1. písomná skúška predmetu „Algebra a diskrétna matematika“ konaná dňa 13. 3. 2008

1. príklad. Určite, či uvedené logické odvodenie je korektné, ak nie, prečo?
Ak x^2 je iracionálne, potom x je iracionálne. Preto, ak x je iracionálne, potom x^2 je iracionálne. (3 body)

2. príklad. Dokážte metódou vymenovaním prípadov tieto vlastnosti:
$max\{a, min\{b,c\}\} = min\{max\{a,b\}, max\{a,c\}\}$, kde a,b,c sú reálne čísla. (3 body)

3. príklad. Nájdite také vzťahy medzi množinami A, B a C, aby platilo
(a) $(A \cup B) \cap C = A$, (1 bod)
(b) $(A \cap B) \cup C = A$, (1 bod)
(c) $(A - B) \cap C = A$, (1 bod)

4. príklad.
Zistite, či relácia R nad množinou všetkých ľudí je reflexívna, symetrická, antisymetrická, alebo tranzitívna, pričom $(x, y) \in R$, ak
(a) x nie je menší ako y, (1 bod)
(b) x a y majú rovnakú matku, (1 bod)
(c) x má aspoň jedného rodiča spoločného s y, (1 bod)

5. príklad. Koľko elementov obsahuje zjednotenie $A_1 \cup A_2$, ak
(a) $|A_1| = 12$, $|A_2| = 18$, $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, (1 bod)
(b) $|A_1| = 2$, $|A_2| = 10$, $|A_1 \cap A_2| = 1$, (1 bod)
(c) $|A_1| = 8$, $|A_2| = 5$, $A_1 \subseteq A_2$, (1 bod)

Prémiový príklad
Na fakulte je 345 študentov, ktorí si zapísali predmet Matematická analýza, 212 študentov, ktorí si zapísali predmet Diskrétna matematika a 188 študentov, ktorí si zapísali súčasne predmety Matematická analýza a Diskrétna matematika. Koľko študentov má zapísaný aspoň jeden z predmetov Matematická analýza alebo Diskrétna matematika. (2 body)

Riešenie

1. Príklad. Určite, či uvedené logické odvodenie je korektné, ak nie, prečo?

Ak x^2 je iracionálne, potom x je iracionálne. Preto, ak x je iracionálne, potom x^2 je iracionálne.

ir(x) = x je iracionálne číslo
$r(x)$ = x je racionálne číslo

$$\left(ir\left(x^2\right) \Rightarrow ir\left(x\right)\right) \Rightarrow \left(ir\left(x\right) \Rightarrow ir\left(x^2\right)\right)$$

výrok je nekorektný, pri inverzii implikácie musia byť negované jej zložky. Korektný výrok má tvar

$$\left(ir\left(x^2\right) \Rightarrow ir\left(x\right)\right) \Rightarrow \left(r\left(x\right) \Rightarrow r\left(x^2\right)\right)$$

2. príklad. Dokážte metódou vymenovaním prípadov tieto vlastnosti:
$max\left\{a, min\left\{b,c\right\}\right\} = min\left\{max\left\{a,b\right\}, max\left\{a,c\right\}\right\}$, kde a,b,c sú reálne čísla.

(a) $a < b < c$

$$\underbrace{max\left\{a, \underbrace{min\left\{b,c\right\}}_{b}\right\}}_{b} = \underbrace{min\left\{\underbrace{max\left\{a,b\right\}}_{b}, \underbrace{max\left\{a,c\right\}}_{c}\right\}}_{b}$$

(b) $a < c < b$

$$\underbrace{max\left\{a, \underbrace{min\left\{b,c\right\}}_{c}\right\}}_{c} = \underbrace{min\left\{\underbrace{max\left\{a,b\right\}}_{b}, \underbrace{max\left\{a,c\right\}}_{c}\right\}}_{c}$$

(c) $b < a < c$

$$\underbrace{max\left\{a, \underbrace{min\left\{b,c\right\}}_{b}\right\}}_{a} = \underbrace{min\left\{\underbrace{max\left\{a,b\right\}}_{a}, \underbrace{max\left\{a,c\right\}}_{c}\right\}}_{a}$$

