodu**
 - Popri tom sa venoval svojmu snu:
 - Vytváral jazyka spôsob počítania v ňom. Mal obsiahnuť ľudské poznanie.

George Boole

* 1815 Lincoln

† 1864



Boole

- Ťažký život

- Pomáhal živiť rodinu, bol v podstate samouk, hoci otec ho podporoval a pomáhal mu. Naučil sa viacero jazykov
- V 16. sa začal živiť učením, čo bolo ťažké. Matematiku robil len v nedeľu keď mal voľno. Učil v dedinských školách a aj v Lincolne, ale všade len krátko, z rôznych dôvodov
- Aby zabezpečil rodinu, založil si vlastnú školu (neskôr boli tri), ktorú viedol 15 rokov v Lincolne, pracoval tam aj s bratom a sestrou.
- Počas toho tvoril matematiku a zapájal sa do spoločenského života – založil nadáciu na podporu „zblúdených“ dievčat, ktorá ich vracala do života.
- Publikoval matematické články v Cambridge Mathematical Journal, nadviazal kontakty a priateľstvá s Hamiltonom a de Morganom
- V 32 rokoch publikoval monografiu kde predstavil logiku ako matematiku, neskôr vyšla ako **Laws of Thought**
- Stal sa profesorom matematiky na Queen's College of Cork
- Umrel v 49, šiel 5km pešo v daždi, dostal zápal pľúc.

Boole

- Vznik Booleovej algebry

- $0x = 0, 1x = x$

0 je prázdna množina, 1 je univerzum

- $x + (1-x) = 1$

- $xx = x^2$

- $x - x^2 = x(1-x) = 0$

nič nemôže súčasne patriť aj nepatriť do množiny

- Booleovi sa podarilo čiastočne splniť Leibnitzov sen. Pokryl Aristotelovu logiku.

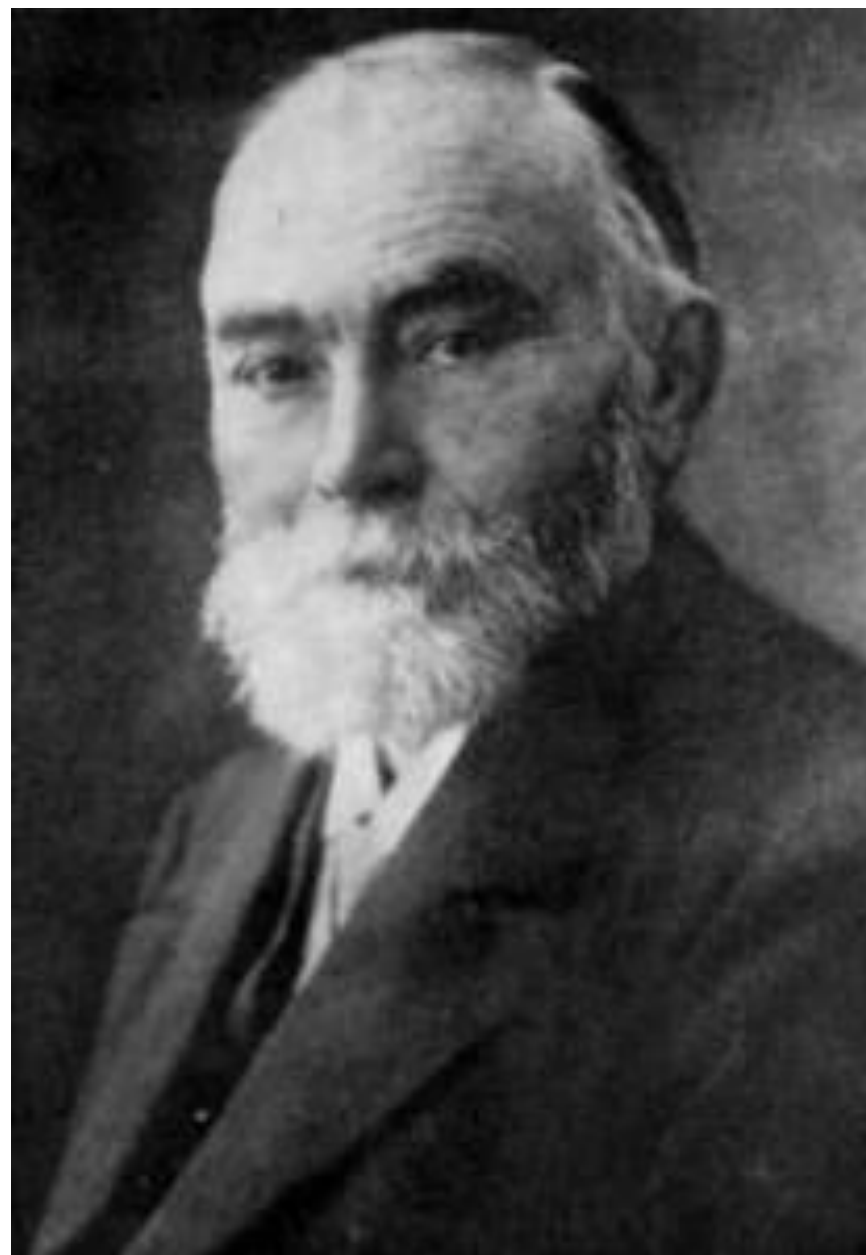
- To čo ale stále nevedel boli tvrdenia typu:

