

3. kontrolná písomka z ADM konaná dňa 6. 5. 2008

1. príklad.

Nech $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ a $B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, vypočítajte

- (a) $A + 2B$,
 - (b) $3A - 6B$,
 - (c) AB ,
 - (d) BA ,
 - (e) $A^T B^T$
 - (f) $(AB)^T$.
- (3 body)

2. príklad.

Pomocou Gaussovej eliminačnej metódy riešte systém lineárnych rovníc

$$\begin{array}{rrcrcl} 2x_1 & -x_2 & +5x_3 & +3x_4 & = & 5 \\ x_1 & +x_2 & +4x_3 & +3x_4 & = & 7 \\ x_1 & & +3x_3 & +2x_4 & = & 4 \\ & x_2 & +x_3 & +x_4 & = & 3 \end{array}$$

(3 body)

3. príklad.

Vypočítajte determinant matice:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(3 body)

4. príklad.

Existuje obyčajný graf s 8 vrcholmi, ktorého stupne sú 5,5,5,5,2,2,1,1? Ak áno, nakreslite ho, ak neexistuje, zdôvodnite prečo.

(3 body)

5. príklad.

Doplňkový (komplementárny) graf $\bar{G}$ ku grafu G má rovnakú vrcholovú množinu ako G . Dva vrcholy sú spojené hranou v $\bar{G}$ vtedy, keď nie sú spojené v G . Keď je G obyčajný graf o 15 hranách a $\bar{G}$ má aspoň dvojnásobok hrán ako graf G , koľko najmenej vrcholov má graf G ?

(3 body)

Prémiový príklad.

- (1) Ako je definovaná lineárna nezávislosť množiny $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ stĺpcových vektorov?
 - (2) Ako je definovaná hodnota matice?
 - (3) Ako je definovaná relácia ekvivalencie pre matice?
- (2 body)

Riešenie

1. príklad.

Nech $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ a $B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, vypočítajte

(a) $A + 2B = \begin{pmatrix} 10 & -1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$,

(b) $3A - 6B = \begin{pmatrix} -18 & -15 \\ -12 & 3 \end{pmatrix}$,

(c) $AB = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$,

(d) $BA = \begin{pmatrix} 8 & -13 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$,

(e) $A^T B^T = \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ -13 & -5 \end{pmatrix}$,

(f) $(AB)^T = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$.

2. príklad.

Pomocou Gaussovej eliminačnej metódy riešte systémy lineárnych rovníc

$$2x_1 - x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 5$$

$$x_1 + x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 7$$

$$x_1 + 3x_3 + 2x_4 = 4$$

$$x_2 + x_3 + x_4 = 3$$

$$A' = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 5 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 4 & 3 & 7 \\ 1 & 0 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 4 & 3 & 7 \\ 2 & -1 & 5 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & -3 \end{array} \right) \\ \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \end{array} \right)$$

$$x_4 = l, \quad x_3 = k, \quad x_2 = 3 - k - l, \quad x_1 = 4 - 3k - 2l, \quad \text{kde } k, l \in \mathbb{R},$$

$$x = \begin{pmatrix} 4 - 3k - 2l \\ 3 - k - l \\ k \\ l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + l \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

(3 body)

3. príklad.

Vypočítajte determinant matice:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & 6 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 9 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{vmatrix} = -10$$

(3 body)

4. príklad.

Existuje obyčajný graf s 8 vrcholmi, ktorého stupne sú 5,5,5,5,2,2,1,1? Ak áno, nakreslite ho, ak neexistuje, zdôvodnite prečo.

Riešenie:

Podľa vety 10.3. upravujeme postupnosť nasledovne:

4,4,4,1,1,1,1

3,3,0,0,1,1

3,3,1,1,0,0

2,0,0,0,0

0,-1,-1,0,0

Postupnosť nie je grafová, neexistuje obyčajný graf s danými stupňami vrcholov.

(3 body)

5. príklad.

Doplňkový (complementary) graf $\bar{G}$ ku grafu G má rovnakú vrcholovú množinu ako G . Dva vrcholy sú spojené hranou v $\bar{G}$ vtedy, keď nie sú spojené v G . Keď je G obyčajný graf o 15 hranách a $\bar{G}$ má aspoň dvojnásobok hrán ako graf G , koľko najmenej vrcholov má graf G ?

Riešenie:

Graf zjednotený s komplementom dáva kompletný graf

$$2|E| = |V| \deg(v)$$

$$2 \times |15 + 2 \times 15| \leq |V| \times (|V| - 1)$$

$$|V| = 10$$

(3 body)

Prémiový príklad.

(1) Ako je definovaná lineárna nezávislosť množiny $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ stĺpcových vektorov?

Hovoríme, že množina $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ vektorov je lineárne nezávislá vtedy a len vtedy, ak lineárna kombinácia

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_n a_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}$$

len pre nulové koeficienty $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$.

(2) Ako je definovaná hodnota matice?

(2a) Riadková hodnosť matice $\mathbf{A}$ je definovaná ako maximálny počet lineárne nezávislých riadkov v matici $\mathbf{A}$, hodnosť označíme $h_r(\mathbf{A})$.

(2b) Stĺpcová hodnosť matice $\mathbf{A}$ je definovaná ako maximálny počet lineárne nezávislých stĺpcov v matici $\mathbf{A}$, hodnosť označíme $h_s(\mathbf{A})$.

(2c) Existuje veta, podľa ktorej riadková a stĺpcová hodnosť sú rovné, $h_r(\mathbf{A}) = h_s(\mathbf{A})$.

(2d) Hodnosť matice $\mathbf{A}$ je definovaná $h(\mathbf{A}) = h_s(\mathbf{A}) = h_r(\mathbf{A})$

(3) Ako je definovaná relácia ekvivalentnosti pre matice?

Matice $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$ sú ekvivalentné, $\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$, vtedy a len vtedy, ak majú rovnakú hodnosť, $h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{B})$.

(2 body)