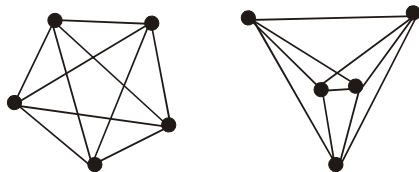


Zadanie na cvičenie na 16. apríla 2009

Úkolom je nájsť rozmiestnenie vrcholov kompletneho grafu v rovine tak, aby, keď sú spojené úsečkami, sa čo najmenší počet úsečiek krížil. Príkladom sú nasledujúce vykreslenia kompletneho grafu u 5 vrcholoch, prvý s 5 prekríženiami, druhý iba s jedným prekrížením.



Samozrejme, keď hrany vychádzajú z jedného vrcholu, tak ich nepovažujeme za krížujúce sa. Predpokladajme, že máme dve hrany určené dvojicami vrcholov so súradnicami x a y , napr. $\{(x_1, y_1), (x_2, y_2)\}, \{(x_3, y_3), (x_4, y_4)\}$ kde platí $x_1 \leq x_2$ a $x_3 \leq x_4$.

Jednoducho sa potom dá spočítať smernice úsečiek a_1 a a_2 a x -ovú súradnicu priesečníku priamok určených hranami

$$\text{nájdeme ako } x_i = \frac{a_1 x_1 - y_1 - a_2 x_3 + y_3}{a_1 - a_2}$$

potom môžeme zistiť, či $x_1 \leq x_i \leq x_2$ a $x_3 \leq x_i \leq x_4$, teda, či sa úsečky (hrany) pretínajú.

Musíme samozrejme ošetriť prípad, kedy sa a_1 či a_2 rovná nekonečnu, alebo $a_1 = a_2$. V prípade, že 3 vrcholy ležia na jednej priamke, budeme štruktúru považovať za jedno prekríženie. Pre kompletne grafy sú známe nasledujúce minimálne počty prekrížení

n	2	3	4	5	6	7	8	9
počet prekrížení	0	0	0	1	3	9	19	36

Pre väčšie kompletne grafy ako 17 nie je minimálny počet prekrížení väčšinou dokázaný, (pozri <http://mathworld.wolfram.com/RectilinearCrossingNumber.html>) aj keď sa predpokladá, že sa rovná číslu $(1/4) \lfloor n/2 \rfloor \lfloor (n-1)/2 \rfloor \lfloor (n-2)/2 \rfloor \lfloor (n-3)/2 \rfloor$ kde $\lfloor m \rfloor$ je dolná celá časť z m .

1. Použite hillclimbing s mutáciou súradníc o veľkosti 0,1 umiestnenia vrcholov na nájdenie rozmiestnenia vrcholov kompletneho grafu pre $n=4$ až $n=10$ s čo najmenším počtom prekrížení. Počiatočné umiestnenia vrcholov by mali byť v štvorci o jednotkovej hrane, ale mutácie môžu vysunúť vrcholy mimo tohto štvorca. Vypočítajte priemer a smerodajnú odchýlku na počet pokusov k dosiahnutiu cieľa pre každý z grafov.

2. Použite hillclimbing s gaussovskou mutáciou so sigmou 0,1 umiestnenia vrcholov na nájdenie rozmiestnenia vrcholov kompletneho grafu pre $n=4$ až $n=10$ s čo najmenším počtom prekrížení. Počiatočné umiestnenia vrcholov by mali byť v štvorci o jednotkovej hrane, ale mutácie môžu vysunúť vrcholy mimo tohto štvorca. Vypočítajte priemer a smerodajnú odchýlku na počet pokusov k dosiahnutiu cieľa pre každý z grafov.

3. Použite genetický algoritmus s výberom s turnajom a jednobodovým krížením s gaussovskou mutáciou so sigmou 0,1 umiestnenia vrcholov na nájdenie rozmiestnenia vrcholov kompletneho grafu pre $n=4$ až $n=10$ s čo najmenším počtom prekrížení. Počiatočné umiestnenia vrcholov by mali byť v štvorci o jednotkovej hrane, ale mutácie môžu vysunúť vrcholy mimo tohto štvorca. Vypočítajte priemer a smerodajnú odchýlku na počet pokusov k dosiahnutiu cieľa pre každý z grafov.

4. Odvodte (dokážte) maximálny možný počet prekrížení pre "rectilineárne" vykreslenie kompletneho grafu v závislosti na počtu n jeho vrcholov.