Všetci neúspešní študenti sú leniví alebo hlúpi

Gottlog Frege

* 1848 Wismar

† 1925



Frege

- Frege veril, že urobil dôležitý objav, ale takmer všetci ho ignorovali
- List od Bertranda Russela, v ktorom mu vyslovuje obdiv, ale ďalej pokračuje, že našiel jednu „nezrovnalosť“. Frege chápe v čom je problém - celé jeho dielo sa zosype ako domček s kariat. Mal 53 rokov.
- Práve bol v tlači druhý diel jeho monografie...
- Jeho neoceniteľný príspevok bol v tom, že vytvoril prvý logický systém, ktorý obsahoval celé deduktívne uvažovanie v matematike.
- Umrel ako zatrpknutý muž, ktorého život nemal zmysel

Frege

- Vytvoril to, čo dnes nazývame predikátový počet
- \forall, \exists
 - $F(x)$ x je neúspešný študent
 - $H(x)$ x je hlúpy
 - $L(x)$ x je lenivý
 - $(\forall x)(F(x) \supset H(x) \vee L(x))$
- Objavil formálnu syntax

Frege

- Čo bolo v liste od Russela?
 - Frege chcel vybudovať čisto logickú teóriu prirodzených čísiel a tak ukázať, že všetka matematika sa dá považovať za logiku.
 - Fregeho dvojzväzková monografia budovala aritmetiku prirodzených čísiel využitím jeho prístupu. Russell mu napísal, že jeho prístup vedie k protirečeniam. Fregeho aritmetika využíva množiny množín, čo vedie ľahko k protirečeniam.

Frege

- Russelov „paradox“
 - Množina je **výnimočná** ak obsahuje samu seba, v opačnom prípade je **obyčajná**
 - Výnimočná je napr. množina všetkých objektov, ktoré nie sú vrabec. Nech je akákoľvek nie je to vrabec, teda obsahuje samu seba.
 - Russel navrhol množinu E všetkých obyčajných množín. E je obyčajná alebo výnimočná? Musí byť jedna z toho. Ale nie je ani jedna.
 - Ak je obyčajná, musela by patriť do E, lebo E obsahuje všetky obyčajné.
 - Ak je výnimočná, nemôže patriť sama sebe, lebo E je množina obyčajných množín.

