

Prezentácia: Problém č. 5

**cvičenie z EA,
20.4.2006**

Autor: Tomáš Tatranský

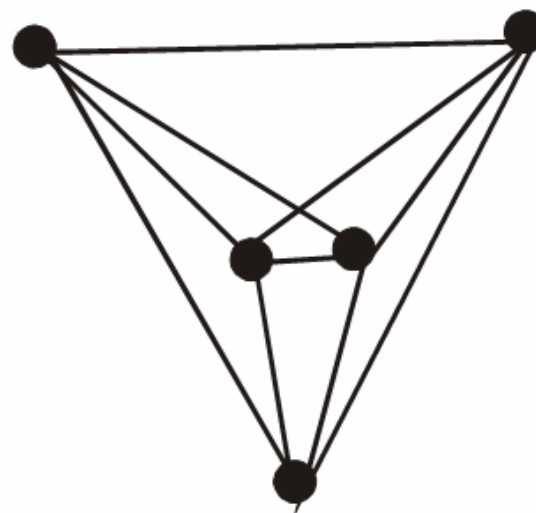
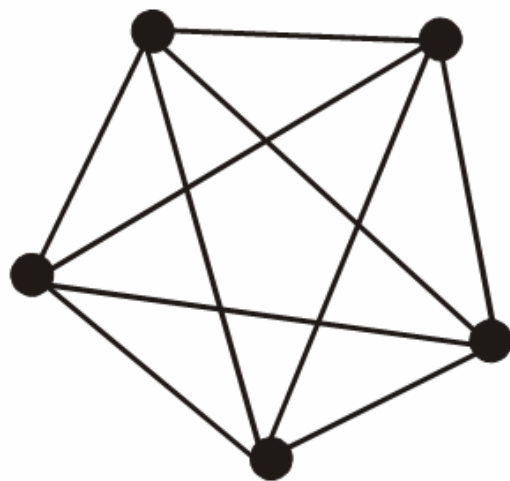


Zadanie

Úlohou je nájsť rozmiestnenie vrcholov kompletného grafu v rovine tak, aby keď sú spojené úsečkami, sa čo najmenší počet úsečiek krížil. Príkladom sú nasledujúce vykreslenia kompletného grafu s piatimi vrcholmi. Prvý s 5 prekríženiami, druhý iba s jedným prekrížením.

Zadanie (2)

- Obrázok:



Zadanie (3)

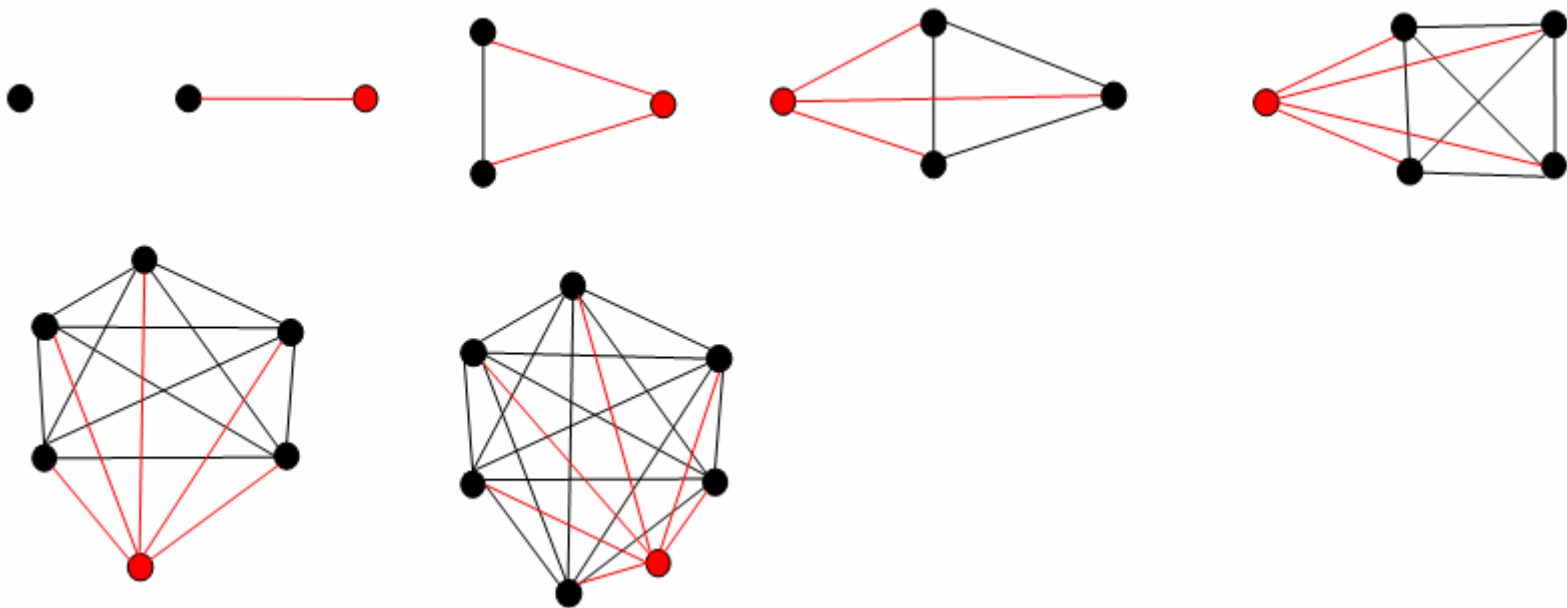
5. Odvodte (dokážte) maximálny možný počet prekrížení pre „rectilineárne“ vykreslenie kompletného grafu v závislosti na počte n jeho vrcholov.