(d) $b < c < a$

$$\underbrace{max\left\{a, \underbrace{min\left\{b,c\right\}}_{b}\right\}}_{a} = \underbrace{min\left\{\underbrace{max\left\{a,b\right\}}_{a}, \underbrace{max\left\{a,c\right\}}_{a}\right\}}_{a}$$

(e) $c < a < b$

$$\underbrace{max\left\{a, \underbrace{min\left\{b,c\right\}}_{c}\right\}}_{a} = \underbrace{min\left\{\underbrace{max\left\{a,b\right\}}_{b}, \underbrace{max\left\{a,c\right\}}_{a}\right\}}_{a}$$

(f) $c < b < a$

$$\underbrace{max\left\{a, \underbrace{min\{b,c\}}_{c}\right\}}_{a} = \underbrace{min\left\{\underbrace{max\{a,b\}}_{a}, \underbrace{max\{a,c\}}_{a}\right\}}_{a}$$

Vo všetkých prípadoch sme dostali rovnosť, čiže identita platí pre každé *a, b, c*.

3. príklad. Nájdite také vzťahy medzi množinami *A*, *B* a *C*, aby platilo

(a) $(A \cup B) \cap C = A$, ak platí $A \subseteq C$ a $\overline{A} \cap B \cap C = \emptyset$

(b) $(A \cap B) \cup C = A$, ak platí $A = B$ a $C \subseteq A$

(c) $(A - B) \cap C = A$, ak platí $A = C$ a $A \cap B = \emptyset$

V tomto prípade sa snažíme nájsť čo najvšeobecnejšie vzťahy medzi množinami, ako plnohodnotné riešenia budú ale uznané aj iné netriviálne riešenia.

4. príklad.

Zistite, či relácia *R* nad množinou všetkých ľudí je reflexívna, symetrická, antisymetrická, alebo tranzitívna, pričom $(x, y) \in R$ vtedy a len vtedy, ak

(a) *x* nieje menší ako *y*,

tranzitívna: $\forall x \forall y \forall z \big((x \geq y) \wedge (y \geq z) \Rightarrow (x \geq z)\big)$

reflexívna: $\forall x \big((x,x) \in R\big)$

(b) *x* a *y* majú rovnakú matku,

reflexívna: $\forall x \big((x,x) \in R\big)$

symetrická: $\forall x \forall y \big((x,y) \in R \Rightarrow (y,x) \in R\big)$

tranzitívna: $\forall x \forall y \forall z \big((x,y) \in R \wedge (y,z) \in R \Rightarrow (x,z) \in R\big)$

(c) *x* má aspoň jedného rodiča spoločného s *y*,

reflexívna: $\forall x \big((x,x) \in R\big)$

symetrická: $\forall x \forall y \big((x,y) \in R \Rightarrow (y,x) \in R\big)$

5. príklad. Koľko elementov obsahuje zjednotenie $A_1 \cup A_2$, ak

(a) $|A_1| = 12$, $|A_2| = 18$, $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, $|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| = 30$

(b) $|A_1| = 2$, $|A_2| = 10$, $|A_1 \cap A_2| = 1$, $|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2| = 11$

(c) $|A_1| = 5$, $|A_2| = 8$, $A_1 \subseteq A_2$, $|A_1 \cup A_2| = |A_2| = 8$

Prémiovy príklad

Na fakulte je 345 študentov, ktorí si zapísali predmet Matematická analýza, 212 študentov, ktorí si zapísali predmet Diskrétna matematika a 188 študentov, ktorí si zapísali súčasne predmety Matematická analýza a Diskrétna matematika. Koľko študentov má zapísaný aspoň jeden z predmetov Matematická analýza alebo Diskrétna matematika.

$|MA| = 345$, $|DM| = 212$,$|MA \cap DM| = 188$

$|MA \cup DM| = |MA| + |DM| - |MA \cap DM| = 345+212-188=369$