Georg Cantor

* 1845 Petrohrad

† 1918 Halle



Cantor

- Aristoteles – Potenciálne nekonečno, prirodzené čísla, ale neakceptoval množinu prirodzených čísiel – aktuálne nekonečno.
- Nekonečno zamestnávalo matematikov, filozofov, teológov,... Až do polovice 19. storočia, vtedy situácia v matematike už začala vyžadovať riešenie.
- Cantor bol jediný , kto si nevšímal hlasy velikánov matematiky a pustil sa do vytvorenia matematickej teórie nekonečna.
- Do 11. rokov vyrastal v Petrohrade, kde jeho otec pôsobil ako úspešný obchodník, tuberkulóza ho prinútila na návrat do Nemecka

Cantor

- Študoval v Berlíne (Weierstrass, Kummer, Kronecker)
- Pôsobil na univerzite v Halle
- **Nekonečné množiny majú rôzne veľkosti**
 - Ako porovnať dve nekonečné množiny, či majú rovnaký počet prvkov?
 - Párovanie
 - Prirodzené čísla, párne čísla, nepárne čísla
 - Celok je väčší ako jeho časť (už od Euklida). Alebo nie?

Cantor

- Študoval rôzne množiny a porovnával, či majú rovnako veľa prvkov.
 - Prirodzené čísla
 - Množiny, ktoré sa zdali mať viac prvkov ako množina prirodzených čísiel:
 - kladné zlomky (racionálne čísla) ?
 - algebraické čísla (riešenia algebraických rovníc) ?
 - Reálne čísla (čísla zapísateľné desatinným rozvojom, či periodickým, alebo neperiodickým) ?

Cantor

- Dokázal, že **prirodzené čísla sa nedajú spárovať s reálnymi**. Teda sú to dve **rôzne veľké nekonečné množiny**.
 - Cantorova diagonalizácia
 - Stále otvorený problém, či \mathbb{N} a \mathbb{R} sú dve „najmenšie“ nekonečné množiny – hypotéza continua (vie sa, že ak sa to dá dokázať, musia sa použiť metódy mimo obyčajnú matematiku)
 - Problémy s množinou kardinálnych čísiel (veľkosti nekonečných množín)
 - Problémy s množinou tých množín, ktoré neobsahujú sami seba - Russell
- V súkromí sa mu darilo, mal veľkú rodinu: 6 detí
- Matematici jeho prácu nechceli v tom čase veľmi akceptovať..., začali sa u neho prejavovať nervové zrútenia, asi bipolárna porucha, paranoia, a aby toho nebolo málo, okrem objavenia sa paradoxov v teórii množín prišiel o 13. ročného syna.

Cantor

- Čo to má s informatikou?

- Aj programy sa dajú očíslovať prirodzenými číslami, dá sa urobiť párovanie medzi prirodzenými číslami a programami vo vašom obľúbenom prog. jazyku.

```
pp <- 1
```

Generujeme všetky reťazce r dĺžky 1, 2, 3,...