Riešenie

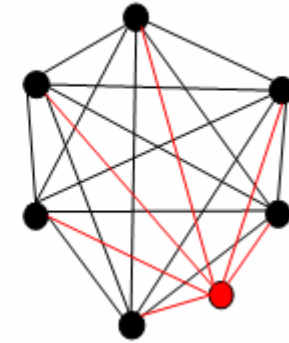
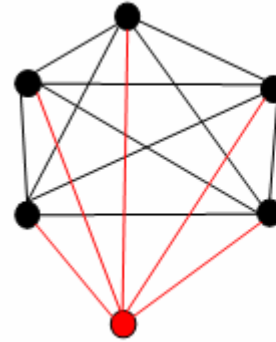
- Riešime pomocou postupnej konštrukcie grafu. Začíname jedným vrcholom a pridávame ďalšie tak, aby bol počet prekrížení maximálny možný.
- Najväčší počet prekrížení dostávame, ak nový vrchol umiestnime **nad hranu mimo oblasť pôvodného grafu tak, že iba dve nové prepojenia (s najbližšími dvoma vrcholmi) nebudú obsahovať prekríženie**. Ostatné prepojenia budú mať potom maximálny možný počet prekrížení.

Riešenie (2)

Na obrázku vidíme postupnú tvorbu grafu pre 1, 2, 3, 4, 5, 6 a 7 vrcholov:

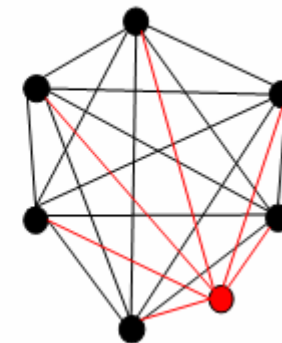
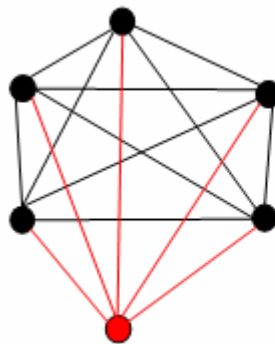


Riešenie (3)



- Červenou farbou sú vyznačené nové prepojenia ako aj nový vrchol. Je možné vidieť, že počet nových prekrížení závisí od vzdialenosti pridávaného vrcholu a vrcholu s ktorým vytvárame prepojenie.
- Nové prepojenie prekríži **všetky prepojenia medzi vrcholmi na jednej strane s vrcholmi na druhej strane vytváraného prepojenia.**

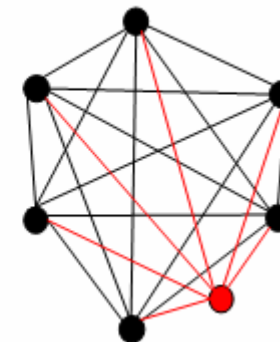
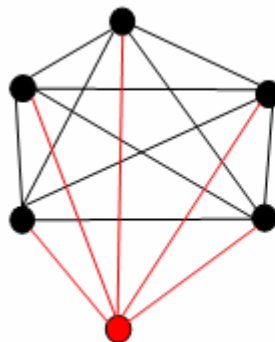
Riešenie (4)