Ak je r syntakticky správny program,
priradíme mu číslo pp

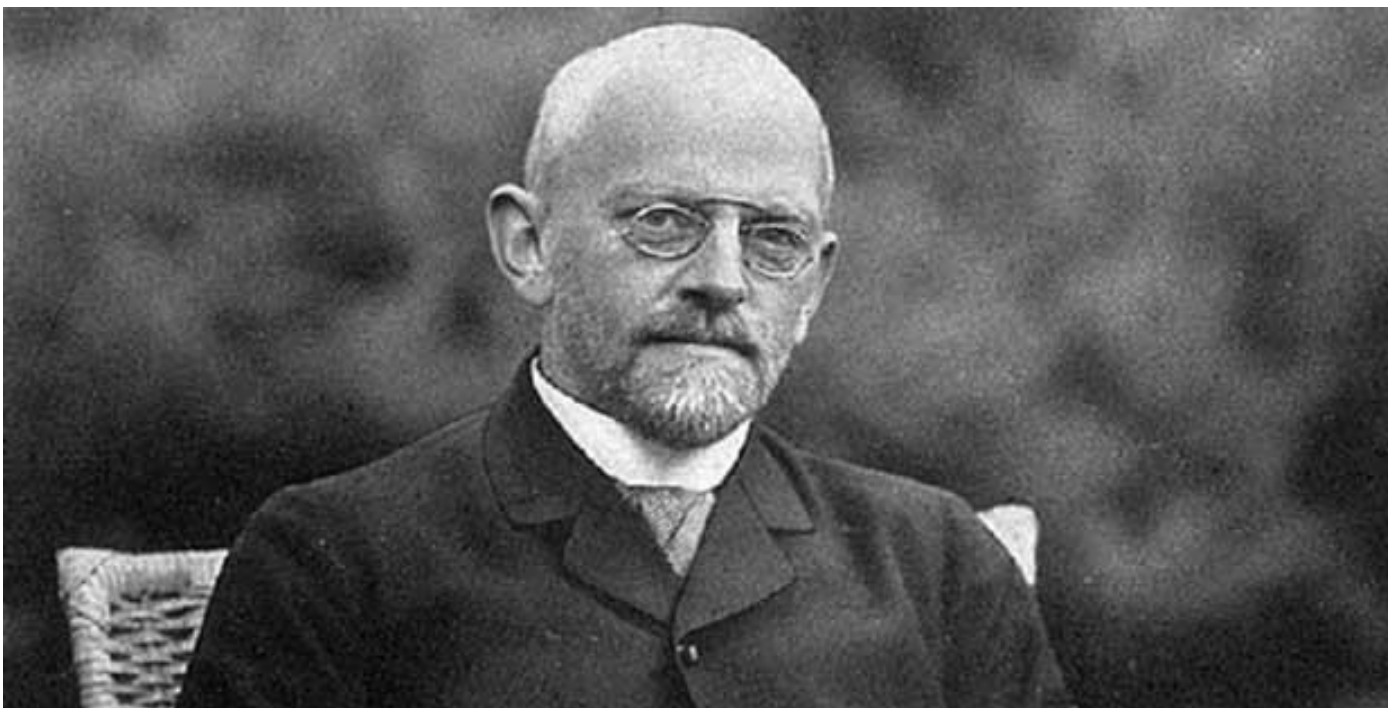
```
pp <- pp+1
```

- Problémov je aspoň toľko, koľko je reálnych čísiel. Vypíš reálne číslo r na n desatinných miest je jeden problém.
- **Existujú problémy, ktoré nevieme naprogramovať!** Ale vtedy ešte neboli programy, takže to ich vtedy netrápilo.

David Hilbert

* 1862 Královec

† 1943



Hilbert

- Prešlo 200 rokov od Newtona a Leibnitza a ich objavu kalkulu
- Dosiahli sa mnohé pozoruhodné výsledky, ale aplikácie predbehli teóriu.
- V polovici 19. storočia začalo byť jasné, že bez hlbšieho porozumenia teoretickým základom to ďalej nepôjde
- Hilbert v r. 1888 obišiel hlavné centrá matematického výskumu aby nadviazal kontakty
- 1895 prešiel do Goettingenu, kde ostal až do smrti. V tom čase to bolo asi centrum matematického sveta

Hilbert

- 1900 medzinárodná konferencia v Paríži

38 ročný Hilbert, už vtedy uznávaný na základe jeho výsledkov v pozvanej prednáške predkladá výzvu pr 20. storočie zoznam 23. problémov.

Bol presvedčený, že každý problém v matematike, ktorý sa dá sformulovať sa musí dať aj vyriešiť.

1. Problém bola hypotéza kontinua
2. Bezospornosť axióm Euklidovej geometrie, bezospornosť axióm pre aritmetiku reálnych čísiel

...

Hilbert

- 10. problém, nájsť konečný postup, ktorým určíme, či diofantická rovnica ma celočíselné riešenie (áno/nie)

...

Zásadný bol 2. problém.

d'alší tzv. **Entscheidungsproblem**: nájsť metódu, ktorá pre zadanú formulu v predikátovom počte, konečným počtom dobre definovaných krokov určí, či platí.

1928 predstavil problém: predikátový počet aplikovaný na systém axiém pre prirodzené čísla - dnes sa nazýva Peanova aritmetika. Dokázať jeho úplnosť, teda, že o každom tvrdení, ktoré v ňom vieme vytvoriť, vieme v rámci neho dokázať, či platí alebo nie.

Kurt Gödel

* 1906 Brno

† 1978



Gödel

- Strednú školu vychodil v Brne
- Prestáhoval sa do Viedne, kde študoval na univerzite
- V dizertačnej práci vyriešil problém, ktorý bol učebnici od Hilberta a Ackermanna
- Cestoval viackrát medzi Viedňou a Princetonom
- Od 1939 ostal Princetone
- Ko koncu života trpel paranojou, že ho chý otráviť a prakticky sa vyhľadoval na smrť.
- Najdôležitejší výsledok: Využil kódovanie výrazov a Cantorovu diagonalizačnú metódu a ukázal, že sa nedá vždy dokázať, či tvrdenie v rámci peanovej aritmetiky je alebo nie je pravdivé. Skonstruoval také, ktoré sa nedá. (dokonca ukázal všeobecnejšie tvrdenie)

Gödel

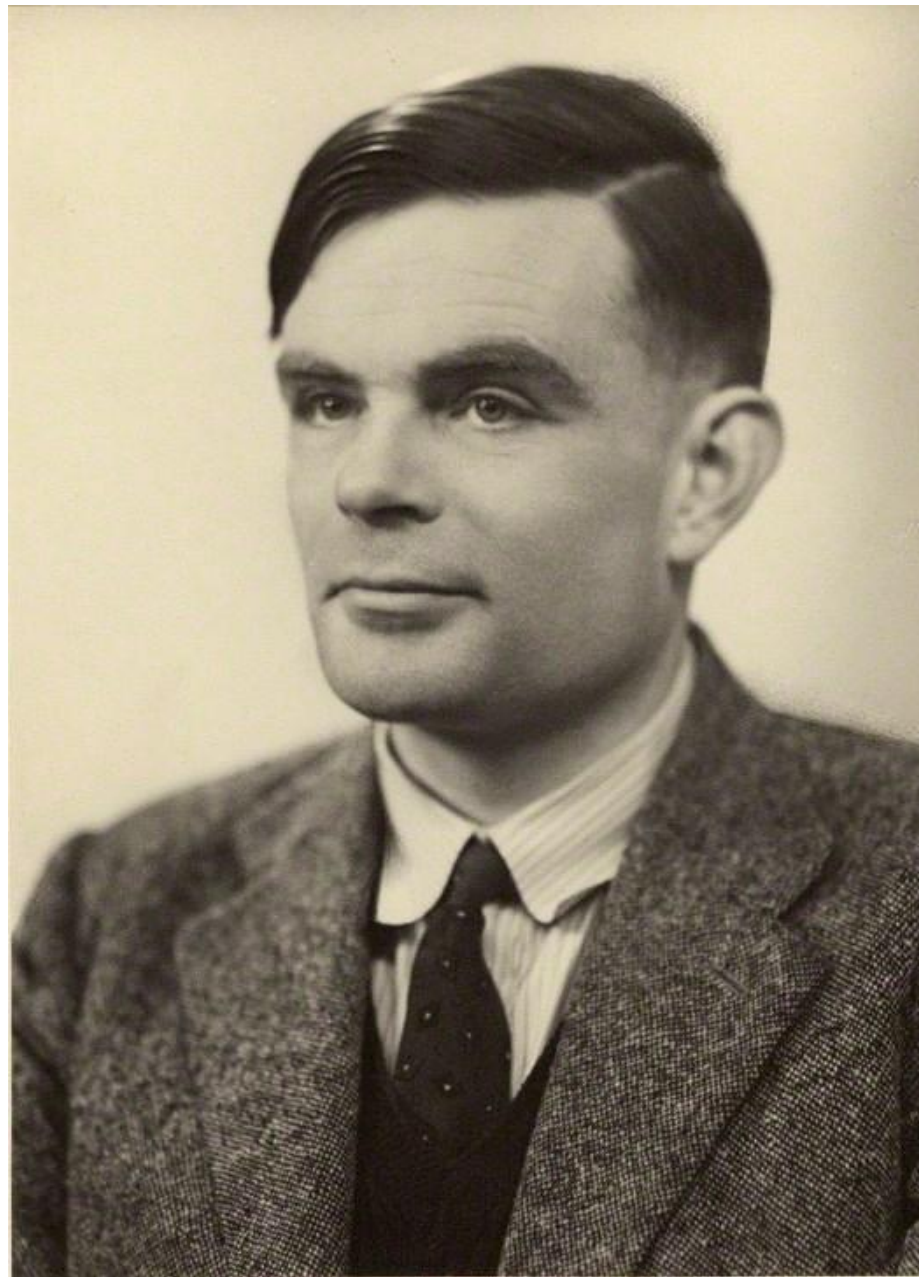
- Najdôležitejší výsledok: Využil kódovanie výrazov a Cantorovu diagonalizačnú metódu a ukázal, že sa nedá vždy dokázať, či tvrdenie v rámci peanovej aritmetiky je alebo nie je pravdivé. Skonstruoval také, ktoré sa nedá. (dokonca ukázal všeobecnejšie tvrdenie)