Teda platí:

- Pre najbližší vrchol nepribudne žiadne prekríženie $0^*(s - 0) = 0$, kde **s je stupeň vrcholov pred pridaním nového vrcholu**
- Pre ďalší vrchol vznikne $1^*(s - 1)$ nových prekrížení
- Pre ďalší vrchol vznikne $2^*(s - 2)$ nových prekrížení
- atď...
- Až skončíme pri vrchole z opačnej strany s počtom prekrížení $s^*(s - s) = 0$

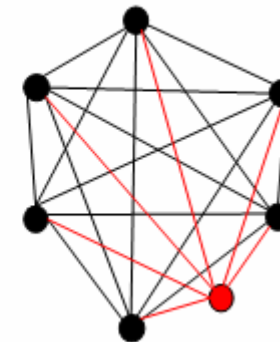
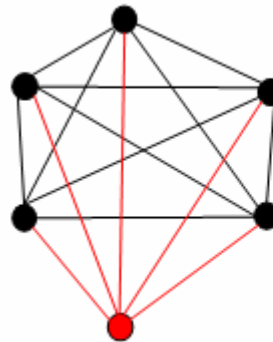
Riešenie (5)



- Násobok pred zátvorkou predstavuje *počet vrcholov na jednej strane vytváraného prepojenia*.
- Zátvorka reprezentuje počet prepojení ľubovoľného vrcholu na zvolenej strane s vrcholmi na druhej strane prepojenia. Ide teda o počet prepojení vychádzajúcich z tohto vrcholu, ktoré budú prekrížené.
- Vzťah môžeme zapísať do sumy takto:

$$x = \sum_{i=1}^s i(s - i)$$

Riešenie (6)



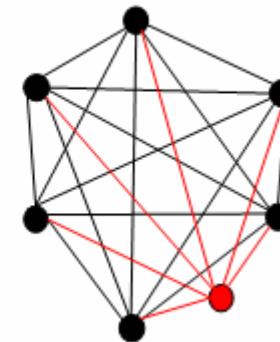
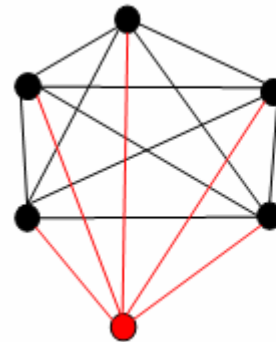
- Keďže posledný člen sumy je vždy nulový, môžeme ho odstrániť:

$$x = \sum_{i=1}^{s-1} i(s-i)$$

- Ďalej, ak hodnotu s vyjadríme pomocou **počtu vrcholov po pridaní nového vrcholu** ako $s = (n - 2)$, dostávame vzorec pre prírastok počtu prekrížení:

$$x = \sum_{i=1}^{n-3} i(n-2-i)$$

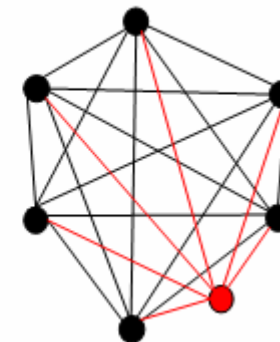
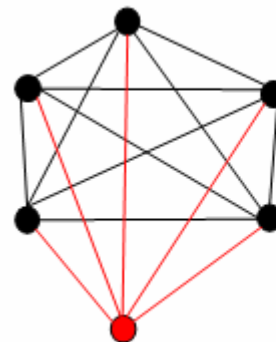
Riešenie (7)



Celkový maximálny počet prekrížení v grafe vypočítame sumáciou cez všetky pridávania vrcholov:

$$P_{MAX} = \sum_{j=2}^{n-2} \left(\sum_{i=1}^{j-1} i(j-i) \right)$$

Riešenie (8)



Tabuľka počtu maximálnych prekrížení pre počet vrcholov v grafe od 2 do 10.

Počet vrcholov	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Max. počet prekrížení	0	0	1	5	15	35	70	126	210