Koniec Hilbertovho sna

Alan Turing

* 1912 Londýn

† 1954



Turing

- Otec pôsobil ako úspešný úradník v Indii
- Alan s bratom boli v útľom detstve nechani v opatere cudzej rodiny a neskôr nastúpili do internátnej školy
- Nebol dobrý študent, kým nespoznal Christophera, s ktorým zdieľal potešenie s matematiky a vedy, Christopher bol výborný študent a bol pre neho vzorom, ktorým ostal aj po jeho predčasnej smrti (tuberkulóza) v r. 1930.
- Alan skončil školu s vynikajúcimi výsledkami a získal štipendium na Kings College v Cambridge

Turing

- PhD robil u Churcha v Princetone
- John von Neumann mu ponúkol miesto asistenta
- Vrátil sa v r. 1938 do UK a prihlásil sa do šifrovacej služby, Bletchley Park
- Po vojne nastúpil do NPL návrh ACE, ale jeho návrh sa nepresadil, neskôr tu vytvorili menšiu verziu tzv. pilot ACE
- Odišiel na Univerzitu do Manchestru, kde sa chystal projekt konštrukcie počítača.
- Od návrhu počítačov prešiel k aplikovaniu matematiky v biológii, úvahám o umelej inteligencii.
- Zomrel predčasne 42 ročný, samovražda

Turing

- 1935 v rámci prednášky Maxa Newmana sa dozvedel o Gödelových dôkazoch neúplnosti a aj o Entscheidungsproblem-e
- Začal rozmýšľať ako dokázať, že taký postup (algoritmus) neexistuje
- Čo je to algoritmus?
- Čo robí človek keď počíta?
- Robí si značky (píše) na papier, číta čo si zapísal a na základe toho niečo zapíše, alebo prepíše... Usiloval sa to sformalizovať ... Dnes poznáme ako Turingov stroj.
- Pomenoval ho Alonzo Church z Princetону, ktorý vymyslel lambda kalkul – tie lambdy, ktoré sú dnes v každom prog. Jazyku 😊

Turing

- Gödel zaviedol triedu funkcií na celých číslach, ktorú nazval rekurzívne funkcie, a upravenú všeobecné rekurzívne funkcie
- Church zaviedol lambda funkcie
- Obe definovali tú istú triedu funkcií
- Turingov stroj vedel vypočítať presne to isté.
- Church – Turingova téza

Turing

- Univerzálny Turingov stroj
 - Netreba navrhovať pre každý problém, ktorý chceme automatizovať vždy nový stroj, môžeme navrhnúť **jeden špeciálny stroj**, ktorého vstup bude opis turingovho stroja, ktorý chceme simulovať a vstup preň
 - Tento jeden špeciálny turingov stroj sa nazýva **univerzálny**